UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

RENATO RODRIGUES DOS SANTOS

Análise de erros em questões de Geometria do ENEM: um estudo com alunos do Ensino Médio

Maringá
2014

RENATO RODRIGUES DOS SANTOS

Análise de erros em questões de Geometria do ENEM: um estudo com alunos do Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção título de Mestre. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lilian Akemi Kato

Maringá

2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central – UEM, Maringá – PR., Brasil)

Santos, Renato Rodrigues dos
S237a Análise de erros em questões de Geometria do ENEM: um estudo com alunos do Ensino Médio / Renato Rodrigues dos Santos. -- Maringá, 2014.
58 f. : il.

Orientadora: Prof. a Dr. a Lilian Akemi Kato.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2014.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Erros (Matemática) – Análise. 3. ENEM. I. Kato, Lilian Akemi, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed.510.7

RENATO RODRIGUES DOS SANTOS

ANÁLISE DE ERROS EM QUESTÕES DE GEOMETRIA DO ENEM: UM ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Lilian Akemi Kato
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Profa. Dra. Irene Magalhães Craveiro
Universidade Federal da Grande Dourados – Dourados - MS

Prof. Dr. Laerte Bemm
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 7 de fevereiro de 2014.
Local de defesa: Auditório Adelbar Sampaio do Centro de Ciências Exatas, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Prof.ª. Dr.ª Lilian Akemi Kato, meus sinceros agradecimentos pelo acompanhamento, orientação, disponibilidade, interesse e receptividade com que me recebeu.

Ao Prof. Dr. Juan Palomino Soriano, coordenador do PROFMAT, que atuou comprometido com o projeto.

Aos professores do PROFMAT, pela iniciativa, dedicação e pelo brilhantismo que demonstraram no decorrer do curso.

Aos idealizadores do PROFMAT, que tornaram esse sonho possível.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À minha família pelo apoio incondicional em todos os momentos deste curso.

Aos meus colegas de turma pelo companheirismo e apoio recebido no decorrer do curso.

Finalmente, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para a realização e conclusão deste Mestrado Profissional.

"A dimensão eminentemente ética do conhecimento faz com que o erro não se oponha à busca da verdade, mas seja visto como uma decorrência transitória dessa busca."

Lauro Frederico Barbosa da Silveira

Análise de erros em questões de Geometria do ENEM: um estudo com alunos do Ensino Médio.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo analisar e classificar os erros cometidos por estudantes do 3º ano do Ensino Médio, na resolução de questões de Geometria do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de cinco Escolas estaduais do município de Maringá. A pesquisa teve caráter qualitativo e desenvolveu-se em uma única etapa com a aplicação de um teste composto por quatro questões extraídas de exames anteriores do ENEM. A revisão de literatura elencou elementos sobre: a Geometria e seu ensino, Diretrizes Curriculares de Matemática e Caderno de Expectativas de Aprendizagem do Estado do Paraná, teoria dos erros e sobre o ENEM. Os resultados evidenciados nesta pesquisa indicam que os principais erros cometidos pelos estudantes na resolução das questões de Geometria estão entre as dificuldades com a interpretação das questões, a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática e a aplicação e resolução de fórmulas. Isso corrobora com o que se tem discutido na Educação Matemática acerca da importância da análise de erros no ensino da Matemática.

Palavras-chave: Análise de erros. Ensino de Geometria. ENEM.

Analysis of errors in questions of geometry of ENEM: a study with high school students.

ABSTRACT

This research aims to analyze and classify the mistakes made by students from 3rd year high school, in solving questions of geometry of National High School Exam (ENEM), from five state Schools in Maringá. The research was sort of qualitative and developed in a single step by the application of a test with four questions extracted from previous exams of ENEM. The literature review lists the elements of: Geometry and its teaching, Curriculum Guidelines for Mathematics and Notebook Expectations Learning of State of Paraná, theory of errors and the ENEM. The results shown in this study indicate that the main mistakes made by students in solving questions of a Geometry are among the difficulties with questions interpretation, the passage of natural language to mathematical language and in application and formulas resolution. This corroborates with has been discussed in Mathematics Education about the importance of error analysis in mathematics teaching.

Keywords: Analysis of errors. Teaching Geometry. ENEM.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A atual sociedade globalizada e informatizada demanda mudanças significativas na educação. Torna-se necessário formar cidadãos críticos e capazes de interpretar e analisar informações, de resolver problemas e tomar decisões, de criar e aperfeiçoar conhecimentos. Nesse contexto a Matemática, em especial a Geometria, torna-se uma ferramenta indispensável, pois "pode ser concebida como uma fonte de modelos para os fenômenos nas mais diversas áreas do saber. Tais modelos são construções abstratas que se constituem em instrumentos para ajudar na compreensão desses fenômenos." (Brasil, 2013). Para tanto, é necessário que o indivíduo desenvolva certas competências e habilidades, que o capacitam a agir de forma eficiente e eficaz em situações diversas, as quais são os princípios norteadores do ENEM.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 e tinha como objetivo avaliar o desempenho do estudante ao término do Ensino Médio. Em 2009 passou por mudanças em razão da necessidade de reformular o currículo e proporcionar uma melhoria na qualidade do Ensino Médio no país, além de servir de mecanismo de ingresso para o Ensino Superior.

Em uma palestra ministrada pelo Prof. Joamir Souza, no Município de Maringá em 2011, destacou-se grande incidência de questões de Geometria nas provas de Matemática do ENEM. Rodrigues (2013) fez uma análise das questões do ENEM de 2009 a 2012, a qual traduziu em números a afirmação de Joamir, verificando que, das 180 questões aplicadas neste período, 40 foram de Geometria. Considerando o exposto, e os baixos índices apresentados pelos alunos nas avaliações externas (SAEB e Prova Brasil) que compõem o IDEB, despertou-se o interesse em investigar as dificuldades dos estudantes com questões de Geometria do ENEM e, neste sentido, um estudo acerca dos tipos de erros cometidos mostrou-se relevante no intuito de subsidiar a melhoria da qualidade de ensino da educação básica.

Pretende-se com esta pesquisa, identificar, analisar e classificar os erros cometidos pelos estudantes do 3º ano do Ensino Médio de Escolas públicas do município de Maringá, em questões de Geometria do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Espera-se subsidiar professores de Matemática na produção de seu Plano de Trabalho Docente, a partir dos resultados e discussões apresentadas, bem como promover o debate acerca da qualidade do ensino de Matemática na educação básica.

Esta pesquisa possui caráter qualitativo, e optou-se pela análise e classificação dos erros como metodologia de pesquisa. Para tanto, organizou-se este estudo em cinco seções.

Na seção 2, “Referencial teórico”, apresenta-se uma revisão de literatura composta de um breve histórico sobre a Geometria e suas origens, o ensino da Geometria no Ensino Fundamental e Médio, bem como os conteúdos que devem ser desenvolvidos; Também apresenta-se a fundamentação teórica utilizada na análise e classificação dos erros.

Na seção 3, “O ENEM”, apresenta-se um breve histórico do ENEM e sua importância para o estudante e descrevem-se as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas para a área de Matemática e suas Tecnologias.

A seção 4 dedica-se aos procedimentos metodológicos aplicados na pesquisa, descrevem-se os critérios utilizados para a escolha das escolas e das questões, a análise e classificação dos erros cometidos pelos estudantes e uma análise geral dos resultados obtidos.

Nas considerações finais são apresentadas as maiores dificuldades encontradas pelos alunos nas resoluções das questões, bem como algumas sugestões para o trabalho em sala de aula.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A GEOMETRIA

A palavra Geometria tem origem grega, formada pelos radicais GEO (terra) e METRIA (medida) e, segundo Ferreira (1988), é a parte da matemática que tem por objeto o estudo rigoroso do espaço e das formas (figuras e corpos) que nele se podem conceber. Está presente em tudo o que nos rodeia, nas formas dos objetos, na arquitetura, na exuberância e diversidade das formas presentes na natureza, etc. E é por isso que as ideias de geometria são utilizadas na engenharia, arquitetura e nas mais diversas áreas do conhecimento humano. Considera-se, então, necessário apresentar um breve histórico sobre que necessidades que levaram o homem a utilizar-se da Geometria em seu cotidiano.

2.1.1 Breve Histórico

Segundo Boyer (1906) "Afirmações sobre as origens da Matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever." No período pré-histórico não há registros escritos, porém, a arte rupestre, a produção de potes, tecidos e cestas são em essência precurssores da geometria elementar. Nesse período, a ausência de documentos impossibilitou o acompanhamento da evolução da geometria, mas não se pode descartar a sua existência, pois "ideias são como sementes resistentes, e às vezes a origem presumida de um conceito pode ser apenas a reaparição de uma ideia muito mais antiga que ficara esquecida." (Boyer, 1906, p. 5)

De acordo com Eves (2007) a Matemática primitiva desenvolveu-se ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia, primordialmente, como uma ciência prática para assistir às atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam a criação de métodos de agrimessura para a construção de canais e reservatórios, e para dividir a terra. A Geometria teórica originou-se da mensuração.

Para Vitrac (2006) a origem da Geometria foi proposta por Heródoto de Halicarnasso, no segundo, dos nove livros de suas Histórias (século V a. C.), que traz a mais antiga menção da palavra grega *"geometria"* a ter chegado aos nossos dias. Os egípcios teriam revelado a Heródoto que seu rei partilhava as terras igualmente entre todos, contanto que lhe fosse atribuído um imposto de acordo com essa divisão. Como o Nilo, às vezes, cobria parte de um lote, era necessário medir a parte que restava, com a finalidade de recalcular o imposto devido. Segundo Heródoto, a prática da agrimensura deu origem à Geometria.

Segundo Fitzpatrick (2008) credita-se à Euclides a organização e sistematização da obra “Os Elementos”, que é, de longe, o mais famoso trabalho matemático, em particular, de Geometria, da Antiguidade Clássica; e também tem a distinção de ser o mais antigo livro de matemática utilizado continuamente no mundo. Pouco se sabe sobre o autor, além do fato de que ele viveu em Alexandria por volta de 300 a.C. Os principais temas do trabalho são Geometria, proporção, e teoria dos números. O nome de Euclides ficou na história da ciência associado à primeira concepção da Geometria como um conjunto sistematizado e lógico de propriedades.

O trabalho com Geometria desenvolve nosso raciocínio lógico, nossa capacidade de abstrair e de estabelecer relações. É o modelo Matemático que representa nosso universo físico e seu ensino faz parte do currículo das escolas de nosso país. O ensino da geometria possui um vasto campo de aplicação prática, além disso, permite ao educando adquirir conhecimentos teóricos compostos por definições, postulados e teoremas, que possibilitam um amplo desenvolvimento da interpretação e do raciocínio teórico e prático.

2.1.2 A Geometria do Ensino Fundamental e Médio

Lorenzato (1995) justificou a necessidade de se ter a Geometria na escola, argumentando que:

> “Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.” (Lorenzato, 1995, p.5)

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (DCE) são um conjunto de propostas que trazem sugestões, objetivos e fundamentação teórica dentro de cada área, com o intuito de subsidiar o trabalho docente.

Para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos básicos:

• Geometria plana;

• Geometria espacial;

• Geometria analítica;

• Noções básicas de geometrias não-euclidianas.

Segundo Paraná (2008) o conteúdo estruturante “Geometrias”, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo. Neste nível de ensino, o aluno deve compreender: os conceitos da geometria plana, geometria espacial, noções de geometria analítica e ter noções de geometrias não-euclidianas.

No Ensino Médio, deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. Destaca-se a necessidade de conhecer as demonstrações das fórmulas e teoremas; conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição, como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos; em especial, de prismas, pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera.

A Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED) elaborou em 2011 o “Caderno de Expectativas de Aprendizagem”, um documento produzido de forma participativa, elaborado pela SEED em conjunto com os professores da rede pública do Estado do Paraná, que estabelece os conteúdos fundamentais de todas as disciplinas do Ensino Fundamental e Médio. Lista-se a seguir as expectativas de aprendizagem de Geometria para o Ensino Fundamental e Médio, numeradas de acordo com o documento citado.

Ensino Fundamental:

6º Ano

51. Desenvolva a capacidade de observação do espaço e reconheça a diferença entre as dimensões (2D e 3D);
52. Reconheça e represente o ponto, a reta, o plano, a semirreta e o segmento de reta;
53. Conceitue e classifique e polígonos;
54. Identifique corpos redondos;
55. Diferencie as formas plana e não planas;
56. Identifique e quantifique as faces, arestas e vértices de um cubo;
57. Diferencie o círculo e circunferência, identificando seus elementos;
58. Reconheça os sólidos geométricos em sua forma planificada e seus elementos;
59. Construa poliedros a partir de modelos de faces poligonais;
60. Utilize de forma adequada os instrumentos de medidas nas construções geométricas;

7º Ano

106. Classifique e construa, a partir de figuras planas, sólidos geométricos;

107. Reconheça e classifique poliedros;

108. Identifique e quantifique faces, arestas, e vértices de um poliedro;

109. Identifique e quantifique as faces, arestas, e vértices de prisma e pirâmides;

110. Identifique sólidos geométricos a partir de sua planificação;

111. Reconheça e identifique cilindros, cones, esferas e alguns de seus elementos;

112. Reconheça círculo e circunferência e alguns de seus elementos: centro, raio, arco, diâmetro e corda;

113. Compreenda as noções topológicas através do conceito de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados.

8º Ano

149. Classifique triângulo quanto aos lados;

150. Construa um triângulo, dado três lados;

151. Reconheça que cada lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois lados;

152. Reconheça que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º;

153. Determine os ângulos externos de um triângulo;

154. Verifique que, em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele;

155. Reconheça triângulos congruentes por meio da congruência: LAL, LLL, ALA e LAA;

156. Identifique o caso especial de congruência de triângulos retângulos: cateto e hipotenusa respectivamente congruentes;

157. Aplique as propriedades referentes aos casos de congruência de triângulos;

158. Construa triângulos com base nos casos de congruência;

159. Identifique e opere com os ângulos internos de polígonos regulares;

160. Desenvolva a noção de paralelismo, trace e reconheça retas paralelas num plano;

161. Compreenda o Sistema de Coordenadas Cartesianas, posicionamento de pontos, identificação dos pares ordenados (abscissa e ordenada) e análise seus elementos sob diversos contextos;

162. Defina quadrilátero;

163. Reconheça e represente os vértices, os lados e os ângulos internos de um quadrilátero;

164. Reconheça quadriláteros convexos e côncavos;

165. Determine a soma dos ângulos de um quadrilátero convexo;

166. Reconheça um quadrado;

167. Reconheça que todo quadrado é paralelogramo, é retângulo e é losango;

168. Reconheça os fractais através da visualização e manipule materiais e reconheça suas propriedades.

9º Ano

193. Verifique a semelhança entre dois polígonos e relações entre eles;

194. Compreenda e utilize do conceito de semelhança de triângulos para resolver situações-problemas;

195. Reconheça e aplique os critérios de semelhança dos triângulos;

196. Determine a razão de dois segmentos dados;

197. Aplique o conceito de razão na divisão de um segmento por um ponto;

198. Reconheça segmentos proporcionais como segmentos que formam uma proporção;

199. Reconheça um feixe de retas paralelas;

200. Aplique e demonstre o Teorema de Tales em situações-problema;

201. Reconheça e realize técnicas de projeções e perspectivas;

202. Faça cálculo de superfície e volume de poliedros.

Ensino Médio:

301. Compreenda os conceitos de ponto, reta, e plano.

302. Compreenda e os Postulados da Existência, da Determinação, da Inclusão e das Paralelas;

303. Verifique posições relativas entre pontos no espaço;

304. Verifique as posições relativas entre pontos e retas no espaço;

305. Verifique posições relativas entre retas no espaço;

306. Verifique posições relativas entre retas e planos no espaço;

307. Verifique posições relativas entre planos no espaço;

308. Calcule a medida da distância entre dois pontos no plano cartesiano;

309. Calcule a medida da distância entre um ponto a uma reta no plano cartesiano;

310. Calcule a medida da área de um triângulo por meio coordenadas de seus vértices;

311. Reconheça a condição de alinhamento de três pontos;

312. Reconheça a equação geral da reta;

313. Obtenha a equação de uma reta, conhecendo seu coeficiente angular e as coordenadas de um de seus pontos;

314. Determine as posições relativas entre duas retas no plano comparando os respectivos coeficientes angulares;

315. Identifique posições relativas entre um pontos e circunferências;
316. Identifique posições relativas entre um retas e circunferências;
317. Identifique posições relativas entre duas circunferências;
318. Reconheça equação da geral e paramétrica da circunferência;
319. Interprete geometricamente os coeficientes da equação de uma circunferências;
320. Identifique sólidos geométricos e seus elementos;
321. Identifique e classifique poliedros;
322. Identifique e analise os elementos dos prismas e pirâmides;
323. Identifique e classifique corpos redondos;
324. Identifique e analise os elementos de esferas, cones e cilindros;
325. Calcule a medida da área da superfície de sólidos geométricos;
326. Calcule a medida do volume e da capacidade de sólidos geométricos;
327. Resolva situações-problema envolvendo o cálculo de áreas de superfícies, volume e capacidade de sólidos geométricos;
328. Identifique elipses, hipérboles e parábolas;
329. Articule conceitos da Geometria Fractal com outros conteúdos (ex: função exponencial, logarítmica, Progressões Aritmética e Geométrica);
330. Conheça o contexto histórico da criação das Geometrias Hiperbólica e Elíptica;
331. Reconheça a Geometria Hiperbólica e Elíptica como sistemas ageométricos no quais o postulado euclidiano das paralelas não se verifica;
332. Relacione a Geometria Hiperbólica e Elítica com a Geometria Euclidiana, a partir da negação dos postulados das paralelas;
333. Relacione a Geometria Hiperbólica com a negação da unicidade de retas paralelas;
334. Relacione a Geometria Elíptica com a negação da existência de retas paralelas;
335. Reconheça a Esfera como um modelo para a Geometria Elíptica;
336. Identifique a curvatura nula, positiva e negativa, como sendo da plana, esférica e hiperbólica, respectivamente;
337. Compreenda a noção de distância entre dois pontos da superfície esférica e da hiperbólica;
338. Compreenda o conceito de geodésicas;
339.Reconheça triângulos esféricos e hiperbólicos;
340. Compreenda a propriedade da soma dos ângulos internos de triângulos esféricos e hiperbólicos;

341. Reconheça a necessidade das Geometrias não Euclidianas para resolução deproblemas não resolvidos pela Geometria Euclidiana;

A finalidade do Caderno de Expectativas de Aprendizagem do Estado do Paraná é, sobretudo, garantir o direito ao estudante de aprender, estabelecendo o que é fundamental em cada disciplina.

2.2 ANÁLISE DE ERROS

A maneira de trabalhar com o erro em sala de aula pode ser distinta de professor para professor. Alguns consideram o erro como o produto da falta de dedicação do aluno e o tratam de forma punitiva. Outros o encaram como uma falha no processo de ensino e aprendizagem e o utilizam para retomar determinado conteúdo que não fora apreendido.

Neste estudo, assume-se a análise de erros em Matemática, segundo Cury (2007), como uma metodologia de pesquisa, no sentido de que pode fornecer-nos uma sistemática de investigação na qual se possa questionar-se sobre os erros dos alunos, coletar os dados, analisar e buscar entender as causas desses erros. Além disso, analisar as produções dos alunos nos permite entender como se dá a apropriação do saber pelos estudantes. Por outro lado, a análise de erros pode ser considerada uma metodologia de ensino, visto que, ao devolver para os alunos as questões analisadas detalhadamente, pode-se proporcionar-lhes a oportunidade de se conscientizar das suas dificuldades.

Dentre alguns autores que se preocuparam com a investigação e classificação dos erros em questões de Matemática, realizou-se um estudo a fim de definir uma classificação adequada à nossa pesquisa.

Destaca-se o trabalho de Radatz (1979), que apresentou um estudo a partir dos elementos da teoria do processamento da informação e sugeriu cinco erros matemáticos, a seguir: 1 – Erro com origem nas dificuldades da linguagem; 2 – Erro devido às dificuldades na obtenção de informações espaciais; 3 – Erro de deficiência no domínio, nas habilidades, nos fatos e nos conceitos, como pré-requisitos; 4 – Erro devido associações incorretas ou a rigidez de pensamento; 5 – Erro devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes.

Peng e Luo (2009) apresentaram uma classificação para investigar o conhecimento dos professores de matemática no que se refere à análise dos erros cometidos em problemas matemáticos. Os autores apresentam quatro categorias analíticas para a natureza do erro: *matemático, lógico, estratégico e psicológico.* Além de outras quatro, para a análise dos tipos de erros: *identificar, interpretar, avaliar e corrigir/remediar*.

Para a análise dos erros, optou-se pela classificação de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), que, em uma pesquisa com estudantes concluintes do ensino médio (high school), em Israel, classificaram os erros cometidos segundo as classes abaixo:

1) Uso errado dos dados;

2) Linguagem mal interpretada;

3) Inferência logicamente inválida;

4) Definição ou teorema distorcido;

5) Solução não verificada;

6) Erros técnicos.

Apresenta-se, a seguir, cada uma das seis classes descritas por seus elementos característicos, seguidas por um exemplo:

1) Uso errado dos dados: nessa classe são considerados os erros relacionados com discrepâncias entre os dados do problema e a forma como foram utilizados. Neste caso, o estudante compreende o problema, porém emprega os dados erroneamente;

Exemplo: A planta de uma casa, em que os cômodos têm a forma de retângulos, está ilustrada na figura e as dimensões dos cômodos estão indicadas na planta.

Determine:

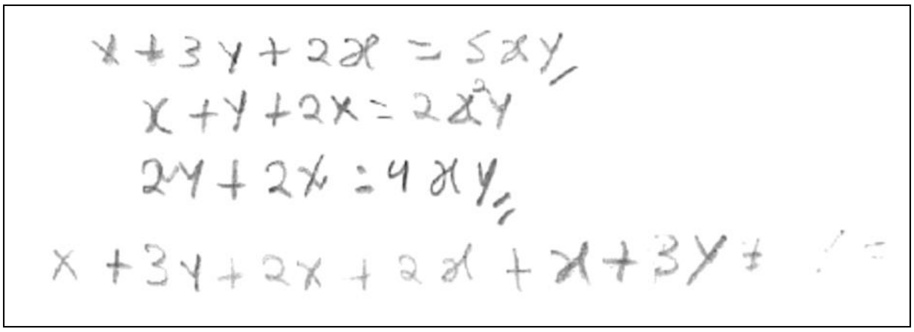
a) a área da sala

b) a área do quarto

c) a área do banheiro e da cozinha juntos

d) a área da casa

Figura 1 – Exemplo de erro do tipo 1



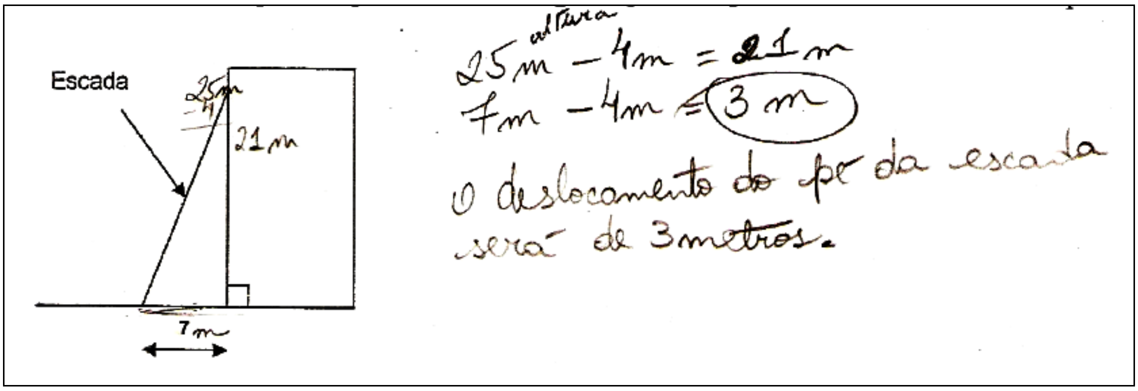
Fonte: Brum (2013, p. 35).

Análise do erro: “O aluno, ao se confrontar com a questão, usa os dados de maneira equivocada, pois troca área por perímetro, modificando todo o contexto, além de cometer outros erros operacionais.” (Brum, 2013, p. 35)

2) Linguagem mal interpretada: esses erros relacionam-se à tradução incorreta dos itens de uma para outra linguagem. Nesta classe estão os erros associados à mudança da linguagem natural para a linguagem matemática, interpretação incorretas de gráficos e uso de símbolos equivocados.

Exemplo: O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?

Figura 2 – Exemplo de erro do tipo 2

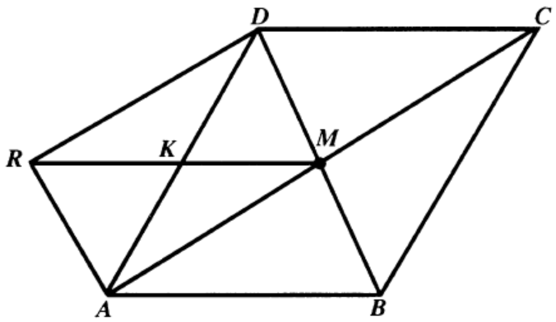


Fonte: Cordeiro (2009, p. 133)

Análise do erro: “O aluno confundiu o enunciado e o desenho, entendeu que os 25m de comprimento da escada seriam a altura considerada da base do edifício até onde ela estava encostada. Sem utilizar nem fazer nenhum outro desenho, realizou os seguintes cálculos: “25 metros da altura menos 4 metros igual a 21 metros e concluiu 7 metros de distância da base menos 4 metros igual a 3 metros", e afirmou que este seria o deslocamento do pé da escada. Diminuiu a mesma medida na altura e na base do triângulo que foi formado pela escada, o prédio e o solo, o que pode ser percebido em uma das entrevistas do aluno: "como o topo da escada diminui 4 metros pensei que era pra diminuir 4 metros na base"." (Cordeiro, 2009, p. 61)

3) Inferência logicamente inválida: nesta classe, são incluídos os erros que se relacionam com raciocínios falsos, como, por exemplo, tirar conclusões inválidas de um conjunto de dados do problema. Tais erros surgem quando o estudante considera verdadeiras suposições que não podem ser justificadas.

Exemplo: ABCD na figura é um losango. Dado que $\overline{AR} \parallel \overline{BD}$, $\overline{RD} \parallel \overline{AC}$, e K é a interseção de $\overline{RM}$ e $\overline{AD}$, prove que $AMDR$ é um retângulo.



Solução incorreta:

"$\measuredangle MAD \cong \measuredangle RDA$ $(porque\ \overline{RD} \parallel \overline{AC})$;

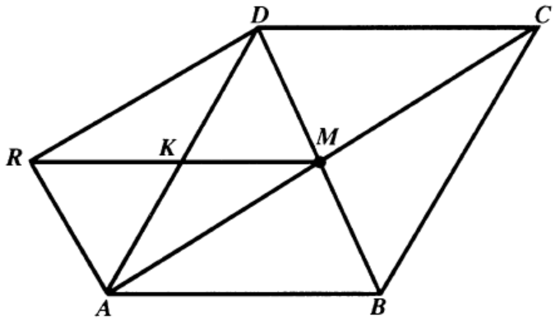
$\measuredangle DAR \cong \measuredangle ADM$ $(porque\ \overline{AR} \parallel \overline{BD})$; portanto $\measuredangle A \cong \measuredangle D$.

$AMDR$ é um retângulo porque em um retângulo quaisquer dois ângulos opostos são congruentes e iguais a 90°."

Análise do erro: O aluno fez um passo injustificado de $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ para "$AMDR$ é um retângulo." O argumento dado, embora constituído por uma afirmação verdadeira, não justifica o passo.

4) Definição ou teorema distorcido: nesta categoria, são incluídos os erros que se relacionam à definições ou propriedades que não se aplicam na questão proposta ao estudante. O estudante altera uma definição ou um teorema de modo que possa utilizar para resolver determinado problema.

Exemplo: ABCD na figura é um losango. Dado que $\overline{AR} \parallel \overline{BD}$, $\overline{RD} \parallel \overline{AC}$, e K é a interseção de $\overline{RM}$ e $\overline{AD}$, prove que $AMDR$ é um retângulo.



Solução incorreta:

"$\overline{DM} \parallel \overline{RA}$

$\overline{RD} \parallel \overline{MA}$

Um quadrilátero com lados opostos paralelos é um retângulo, portanto AMDR é um retângulo."

Análise do erro: O aluno citou uma definição de um retângulo omitindo a exigência adicional sobre os ângulos.

5) Solução não verificada: neste caso, o estudante desenvolve corretamente passo a passo uma estratégia que não leva à solução correta do problema proposto.

Exemplo: Dado $i = \frac{nE}{nr+r}$ expresse n em termos de i, r, R, E.

Solução incorreta: O examinando termina com a resposta $n = \frac{i(nr+R)}{E}$, sem perceber o n no lado direito da igualdade. Nenhum erro pode ser encontrado no processo, mas a solução apresentada não está correta.

6) Erros técnicos: nesta classe, estão contidos os erros computacionais (por exemplo, $7 \times 8 = 54$), erros na extração de dados a partir de tabelas, erros na manipulação de símbolos algébricos elementares (por exemplo, escrever $a - 4 \cdot b - 4$ em vez de $(a -. 4) \cdot (b - 4)$, mas procedendo como se os parênteses estivessem lá quando necessário, o que é uma omissão negligente de parênteses), e outros erros na execução de algorítmos.

A classificação de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) foi empregada por Dalto (2007), que, em sua dissertação de mestrado, analisou respostas dos alunos à uma questão aberta de Matemática; envolvendo um sistema de equações do 1º grau, da Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná – AVA (2002) comum ao 9º ano do Ensino Fundamental e ao 3º ano do Ensino Médio. Buscou entre outros objetivos verificar se os tipos de erros cometidos pelos estudantes dependem ou não da série que frequentam. Em sua pesquisa, Dalto verificou que o desempenho dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio foi superior ao desempenho dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, e que a maior dificuldade encontrada pelos estudantes foi na interpretação dos enunciados. Afirmou que os erros mais frequentes estão relacionados à não verificação de soluções (erro do tipo 5) e à utilização equivocada de informações do problema (erro do tipo 1).

Bortoli (2011) usou a mesma classificação para analisar erros cometidos por alunos de Ensino Superior, dos cursos de Administração, Ciências Contábeis, Engenharia Agronômica, Química e Sistemas de Informação na resolução de testes da disciplina de Pré-Cálculo, visando planejar estratégias de ensino que proporcionem uma melhoria na aprendizagem. Verificou que os erros técnicos, computacionais, de manipulação algébrica e de uso incorreto de algorítmos foram os mais frequentes obtidos em sua pesquisa.

Brum (2013) também utilizou a mesma classificação para analisar os erros cometidos por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões de Álgebra. Notou que os erros mais comuns cometidos pelos alunos neste tipo de questão estão relacionados às dificuldades de tradução da linguagem natural para a linguagem matemática e às dificuldades técnicas, à qual atribuiu a falta de prerrequisitos.

Segundo Cury (2007), há necessidade de trabalhar com os alunos atividades que os desafiem a lidar com seus próprios erros, descobrindo suas causas, para então explorá-los e aproveitá-los como ferramentas para a aprendizagem.

Pinto (2000) realizou um estudo com alunos da 4ª série (5º ano) de uma escola pública paranaense, focalizando o erro produzido pelo aluno no processo de aprendizagem da Matemática elementar. Sensibilizou-se com os tratamentos sentenciosos dados aos erros dos alunos e com a ausência da discussão da função do erro na construção do conhecimento do aluno. Considera o erro “como um conhecimento provisório para a construção de um conceito matemático.” (p. 9).

Ainda Pinto (2000), cita as novas propostas curriculares fundamentadas na concepção construtivista de aprendizagem, adotadas nos programas de formação continuada da rede pública estadual de São Paulo:

> “Um dos princípios estruturantes dessa nova abordagem é a concepção do erro como uma hipótese integrante da construção do conhecimento pelo aluno. Diferentemente das didáticas tradicionais, em que o erro servia, geralmente, como indicador do fracasso do aluno, nas novas teorias ele se apresenta como um reflexo do pensamento da criança, sendo percebido como manifestação positiva de grande valor pedagógico.” (Pinto, 2000, p. 10)

A autora parte da premissa de que o erro, concebido numa dimensão construtivista, configura-se como uma oportunidade didática para o professor, por servir de guia para um planejamento mais eficaz e por fornecer novos elementos para o direcionamento das práticas pedagógicas.

Moren, David e Machado (1992), em uma pesquisa realizada com alunos de 3ª a 6ª séries (4º ao 7º anos) de escolas públicas em Belo Horizonte e no Rio de Janeiro, intitulada “Diagnóstico e análise de erros em Matemática”; afirmam que, em geral, não há um questionamento sobre a origem e significado do erro cometido pelo aluno, e que, quando há uma reflexão sobre esse erro, ele servirá de orientador para o processo de ensino e aprendizagem.

Antônio Lopes (Bigode) prefaciando a obra de Cury (2007), afirma que “descartando os erros cometidos por desatenção ou descuido, em muitos casos, os erros são hipóteses legítimas baseadas em concepções e crenças adquiridas ao longo da vida escolar.” (Cury, 2007, p. 11)

Cury (2007) considera a análise de erros uma tendência em Educação Matemática. Fez uma revisão de literatura sobre a temática no Brasil e no mundo, selecionando os trabalhos mais relevantes, discutindo-os sob diversas perspectivas. Realizou uma pesquisa com alunos do curso de Engenharia Química, na disciplina de Cálculo A, na qual justifica claramente a análise de erros como metodologia de ensino: “com base nos erros cometidos pelos alunos, foi possível retomar conceitos e estratégias que lhes permitiram superar dificuldades de aprendizagem do conteúdo “funções”.” (Cury, 2007, p. 77)

Ainda Cury (2007) questiona a falta de discussão sobre os erros nos cursos de formação de professores de Matemática, nos quais o erro é tratado de forma punitiva. Raramente há tempo para voltar e discutir os erros com o objetivo de construir algum conhecimento, e afirma que "o erro é fonte de saberes, é um saber, enquistado, resistente, apontando para algum problema que exige atenção. [...] os erros cometidos pelos futuros professores podem auxiliá-los a reconstruir seu próprio conhecimento, se seus mestres propuserem atividades que "desacomodem" suas certezas." (Cury, 2007, p. 93 e 94).

O erro precisa ser encarado, tanto pelo professor quanto pelo aluno, como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, mas não como um obstáculo, e sim como uma natureza transitória do conhecimento a caminho o saber.

3 O ENEM

Em 1998, foi criado o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) com a finalidade de avaliar o desempenho dos alunos ao término do ensino médio, bem como aferir a qualidade do ensino das instituições de nível médio e, de certo modo, induzindo à reestruturação curricular.

A partir de 2009 passou a ser utilizado como mecanismo de ingresso no ensino superior seja por meio de bolsas oferecidas pelo PROUNI[1], em instituições particulares, pelo aproveitamento da nota combinada com a nota do vestibular, ou ainda, unicamente pela nota do ENEM. Atualmente, o ENEM não é obrigatório, como nunca foi; porém, indispensável para estudantes que buscam o ingresso em determinadas instituições no ensino superior.

O ENEM é pautado em competências e habilidades. No documento "Saeb 2001: Novas Perspectivas" (2002) define-se competência, na perspectiva de Perrenoud, como sendo a "capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiando-se em conhecimentos, mas sem se limitar a eles". Ainda, no mesmo documento, é mencionado que "habilidades" referem-se, especificamente, ao plano objetivo prático do saber fazer e decorrem, diretamente, das competências já adquiridas e que se transformam em habilidades.

A Matriz de referência do ENEM (2009) descreve as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas para a área de Matemática e suas Tecnologias, as quais estão listadas a seguir:

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

---

[1] Programa Universidade para Todos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaçotridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço eforma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para acompreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção deargumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e socialobtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Uma competência se manifesta no indivíduo ao analisar, interpretar, decidir e agir diante de uma situação proposta e o conceito de habilidade decorre do domínio e da aplicação de um saber, decorrente do desenvolvimento de uma competência. A competência da área 2 tem foco na utilização do conceito geométrico para realizar a leitura do mundo físico, analisar a natureza e criar argumentos de modo a interagir sobre ela. Pode ser desenvolvida por meio dos conteúdos propostos no Caderno de Expectativas de Apredizagem listados no subítem 2.1.2.

Rodrigues (2013, p. 5 e 6) classificou as questões do ENEM, de 2009 a 2012, quanto às suas competências e habilidades. Notou haver grande incidência de questões envolvendo geometria entre as sete competências propostas pela Matriz de Referência do ENEM. Das 180 questões analisadas, verificou que 40 questões envolviam conceitos geométricos; ou seja, foram classificadas de acordo com a competência da área 2 - *Utilizar o conceito geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.* Isso indica que 22% das questões exigiram a capacidade de utilização de conceitos geométricos, apontando para a necessidade de um olhar acerca das práticas educativas dos conteúdos de geometria abordados no Ensino Fundamental e Médio.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Considerando-se a subjetividade do nosso problema de pesquisa, bem como dos dados levantados; adotamos uma abordagem qualitativa de pesquisa por sua abrangência quanto às formas de análise dos resultados.

Segundo Garnica (2004) a pesquisa qualitativa não visa a generalização de seus resultados. Caracteriza-se pelo desejo de compreender determinado fenômeno que ocorre em sala de aula, não estabelecendo-se uma hipótese cujo objetivo seja comprovar ou refutar, e também pela não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas experiências e perspectivas.

4.1 A PESQUISA

A pesquisa foi realizada com 82 estudantes do 3º ano do Ensino Médio, do período matutino, de cinco escolas públicas do Município de Maringá, no decorrer do mês de Outubro de 2013; e desenvolveu-se em uma única etapa, com a aplicação de uma prova composta por quatro questões de geometria extraídas de exames anteriores do Novo ENEM[2], com duração de uma aula (50 minutos). No desenvolvimento desta pesquisa, buscou-se a resposta para a seguinte questão: Quais os erros mais comuns, cometidos por estudantes do 3º ano do Ensino Médio, das escolas públicas de Maringá, em questões de Geometria do ENEM?

A fim de tornar a amostra o mais abrangente possível, fez-se um estudo preliminar com o objetivo de definir um critério para a escolha das Escolas. Decidiu-se por aplicar a pesquisa em cinco Escolas Estaduais, localizadas na cidade de Maringá, que ofertassem Ensino Médio regular no período diurno, escolhendo-as de acordo com o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB do ano de 2011.

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) foi criado pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) em 2007, e reúne, em um só indicador, dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: fluxo escolar e médias de desempenho nas avaliações.

O IDEB é um indicador de qualidade educacional que combina informações de desempenho em exames padronizados de proficiência em Língua Portuguesa e Matemática

---

[2] Utiliza-se o termo "Novo ENEM" para se referir ao Exame Nacional do Ensino Médio realizado a partir de 2009.

(Prova Brasil ou Saeb), obtido pelos estudantes ao final das etapas de ensino (5º e 9º anos do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio), com informações sobre rendimento escolar (aprovação).

Indicadores educacionais, como o IDEB, são desejáveis por permitirem o monitoramento do sistema de ensino do País. Sua importância, em termos de diagnóstico e norteamento de ações políticas focalizadas na melhoria do sistema educacional, está em:

a) detectar escolas e/ou redes de ensino cujos alunos apresentem baixo desempenho em termos de rendimento e proficiência;

b) monitorar a evolução temporal do desempenho dos alunos dessas escolas e/ou redes de ensino.

A Prova Brasil, um dos principais instrumentos de avaliação utilizados na composição do IDEB das escolas estaduais, é aplicada a cada dois anos, em anos ímpares, gerando dados que são publicados no ano posterior a cada aplicação. Para fins desta pesquisa, utilizou-se os dados do último IDEB, ou seja, referentes a 2011, publicados em 2012, pois o IDEB de 2013 ainda não havia sido divulgado.

Das 31 Escolas Estaduais de Maringá, selecionou-se 27 de acordo com o estabelecido. Os dados foram obtidos diretamente do site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP e organizados em cinco classes como segue:

Tabela 01 – IDEB das Escolas Estaduais de Maringá

Classes	ESCOLA	IDEB 2011
3,1 - 3,6	Colégio Estadual Duque de Caxias	3,1
	Colégio Estadual Branca da Mota Fernandes	3,2
	Colégio Estadual Presidente Kennedy	3,4
	Colégio Estadual Tânia Varela Ferreira	3,5
	Colégio Estadual Vinícius de Moraes	3,5
3,7 - 4,2	Colégio Estadual Rodrigues Alves	3,7
	Colégio Estadual Brasílio Itiberê	3,8
	Colégio Estadual João XXIII	3,9
	Colégio Estadual José Gerardo Braga	3,9
	Colégio Estadual Silvio Magalhães Barros	3,9
	Colégio Estadual Alberto Jackson Byington Jr.	4,0

	Colégio Estadual Dirce de Aguiar Maia	4,0
	Colégio Estadual Santa Maria Goretti	4,0
	Colégio Estadual Unidade Polo	4,0
	Colégio Estadual Alfredo Moises Maluf	4,2
4,3 - 4,8	Colégio Estadual João de Faria Pioli	4,4
	Colégio Estadual Tancredo de Almeida Neves	4,4
	Colégio Estadual Theobaldo Miranda Santos	4,4
	Colégio Estadual Tomaz Edison de Andrade Vieira	4,4
	Colégio Estadual Parque Itaipu	4,6
	Colégio Estadual Adaile Maria Leite	4,7
	Colégio Estadual Dr. Gastão Vidigal	4,8
4,9 - 5,4	Instituto de Educação Estadual de Maringá	5,0
	Colégio Estadual Marco Antônio Pimenta	5,0
	Colégio Estadual Juscelino Kubitschek de Oliveira	5,1
5,5 - 6,0	Colégio Estadual Vital Brasil	5,5
	Colégio de Aplicação Pedagógica da UEM	6,0

Fonte: http://ideb.inep.gov.br/resultado/

Depois de organizar os dados, selecionou-se as escolas listadas a seguir, uma de cada classe, descrita na Tabela 01, considerando-se a disponibilidade de atendimento, ou seja, a autorização da direção escolar e do professor regente, para a aplicação da pesquisa no período proposto.

- Colégio Estadual Duque de Caxias (IDEB: 3,1);
- Colégio Estadual Unidade Polo (IDEB: 4,0);
- Colégio Estadual Theobaldo Miranda Santos (IDEB: 4,4);
- Colégio Estadual Marco Antônio Pimenta (IDEB: 5,0);
- Colégio de Aplicação Pedagógica da UEM (IDEB: 6,0);

O teste, contendo quatro questões de geometria do Novo ENEM, foi aplicado em todas as turmas de 3º ano do Ensino Médio, no período matutino das escolas selecionadas. Muitos estudantes não fizeram o teste ou não autorizaram a sua utilização para a pesquisa[3].

A seguir, na Tabela 02, descreve-se a quantidade de estudantes presentes, bem como a quantidade que aceitou participar da pesquisa, e o número de alunos que não conseguiram responder a nenhuma questão.

[3] A pesquisa foi submetida à Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Tabela 02 – Estudantes Participantes da Pesquisa

Instituição	Nº de turmas	Nº total de presentes	Nº de participantes	Entregaram em branco
Col. Est. Duque de Caxias	2	50	27	2
Col. Est. Unidade Polo	3	79	21	6
Col. Est. Theobaldo M. Santos	1	35	10	3
Col. Est. Marco A. Pimenta	1	25	9	0
Col. Aplicação Ped. da UEM	3	78	15	2
TOTAL	**10**	**267**	**82**	**13**

Fonte: O autor

Após a aplicação do teste, prodecemos à análise das soluções apresentadas pelos estudantes, segundo a classificação de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), conforme descrita na subseção 2.2.

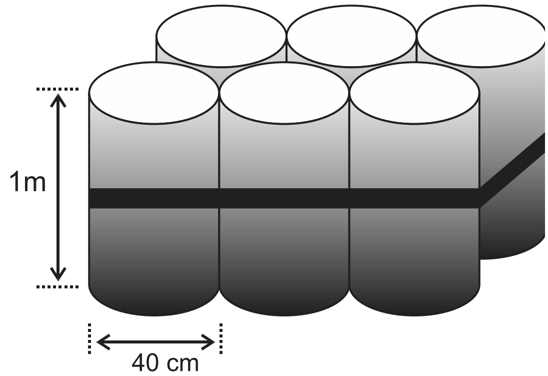
Para tanto, os alunos que participaram da pesquisa foram nominados de acordo com o seguinte critério: cada aluno recebeu uma letra, seguida de um número; as letras (de A a J) representam a turma à qual pertence, e os números seguem de acordo com a quantidade de alunos da turma. Não é objetivo da pesquisa classificar as escolas sob qualquer aspecto, e para tanto, não relaciona-se, nesta pesquisa, qualquer estudante com a escola da qual é proveniente.

4.2 AS QUESTÕES

As questões foram selecionadas de provas do Novo ENEM, tendo como critérios de seleção a escolha de duas questões de geometria espacial e duas de geometria plana de modo que sejam necessários registros escritos para sua resolução. Descartou-se então dessa forma qualquer questão que fosse posssível a resposta imediata sem o auxílio de algum registro escrito, visto que dessa forma não seria possível a análise e classificação de seus possíveis erros. As alternativas foram excluídas e fizeram-se pequenas adaptações em seus enunciados para torná-las abertas.

A seguir são apresentadas as questões, suas resoluções e a classificação dos erros cometidos pelos alunos.

QUESTÃO 1: *(ENEM – 2010) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou kits com seis tambores para o* *abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado.*



Que quantia pagará por mês uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit? (Considere $\pi \cong 3$)

A resolução envolve reconhecer que os tambores têm a forma de um cilindro circular reto, calcular seu volume, e realizar operações com números racionais.

Uma solução: Primeiramente, pode-se calcular o volume de cada tambor, transformando o raio (20 cm), dado em centímetros, para metro (0,2 m).

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \cong 3 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 1 \cong 0{,}12 m^3$$

Considerando que a família utilizará 12 kits com 06 tambores cheios de água, temos que o volume de água consumido durante o mês será:

$$V_T \cong 0{,}12 \cdot 6 \cdot 12 \cong 8{,}64 m^3$$

Como cada m^3 de água terá um custo de R$ 2,50, logo a família gastará mensalmente $8{,}64 \cdot 2{,}50 \cong 21{,}60$.

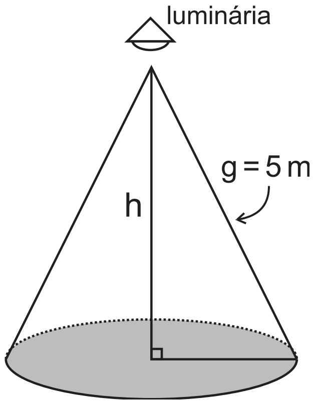
Outra solução: Pode ser obtida pela multiplicação direta.

$\text{Custo Mensal} = 2{,}5 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$\text{Custo Mensal} \cong 2{,}5 \cdot 6 \cdot 12[3 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 1]$

$\text{Custo Mensal} \cong 15 \cdot 12 \cdot 0{,}12 = 21{,}60.$

QUESTÃO 2: *(ENEM – 2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.*



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28{,}26\,m^2$, *considerando* $\pi = 3{,}14$, *calcule a altura h da luminária.*

A resolução desta questão envolve reconhecer um cone e seus elementos, calcular o raio de uma circunferência, conhecendo seu comprimento; reconhecer um triângulo retângulo formado pela altura, geratriz e raio da base do cone, e aplicar o Teorema de Pitágoras.

Uma solução: A partir da área da base, pode-se calcular a medida do raio:

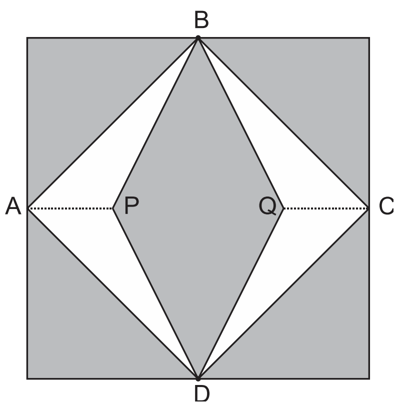
$$\mathrm{A} = \pi.\mathrm{r}^2 \Rightarrow 28{,}26 = 3{,}14 \cdot \mathrm{r}^2 \Rightarrow \mathrm{r}^2 = \frac{28{,}26}{3{,}14} \Rightarrow \mathrm{r} = \sqrt{9} \Rightarrow \mathrm{r} = 3\mathrm{m}$$

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$\mathrm{g}^2 = \mathrm{h}^2 + \mathrm{r}^2 \Rightarrow 5^2 = \mathrm{h}^2 + 3^2 \Rightarrow \mathrm{h}^2 = 25 - 9 \Rightarrow \mathrm{h}^2 = 16 \Rightarrow \mathrm{h} = \sqrt{16} \Rightarrow \mathrm{h} = 4\mathrm{m}$$

Logo a altura da luminária é h = 4 m.

QUESTÃO 3: *(ENEM – 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.*



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R\$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

A resolução envolve cálculo e comparação das áreas dos triângulos e do quadrado.

Uma solução: Como $\overline{AP} = \overline{QC} = \frac{1}{4}\text{m}$, e ambos os triângulos possuem a mesma altura, temos que $A(ABP) = A(BQC) = A(APD) = A(QCD)$, portanto a área sombreada é igual a $\frac{3}{4}\text{m}^2$ e a área clara é igual a $\frac{1}{4}\text{m}^2$, logo o custo para a fabricação do vitral é

$$\frac{3}{4}.30 + \frac{1}{4}.50 = 22{,}5 + 12{,}5 = \text{R\$ } 35{,}00$$

Outra solução: Os quatro triângulos possuem a mesma base, logo a mesma área.

Área clara = $4 \cdot A_{\Delta} = 4 \cdot \frac{b.h}{2} = \frac{4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}25\text{m}^2$

Área sombreada = $1 - 0{,}25 = 0{,}75\text{m}^2$

Assim, o custo para a produção do vitral é

$$0{,}75 \cdot 30 + 0{,}25.50 = 22{,}5 + 12{,}5 = \text{R\$ } 35{,}00$$

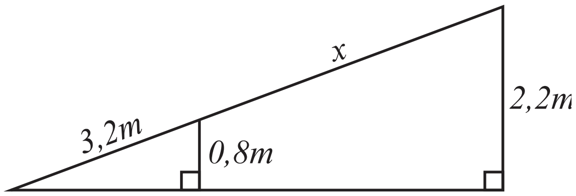
QUESTÃO 4: *(ENEM – 2009) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.*

Calcule a distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

A resolução envolve reconhecer as alturas em dois pontos distintos da rampa como retas paralelas, identificar triângulos semelhantes e aplicar relações de proporcionalidade entre seus lados.

Uma solução:

Figura 03 – Uma solução da questão 4

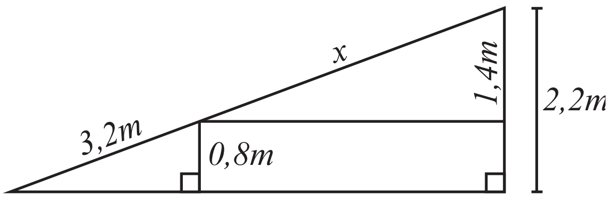


Fonte: O autor

$$\frac{3,2}{0,8} = \frac{3,2 + x}{2,2} \Rightarrow 4 \cdot 2,2 = 3,2 + x \Rightarrow 3,2 + x = 8,8 \Rightarrow x = 8,8 - 3,2 \Rightarrow x = 5,6m$$

Outra Solução:

Figura 04 – Outra solução da questão 4



Fonte: O autor

$$\frac{3,2}{0,8} = \frac{x}{1,4} \Rightarrow x = 4 \cdot 1,4 \Rightarrow x = 5,6m$$

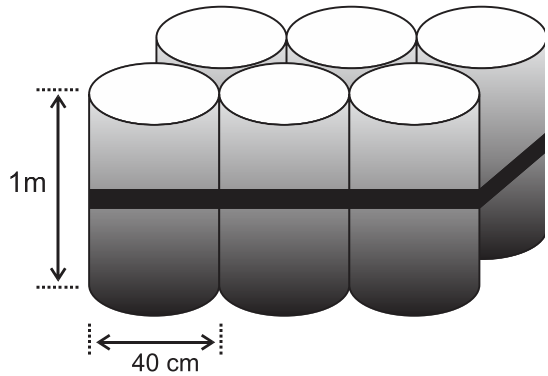
4.3 ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS PELOS ESTUDANTES

Para a análise dos erros cometidos pelos estudantes, optou-se pela classificação de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), já apresentado na subseção 2.2.

Na classificação realizada nesta pesquisa, considerou-se apenas o primeiro erro encontrado na resolução, descartando os demais erros cometidos, sejam eles decorrentes do erro anterior, de mesma natureza, ou de natureza diferente.

4.3.1 Análise dos Erros Cometidos na Questão 1

QUESTÃO 1: *(ENEM – 2010) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou kits com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda conforme a figura seguinte. Além* *disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado.*



Que quantia pagará por mês uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit? (Considere $\pi \cong 3$)

Esta questão foi a que os estudantes apresentaram maior dificuldade, pois não houve acerto e 38 alunos deixaram em branco. Essa dificuldade deu-se principalmente pela aplicação da fórmula para o cálculo do volume do cilindro, da qual os alunos não se recordaram, ou se recordaram de forma fragmentada, caracterizada pelo erro do tipo 2, e pela dificuldade em obter os dados do problema, caracterizado pelo erro do tipo 4. A seguir, apresenta-se a Tabela 03 que descreve os tipos de erros cometidos na questão 1.

Tabela 03 – Erros cometidos na questão 1

Erro	Quantidade de alunos
Erro do tipo 2: Linguagem mal interpretada	16
Erro do tipo 4: Definição ou teorema distorcido	20
Erro do tipo 5: Solução não verificada	1
Erro do tipo 6: Erros técnicos	7

Fonte: O autor

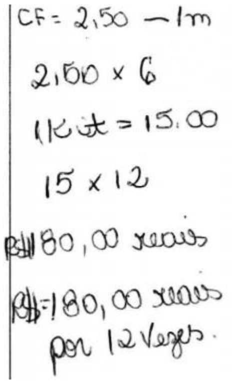
Erro do tipo 2 (Linguagem mal interpretada):

Surgiu em decorrência da interpretação equivocada da definição de cilindro e da relação entre a capacidade dos tambores cilíndricos e o cálculo do volume.

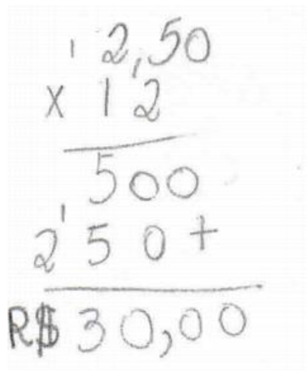
Nas respostas dos estudantes C4, C8, E2, E6, E8, G7, H3, I3, J1 e J6, observou-se que eles consideraram o custo de R$ 2,50, referente a cada tambor cheio de água. Já os estudantes C10, F10 e G8 consideraram o custo de R$ 2,50, referente a cada kit com seis tambores cheios de água, e não ao custo do m^3, como proposto no enunciado do problema (Figura 05).

Figura 05 – Erro do tipo 2 cometidos pelos estudantes

a) Resolução do estudante C4



b) Resolução do estudante F10

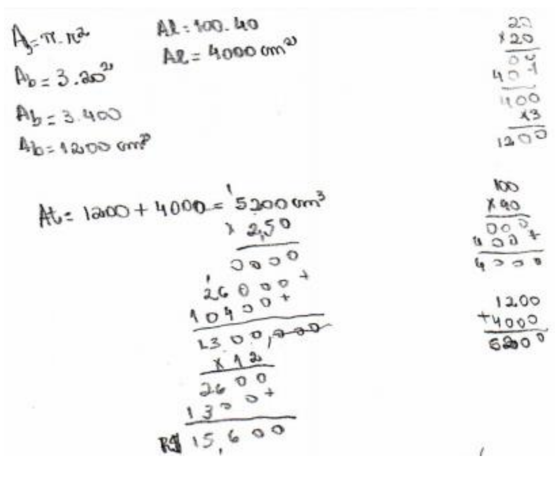


Fonte: O autor

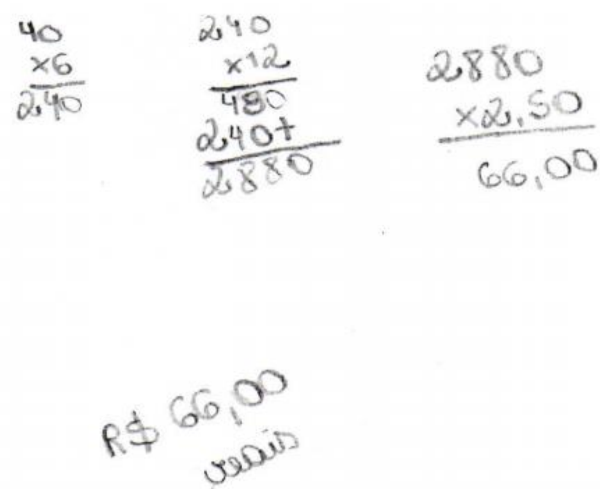
Este tipo de erro também foi cometido pelos estudantes E4, F4 e F17, que calcularam a área da superfíe do cilindro no lugar do volume, não relacionando o conteúdo do tambor com o volume de água contido no mesmo. Já os estudantes E8 e I3 confundiram a medida do diâmetro da base do cilindro, com a medida de seu volume. Utilizaram como medida do volume de cada cilindro, 40 m^3 ou 40 cm^3, não se sabe ao certo, pois não informaram a unidade de medida (Figura 06).

Figura 06 – Erro do tipo 2 cometido pelos estudantes

a) Resolução do estudante E4



a) Resolução do estudante E8



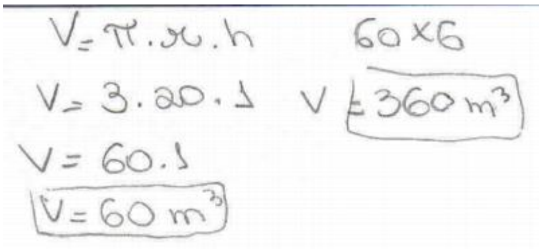
Fonte: O autor

Erro do tipo 4 (Definição ou teorema distorcido):

Decorreu da distorção da fórmula para o cálculo do volume do cilindro ou da utilização de uma propriedade que não se aplica à questão.

Foi cometido pelos estudantes G2, G4, J9 e G6, que calcularam o volume do cilindro utilizando a fórmula $V = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ e pelos estudantes F16, F11, F12 e F18 que ulilizaram $V = \pi \cdot r \cdot h$, onde o correto seria $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ (Figura 07).

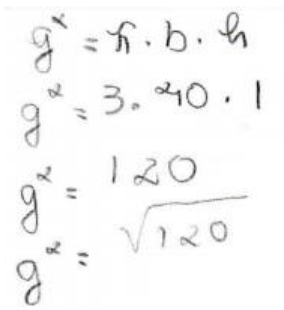
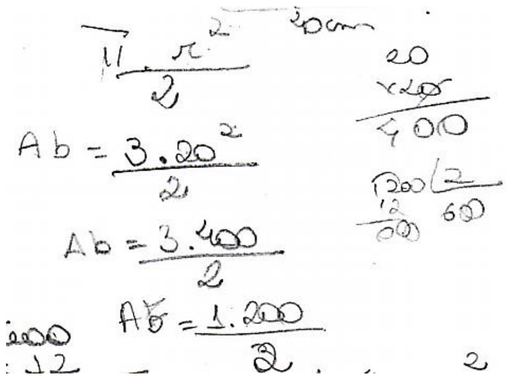
Figura 07 – Erro do tipo 4 cometidos pelos estudantes

a) Resolução do estudante G4	b) Resolução do estudante F18
	

Fonte: O autor

O erro do tipo 4 também foi cometido pelos estudantes C3, D5, E1, E3, F1, F7, F9, F14, F19, H6, H7 e J5, os quais não se pôde estabelecer um padrão (Figura 08).

Figura 08 – Erro do tipo 4 cometidos pelos estudantes

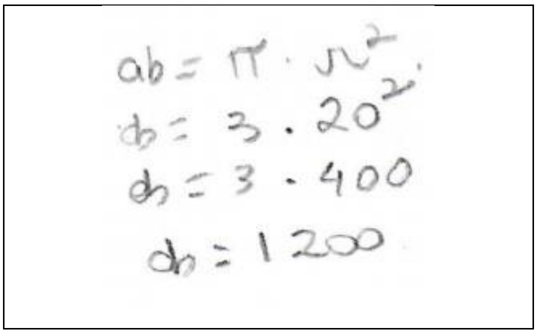
a) Resolução do estudante E1	b) Resolução do estudante F1
	

Fonte: O autor

Erro do tipo 5 (Solução não verificada):

Decorreu da não verificação dos resultados obtidos. Observa-se esse tipo de erro cometido somente pelo estudante F8 que calculou corretamente a área da base do cilindro, porém não conclui a questão (Figura 09).

Figura 09 – Erro do tipo 5 cometidos pelo estudante F8



Fonte: O autor

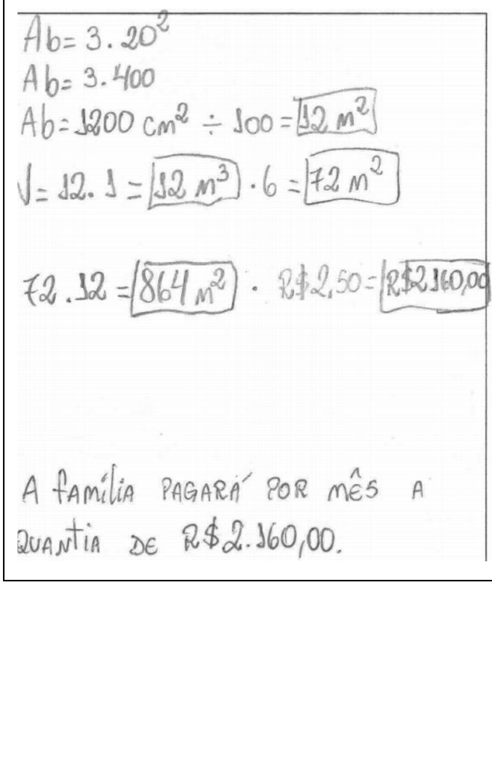
Erro do tipo 6 (Erros técnicos):

Nesta categoria, destacam-se os erros nas transformações das unidades de medida e na realização das operações fundamentais.

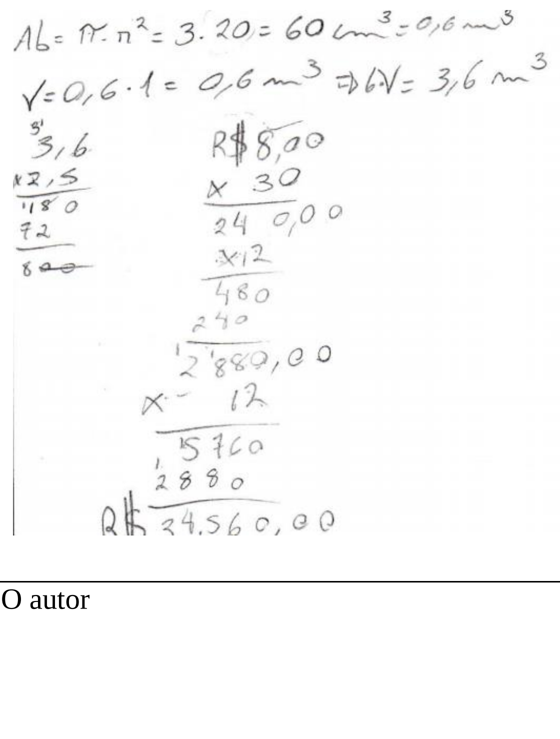
Foi cometido pelos estudantes A1, D1, D4, D6 e E7 que erraram ao transformar 1200 cm^3 para m^3. O correto seria 0,12 m^3. Também foi cometido pelos estudantes A3 e D2, que cometeram erros nos cálculos (Figura 10).

Figura 10 – Erro do tipo 6 cometidos pelos estudantes

a) Resolução do estudante E7



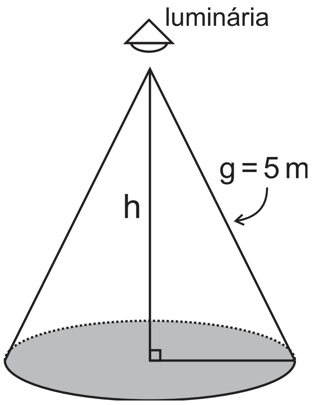
b) Resolução do estudante D2



Fonte: O autor

4.3.2 Análise dos Erros Cometidos na Questão 2

QUESTÃO 2: *(ENEM – 2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.*



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28{,}26\,m^2$*, considerando* $\pi = 3{,}14$*, calcule a altura h da luminária.*

Na questão 2, foram obtidos dois acertos, e 41 estudantes deixaram em branco. Observa-se grande dificuldade com a fórmula da área do círculo, caracterizada pelo erro do tipo 4, e dificuldades em interpretar os elementos do enunciado, caracterizada pelo erro do tipo 2. A seguir, apresenta-se a Tabela 04, que descreve os tipos de erros cometidos na questão 2.

Tabela 04 – Erros cometidos na questão 2

Erro	Quantidade de alunos
Erro do tipo 2: Linguagem mal interpretada	10
Erro do tipo 4: Definição ou teorema distorcido	24
Erro do tipo 6: Erros técnicos	5

Fonte: O Autor

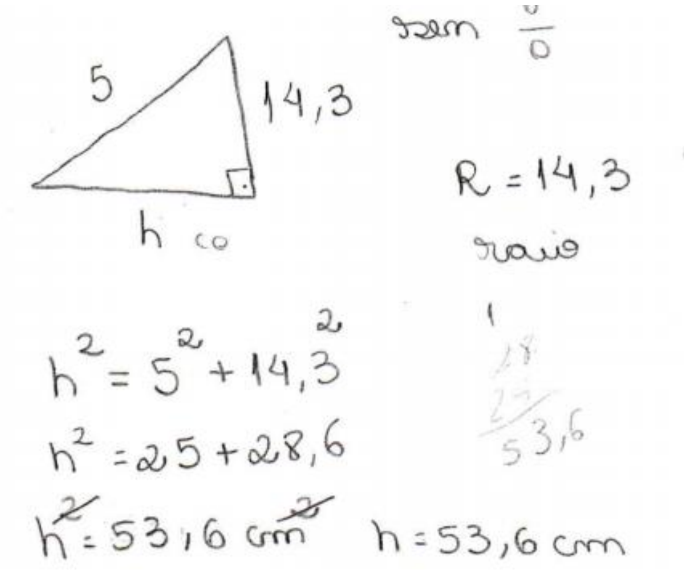
Erro do tipo 2 (Linguagem mal interpretada):

Decorreu da dificuldade na identificação do cone e seus elementos.

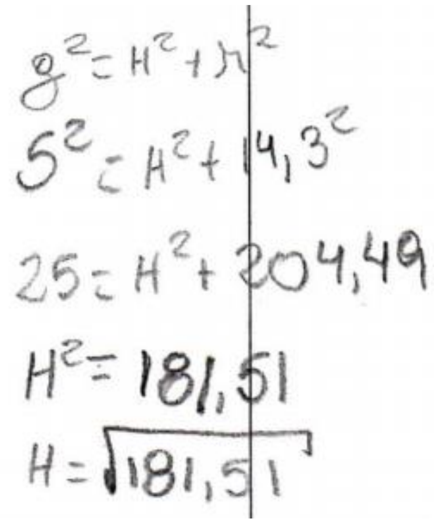
Foi cometido pelos estudantes A1, A3, D5, E3, E4, F11, F12, G6 e H6 que dividiram por 2 a medida da área da base e trataram como se fosse a medida do raio da base do cone (Figura 11).

Figura 11 – Erro do tipo 2 cometido pelos estudantes

a) Resolução do estudante A3



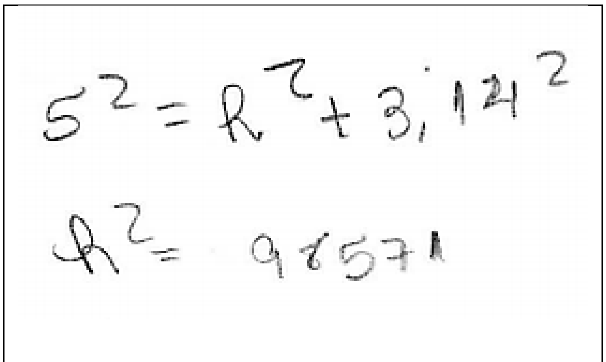
b) Resolução do estudante D5



Fonte: O autor

O mesmo tipo de erro foi cometido pelo estudante C3 que considerou $\pi = 3{,}14$ o raio da base do cone (Figura 12).

Figura 12 – Erro do tipo 2 cometido pelo estudante C3



Fonte: O Autor

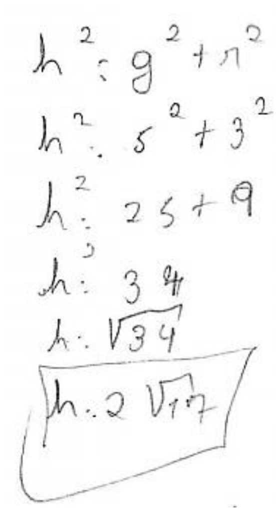
Erro do tipo 4 (Definição ou teorema distorcido):

Decorreu da distorção das relações existentes entre os elementos do cone circular reto, e também da utilização de uma fórmula ou propriedade que não se aplica à questão.

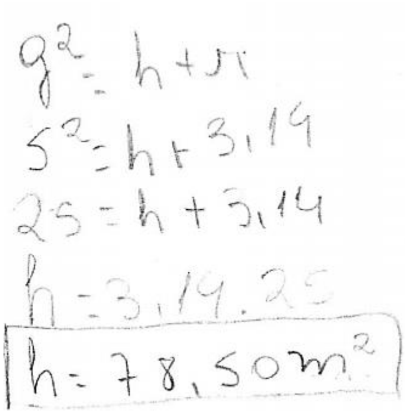
Foi cometido pelos estudantes D6, F7, F15 e H7, que distorceram o Teorema de Pitágoras, a relação existente entre a geratriz, o raio da base e a altura do cone (Figura 13).

Figura 13 – Erro do tipo 4 cometido pelos estudantes

a) Resolução do estudante D6



a) Resolução do estudante F15

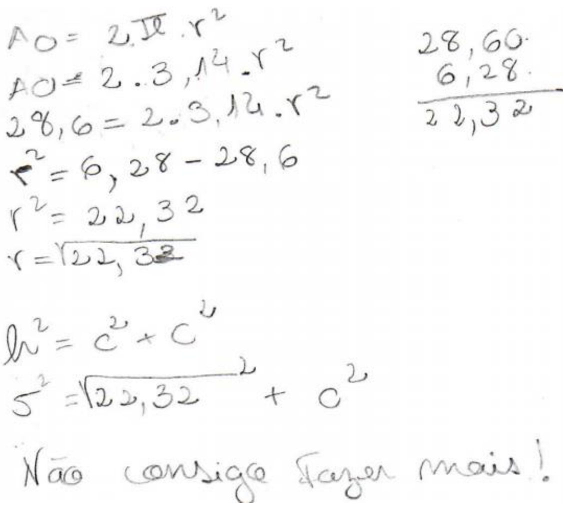


Fonte: O Autor

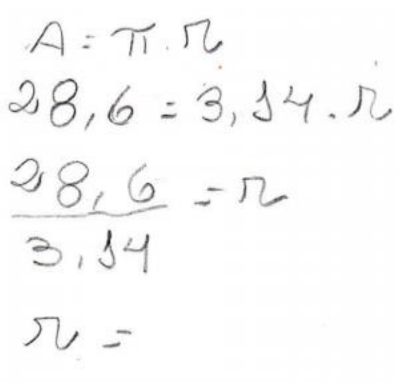
Foi também cometido pelos estudantes C8, E5, F9, F10, G3 e G8, que distorceram de alguma forma, a fórmula para o cálculo da área da base do cone (Figura 14).

Figura 14 – Erro do tipo 4 cometidos pelos estudantes

a) Resolução do estudante F9



b) Resolução do estudante E5

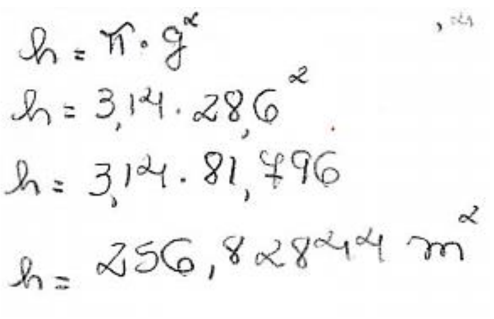


Fonte: O Autor

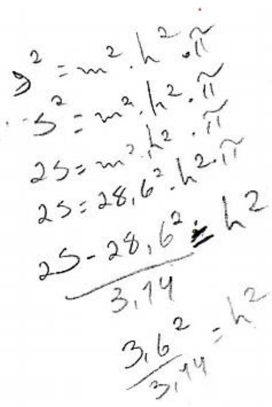
E pelos estudantes E1, E8, F6, F8, F13, F17, F19, G5, G7, H1, H7, I3 e J4, que resolveram utilizando fórmulas diferentes, que não são válidas nesta questão (Figura 15).

Figura 15 – Erro do tipo 4 cometidos pelos estudantes

a) Resolução do estudante E1



b) Resolução do estudante H1



Fonte: O Autor

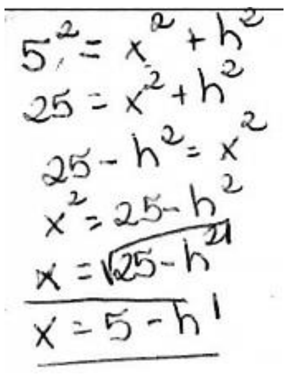
Erro do tipo 6 (Erros técnicos):

Compreendem os erros cometidos com cálculo algébrico e operações fundamentais. Foram cometidos pelos estudantes C4, D4, F4, F1 e F14.

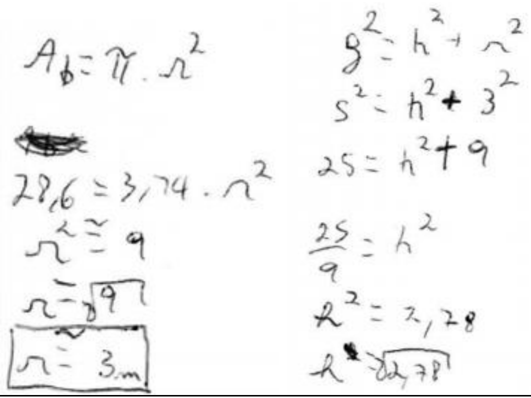
Para ilustrar, tem-se como exemplo a resolução do estudante F4 que compreendeu o problema, determinou a medida do raio da circunferência e aplicou corretamente o Teorema de Pitágoras; porém, cometeu um erro de cálculo algébrico ao dividir 25 por 9 pois: deveria subtrair 9 de ambos os lados da equação. Temos também, como exemplo, a resolução do aluno C4, que aplicou corrretamente o Teorema de Pitágoras, no entanto, realizou uma simplificação que não é válida ao extrair a raiz quadrada de $25 - h^2$(Figura 16).

Figura 16 - Erro do tipo 6 cometidos pelos estudantes

a) Resolução do estudante C4



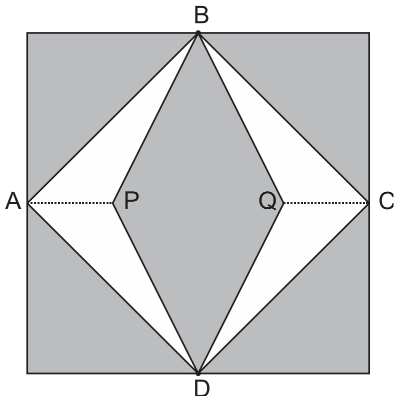
b) Resolução do estudante F4



Fonte: O Autor

4.3.3 Análise dos Erros Cometidos na Questão 3

QUESTÃO 3: *(ENEM – 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.*



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

Foi a questão a qual se obteve o maior número de respostas em branco, um total de 61. Talvez seu enunciado extenso, aliado à dificuldade na interpretação dos dados do problema (Erro do tipo 2), tenha colaborado para este fato. Mesmo assim, ainda obtêve-se três acertos, número superior às questões anteriores. A seguir, apresenta-se a Tabela 05, que descreve os tipos de erros cometidos na questão 3.

Tabela 05 – Erros cometidos na questão 3

Erro	Quantidade de alunos
Erro do tipo 2: Linguagem mal interpretada	13
Erro do tipo 5: Solução não verificada	1
Erro do tipo 6: Erros técnicos	4

Fonte: O Autor

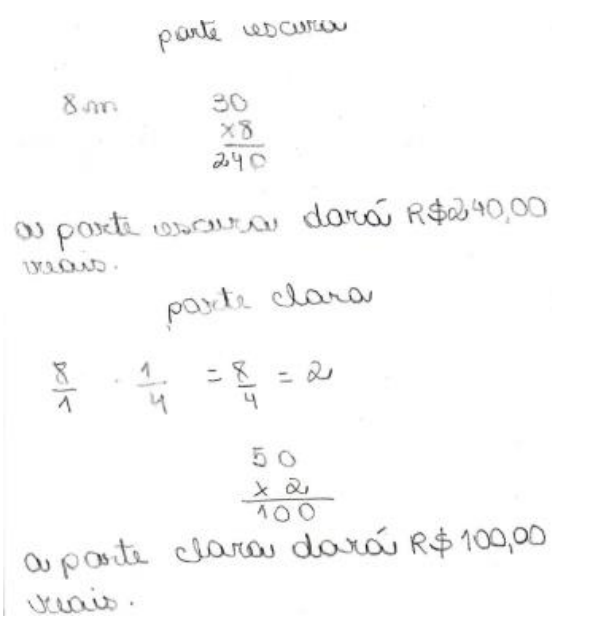
Erro do tipo 2 (Linguagem mal interpretada):

Surgiu da dificuldade em relacionar as informações fornecidas no enunciado da questão, custo dos materiais e medidas do vitral, com os elementos da figura.

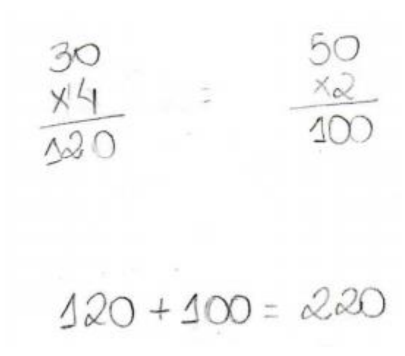
Foi cometido pelos estudantes A3, C5, E8, F7, F14, F18, G7, G9, I3, J1 e J4. Não se encontrou um padrão para esse tipo de erro, no entanto, nota-se que a maioria dos alunos coletou alguns dados do problema e realizou operações de multiplicação e adição, mas em nenhum momento, tentou calcular a área da parte clara e da parte escura do vitral (Figura 17).

Figura 17 – Erro do tipo 2 cometido pelos estudantes

a) Resolução do estudante E8



b) Resolução do estudante G9

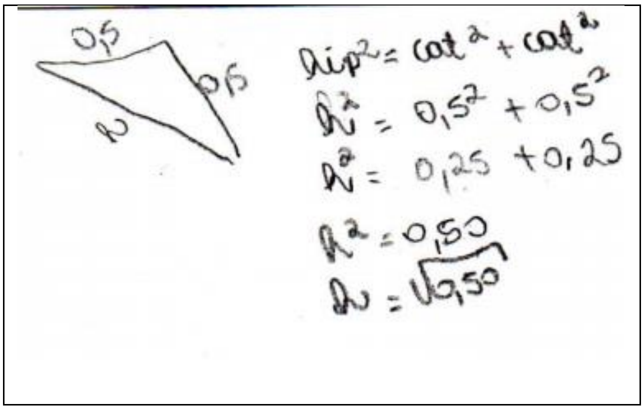


Fonte: O autor

Erro do tipo 5 (Solução não verificada):

Cometido apenas pelo estudante E4, que aplica o Teorema de Pitágoras corretamente, porém, encontra um dado que não é a resposta para o problema.

Figura 18 – Erro do tipo 5 cometido pelo estudante E4



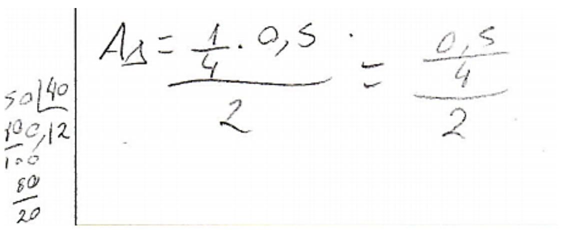
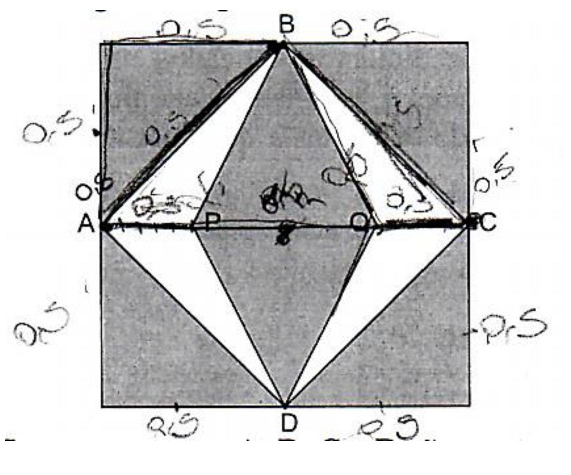
Fonte: O Autor

Erro do tipo 6 (Erros técnicos):

Compreende os erros cometidos em operações com números racionais.

Foi cometido pelo estudante D2, que teve dificuldade com a divisão de números racionais e não concluiu a questão, e F1 que considerou $\frac{1}{4} = 0{,}3$ (Figura 19).

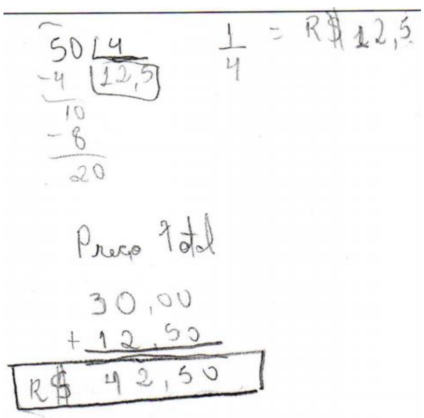
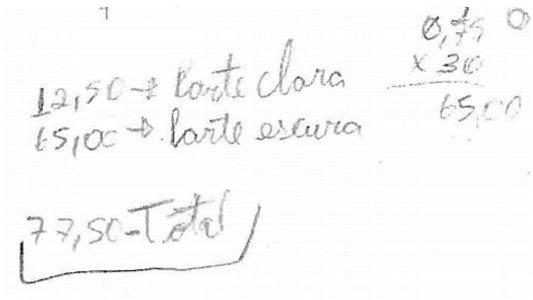
Figura 19 - Erro do tipo 6 cometido pelos estudantes

a) Resolução do estudante D2	a) Resolução do estudante F1
	

Fonte: O Autor

Também foi cometido pelo estudante F19, que compreendeu o problema, porém, cometeu erro na multiplicação $0{,}75 \times 30$. E J5, que calculou corretamente o custo do material utilizado para fabricar a área clara do vitral, mas, ao calcular o custo do material utilizado para a área escura, não subtraiu a medida encontrada da área clara (Figura 20).

Figura 20 – Erro do tipo 6 cometido pelo estudante J5

b) Resolução do estudante J5	b) Resolução do estudante F19
	

Fonte: O Autor

3.3.4 Análise dos Erros Cometidos na Questão 4

QUESTÃO 4: *(ENEM – 2009) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.*

Calcule a distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

Responsável pelo maior número de acertos, com um total de seis, e ainda, foi a questão com o menor número de respostas em branco. Observou-se, ainda, dificuldades com a representação geométrica, caracterizada pelo erro do tipo 2. Nesta questão, grande parte dos erros poderiam ter sido evitados pela simples conferência dos cálculos e verificação das soluções encontradas (se correspondem com o enunciado do problema), pois observou-se grande incidência de erros do tipo 5 e 6. A seguir, apresenta-se a Tabela 06 que descreve os tipos de erros cometidos na questão 4.

Tabela 06 – Erros cometidos na questão 4

Erro	Quantidade de alunos
Erro do tipo 2: Linguagem mal interpretada	21
Erro do tipo 4: Definição ou teorema distorcido	6
Erro do tipo 5: Solução não verificada	7
Erro do tipo 6: Erros técnicos	13

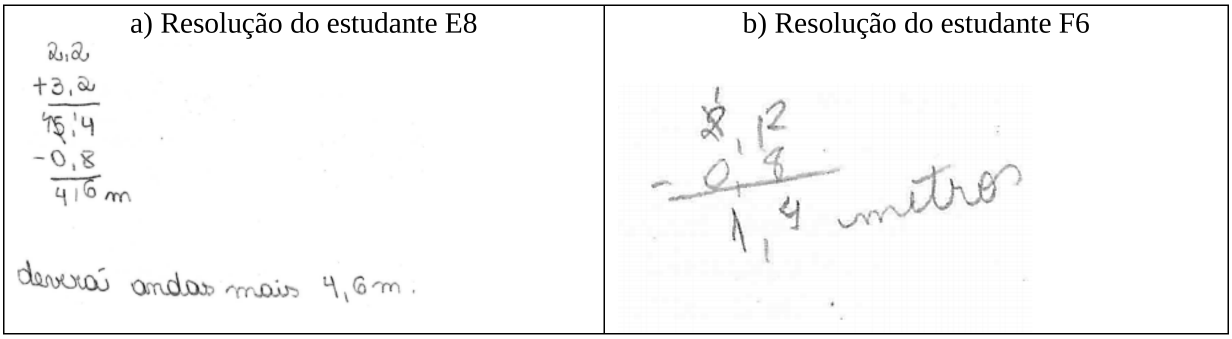
Fonte: O Autor

Erro do tipo 2 (Linguagem mal interpretada):

Surgiu em decorrência da dificuldade de obter informações espaciais e com a representação geométrica do problema.

Foi cometido pelos estudantes E2, E5, E6, E8, F1, F11, F6, F7, F8, F12, F16, F17, F13, H7 e I2, que não representaram a rampa do hospital como a hipotenusa de um triângulo retângulo, e realizaram operações que não levaram à solução do problema. Temos como exemplos, a solução do estudante E8, que soma a distância percorrida, com a medida da altura máxima da rampa, e subtrai a medida da altura na qual o paciente se encontra e a resolução do estudante F6, que subtrai a medida da altura máxima da rampa, da medida da altura na qual o paciente se encontra (Figura 21).

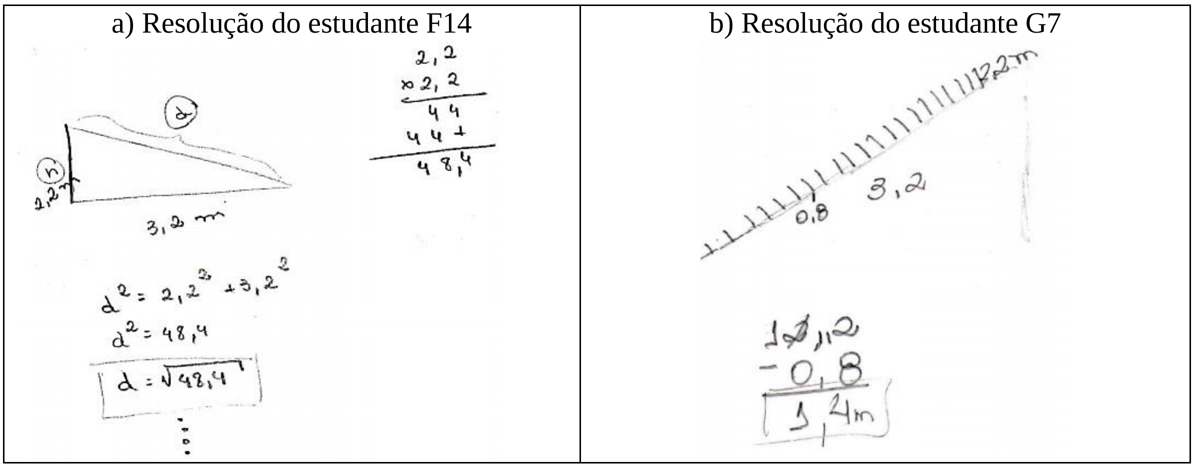
Figura 21 – Erro do tipo 2 cometido pelos estudantes



Fonte: O Autor

Também pelos estudantes B2, F14, F18, G7, G9 e H6, que identificaram a rampa como um triângulo retângulo, porém, não atribuíram corretamente as medidas a seus elementos (Figura 22).

Figura 22 - Erro do tipo 2 cometido pelos estudantes



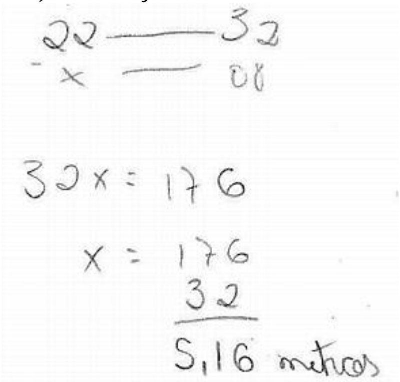
Fonte: O autor

Erro do tipo 4 (Definição ou teorema distorcido):

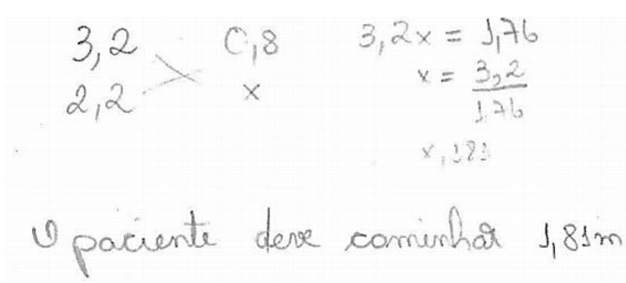
Cometido pelos estudantes A3, C4, D2, G4, G5 e H8, que estabeleceram uma regra de três utilizando triângulos ou segmentos que não são proporcionais (Figura 23).

Figura 23 – Erro do tipo 4 cometido pelos estudantes

a) Resolução do estudante G5



b) Resolução do estudante H8



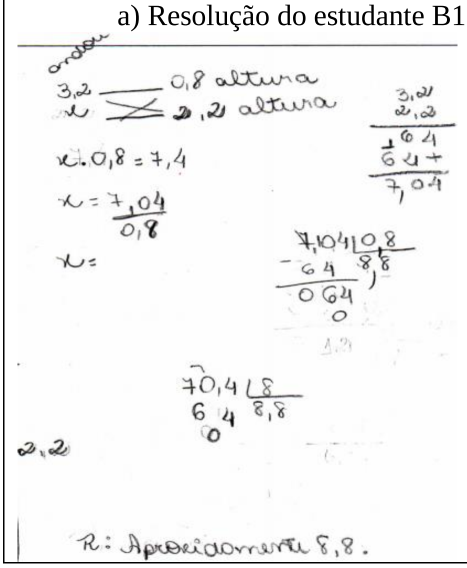
Fonte: O Autor

Erro do tipo 5 (Solução não verificada):

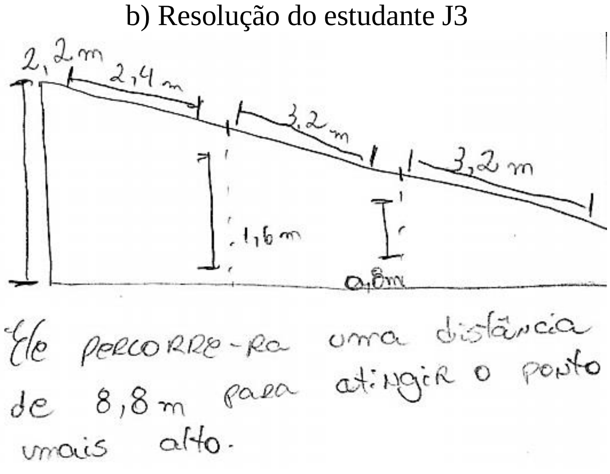
Cometido pelos estudantes A2, B1, C9, F4, G1, e J3, que desenvolveram corretamente todos os passos da resolução e obtiveram o comprimento total da rampa do hospital, porém, não responderam corretamente a questão, pois não consideraram que o paciente já havia caminhado 3,2 m pela rampa (Figura 24).

Figura 24 – Erro do tipo 5 cometido pelos estudantes

a) Resolução do estudante B1



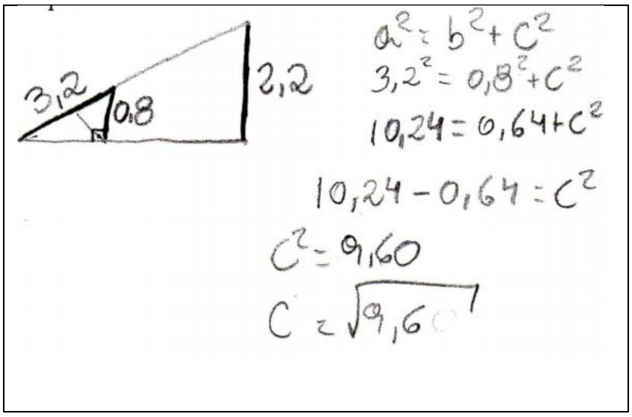
b) Resolução do estudante J3



Fonte: O autor

E pelo estudante E5, que aplicou corretamente o Teorema de Pitágoras obtendo o deslocamento horizontal já realizado sobre a rampa, que não é a resposta correta para o problema (Figura 25).

Figura 25 – Erro do tipo 5 cometido pelos estudantes



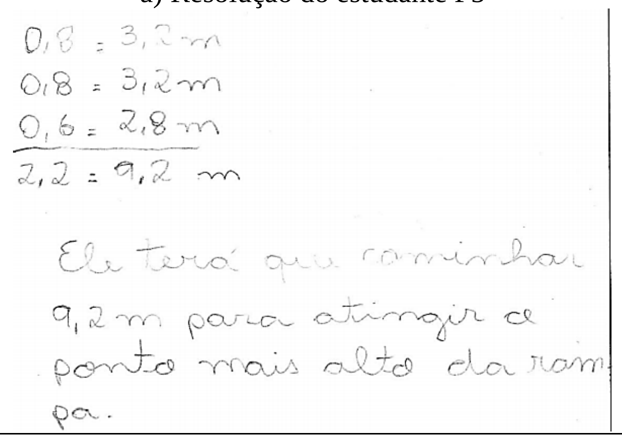
Fonte: O Autor

Erro do tipo 6 (Erros técnicos):

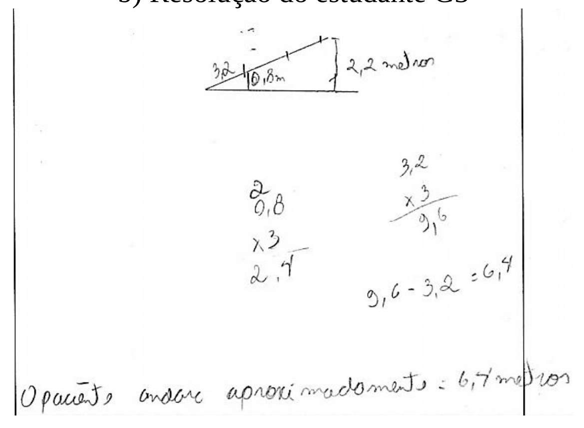
Foi cometido pelos estudantes C1, C2, C3, D3, F5, F19, G3, J1, J2, J8 e J9, que interpretaram corretamente o problema, estabeleceram uma proporção válida entre a altura e o comprimento da rampa, porém cometeram errro nos cálculos (Figura 26).

Figura 26 – Erro do tipo 6 cometido pelos estudantes

a) Resolução do estudante F5



b) Resolução do estudante G3

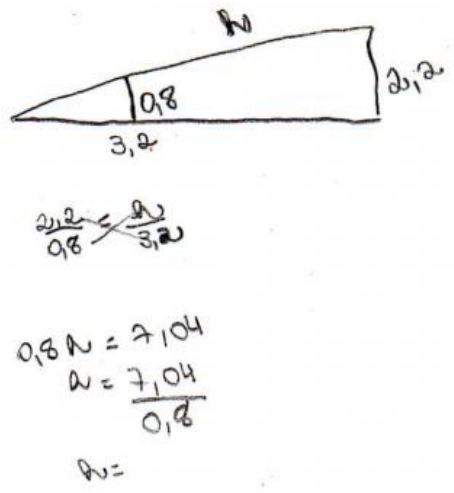


Fonte: O Autor

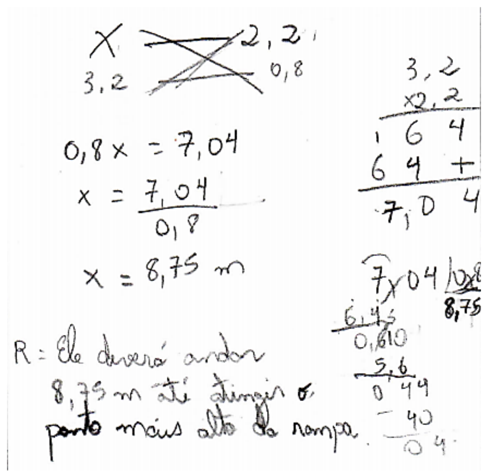
Também foi cometido pelos estudantes E4 e J5, que aplicaram corretamente a regra de três, porém, E4 não concluiu a divisão, e J5 cometeu erro técnico ao dividir 7,04 por 0,8 (Figura 27).

Figura 27 – Erro do tipo 6 cometido pelo estudante J5

a) Resolução do estudante E4



a) Resolução do estudante J5



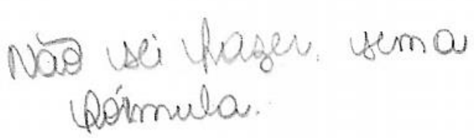
Fonte: O Autor

4.3.5 Análise Geral

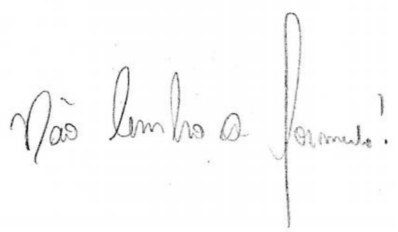
Em todas as turmas nas quais se aplicou o teste, os estudantes se queixaram da ausência das fórmulas para a resolução. Optou-se por não fornecer-lhes o formulário tendo em vista que o ENEM também não o faz. Os estudantes D1, D7, D8, D9, D10, F4, F12 F16, F18 e F19, deixaram registros escritos nas provas apontando na ausência de fórmulas o principal motivo pelo qual não conseguiram resolver algumas questões. Temos como exemplo os registros de D7 e F12 (Figura 28).

Figura 28 – Dificuldades apontadas pelos estudantes

a) Registro do estudante D7



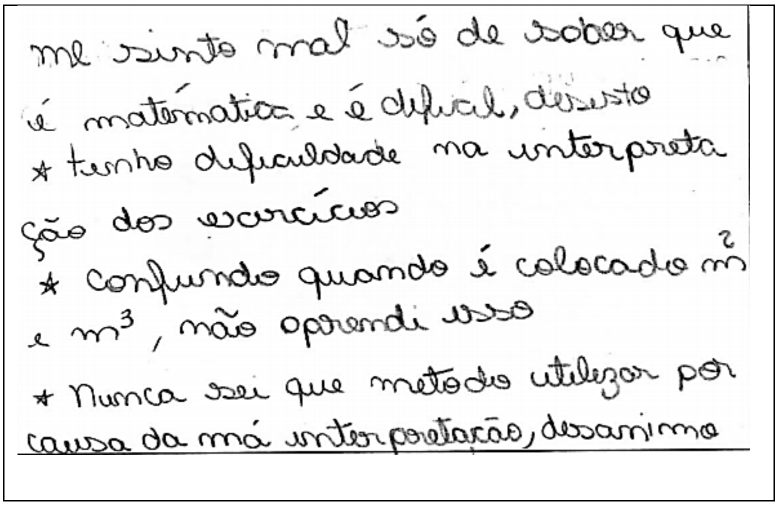
b) Registro do estudante F12



Fonte: O Autor

Destaca-se também o depoimento do estudante A3, relatando a dificuldade na interpretação das questões. Nota-se, pelo relato, dificuldades com a linguagem Matemática (Figura 29).

Figura 29 – Relato do estudante A3


me sinto mal só de saber que
é matemática e é difícil, desgosto
* tenho dificuldade na interpreta
ção dos exercícios
* confundo quando é colocado m²
e m³, não aprendi isso
* Nunca sei que método utilizar por
causa da má interpretação, desanimo

Fonte: O Autor

Apresenta-se, na Tabela 07, o número total de acertos e erros de cada tipo, cometidos em cada questão, e também o número de questões que não foram feitas.

Tabela 07 – Erros Cometidos Pelos Estudantes das Escolas Públicas

	Questão 1	**Questão 2**	**Questão 3**	**Questão 4**	**Total**
Acertou	0	2	3	6	**11**
Não Fez	38	41	61	29	**169**
Erro tipo 1	0	0	0	0	**0**
Erro tipo 2	16	10	13	21	**60**
Erro tipo 3	0	0	0	0	**0**
Erro tipo 4	20	24	0	6	**50**
Erro tipo 5	1	0	1	7	**9**
Erro tipo 6	7	5	4	13	**29**

Fonte: O Autor

Fazendo uma análise geral dos resultados, ao todo, foram encontrados 148 erros num total de 328 questões analisadas. Dos erros obtidos, 40,5% são do tipo 2, o que evidencia a dificuldade dos alunos na interpretação dos enunciados e na passagem da linguagem natural para a linguagem Matemática. Observou-se também dificuldades em compreender, aplicar ou recordar-se de fórmulas matemáticas, caracterizadas pelo erro do tipo 4, presente em 33,8% dos erros encontrados. Os erros em operações fundamentais, e na manipulação de símbolos algébricos totalizaram 19,6%, representados pelos erros do tipo 6. Os erros do tipo 5 ocorreram em menor número, apenas 6,1%. Não foram encontrados erros do tipo 1 e do tipo 3.

Cordeiro (2009), em sua dissertação de mestrado, realizou uma pesquisa com estudantes do Ensino Fundamental de 6º ao 9º anos, com questões de Geometria plana da OBMEP[4]. Analisou um total de 96 erros, dos quais classificou 59% como erros devido à dificuldade na linguagem, sendo também o erro mais expressivo que ocorreu, assim como em nossa pesquisa.

Brum (2013), em sua dissertação de mestrado realizou uma pesquisa com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública e outra privada, do município de Tupanciretã – RS, na resolução de questões algébricas. Na escola pública, aplicou um teste composto de cinco questões à 23 estudantes, obtendo um total de 86 erros. Os resultados verificados foram bem diferentes dos obtidos na nossa pesquisa, talvez pela especificidade do conteúdo envolvido. Brum obteve, com maior expressividade, erros do tipo 6 (55,8%) seguidos pelos erros do tipo 2 (19,8%).

[4] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As preocupações com a qualidade do ensino de Matemática nas escolas públicas são temas constantes nas discussões políticas e educacionais brasileiras. E estas estão pautadas, principalmente, nos resultados das avaliações dos exames nacionais, como por exemplo, o IDEB e o ENEM.

Segundo dados do INEP, referentes ao ano de 2011, o IDEB nacional para o Ensino Médio foi de 3,4 enquanto que no estado do Paraná foi de 3,7. Para que o País atinja o nível de qualidade educacional, em termos de proficiência e rendimento (taxa de aprovação), da média dos países desenvolvidos observada atualmente, deverá atingir 4,9, essa é a meta definida para 2021.

Bortoli (2011) afirma que os níveis de proficiência em Matemática no Ensino Médio são muito baixos e pouco se alteraram de 1995 a 2005, e que alguns alunos avaliados possuem noções mínimas de Matemática básica.

Os resultados dessas avaliações refletem o desempenho dos alunos na Educação Básica, bem como a qualidade do que e como são ministrados os conteúdos de Matemática. Nesse sentido uma discussão acerca desta problemática torna-se premente.

Esta pesquisa buscou fornecer subsídios ao professor para analisar e refletir sobre os erros cometidos por seus alunos buscando contribuir para aumentar os índices de avaliação, com implicação na melhoria da formação do estudante.

Para tanto tomamos como referência a análise de erros proposta por Cury (2007) bem como o modelo para a classificação de erros proposta por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) que propõe classificar os erros cometidos em questões de Matemática em seis categorias como já exposto na subseção 2.2. Foram obtidos quatro tipos de erros dos quais apresenta-se a seguir.

O erro do tipo 2 (Linguagem mal interpretada) foi cometido nas quatro questões, e ocorreu em maior número do cômputo geral. Decorreu da dificuldade para representar geometricamente a situação descrita no enunciado e associar as informações fornecidas com o conceito matemático a que se referem. Esse tipo de erro pode ser evitado trabalhando com os alunos problemas contextualizados e explorando as formas geométricas presentes na natureza, pois uma das razões que podem justificar as dificuldades com a interpretação dos enunciados, pode decorrer da falta de domínio ou de conhecimento do contexto do problema.

O erro do tipo 4 (Definição ou teorema distorcido) foi cometido em maior número nas questões 1 e 2. Decorreu da dificuldade em lidar com as fórmulas matemáticas envolvidas na resolução das questões. Observa-se em sala de aula uma tendência natural que os alunos tem de decorar fórmulas matemáticas sem se preocupar com o conceito dessas fórmulas. Nas questões 1 e 2, grande parte dos erros poderiam ter sido evitados, se os estudantes tivessem um conceito sólido da fórmula da área do círculo. Para evitar esse tipo de erro, sugere-se um trabalho contrutivo dessas relações matemáticas juntamente com os alunos. Aos alunos recomenda-se

O erro do tipo 5 (Solução não verificada) foi cometido em menor número. Em geral pode ser evitado se o estudante habitua-se a confrontar sua resposta com o enunciado do problema. Neste caso cabe ao professor estimular o aluno a questionar se sua resposta é adequada para a questão, e no caso do erro, se em alguma situação seria válida.

Encontrou-se 29 erros do tipo 6 (Erro técnico) em geral decorrentes de erros de cálculo e erros na manipulação de símbolos algébricos. Esse tipo de erro decorre em geral por falta de atenção.

Não encontrou-se erros dos tipos 1 e 3, sendo que erros do tipo 3 são mais comuns no conteúdo algébrico. Observou-se 169 questões em branco.

Aos alunos, analisando as dificuldades encontradas na resolução dos problemas propostos, bem como os erros cometidos, propõe-se a leitura e interpretação de textos de diversos gêneros, como forma de desenvolver competências necessárias à interpretação dos enunciados de questões de Geometria, reduzindo assim as dificuldades evidenciadas pelos erros do tipo 2, como os obtidos na questão 3, decorrentes da interpretação incorreta dos enunciados. Recomenda-se também a verificação dos resultados obtidos ao término da resolução das questões, confrontando as respostas obtidas com os enunciados, evitando assim erros do tipo 5, como os erros cometidos pelos estudantes A2, B1, C9, F4, G1, e J3 na resolução da questão 4, e a conferência das operações realizadas, evitando erros ténicos.

Pavanello (1989) em sua dissertação de mestrado fez uma análise histórica do ensino da Matemática no Brasil e no mundo, objetivando verificar a razão do abandono do ensino da Geometria nas escolas brasileiras. Segundo a pesquisadora, analisando os currículos e programas escolares observa-se que, no Ensino Fundamental anos Finais e Ensino Médio, predomina o ensino da Álgebra, enquanto que a Geometria é abordada em um tópico separado dos demais conteúdos e de forma tradicional.

Com a elaboração das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2008) e do Caderno de Expectativas de Aprendizagem (2011) notou-se o preenchimento dessa lacuna do conteúdo de Geometria que havia no currículo. Observa-se a preocupação em inserir o conteúdo de Geometria em todas as séries do Ensino Fundamental anos Finais e do Ensino Médio.

Pode-se afirmar pelos dados obtidos nesta pesquisa, que os alunos ainda têm grande dificuldade com o conteúdo de Geometria, pelo fato de que apenas 3,4% das questões foram resolvidas corretamente, além disso temos 51,4% de respostas em branco.

Este estudo levanta algumas preocupações com o ensino da Geometria, já constatadas por outros pesquisadores, tendo em vista o número reduzido de acertos obtidos e os baixos índices de rendimento nos exames nacionais. Constatou-se também que o erro é uma importante ferramenta para o professor, pois por meio dele, pode-se diagnosticar o nível dos alunos e das aulas, auxiliando nas estratégias didáticas e no planejamento das aulas.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C., **A pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG, 2004.

BORTOLI, M. DE F. **Análise de erros em matemática: um estudo com alunos de ensino superior.** 2011. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **ENEM: Fundamentação Teórico-Metodológica**. Brasília: INEP, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros didáticos:** PNLD 2014: Matemática. Brasília, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

BRUM, LAUREN D. **Análise de erros cometidos por alunos de 8º ano do ensino fundamental em conteúdos de álgebra**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2013.

CORDEIRO, CLAILTON C. **Análise e classificação de erros de questões de Geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias, 2009.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com os erros dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DALTO, JADER O. **A produção escrita em Matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8º ano do ensino fundamental e à 3ª série do ensino médio da AVA/2002. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2007.

EUCLIDIS ELEMENTA, Traduzido para o inglês por Richard Fitzpatrick, 2008. Disponível em http://farside.ph.utexas.edu/euclid/elements.pdf. Acesso em 08 de Janeiro de 2013.

EVES, HOWARD. **Introdução à história da Matemática.** Tradução: Higino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2007.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Dicionário Aurélio Básico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1988.

GARNICA, A. V. M. **História Oral e educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

INEP, **Metodologia da concepção do IDEB (Nota Técnica)**. Disponível em http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/o_que_e_o_ideb/Nota_Tecnica_n1_concepcaoIDEB.pdf, Acesso em 20 de Janeiro de 2014.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? In: Revista **A Educação Matemática em Revista.** São Paulo: SBEM, 1995, v.4.
MOREN, E.B.S., DAVID, M.M.S. e MACHADO, M.P.L. (1992) "Diagnóstico e análise de erros em Matemática: Subsídios para o processo de ensino/aprendizagem". **Cadernos de Pesquisa**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, nº 83, p. 43-51.

MOVSHOVITZ-HADAR, N. et al. **An empirical classification model for errors in High School Mathematics**. Journal for Research in Mathematics Education, v. 18, n. 1, p. 3-14, 1987.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno de Expectativas de Aprendizagem.** Curitiba: Seed/DEB-PR, 2011.

PARANÁ, Secretaria Estadual de Educação – SEED. **Consulta Escolas**. Disponível em http://www4.pr.gov.br/escolas/listaescolas.jsp. Acesso em 27 de Setembro de 2013.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Curitiba: Seed/DEB-PR, 2008.

PAVANELLO, R. M**. O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica**. 1989. Universidade Estadual de Campinas. Dissertação (Mestrado em Educação). Campinas, 1989.

PENG, A.; LUO, Z. A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. For the Learning of Mathematics, 2009.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como uma estratégia didática:** Estudo do erro no ensino da Matemática Elementar. Campinas: Papirus, 2000.

RADATZ, H. Error Analysis in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education, 1979.

RODRIGUES, Márcio Urel. **Análise das Questões de Matemática do Novo ENEM (2009 á 2012):** Reflexões para Professores de Matemática. UNEMAT, 2013 Disponível em: http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/1029_804_ID.pdf Acesso em 22 de setembro de 2013.

VITRAC, B. A invenção da geometria. In **Scientific American-História**: n 3. São Paulo: Ediouro, 2006.