Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Mestrado Profissional em rede nacional - PROFMAT
Curso de Pós-graduação em Matemática

Carlos Alexandre Santana Oliveira

Recorrência Matemática Aplicada à Resolução de Problemas no Ensino Médio

Macapá
2014

Carlos Alexandre Santana Oliveira

Recorrência Matemática Aplicada à Resolução de Problemas no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROFMAT - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco

Macapá

2014

Oliveira, Carlos

Recorrência Matemática Aplicada à Resolução de Problemas no Ensino Médio / Carlos Oliveira - 2014

57.p

1.Modelagem Matemática 2. Recorrência Matemática.. I.Título.

CDU 536.21

Carlos Alexandre Santana Oliveira

Recorrência Matemática Aplicada à Resolução de Problemas no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROFMAT - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 03 de Abril de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Guzman Eulalio Isla Chamilco

Doutor em Matemática - UNIFAP

Mauro Lima Santos

Doutor em Matemática - UFPA

José Walter Cardenas Sotil

Doutor em Matemática - UNIFAP

Erasmos Senger

Doutor em Matemática - UNIFAP

Aos meus pais Antônio e Ester (in memoriam).

A minha família, Erica e Samuel, pelas inúmeras alegrais proporcionadas.

Resumo

Neste trabalho, abordamos os conceitos de recorrência linear de 1ª e 2ª ordem, e suas técnicas empregadas na resolução de problemas. Mostramos que este estudo se baseia em exibir um modelo matemático para explicar o comportamento de determinados padrões, sejam eles numéricos ou geométricos. Exibimos diferentes aplicações para mostrar que a recorrência matemática é uma importante ferramenta na modelagem matemática e que seu estudo é acessível aos estudantes de nível médio. Enfatizamos, através da resolução de questões encontradas nos livros didáticos e até mesmo nas olimpíadas de matemática, que o domínio das técnicas recursivas pode favorecer ao aluno a aquisição de habilidades na resolução de problemas. Além disso, encorajamos professores a instigarem o raciocínio recursivo de seus alunos, a modelarem , quando possível, problemas matemáticos por meio da recorrência.

Palavras - Chave: Recorrência matemática. Padrões matemáticos. Matemática discreta.

Abstract

In this paper, we discuss the concepts of linear recurrence 1st and 2nd order, and techniques used in problem solving. We show that their study is based on showing a mathematical model to explain the behavior of certain standards, whether they are numeric or geometric. Exhibit different applications to show that mathematics recurrence is an important tool in mathematical modeling and their study is accessible to high school students. We emphasize, by resolving issues found in textbooks and even in the Olympics of mathematics, the field of recursive techniques can encourage the student to acquire skills in problem solving. In addition, we encourage teachers to instigate the recursive reasoning of their students, the fashioning, when possible, mathematical problems by recurrence.

Keywords: Math recurrence. Mathematical patterns. Discrete mathematics.

Agradecimentos

A Deus por ser a fonte de todo o conhecimento.

Aos amigos do PROFMAT-UNIFAP pelos inúmeros auxílios diante das dificuldades enfrentadas.

Ao Professor Doutor Guzman Eulalio Isla Chamilco pelas constantes contribuições.

"Planeje seu progresso, cuidadosamente, cada hora, cada dia, cada mês. A ação organizada, unida ao entusiasmo, produz uma força irresistível".

P. Meyer

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

Este trabalho tem por principal objetivo incentivar o professor a despertar em seus alunos o uso de raciocínio recursivo na resolução de problemas de nível médio. Veremos que as aplicações que serão tratadas no decorrer desta monografia fazem parte do currículo de Matemática que norteiam os últimos anos da educação básica.

Sabemos que o ensino de recorrência se baseia na descoberta de padrões numéricos, e que tais padrões são descobertos, na maioria das vezes, através de cálculo avançado, o que não quer dizer que não se aplica ao ensino médio. Nesse sentido, esperamos a partir das análises aqui apresentadas, despertar o interesse do leitor pela descoberta e pela beleza dos padrões encontrados em diversos ramos do conhecimento.

Veremos que todo padrão - numérico ou geométrico - pode ser modelado por meio de técnicas recursivas. Vale ressaltar que a exibição de uma fórmula que se justifica pela existência dos padrões em estudo, requer do modelador, além do conhecimento de matemática, intuição e criatividade. Segundo BIEMBENGUT(2013),

> há um consenso no que diz respeito ao ensino de matemática precisar voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade em utilizá-lo. O que significa ir além das simples resoluções de questões de matemática, muitas vezes sem significado para o aluno, e leva-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria matemática quanto da natureza do problema a ser modelado.

Buscando-se em um melhor entendimento das técnicas recursivas empregadas na modelagem de problemas, na seção 2, faremos uma abordagem sobre sequências recorrentes enfocando o estudo de recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem.

Na seção 3, enfatizaremos as principais aplicações do estudo de recorrência: Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, A Torre de Hanói, Matemática Financeira, desintegração de elementos químicos, eliminação de uma droga do organismo, a Lei de Newton do aquecimento e do resfriamento, Fractais e Análise Combinatória.

Na seção 4, exibiremos soluções de algumas questões, selecionadas de livros didáticos nacionais e das olimpíadas de matemática, por meio da recorrência matemática.

Acreditamos que a leitura desse trabalho contribuirá com a formação de alunos e professores, despertando novos olhares sobre a resolução de problemas matemáticos, com uso de técnicas recursivas, sejam reais ou não.

2 Sequências Recorrentes

Uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra que permite calcular um termo qualquer por meio de um ou mais termos anteriores. Por exemplo, PAs, PGs, fatorial, potências com expoentes naturais e a sequência de Fibonacci[1] são definidas por recorrência.

Em BOYER (1996), a sequência de Fibonacci foi inspirada num problema que consistia em determinar o número de pares de coelhos que serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês. Desse problema célebre surge à sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., F_n, ...$, onde $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Além da sequência de Fibonacci existem outras que são comuns, como por exemplo, a sequência de inteiros:

$$a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n \tag{2.1}$$

na qual fixamos que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores, o que equivale dizer que para todo $n \geq 3$:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \tag{2.2}$$

O processo pelo qual se determinam sucessivamente os termos particulares destas sequências chama-se processo recorrente e uma igualdade da forma (2.2) é uma fórmula recorrente.

É fácil ver que podemos construir outras sequências recorrentes para inteiros usando à condição (2.2), como por exemplo:

$$2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, ...$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...$$

$$-1, -5, -6, -11, -17, ...$$

[1] Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, matemático italiano do século XI, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

Destacamos que para se estabelecer a sequência (2.1) precisamos conhecer os dois primeiros elementos e a partir daí encontrar todos os elementos exigidos, usando a regra definida em (2.2).

Para um melhor entendimento lançamos mãos dos exemplos abaixo:

Exemplo 2.1. A Sequência dos números naturais pares pode ser tabulada da seguinte maneira:

$$(2, 4, 6, 8, 10, 12, ...)$$

nela é fácil ver que:

$$a_1 = 2 \times 1 = 2$$

$$a_2 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_3 = 2 \times 3 = 6$$

Mantendo-se a mesma linha de raciocínio, chegamos à relação de recorrência para os números naturais pares:

$$a_n = 2n \tag{2.3}$$

que é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2. A sequência (3,6,9,...) pode ser expressa pela relação de recorrência:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 3 \tag{2.4}$$

para todo $n \geq 2$.

Exemplo 2.3. A sequência (F_n) de Fibonacci, que é definida por:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{2.5}$$

é válida para todo $n \geq 0$ e $F_0 = F_1 = 1$.

Exemplo 2.4. Mostre que a soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $F_{n+2}-1$.
Solução: Queremos mostrar que $F_n = F_{n+2} - 1$. Como cada termo da sequência de Fibonacci é determinado por:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

o que equivale a

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

daí,

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$...$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Somando-se todas essas n igualdades, obtemos:

$$F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

Vamos agora classificar uma equação de recorrência de acordo com a linearidade. A linearidade está relacionada ao fato de um termo está em função dos outros imediatamente anteriores.

2.1 Recorrências Lineraes de 1ª Ordem

Uma recorrência é dita linear de primeira ordem quando a lei que define os elementos da sequência for da forma:

$$a_{n+1} = ba_n + c(n) \tag{2.6}$$

onde b e c são funções de $n \in \mathbb{N}$. Em (2.6) se $c(n) = 0$, a recorrência linear é dita homogênea, caso contrário é não homogênea.

Exemplo 2.5. $a_{n+1} = 2a_n$ é uma equação linear homogênea de 1ª ordem enquanto que, $a_{n+1} = (n-1)a_n + 4$ é uma equação linear de 1ª ordem não homogênea.

Por se tratar de uma equação vamos, através dos exemplos seguintes, apresentar maneiras de resolução. A solução de uma equação de recorrência é obtida quando escrevemos a_n em função de n. Vejamos:

Exemplo 2.6. Vamos determinar a solução da equação de recorrência $a_{n+1} = 2a_n$, com condição inicial $a_1 = 2$. Para escrevermos a_n em função de n, vamos analisar o comportamento da sequência a partir do seu valor inicial. Daí,

$$a_2 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2^3$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 = 2^4$$

$$...$$

$$a_n = 2^n$$

é uma possível solução da equação de recorrência.

Exemplo 2.7. Resolva a equação de recorrência $a_{n+1} = a_n + n$, $a_1 = 0$.

Solução: Podemos escrever cada termo, a partir do segundo, como abaixo:

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 3$$

$$...$$

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

Adicionando, obtemos:

$$a_n = a_1 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$$

Como o segundo membro da última igualdade representa a soma dos termos de progressão aritmética, temos:

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \tag{2.7}$$

Exemplo 2.8. Vejamos como determinar a solução da equação de recorrência $a_{n+1} = a_n + 2n$, com $a_1 = 1$. Vamos determinar os valores iniciais da sequência.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 = 7 + 6 = 13$$

De posse dos valores iniciais, podemos escrever:

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 6$$

$$...$$

$$a_n - a_{n-1} = 2 \cdot (n-1)$$

Adicionando as igualdades acima, obtemos:

$$a_n - a_1 = 2 + 4 + 6 + ... + 2 \cdot (n-1).$$

Note que $2+4+6+...+2\cdot(n-1)$ são os termos de uma Progressão Aritmética de razão 2, então:

$$a_n - 1 = \frac{[2 + 2 \cdot (n-1)] \cdot (n-1)}{2}.$$

Resultando na solução da equação de recorrente:

$$a_n = n^2 - n + 1. \tag{2.8}$$

Exemplo 2.9. Vamos escrever a_n em função de n na recorrência $a_{n+1} = n \cdot a_n$ considerando $a_1 = 1$. Para isso analisemos os termos da sequência:

$$a_2 = 1 \cdot a_1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3$$

$$...$$

$$a_n = (n-1) \cdot a_{n-1}$$

Multiplicando, podemos escrever

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1}$$

O que nos permite concluir que

$$a_n = (n-1)!. \tag{2.9}$$

Exemplo 2.10. Resolva a recorrência $a_{n+1} = a_n + 2^n$ considerando $a_1 = 1$.

*Solução:*Os termos da recorrência são dados por:

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

$$a_4 = a_3 + 2^3$$

$$...$$

$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

Adicionando, encontramos

$$a_n = a_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1})$$

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$$

Como $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$ representa a soma de uma progressão geométrica de n termos e razão 2, segue que

$$a_n = 2^n - 1 \tag{2.10}$$

Diante das soluções recorrentes precisamos lançar mãos de um outro recurso matemático para verificar suas validades, no universo dos números naturais. Tal validade se verifica através do Princípio da Indução Matemática.

Teorema 2.1 (Princípio da Indução Matemática)**.** *Seja $P(n)$ uma proposição associada a cada a natural $n > 0$ e que satisfaz às seguintes condições:*

1. *$P(1)$ é verdadeira;*

2. *Para todo n natural, se $P(n)$ é verdadeira então $P(n+1)$ também é verdadeira.*

O Teorema 2.1 é uma forma de verificar se uma equação de recorrência tem solução $S = \mathbb{N}$.

Exemplo 2.11. Vamos verificar a validade da solução $a_n = 2^n$ para a equação de recorrência $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$, com $a_1 = 2$, usando o Princípio da Indução Matemática. Daí,

1. $P(1) = 2^1 = 2$ (ok)

2. Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para todo n, o que equivale a $a_n = 2^n$. Queremos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja $a_{n+1} = 2^{n+1}$. Assim:

$$a_n = 2^n$$

Multiplicando a igualdade acima por 2, temos:

$$2 \cdot a_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = a_{n+1}$$

O que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira para todo n. Portanto a solução da equação de recorrência $a_n = 2^n$ é verdadeira pelo Princípio da Indução Matemática.

Exemplo 2.12. Façamos a verificação da validade da solução $a_n = n^2 - n + 1$ para a equação de recorrência $a_{n+1} = a_n + 2n$, com $a_1 = 1$.
*Solução:*Pelo Princípio da Indução Matemática, temos:

1. $P(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$ (ok)

2. Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para todo n, o que equivale a $a_n = n^2 - n + 1$. Queremos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja $a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1$ .Assim:
$$a_n = n^2 - n + 1.$$

Adicionando $2n$ nos dois membros da igualdade acima e efetuando manipulações algébricas no segundo membro, temos:

$$a_n + 2n = n^2 + 2n + 1 - n = (n+1)^2 - n = (n+1)^2 - n - 1 + 1$$

$$a_n + 2n = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = a_{n+1}.$$

O que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira para todo n. Portanto $a_n = n^2 - n + 1$ é solução da equação de recorrência $a_{n+1} = a_n + 2n$, pelo Princípio da Indução Matemática.

Exemplo 2.13. Verifique se $a_n = 2^n - 1$ é solução da recorrência $a_{n+1} = a_n + 2^n$ considerando $a_1 = 1$.
Solução: Pelo Princípio da Indução Matemática, temos:

1. $P(1) = 2^1 - 1 = 1$(ok)

2. Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para todo n, o que equivale a $a_n = 2^n - 1$. Queremos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, $a_(n+1) = 2^{n+1} - 1$. Assim:

$$a_n + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 = a_{n+1}.$$

O que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira para todo n. Portanto $a_n = 2^n - 1$ é solução da equação de recorrência $a_{n+1} = a_n + 2^n$, pelo Princípio da Indução Matemática.

2.2 Recorrências Lineares de 2ª Ordem

Uma recorrência é dita linear de segunda ordem quando a lei que define os elementos da sequência for da forma:

$$a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = d(n) \tag{2.11}$$

onde b, c e d são funções de $n \in \mathbb{N}$ e $c \neq 0$. Quando $d = 0$ temos uma recorrência linear de segunda ordem homogênea. Para que uma recorrência do tipo (2.11) defina uma sequência, é preciso estipular os valores dos seus dois termos iniciais.

Exemplo 2.14. A equação de recorrência $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 0$ é linear de 2ª ordem homogênea de coeficientes constantes.

Exemplo 2.15. $a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_n = n$ é uma equação de recorrência linear de segunda ordem não homogênea de coeficientes variáveis.

Para resolver recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, apresentaremos uma técnica. Essa técnica consiste em encontrar progressões geométricas da forma r^n que resolvem a recorrência e cujas razões r são raízes de uma equação algébrica do segundo grau chamada equação característica da recorrência. O termo geral da sequência é então obtido como uma combinação linear dessas progressões com coeficientes determinados graças aos valores dos termos a_1 e a_2.

Observe que a técnica a ser empregada é mesma usada na resolução das equaçõess diferencias lineares homogêneas com coeficientes constantes, onde as PGs são substituídas por funções exponenciais. Daí, a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$, associamos uma equação do segundo grau $r^2 + br + c = 0$, chamada de equação característica.

No caso em que a equação de recorrência é de segunda ordem homogênea, precisamos exibir a_n em função de n usando um dos teoremas abaixo, que foram extraídos de CARVALHO(2013). Vejamos:

Teorema 2.2. *Se as raízes de $r^2+br+c=0$ são r_1 e r_2, então $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$, para todo $A, B \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Basta substituir $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ na recorrência $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$, para concluirmos a demonstração. Vejamos:

$$Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2} + bAr_1^{n+1} + br_2^{n+1} + cAr_1^n + cBr_2^n =$$

$$= Ar_1^n(r_1^2 + br_1 + c) + Br_2^n(r_2^2 + br_2 + c) = Ar_1^n 0 + Br_2^n 0 = 0$$

□

Exemplo 2.16. Vamos obter a solução da recorrência $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 0$ usando o Teorema 2.2.

Solução: A equação característica associada a recorrência é dada por:

$$r^2 - 8r + 15 = 0$$

com raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = 5$. De acordo com o Teorema 2.2, todas as sequências da forma $a_n = A3^n + B5^n$ são soluções da recorrência.

Exemplo 2.17. Vamos determinar as soluções da recorrência $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$. A equação característica associada a recorrência é $r^2 + 3r - 4 = 0$ com raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = -4$. Pelo Teorema 2.2 a solução da equação recorrente é $a_n = A + B(-4)^n$, onde A e B são números reais.

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, todas as soluções da recorrência têm a forma especificada no Teorema 2.2.

Teorema 2.3. *Se as raízes de $r^2 + br + c = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$, para todo $A, B \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja b_n uma solução qualquer de $a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n = 0$. Vamos determinar as constantes A e B que são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 & = & b_1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 & = & b_2 \end{cases}$$

isto é,

$$A = \frac{r_2^2 b_1 - r_2 b_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

e

$$B = \frac{r_1 b_2 - r_1^2 b_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Isso é possível pois $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $b_n = Ar_1^n + Br_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $c_n = b_n - Ar_1^n - Br_2^n$. Mostraremos que $c_n = 0$ para todo n. Temos

$$c_{n+2} + bc_{n+1} + cc_n = (b_{n+2} + bb_{n+1} + cb_n) - Ar_1^n(r_1^2 + br_1 + c) - Br_2^n(r_2^2 + br_2 + c).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque b_n é solução de $a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n = 0$. Os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + br + c = 0$. Então $c_{n+2} + bc_{n+1} + cc_n = 0$.

Além disso, como $Ar_1 + Br_2 = b_1$ e $Ar_1^2 + Br_2^2 = b_2$, temos $c_1 = c_2 = 0$. Mas, se $c_{n+2} + bc_{n+1} + cc_n = 0$ e $c_1 = c_2 = 0$, então $c_n = 0$ para todo n. $\square$

Exemplo 2.18. Vamos agora resolver a equação de recorrência de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $F_0 = F_1 = 1$. A equação característica associada a recorrência é dada por $r^2 = r + 1$, cujas raízes são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pelo Teorema 2.2 a solução é dada por $F_n = A \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Como $F_0 = F_1 = 1$ podemos encontrar os valores das constantes A e B. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} A + B & = 1 \\ A \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & = 1 \end{cases}$$

obtemos,

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

e

$$B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Portanto a solução da equação de recorrência de Fibonacci será dada por

$$F_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2.12}$$

O que equivale a

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \tag{2.13}$$

Observação. Quando as raízes da equação característica forem complexas, a solução $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$, com $A, B \in \mathbb{R}$ pode ser escrita de modo a evitar cálculos com complexos.

Pondo as raízes na forma trigonométrica, teremos:

$$r_1 = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

$$r_2 = \rho(cos\theta - isen\theta)$$

$$r_1^n = \rho^n(cosn\theta + isenn\theta)$$

$$r_2^n = \rho^n(cosn\theta - isenn\theta)$$

$$A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n = \rho^n[(A+B)cosn\theta + i(A-B)senn\theta].$$

Observe que $A + B$ e $i(A - B)$ são constantes arbitrárias e a solução pode ser escrita como segue

$$a_n = \rho^n(A' \cos n\theta + B' senn\theta) \tag{2.14}$$

onde ρ é o módulo do número complexo e θ é o argumento principal.

Exemplo 2.19. Vamos resolver a recorrência $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$.

Solução: A equação característica associada a recorrência é $r^2 + r + 1 = 0$ de raízes

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

O módulo desse número complexo é

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

e argumento principal igual a

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}rad$$

Resultando na solução

$$a_n = \rho^n(A\cos n\theta + Bsenn\theta) = A\cos\frac{n\pi}{3} + Bsen\frac{n\pi}{3}.$$

Vamos agora levar em consideração que as raízes da equação característica são iguais, ou seja, $r_1 = r_2 = r$ e resolver a equação de recorrência através do teorema a seguir.

Teorema 2.4. *Se as raízes de $r^2 + br + c = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = Ar^n + Bnr^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$, para todo $A, B \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Levando em consideração que as raízes são iguais então $r = -\frac{b}{2}$. Substituido $a_n = Ar^n + Bnr^n$ na recorrência $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$, temos que:

$$Ar^{n+2} + Bnr^{n+2} + 2Br^{n+2} + Abr^{n+1} + Bbnr^{n+1} + Bbr^{n+1} + Acr^n + Bcnr^n =$$

$$= Ar^n(r^2 + br + c) + Bnr^n(r^2 + br + c) + Br^n r(2r + b) = Ar^n \cdot 0 + Bnr^n \cdot 0 + Br^n r \cdot 0 = 0.$$

□

Exemplo 2.20. Vamos encontrar a solução da equação de recorrência $a_{n+2} - 10a_{n+1} + 25a_n = 0$.

Solução A equação característica da equação homogênea $a_{n+2} - 10a_{n+1} + 25a_n = 0$ é $r^2 - 10r + 25 = 0$ com raízes $r_1 = r_2 = r = 5$. Logo a solução da homogênea, pelo teorema 2.3, é dada por $a_n = A5^n + Bn5^n$.

No caso em que a equação de recorrência é não-homogênea podemos usar o teorema a seguir para encontrar a solução da equação.

Teorema 2.5. *Se x_n é uma solução da equação $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = d(n)$ então a substituição $a_n = x_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$.*

Demonstração. Façamos a substituição de a_n por $x_n + y_n$ na equação para obtermos:

$$x_{n+2} + y_{n+2} + bx_{n+1} + by_{n+1} + cx_n + cy_n = d(n)$$

$$(x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n) + (y_{n+2} + by_{n+1} + cy_n) = d(n)$$

Como $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = d(n)$ concluímos que a equação $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = d(n)$ se transforma em $y_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$. □

O Teorema 2.5 mostra que a solução de uma recorrência não-homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução da homogênea x_n e uma solução qualquer da não-homogênea y_n. A solução da não-homogênea se baseia em tentativas enquanto que da homogênea, é fácil de achar. Por ser y_n uma solução particular de $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = d(n)$, precisamos escrever y_n como combinação linear de um conjunto de funções capaz de gerar a função $d(n)$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.21. Vamos resolver a equação de recorrência $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = n + 3^n$.

Solução: A equação característica da equação homogênea $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0$ é

$r^2 - 6r + 8 = 0$ com raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Logo a solução da homogênea, pelo Teorema 2.2, é dada por $x_n = A2^n + B4^n$.

Vamos agora descobrir, por tentativas, uma solução particular, y_n, da recorrência $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = n + 3^n$. É coerente supor que y_n seja uma soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial, isto é, $y_n = c_2n + c_1 + c_03^n$, pois devemos substituir y_n em $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n$ para encontrarmos as constantes c_0, c_1 e c_2, que identifica a solução particular de y_n. Façamos então $y_n = c_2n + c_1 + c_03^n$. Substituindo em $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = n + 3^n$, temos:

$$c_2(n+2) + c_1 + c_03^{n+2} - 6[c_2(n+1) + c_1 + c_03^{n+1}] + 8(c_2n + c_1 + c_03^n) = n + 3^n$$

De forma simplificada

$$3c_2n - 4c_2 + 3c_1 - c_03^n = n + 3^n$$

Resultando em

$$c_2 = \frac{1}{3}$$
$$c_1 = \frac{4}{9}$$

e

$$c_0 = -1$$

Dessa forma

$$y_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

Como a solução da recorrência, pelo Teorema 2.5, é dada por $a_n = x_n + y_n$ então:

$$a_n = A2^n + B4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

Exemplo 2.22. Vamos resolver a equação de recorrência $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 1 + 2^n$.
Solução: A equação característica associada a equação homogênea $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0$ é $r^2 - 6r + 8 = 0$ com raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Resultando na solução da homogênea $x_n = A2^n + B4^n$. Tentaremos agora, descobrir uma solução particular para y_n. Note que quando substituirmos y_n em $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n$ encontraremos $1 + 2^n$. Façamos então, por tentativa, $y_n = c_2 + c_12^n$. Substituindo y_n em $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 1 + 2^n$, temos:

$$c_2 + c_12^{n+2} - 6(c_2 + c_12^{n+1}) + 8(c_2 + c_12^n) = 1 + 2^n$$

$$c_2 + 4c_12^n - 6c_2 - 12c_12^n + 8c_2 + 8c_12^n = 1 + 2^n$$

O que implica

$$3c_2 = 1 + 2^n.$$

Concluímos que a igualdade acima é impossível. Dessa forma, a recorrência não admite solução da forma $y_n = c_2 + c_1 2^n$. O motivo da falha nessa primeira tentativa é que $c_1 2^n$ é solução da homogênea ($c_1 = A$ e $B = 0$), portanto resultaria em zero e não uma exponencial para igualar a 2^n.

Façamos agora $y_n = c_2 + c_1 n 2^n$(aumentamos o grau do bloco). Substituindo y_n em $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 1 + 2^n$, temos:

$$c_2 + c_1(n+2)2^{n+2} - 6[c_2 + c_1(n+1)2^{n+1}] + 8(c_2 + c_1 n 2^n) = 1 + 2^n$$

$$c_2 + 4c_1 n 2^n + 8c_1 2^n - 6c_2 - 12c_1 n 2^n - 12c_1 2^n + 8c_2 + 8c_1 n 2^n = 1 + 2^n$$

$$3c_2 - 4c_1 2^n = 1 + 2^n$$

Daí, $c_2 = \frac{1}{3}$ e $c_1 = -\frac{1}{4}$.

Temos a solução $y_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} n 2^n$. Adicionado x_n com y_n obtemos a solução da recorrência igual a:

$$a_n = A2^n + B4^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} n 2^n.$$

3 Aplicações do Estudo de Recorrência

Baseado em pesquisas bibliográficas, lançamos mãos de algumas aplicações de recorrências lineares. Nelas veremos que através da tabulação dos dados de um problema podemos instigar o aluno a descobrir uma regra geral que atenda todos os dados do problema em estudo.

Nosso planejamento baseou-se em verificar fórmulas deduzidas por recorrência que se aplicam ao desenvolvimento cognitivo do educando. Onde ele, educando, deverá encontrar uma generalização dos padrões pré-estabelecidos.

3.1 Progressão Aritmética

A definição de progressão aritmética encontrada em MORGADO et al. (2001) no diz que uma progressão aritmética é uma sequência de números $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ na qual é constante a diferença entre cada termo a_{n+1} e seu antecedente a_n. Essa diferença constante é chamada de razão e será representada por r.

Pela definição acima, entendemos que os índices n são números inteiros positivos enquanto que a_n e r são números reais. Além disso, percebemos que existe um padrão entre dois termos consecutivos, ou seja, $a_{n+1} - a_n = r$. O que nos permite estabelecer uma relação de recorrência entre os termos da progressão aritmética, como segue:

$$a_2 - a_1 = r$$

$$a_3 - a_2 = r$$

$$a_4 - a_3 = r$$

$$...$$

$$a_n - a_{n-1} = r$$

Adicionando essas $n - 1$ igualdades, obtemos:

$$a_n - a_1 = (n-1)r$$

O que equivale a

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{3.1}$$

que é uma formula recorrente para encontrarmos os termos de uma progressão aritmética.

Com o conhecimento de (3.1) podemos encontrar qualquer termo de uma sequência aritmética. Por exemplo, para calcularmos o 10° termo da progressão aritmética $(3, 5, 7, ...)$ basta substituir $a_1 = 3$, $r = 2$ e $n = 10$ em 3.1 que encontraremos, facilmente, $a_{10} = 21$.

No estudo de progressão aritmética também se destaca um outro padrão, observado por Gauss [1]. Ele notou que a soma de dois termos equidistantes dos extremos se mantém constante. Considerando os n termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, ...a_{n-1}, a_n)$, temos:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$$

Como os termos foram agrupados dois a dois, temos então $\frac{n}{2}$ parcelas iguais a $a_1 + a_n$. Daí a soma S_n dos n termos de uma progressão geométrica será dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n \tag{3.2}$$

De posse da formula recorrente para a soma dos termos de uma progressão aritmética, podemos encontrar facilmente, por exemplo, a soma dos 10 primeiros múltiplos de 5. Para isso basta substituirmos $a_1 = 5$, $n = 10$ e $a_{10} = 50$ em (3.2) que encontraremos:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})}{2} \cdot 10 = (5 + 50) \cdot 5 = 55 \cdot 5 = 275.$$

3.2 Progressão Geométrica

Segundo MORGADO et al (2001) uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. Esse quociente constante é representado por q e chamado de razão.

Observe que a definição acima nos permite escrever a relação entre dois termos consecutivos:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q. \tag{3.3}$$

[1] Johann Carl Friedrick Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, eletrostática, astronomia e óptica.

A partir daí, podemos construir uma relação de recorrência entre os termos de uma progressão geométrica, como segue:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$...$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{3.4}$$

A formula de recorrência (3.4) nos permite calcular, por exemplo, o valor do 5° termo da sequência $(2, 4, 8, ...)$. Para isso basta substituir os valores de $a_1 = 2$, $n = 5$ e $q = 2$ em (3.3) que teremos:

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = 2 \cdot 2^4 = 32.$$

Vamos estabelecer agora uma relação de recorrência para a soma dos termos de uma progressão geométrica. Para isso consideremos os termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ de razão $q \neq 1$ e soma S_n. Assim,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

e multiplicando por q, obtemos:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q$$

Subtraindo as duas igualdades, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{3.5}$$

Agora que conhecemos um padrão para a soma dos termos de uma progressão geométrica, concluímos facilmente que a soma dos cinco primeiros termos da sequência $(2, 4, 8, ...)$ é igual a:

$$S_n = 2 \cdot \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 62.$$

Vale destacar que:

1. Quando $q = 1$ temos $S_n = n \cdot a_1$.
2. Quando $0 < q < 1$ temos $S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

O entendimento de (1) é trivial. Já o que está em (2), mostra que quando tomamos $0 < q < 1$ o valor de q^n se aproxima de zero quando o valor de n tende ao infinito. O caso (2) só se aplica quando os valores da sequência são infinitos e a razão é um número entre 0 e 1. Por exemplo, a soma dos termos da sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...)$ é igual a:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

3.3 A Torre de Hanói

O problema abaixo se refere a um dos quebra-cabeças mais conhecidos na Matemática e foi criado em 1883 por Édouard Lucas [2] . Segundo LIMA et al. (2006),

> Diz a lenda que havia em um templo 3 estacas e n discos de ouro, de diâmetros diferentes. Inicialmente os discos estavam enfiados na primeira estaca, em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. Ocupavam-se os sacerdotes em transferi-los para a terceira estaca, usando a segunda como estaca auxiliar. No processo de transferência, de cada vez se movia apenas um disco, de uma estaca para outra, e jamais um disco poderia ser colocado sobre um disco menor. Quando todos estivessem enfiados na terceira estaca, o mundo acabaria. Quantas transferências de discos, de uma estaca para outra, devem ser feitas para coloca-los na terceira estaca?

Para chegarmos a solução do problema acima vamos analisar alguns valores de n.

1. Para $n = 1$,temos 1 movimento.

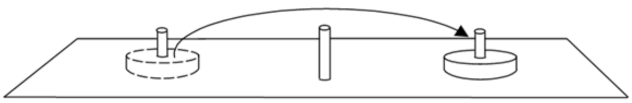

Figura 3.1: Torre de Hanói com 1 disco.

2. Para $n = 2$, temos 3 movimentos.

[2]François Édouard Anatole Lucas foi um matemático francês que criou a Torre de Hanói

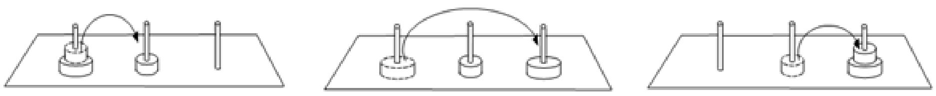

Figura 3.2: Torre de Hanói com 2 discos

3. Para $n = 3$, temos 7 movimentos.

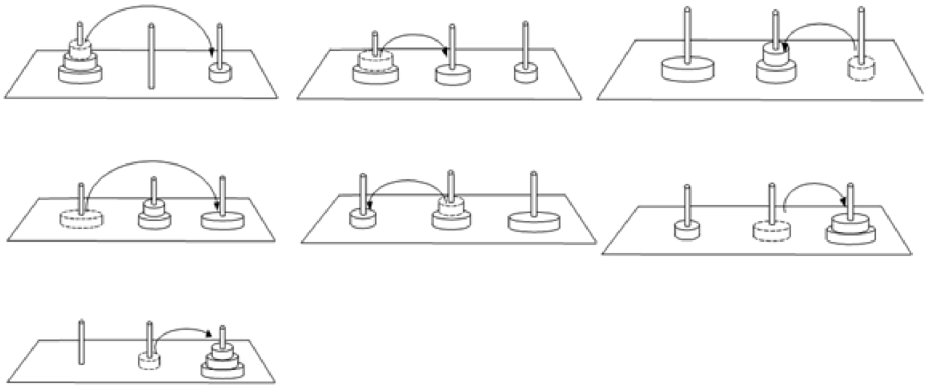

Figura 3.3: Torre de Hanói com 3 discos

Notamos que quando mudamos de 1 disco pra 2, ampliamos o número de movimentos em 2 unidades, da mesma forma quando passamos de 2 para 3 discos, o número de movimentos é acrescido de 4 unidades. Mantendo-se esse padrão no acréscimo (uma progressão geométrica de razão 2) do número de movimentos em função do número discos, podemos construir a seguinte tabela.

Discos (n)	Movimentos (a_n)
1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = a_1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$
3	$a_3 = a_2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$
4	$a_4 = a_3 + 2^3 = 7 + 8 = 15$
...	...
n	$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$

O que nos permite concluir que a equação de recorrência para o número de movimentos é dada por:

$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} \tag{3.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora precisamos encontrar a solução da recorrência linear de primeira ordem. Para isso escrevamos:

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 8$$

$$...$$

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}.$$

Adicionando as igualdades obtemos:

$$a_n - a_1 = 2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$$

$$a_n = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}. \tag{3.7}$$

Note que o segundo membro da igualdade (3.7) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica de n termos e razão igual a 2. Portanto,

$$a_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

o que equivale a

$$a_n = 2^n - 1. \tag{3.8}$$

Logo, concluímos que os sacerdotes precisariam de, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos para solucionar o problema da torre de Hanói.

3.4 Matemática Financeira

O estudo de matemática financeira abordado no ensino médio está estritamente ligado a operação de empréstimo. Por exemplo, uma financeira empresta um capital C a um cliente por um período de tempo n, a uma taxa de juros i e ao afinal desse período ele pagará a instituição o capital C acrescido de juros J do período.

É entendido que o capital C acrescido dos juros do período n recebe o nome de montante M_n. De posse dessa informação podemos construir a tabela abaixo na qual relacionamos o período n com o valor do montante M_n para obtermos a relação de recorrência para o cálculo do montante.

Período (n)	Montante (M_n)
1	$M_1 = C + J = C + C \cdot i = C(1+i)$
2	$M_2 = M_1(1+i) = C(1+i)^2$
3	$M_3 = M_2(1+i) = C(1+1)^3$
...	...
n	$M_n = M_{n-1}(1+i) = C(1+i)^n$

Por exemplo, se realizarmos um empréstimo de R\$ 150,00 a juros de 12% ao mês, devemos pagar a dívida três meses depois com o montante de:

$$M_3 = C(1+i)^3 = 150(1+0.12)^3 \cong R\$210,74.$$

3.5 Desintegração de Elementos Químicos

Análises químicas mostram que substâncias radioativas decaem exponencialmente. Um determinado percentual da massa se desintegra em uma unidade de tempo; o tempo que leva para metade da massa decair é chamado de meia-vida.

Embora não seja radioativo, o mercúrio metálico presente na lâmpada fluorescente na forma gasosa é uma substância tóxica aos seres humanos e ao meio ambiente.

Segundo ALMEIDA et al. (2012), considerando Q_0 como sendo a quantidade inicial de mercúrio no ambiente de meia-vida, aproximadamente, de 2 meses, podemos determinar a quantidade Q_n remanescente a cada período de dois meses. Assim, dado Q_0, a quantidade inicial e n um número natural par, usando um processo recursivo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{2}Q_0 \\ Q_4 &= \frac{1}{2}Q_2 \\ Q_6 &= \frac{1}{2}Q_4 \\ &\dots \\ Q_n &= \frac{1}{2}Q_{n-2} \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades acima, temos:

$$Q_2 \cdot Q_4 \cdot Q_6 \cdot \ldots \cdot Q_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_0 \cdot Q_2 \cdot Q_4 \cdot Q_6 \cdot \ldots \cdot Q_{n-2}$$

Assim, a solução da recorrência é:

$$Q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot Q_0. \tag{3.9}$$

onde n é o tempo e Q_n é a quantidade de mercúrio restante no tempo n.

3.6 Eliminação de Uma Droga do Organismo

A eliminação de drogas pelo organismo ocorre de forma exponencial. Segundo HALLET (2004),

> Quando se administra uma medicação em um paciente, o remédio entra no fluxo sanguíneo. Quando ele passa pelo fígado e pelos rins, é metabolizado e eliminado a uma taxa que depende da droga em questão. Para o antibiótico ampicilina, aproximadamente 40% da droga são eliminados por hora. Uma dose típica de ampicilina é de 250 mg. Suponha que Q_n, onde Q_n é a quantidade de ampicilina, em mg, no fluxo sanguíneo n horas depois do remédio ter sido dado.

Em $n = 0$ temos $Q_0 = 250$. Como, em cada hora, a quantidade restante é de 60% da quantidade anterior, temos por recorrência:

$$Q_1 = 0,6Q_0$$

$$Q_2 = 0,6Q_1$$

$$Q_3 = 0,6Q_2$$

$$Q_4 = 0,6Q_3$$

$$...$$

$$Q_n = 0,6Q_{n-1}$$

Multiplicando, podemos escrever

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot ... \cdot Q_n = 0,6 \cdot 0,6 \cdot ... \cdot 0,6 \cdot Q_0 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot ... \cdot Q_{n-1}$$

O que nos permite concluir que

$$Q_n = Q_0 \cdot (0,6)^n = 250 \cdot (0,6)^n. \tag{3.10}$$

De posse da solução da recorrência linear de primeira ordem, podemos construir a seguinte tabela que relaciona a quantidade de droga no organismo em função do tempo.

Tempo ($horas$)	Quantidade (mg)
0	250
1	150
2	90
3	54
4	$32,4$
5	$19,4$

Vale ressaltar que $Q_n = 250 \cdot (0,6)^n$ é uma função de decaimento exponencial e seu gráfico fica bem representado como segue:

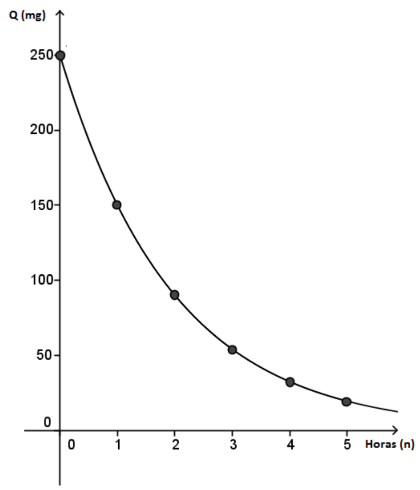

Figura 3.4: Quantidade de ampicilina no organismo em função do tempo.

Além da ampicilina existem outros medicamentos que apresentam comportamento similar, como por exemplo, o Prozac que é vendido por prescrição médica e é indicado para pacientes diagnosticados com depressão. Segundo ALMEIDA et al. (2012),

> O Prozac é o nome comercial de um medicamento no qual cada cápsula de 20 mg equivale a 20 mg de fluoxetina. No organismo, a fluoxetina tem meia -vida de 4 a 6 dias. Existem casos em que em que o paciente precisa utilizar o Prozac por alguns dias e casos em que o paciente precisa ser submetido a um tratamento com o medicamento por um longo período de tempo.

Se levarmos em consideração que o tratamento do paciente com depressão se dará pelo uso de apenas uma cápsula de 20 mg e que a meia-vida da fluoxetina é de 5 dias, a concentração de fluoxetina C_n no organismo em função do tempo n , em dias e divisível por 5, podemos escrever:

$$C_5 = \frac{1}{2}C_0$$
$$C_{10} = \frac{1}{2}C_5$$
$$C_{15} = \frac{1}{2}C_{10}$$
$$...$$
$$C_n = \frac{1}{2} \cdot C_{n-5}.$$

Multiplicando as igualdades, obtemos

$$C_5 \cdot C_{10} \cdot C_{15} \cdot ...C_n = \frac{1}{2} \cdot C_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot C_5 \cdot \frac{1}{2} \cdot C_{10} \cdot ... \cdot \frac{1}{2} \cdot C_{n-1}$$
$$C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot C_0$$

Como a quantidade inicial C_0 é de 20 mg, a concentração de fluoxetina C_n no organismo em função do tempo n é igual a

$$C_n = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{3.11}$$

No caso em que a concentração, com o passar do tempo, de fluoxetina no organismo de um paciente que faz um tratamento mais prolongado, ingerindo, sob orientação médica, uma cápsula do medicamento a cada 5 dias, podemos escrever:

$$C_0 = 20$$
$$C_5 = 20 + 10 = 30$$
$$C_{10} = 20 + 15 = 35$$
$$C_{15} = 20 + 17,5 = 37,5$$
$$C_{20} = 20 + 18,75 = 38,75$$

E daí,

$$C_5 - C_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{5}} \cdot 20 = 10$$
$$C_{10} - C_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{5}} \cdot 20 = 5$$
$$C_{15} - C_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{5}} \cdot 20 = 2,5$$

$$C_{20} - C_{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{5}} \cdot 20 = 1,25$$

$$...$$

$$C_n - C_{n-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}} \cdot 20$$

Adicionando as igualdades

$$C_n - C_0 = 10 + 5 + 2,5 + 1,25 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}} \cdot 20$$

O que equivale a

$$C_n - 20 = 10 + 5 + 2,5 + 1,25 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}} \cdot 20. \tag{3.12}$$

Note que o segundo membro da equação (3.12) é a soma de uma progressão geométrica, o que nos permite escrever:

$$C_n = 20 + 10 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

Logo

$$C_n = 20 \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}}\right]. \tag{3.13}$$

É importante observar que de acordo com a equação (3.13) o máximo de concentração do medicamento no organismo do paciente, quando n fica relativamente grande, é de 40 mg. Verifique!

3.7 A Lei ne Newton do Aquecimento e do Resfriamento

Segundo HALLET (1997),

> Newton [3] sugeriu que a temperatura de um objeto quente diminui a uma taxa proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente. Da mesma forma, um objeto frio se aquece a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente.

[3] Isaac Newton foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo e teólogo.

Por exemplo, uma xícara de café sobre a mesa da cozinha esfria a uma taxa proporcional a diferença de temperatura entre o café e o ar que o cerca. À medida que o café esfria, a taxa na qual ele esfria diminui, pois a diferença de temperatura entre o café e o ar diminui. A longo prazo, a taxa de resfriamento tende a zero, e a temperatura do café aproxima-se da temperatura ambiente.

Em BASSANEZI (2013), o modelo matemático que traduz a lei de Newton pode ser dado por uma equação de recorrência do tipo:

$$T_{t+1} - T_t = k(T_t - T_a) \tag{3.14}$$

em que

T_t: Temperatura do objeto no instante t;

T_0: Temperatura inicial (quando o objeto entra em contato com o ambiente);

T_a: Temperatura do ambiente;

k: Coeficiente de resfriamento.

Note que (3.14) pode ser escrita na forma

$$T_{t+1} = (k+1)T_t - kT_a. \tag{3.15}$$

Considerando $k+1 = a$ e $-kT_a = b$, a solução de (3.15) pode ser obtida usando o processo de recorrência:

$$T_1 = aT_0 + b$$

$$T_2 = aT_1 + b = a(aT_0 + b) + b = a^2T_0 + ab + b$$

$$T_3 = aT_2 + b = a(a^2T_0 + ab + b) + b = a^3T_0 + a^2b + ab + b$$

$$T_n = a^nT_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$$

como $a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1$ é a soma de uma progressão geométrica de razão $a > 1$, então

$$T_n = a^nT_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1},$$

ou

$$T_n = a^n\left(T_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}.$$

O que nos permite concluir que

$$T_n = (k+1)^n(T_0 - T_a) + T_a \tag{3.16}$$

é a solução da equação recorrente $T_{t+1} - T_t = k(T_t - T_a)$ para a lei de Newton.

3.8 Fractais

Os Fractais são figuras geométricas formadas por padrões que se reproduzem infinitamente. Nos fractais, as cópias são partes exatas do todo.

Para que possamos entender a construção e a descoberta dos padrões matemáticos recursivos, faremos o estudo dos principais fractais clássicos.

3.8.1 A Curva de Koch

Segundo BARBOSA (2005), pouco é conhecido da vida de Helge Von Koch, matemático polonês, que em 1904 e 1906 introduziu uma curva que hoje recebe seu nome.

A construção da curva de Koch se baseia em:

1. Considerar um segmento de reta;

2. Dividir o segmento em 3 segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes; intermediário, por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário(que seria a sua base);

3. Substituir cada um dos segmentos conforme a regra 2, e assim sucessivamente e iterativamente.

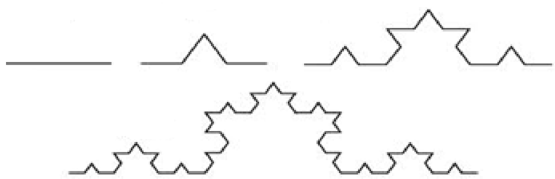

Figura 3.5: Curva de Koch

Podemos observar que a curva de Koch começa com uma curva de 4 segmentos de mesmo comprimento e, em cada um destes segmentos, construímos uma nova curva auto semelhante de 4 segmentos e assim indefinidamente.

Sendo L o comprimento de cada um dos quatro segmentos iniciais, temos por recorrência:

Passo	C. do segmento(C_n)	Nº de Segmentos (L_n)	C. Total (P_n)
1	L	1	L
2	$\frac{L}{3}$	4	$\left(\frac{4}{3}\right) \cdot L$
3	$\frac{L}{3^2}$	4^2	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot L$
4	$\frac{L}{3^3}$	4^3	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot L$
...	...	...	...
n	$\frac{L}{3^{n-1}}$	4^{n-1}	$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot L$

Considerando os dados da tabela acima, concluímos que o número de segmentos L_n, que o comprimento de cada segmento C_n e o comprimento total P_n no passo n, são dados por:

$$L_n = 4^{n-1} \tag{3.17}$$

$$C_n = \frac{L}{3^{n-1}} \tag{3.18}$$

$$P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot L \tag{3.19}$$

para todo $n > 0$.

3.8.2 A Cesta de Sierpinski

Segundo BARBOSA (2005), Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polonês, teve grande reputação, principalmente na década de 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares ter seu nome.

A cesta de Sierpinski apresenta características notáveis. Para construir, partimos de um triângulo equilátero no plano, aplicando o esquema repetitivo de operações:

1. Marque os pontos médios dos três lados;
2. Em conjunto com os vértices do triângulo inicial, estes pontos definem quatro novos triângulos iguais, dos quais eliminamos o triângulo central.

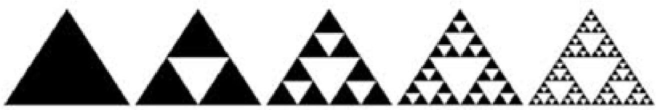

Figura 3.6: Cesta De Sierpinski

Considerando c o comprimento do lado do triângulo inicial, então cada triângulo do nível 1 tem comprimento $\frac{c}{2}$,e, analogamente, os lados dos níveis 2 e 3 possuem, respectivamente por comprimentos, as metades dos lados dos nível respectivo anterior: $\frac{c}{2^2}$ e $\frac{c}{2^3}$; por recorrência simples os lados dos triângulos do nível n possuem comprimento $\frac{c}{2^n}$.

Segue que o perímetro P_n de cada triângulo do fractal de nível n é $\frac{3c}{2^n}$.

Levando em consideração a contagem de triângulos e perímetros de cada um podemos construir a seguinte tabela de recorrência para o número de triângulos, perímetro de cada triângulo e perímetro total.

Nível	N^o de Triângulos	Per. de cada triângulo	Per.Total
0	1	$3c$	$3c$
1	3	$\frac{3c}{2}$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot c$
2	3^2	$\frac{3c}{2^2}$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot c$
3	3^3	$\frac{3c}{2^3}$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot c$
...	...	...	...
n	3^n	$\frac{3c}{2^n}$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot c$

3.8.3 A Esponja de Menger

A figura (3.7) mostra a Esponja de Menger que foi descrita pelo matemático austríaco Karl Menger em 1926.

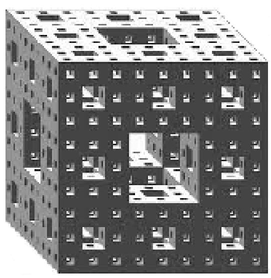

Figura 3.7: Esponja De Menger

Segundo BARBOSA (2005),

> A contagem do número de cubos da esponja de Menger leva em consideração que no inicio temos um cubo de aresta unitária. Então, dividimos em 27 cubos usando planos secantes ortogonais às faces. Esses cubos devem possuir aresta $\frac{1}{3}$ da aresta inicial. Retiramos o cubo do centro e os cubos centrais de cada face. Dessa forma, temos para a primeira fase 7 cubos removidos e 20 restantes.

Mantendo-se o mesmo processo para os demais cubinhos, podemos construir a seguinte tabela de recorrência para os cubos que foram removidos e para os cubos restantes:

Nível	Cubos Removidos	Cubos Restantes
0	0	1
1	7	20
2	$7 \cdot 20$	20^2
3	$7 \cdot 20^2$	20^3
...	...	...
n	$7 \cdot 20^{n-1}$	20^n

3.9 Análise Combinatória

O objetivo principal da análise combinatória é o de encontrar técnicas de contagem, sem que seja preciso enumerar todos os elementos de um dado conjunto com regras pré-estabelecidas.

Destacam-se como princípios básicos de contagem o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação. Segundo MORGADO et al. (1991), o Princípio da Adição nos diz que se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos. Também em MORGADO et al. (1991), o Princípio da Multiplicação diz que se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o números de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$.

Os dois princípios, Adição e Multiplicação, constituem ferramentas básicas utilizadas no ensino médio para resolver problemas de contagem. Vejamos alguns exemplos que enfocam o Princípio da Multiplicação:

Exemplo 3.1. Numa sala há 5 homens e 6 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem - mulher?

*Solução:*Para formar um casal devemos tomar as decisões d_1: escolha do homem e d_2: escolha da mulher. Note que a decisão d_1 pode ser tomada de 5 maneiras enquanto que a decisão d_2, de 6 maneiras. Aplicando o Princípio da Multiplicação obtemos $5 \cdot 6 = 30$ maneiras de se escolher um casal.

Exemplo 3.2. Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

*Solução:*Começando com a escolha das centenas temos 9 possibilidades(não podemos utilizar o zero), das dezenas 9 (não podemos usar o número anterior e o zero pode ser utilizado) e das unidades, 8 possibilidades (não podemos usar os dois anteriores). Pelo Princípio da Multiplicação temos $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números naturais distintos com três algarismos.

Além dos princípios básicos existem outros conceitos que são empregados na resolução de problemas, como por exemplo, Permutações Simples, Arranjos e Combinação Simples.

Uma maneira, também de se resolver problemas de análise combinatória, é o de empregar conhecimentos recursivos. Buscando resolver por recorrência enunciamos os seguintes exemplos:

Exemplo 3.3. Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.

*Solução:*Vamos encontrar uma equação de recorrência que traduza o número de regiões que n retas dividem o plano. Para isso, vamos analisar alguns valores iniciais de n.

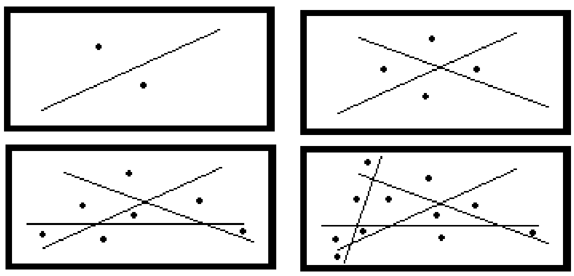

Figura 3.8: Número de Regiões que n Retas Dividem o Plano

A partir da figura (3.8) podemos inferir que a sequência para o número de regiões é dada por $(2, 4, 7, 11, ...)$. Conhecendo os valores iniciais da sequência, escrevemos

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 4$$

$$\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = n$$

Adicionando as igualdades acima, temos

$$a_n - a_1 = 2 + 3 + 4 + ... + n$$

$$a_n - 2 = \frac{(2+n)\cdot(n-1)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2}.$$

Logo

$$a_n = \frac{n^2+n+2}{2} \tag{3.20}$$

representa o número de divisões que n retas divide o plano.

Exemplo 3.4. Suponha que exista um robô capaz de dar passos de um ou dois metros. Exprima por meio de uma relação de recorrência o número de modos diferentes para percorrer n metros.

Solução: Vamos analisar a tabela abaixo para alguns valores de n e a partir dela construir a relação de recorrência. Vejamos:

Número de metros n	Sequências	Número de Modos
1	(1)	1
2	$(11), (2)$	2
3	$(111), (12), (21)$	3
4	$(1111), (22), (211), (121), (112)$	5

Com base nos dados, verificamos que se trata da sequência $(1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$ com relação de recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ em que $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

4 Recorrência Matemática Aplicada à Resolução de Problemas no Ensino Médio

Após toda a abordagem feita sobre recorrência matemática e suas aplicações nos diferentes ramos da ciência, nada mais coerente do que resolver problemas propostos nos livros didáticos nacionais e nas olimpíadas de matemática, usando raciocínio recursivo.

Certamente que não estamos interessados em discutir metodologias de resoluções de questões, na verdade queremos apenas instigar professores e alunos na descoberta de modelos matemáticos. Segundo BIEMBENGUT (2013),

> A modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico.

Se observarmos, por exemplo, os problemas propostos nas olimpíadas de matemática ou nos livros didáticos, veremos que a grande maioria deles não são resolvidos diretamente com algoritmos prontos e acabados. O que se percebe é que a cada dia as questões de matemática estão mais bem elaboradas, exigindo mais habilidade que competência de nossos alunos, seja nos livros ou nas olimpíadas de matemática.

Nesse contexto, mostraremos que é possível empregar técnicas recursivas na resolução de problemas abordados no ensino médio. Vejamos:

Problema 4.1. (DANTE, 2008, pág 72) Determine o número de diagonais de um polígono convexo de n lados.

Aqui temos uma atividade que engloba conhecimentos geométricos e função. Veja que queremos escrever o número de diagonais em função do número de lados de cada polígono. Uma boa saída para que o aluno encontre a solução do problema, tratase de representar geometricamente cada polígono convexo com as respectivas diagonais. Vejamos, geometricamente, a contagem do número de diagonais para alguns polígonos:

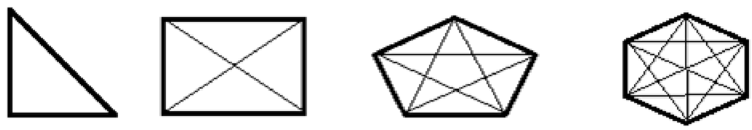

Figura 4.1: Número de Diagonais de um Polígono Convexo

Depois da visualização, podemos tabular os dados, relacionando o número de lados do polígono com o número de diagonais.

Número de lados (n)	Número de Diagonais (d_n)
3	0
4	2
5	5
6	9
...	...
n	d_n

De posse da tabela podemos escrever,

$$d_4 - d_3 = (4 - 2)$$

$$d_5 - d_4 = (5 - 2)$$

$$d_6 - d_5 = (6 - 2)$$

$$...$$

$$d_n - d_{n-1} = (n - 2).$$

Adicionando os dois membros das igualdades acima, obtemos:

$$d_n - d_3 = 2 + 3 + ... + (n - 2).$$

Sendo $d_3 = 0$ e $2 + 3 + ... + (n - 2)$ a soma de uma progressão aritmética de razão 1 e de $(n - 3)$ termos, segue

$$d_n = \frac{(2 + n - 2) \cdot (n - 3)}{2}$$

$$d_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

$$d_n = \frac{n^2 - 3n}{2}. \tag{4.1}$$

Note que d_n é uma função quadrática com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$.

Problema 4.2. (IEZZI et al. 2010, pág 143) Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactérias dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra. Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias n em função do tempo t em dias.

Para chegarmos a solução do problema, vamos fazer uma análise recursiva para obtermos o número de bactérias $n(t)$ em função do tempo t, em horas e inteiro. Vejamos:

$$n(1) = 2 \cdot n(0)$$

$$n(2) = 2 \cdot n(1)$$

$$n(3) = 2 \cdot n(2)$$

$$n(4) = 2 \cdot n(4)$$

$$...$$

$$n(t) = 2 \cdot n(t-1)$$

Multiplicando as igualdades acima temos

$$n(t) = n(0) \cdot 2^t.$$

Como $n(0) = 50$ a resposta procurada é

$$n(t) = 50 \cdot 2^t. \tag{4.2}$$

com $t \in \mathbb{N}$.

Nesse problema, o modelo exponencial foi justificado com uso da recorrência matemática.

Problema 4.3. (IEZZI et al. 2010, pág 149-adaptado) No dia 1º de janeiro, dois amigos criaram uma comunidade no faceboock. No dia seguinte cada um dos fundadores convidou três novos amigos para integrarem à comunidade. No dia 3 de janeiro, cada novo integrante convidou três novos amigos para se juntarem à comunidade e assim por diante, até o final do mês admita que todos os convidados aceitem a proposta de se integrar à comunidade e que ninguém receba o convite de mais de uma pessoa. Qual é a lei que relaciona o número de membros n que ingressarão na comunidade por dia t?

Novamente estamos diante de um problema que pode ser modelado por meio de recorrência, ao considerarmos o tempo como sendo uma variável discreta. Buscando um melhor entendimento da resolução, devemos levar em consideração que o número de membros $n(t)$ está em função do tempo t, em dias, e que a sequência que representa o número de membros novos é $(2, 6, 18, 54, ...)$, o que nos permite escrever:

$$n(1) = 2$$

$$n(2) = 2 \cdot 3$$

$$n(3) = 2 \cdot 3^2$$

$$n(4) = 2 \cdot 3^3.$$

Logo, no instante t, em dias, o número de novos membros que ingressarão na comunidade será dado $n(t) = 2 \cdot 3^{t-1}$, $t \in \mathbb{N}$.

Problema 4.4. (SMOLE, 2010, pág. 166) Observe esta figura formada por uma sequência de triângulos equiláteros na qual cada triângulo, a partir do 2º, tem vértices nos pontos médios dos lados do triângulo anterior. Supondo que o triângulo maior tem lado l, escreva o termo geral para o cálculo do perímetro p_n do enésimo triângulo.

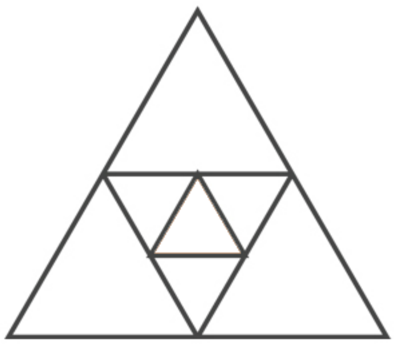

Figura 4.2: Sequência de Triângulos

Primeiramente vamos analisar a sequência formada pelo perímetro de cada triângulo. Para montarmos tal sequência, devemos levar em consideração, que os novos triângulos obtidos a partir dos pontos médios do triângulo anterior, são todos semelhantes em relação ao maior triângulo. Outro ponto importante é que o perímetro do segundo triângulo é metade do perímetro do primeiro, o terceiro é metade do segundo, e assim sucessivamente. Como p_n, a partir do segundo, depende do perímetro do triângulo anterior, escrevemos:

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{1}{2}$$
$$p_3 = p_2 \cdot \frac{1}{2}$$
$$p_4 = p_3 \cdot \frac{1}{2}$$
$$...$$
$$p_n = p_{n-1} \cdot \frac{1}{2}$$

Multiplicando os membros das igualdades acima, temos

$$p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot ... \cdot p_n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot ... \cdot p_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

O que equivale a

$$p_n = p_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Substituindo $p_1 = 3l$, obtemos

$$p_n = 3l \cdot 2^{1-n} \tag{4.3}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

De posse do termo geral podemos calcular o perímetro de qualquer triângulo da sequência, bastando para isso conhecer a medida do lado do maior triângulo. Por exemplo, se $l = 1$ então:

$$p_1 = 3$$
$$p_5 = \frac{3}{16}$$
$$p_{10} = \frac{3}{512}$$

Problema 4.5. (IEZZI et al. 2010, pág 261-Adaptado) Considere que a seguinte sequência de figuras foi construída segundo determinado padrão.

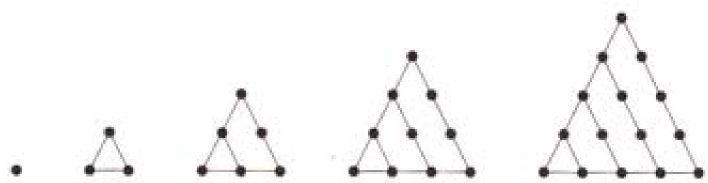

Figura 4.3: Números Triangulares

O número de pontos dessa figura são chamados de números triangulares. Exiba um modelo matemático para a sequência dos números triangulares.

Vamos primeiramente descobrir o padrão presente na sequência dos números triangulares. Considerando T_n como sendo cada termo da sequência, com $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 1 + 2$$

$$T_3 = 1 + 2 + 3$$

$$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$...$$

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$$

Como $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ é a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 1 e n termos , segue que

$$T_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \tag{4.4}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4.6. (Questão 03 - OBMEP 2011, Nível 3, 2ª Fase) A linha poligonal da figura parte da origem e passa por todos os pontos do plano que têm coordenas inteiras não negativas, de acordo com o padrão indicado. A unidade de comprimento nos eixos é de 1 cm. O comprimento da poligonal da origem até um ponto (a,b) é chamado de lonjura de (a, b); por exemplo, a lonjura $(1, 2)$ é 5 cm.

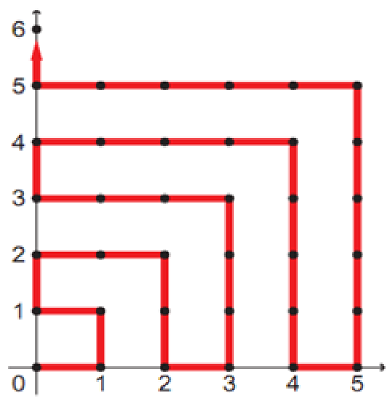

Figura 4.4: Linha Poligonal

a) Determine a lonjura dos pontos $(3, 2)$ e $(0, 4)$.

b) Quantos pontos de coordenadas inteiras estão contidos no interior e nos lados do quadrado cujos vértices são $(0,0)$, $(n,0)$, (n,n) e $(0,n)$.

c) Explique por que a lonjura do ponto (n,n) é n^2+n.

d) Qual é o ponto cuja lonjura é 425?

No item (a), basta contar os pontos na figura para obtermos a lonjura $(3,2)$ igual a 11 e de $(0,4)$, 16.

No item (b), observando a figura (4.4) podemos construir a seguinte tabela para determinar o número de pontos inteiros que estão contidos no interior e nos lados do quadrado de vértices $(0,0)$, $(n,0)$, (n,n) e $(0,n)$.

n	Quadrado	Número de Pontos
1	$(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$	$4=(1+1)^2$
2	$(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$	$9=(2+1)^2$
3	$(0,0),(3,0),(3,3),(0,3)$	$16=(3+1)^2$
...	...	...
n	$(0,0),(n,0),(n,n),(0,n)$	$(n+1)^2$

No item (c), queremos determinar a lonjura do ponto (n,n). Para isso vamos montar a seguinte relação de recorrência considerando a_n como sendo a lonjura do ponto (n,n). Vejamos:

$$(1,1) \Rightarrow a_1 = 2$$

$$(2,2) \Rightarrow a_2 = 6$$

$$(3,3) \Rightarrow a_3 = 12$$

$$(4,4) \Rightarrow a_4 = 20$$

$$(5,5) \Rightarrow a_5 = 30$$

O que nos permite escrever,

$$a_2 - a_1 = 4$$

$$a_3 - a_2 = 6$$

$$a_4 - a_3 = 8$$

$$a_5 - a_4 = 10$$

$$\dots$$

$$a_n - a_{n-1} = 2n$$

Adicionando as igualdades acima e substituindo a_1 por 2 , segue que:

$$a_n - a_1 = 4 + 6 + 8 + ... + 2n$$

$$a_n = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n$$

$$a_n = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) = 2 \cdot \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$

O que nos permite concluir que

$$a_n = n^2 + n. \tag{4.5}$$

O que mostra que a lonjura do ponto (n, n) é $n^2 + n$.

No item (d), basta notar que o ponto $(20, 20)$ tem lonjura 420. Para chegar na lonjura 425, devemos descer na vertical 5 unidades, o que equivale ao ponto $(20, 15)$.

Problema 4.7. (Questão 02 - OBMEP 2012, Nível 3, 1ª Fase) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforos, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforos. Quantos palitos tem um lado desse triângulo?

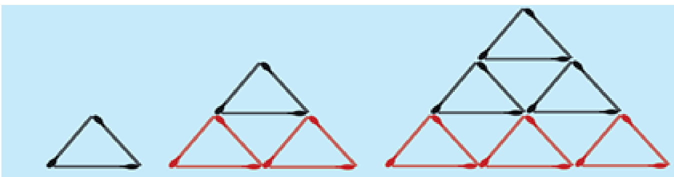

Figura 4.5: Contando Palitos

Para chegarmos a solução do problema devemos observar que na sequência o primeiro triângulo possui 3 palitos de fósforos, o segundo 9 e o terceiro, 18. Outro fato interessante é que o primeiro triângulo possui um palito em cada lado, o segundo 2 e o terceiro 3. Conhecida a regularidade da construção, vamos buscar a solução por meio de recorrência matemática. Considerando que a_n seja o número de palitos usados na construção do enésimo elemento da sequência, temos:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 9$$

$$a_3 = 18$$

O que nos permite escrever,

$$a_2 - a_1 = 6$$

$$a_3 - a_2 = 9$$

$$...$$

$$a_n - a_{n-1} = 3n$$

Adicionando as igualdades, obtemos:

$$a_n - a_1 = 6 + 9 + .. + 3n$$

$$a_n = 3 + 6 + 9 + ... + 3n = 3(1 + 2 + 3 + ... + n)$$

Resultando em

$$a_n = \frac{3}{2} \cdot (n^2 + n). \tag{4.6}$$

Como n determina o número de palitos de fósforos que estão no lado de cada figura, basta substituirmos $a_n = 135$ para chegarmos a solução.

$$135 = \frac{3}{2} \cdot (n^2 + n)$$

$$n^2 + n - 90 = 0 \Rightarrow n = 9$$

Portanto, o triângulo que estamos procurando é o nono.

Problema 4.8. (Questão 5 - Banco de questões OBMEP, 2009 pág. 23) Conjunto de Cantor[1] - Desenhe um segmento de reta de comprimento 1, e denote-o por C_1. Remova o terço central (sem remover os extremos). Denote por C_2 o que sobrou. Agora remova o terço central (sem os extremos) de cada segmento de reta de C_2. Denote por C_3 o que sobrou. Podemos continuar esse processo, em cada estágio removendo o terço central de cada segmento C_n para formar C_{n+1}.

a) Desenhe C_1, C_2 e C_3, indicando o número nos extremos dos segmentos.

b) Quais dos seguintes pontos pertencem ao conjunto de Cantor? $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{81}$, $\frac{4}{81}$.

c) Quais são os comprimentos de C_3, C_4 e C_5? Você pode achar uma expressão para o comprimento de C_n?

[1]O Conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ definido pelo matemático Georg Cantor como limite de um processo interativo.

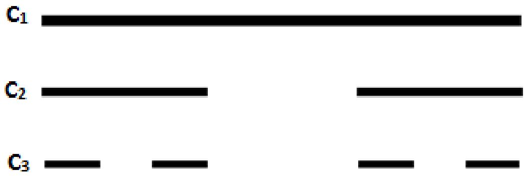

Figura 4.6: Conjunto de Cantor

Para responder o item (a), devemos levar em consideração que cada segmento é um subconjunto da reta real, com valores no intervalo $[0,1]$. Usando os critérios do Conjunto de Cantor, temos a seguinte figura:

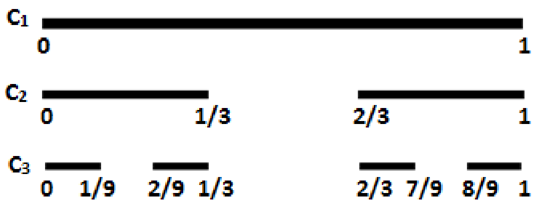

Figura 4.7: Extremos do Conjunto de Cantor

No item (b), deve-se observar que os extremos dos intervalos pertencem ao Conjunto de Cantor. Daí, podemos afirmar que:

- $\frac{1}{3}$ pertence ao Conjunto de Cantor, pois é extremo deC_2;
- $\frac{4}{9}$ é removido de C_2, logo não pertence ao Conjunto de Cantor;
- $\frac{3}{81}$ é extremo de C_4, logo pertence ao Conjunto de Cantor;
- $\frac{4}{81}$ é removido de C_4, logo não perntence ao Conjunto de Cantor.

Para resolver o item (c), vamos montar uma relação de recorrência entre os comprimentos de cada intervalo do Conjunto de Cantor. Como $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{2}{3}$ e $C_3 = \frac{4}{9}$, induzimos que $C_4 = \frac{8}{27}$ e $C_5 = \frac{16}{81}$ e daí,

$$C_2 = \frac{2}{3}C_1$$

$$C_3 = \frac{2}{3}C_2$$

$$C_4 = \frac{2}{3}C_3$$

$$C_n = \frac{2}{3}C_{n-1}$$

Multiplicando as igualdades e simplificando quando necessário, obtemos

$$C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot ... \cdot C_n = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot ... \cdot C_{n-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

O que equivale a

$$C_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \tag{4.7}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

5 Considerações Finais

No presente trabalho, proporcionamos um estudo detalhado sobre recorrência matemática e suas aplicações na resolução de problemas matemáticos estudados no ensino médio.

Vimos que as técnicas recursivas podem ser estudadas no ensino médio, por acreditarmos que seja acessível ao entendimento dos alunos. Para isso, é necessário que os professores estimulem seus alunos a descobrirem padrões. Por conseguinte possam exibir um modelo matemático que o descreva. Segundo ALMEIDA et al.(2012), "mais do que utilizar os conceitos matemáticos como instrumentos para a investigação da situação, na atividade de modelagem os alunos são levados a pensar sobre os objetos matemáticos em si."

Destacamos que ao abordarmos recorrências lineares de 1ª e de 2ª ordem, queríamos apenas mostrar que suas técnicas são importantes na obtenção de um modelo matemático. Cabe ao professor, que fizer uso desse trabalho, usar os pontos que julgar pertinentes ao nível de ensino que atua, fazendo os ajustes necessários à realidade dos alunos.

Em se tratando das aplicações do estudo de recorrências, apresentamos vários exemplos com a finalidade de mostrar que em diferentes contextos se faz uso da recorrência linear, seja de 1ª ou de 2ª ordem. Acreditamos que a devida interpretação de um fenômeno real, que se observa através de um padrão matemático, desperta o interesse pela matemática.

Ao resolvermos problemas que constam em livros didáticos ou em olimpíadas de matemática, estávamos mostrando que os padrões matemáticos já estão inseridos em questões de nível médio, faltando apenas que o professor oportunize a seus alunos o conhecimento recursivo na modelagem da solução. Daí a importância de se iniciar o estudo de recorrência ainda na educação básica.

Esperamos que este trabalho venha contribuir com a prática docente de sala de aula e que, a partir dele, se viabilize aos alunos a oportunidade de descobrirem padrões, modelando-os na utilização de técnicas recursivas.

Dessa forma, almejamos que o ensino de recorrência linear de 1ª e 2ª ordem seja tratado no ensino médio, com a finalidade de aguçar o raciocínio recursivo dos alunos e daí, eles sejam capazes de modelarem situações reais ou não.

Referências Bibliográficas

[1] Almeida, Lourdes Werle de. Silva, Karina Pessôa da. Vertuan, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto,2012.

[2] Barbosa, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal - para a sala de aula*. 3ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora,2005.

[3] Bassanezi, Rodney Carlos. *Ensino - aprendizagem com a modelagem matemática*. 3ª edição. São Paulo: Contexto,2013.

[4] Biembegut, Maria Sallet. Hein, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. 5ª edição. São Paulo: Contexto,2013.

[5] Boyer, Carl B.. *História da Matemática*. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher,1996.

[6] Carvalho, Paulo Cezar Pinto. Morgado, Augusto Cesar de Oliveira. *Matemática discreta*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[7] Dante, Luiz Roberto. *Matemática, volume único*. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2008.

[8] Hughes - Hallet, Deborah et al. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 1997.

[9] Hughes - Hallet, Deborah et al. *Cálculo de uma variável*. 3ª dição. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

[10] Iezzi,Gelson et al. *Matemática ciências e aplicações*. Volume 1. 6ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

[11] Lima, Elon Lages et. al. *A matemática do ensino médio*. Volume 2. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] Morgado,Augusto César et. al. *Análise combinatória e probabilidade*. 9ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[13] Morgado,Augusto César. Wagner, Eduardo. Zani, Sheila C.*Progressões e matemática financeira*. 5ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[14] OBMEP. *Banco de questões 2009*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[15] OBMEP. *Prova da 2ª fase: Nível 3*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[16] OBMEP. *Prova da 1ª fase: Nível 3*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[17] Smole, Kátia Stocco. Diniz, Maria Ignez. *Matemática ensino médio*. Volume 1. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.