Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Estudando Geometria através de dobraduras

Sibeli Frolini

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Jamil Viana Pereira

2014

516.2 Frolini, Sibeli
F929e Estudando Geometria através de dobraduras/ Sibeli Frolini- Rio Claro: [s.n.], 2014.
77 f., il., figs., grafs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Jamil Viana Pereira

1. Geometria Euclidiana. 2. Origami. 3. Dobraduras. 4. Métodos Matemáticos. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Sibeli Frolini

ESTUDANDO GEOMETRIA ATRAVÉS DE DOBRADURAS

Dissertação APROVADA como requesito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
Orientador

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática - UNESP/Rio Claro

Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares
Departamento de Matemática - UFSCar/São Carlos

Rio Claro, 19 de Março de 2014

Dedico este trabalho
à minha família,
que amo tanto!

Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado marca o fim de uma importante etapa da minha vida. Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram de forma decisiva para a sua concretização. Agradeço primeiramente a Deus, pois me deu perseverança nos momentos em que perco a força. A Ele, toda honra e toda glória, pois é minha fortaleza, meu refúgio e me concede a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo. O que fiz com elas durante esta etapa resultou nesta dissertação. Agradeço aos meus pais, Pedro e Maria de Lourdes, por entenderem a importância desta realizacão e apoiarem incondicionalmente, nunca duvidando do meu sucesso. Ao Marco, a Luana, ao Kauê e ao Yuri, família amada, por aceitarem dividir um pouco mais, (o tempo já tão dividido), que passo com eles. Aprendemos durante este mestrado as operações básicas da Matemática em Família: SOMAR EXPERIÊNCIAS - Assim atingimos nossas realizações pessoais. DIVIDIR A ALEGRIA - Quem não a divide com os outros, a perde! DIMINUIR TRISTEZAS - É uma compensação gratificante. Quando a diminuímos, lucramos, pois temos um ganho exponencial em nosso entusiasmo, coragem e otimismo, que dividimos com muito amor com os irmãos de caminhada! MULTIPLICAR FELICIDADE - Em qualquer lugar onde plantamos felicidade, ela se multiplica! Com isso nos tornamos mais felizes, pois ela nos atinge em ricochete! DIVIDIR AMOR - Nas dimensões do amor humano, todo aquele que divide seu amor com alguém, descobre em seguida tê-lo multiplicado! Agradeço ao Prof. Dr. Manoel Valmir Fernandes, ao Prof. Nilson, a Profa. Maria Luiza, e aos professores do Claretiano Colégio por me apoiarem nesta empreitada e em especial a Sirlei, pela força e as quebradas de galhos, (que não foram poucas), durante estes anos de jornada quádrupla. Aos professores e a equipe da Escola Estadual Joaquim Ribeiro, em especial Anamélia, pelo carinnho, companheirismo e paciência durante esta etapa. A todos os meus colegas do PROFMAT, em especial, (em ordem alfabética): Ana Cecília, Calixto, Cristina, Glaucia, Luciano, Marcia, Mariana, ao pequeno Raoni e seu inseparável Ben 10. Obrigada pela força e pelas muitas horas de estudo. Foi muito bom percorrermos este caminho juntos, pela rica troca e cumplicidade! Aos professores do PROFMAT, em especial aos Professores Doutores Jamil, Thiago, Marta e Suzi, pela disponibilidade, colaboração, conhecimentos transmitidos e por nos estimularem ao longo de todo o curso. Finalmente agradeço a CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo financiamento que nos proporcionou a oportunidade de realizarmos um

mestrado de qualidade, e para a qual, somos uma certeza de melhora no ensino da Matemática em todo o Brasil. Pretendo utilizar todo o conhecimento adquirido para não vos desiludir! Muito obrigado!

"A Matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o Universo"

Pitágoras

Resumo

Esta dissertação tem por finalidade oferecer um método alternativo para o ensino de Geometria Euclidiana para estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio. Este método proporciona: momentos de descontração, melhora da concentração, aprimoramento das funções motoras e da performance dos estudantes, incorporando novos elementos a linguagem formal da Matemática.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Origami, Dobraduras, Métodos Matemáticos.

Abstract

This work aims to offer an alternative method for teaching Euclidean Geometry for Middle and High School students. This method includes: relaxation techniques, enhancement of concentration, improving motor function and academic performance of students, incorporating new elements to the formal language of Mathematics.

Keywords: Euclidean Geometry, Origami, Folding, Mathematical Methods.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

As origens da Geometria (do grego medir a terra) parecem coincidir com as necessidades do cotidiano. Partilhar terras férteis às margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros, são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas. Documentos existentes nas antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam conhecimentos sobre este assunto, geralmente ligados à astrologia. Na Grécia, porém, é que um grande matemático lhes deu a forma definitiva.

Euclides de Alexandria, por volta do ano 300 a.C., apresentou a sua geometria numa obra intitulada *Os Elementos*, a qual continha definições, postulados, teoremas, construções geométricas, teoria sobre proporcionalidade, introdução à teoria dos números e um tipo de geometria algébrica.

Nesta obra que influenciou o pensamento científico por mais de 2000 anos e cujos reflexos permanecem até os dias atuais, Euclides apresentou formalmente aquela que é denominada hoje a Geometria Euclidiana.

Construir o Pensamento Geométrico Euclidiano, normalmente é considerado um grande desafio, em termos de ensino, para os educadores, pois possui uma extensa quantidade de conceitos envolvidos. Buscando maneiras diferentes de ensinar estes conteúdos matemáticos, de tal forma que eles se tornem compreensíveis, acessíveis e sejam agradáveis para a aprendizagem dos alunos, esta dissertação tem como finalidade incentivar os professores a produzir materiais que instiguem e aprimorem o processo de ensino aprendizagem, não abandonando a linguagem formal da Matemática.

Dentre as diferentes formas de ensinar matemática, usaremos como matéria prima o papel, estudando a Geometria Euclidiana existente na construções envolvendo dobraduras, portanto a base deste trabalho é a arte tradicional e secular japonesa de dobrar papel, o Origami.

A palavra japonesa Origami significa dobrar papel , isto é, ori = dobrar e kami = papel e se refere a uma arte hoje disseminada pelo mundo inteiro. Apesar de ser um patrimônio da cultura japonesa, é provável que tenha começado na China, a qual é considerada o berço do papel.

Quando mencionamos a palavra dobradura, a maioria das pessoas pensam em aviões de papel, na verdade não estão erradas, porém, permanece oculto que esta arte possui características matemáticas, portanto podemos estudar Geometria, Cálculo e até

Álgebra Abstrata.

Esta dissertação escolheu entre os tópicos acima, a Geometria, pois:

> Geometria é considerada importante por pesquisadores e curriculistas porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações-problemas. (PIRES, CURI, CAMPOS, 2000, p.15).

Além disso, este trabalho pretende oferecer uma forma alternativa de ensinar geometria utilizando construções realizadas com papel, possibilitando que os alunos vejam esta arte japonesa como uma das chaves para o conhecimento da geometria, como afirmam Rêgo, Rêgo e Gaudêncio (2004, p.18):

> O Origami pode representar para o processo de ensino aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte.

Esta dissertação está baseada nos trabalhos de CAVACAMI, E. e FURUYA, Y. K. S., em seu livro, *Explorando Geometria com Origami* de 2009; LEROY, L., em sua monografia, *Aprendendo Geometria com Origami*, apresentada em 2010, em Belo Horizonte; MOISE, E. E. e DOWNS, F. L. Jr., em seu livro *Geometria Moderna Parte I*, com a tradução técnica de Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello de 1971 e finalmente, REZENDE, E. Q. F. e QUEIROZ, M. L. B., em seu livro, *Geometria Euclidiana plana e construções geométicas*, 2^a. edição de 2008.

O trabalho inicia-se com as noções da Geometria Eucliana, isto é, definições, postulados e teoremas necessários às construções realizadas com dobraduras. Em seguida, são apresentadas as etapas da montagem dos origamis com as respectivas ilustrações e justificativas matemáticas e finalizando, uma proposta de plano de aula, contendo sugestões para o ensino da geometria através de dobraduras, o tempo necessário para a realização e um breve relato sobre aplicação deste em sala de aula.

1 Noções de Geometria Euclidiana

As ideias geométricas apareceram devido à necessidade do homem realizar medidas, entre elas, comprimento e ângulos.

Este capítulo é dedicado a toda teoria necessária às construções realizadas nesta dissertação.

Em nosso tratamento da geometria plana, iniciamos com os elementos fundamentais da Geometria Eucliana, lembrando que ponto, reta e plano não possuem definição.

Iniciamos com alguns postulados relacionados aos termos indefinidos, obtendo resultados como consequência dos mesmos.

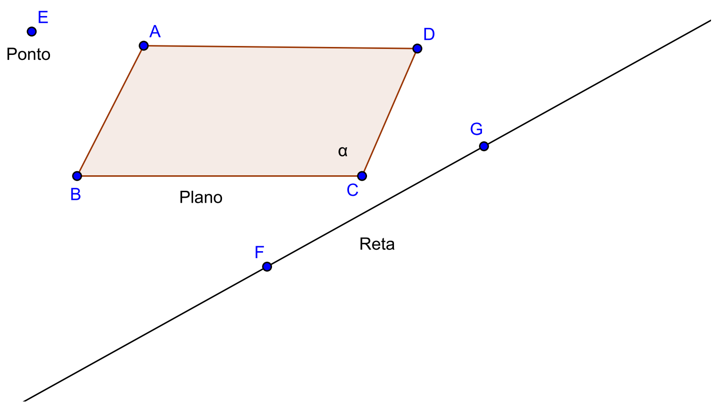


Figura 1.1: Ponto, reta e plano

1.1 Retas

Os três primeiros postulados recebem o nome de **Postulados de Incidência**.

Postulado 1. Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

Neste contexto, podemos denotar por $\overleftrightarrow{PQ}$ a reta determinanda pelos pontos P e Q, a qual lemos reta PQ.

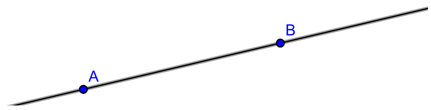


Figura 1.2: Reta

Postulado 2. Em qualquer reta existem no mínimo dois pontos distintos.

Definição 1.1. Os pontos pertencentes a uma mesma reta são denominados **pontos colineares**.

Postulado 3. Existem pelo menos três pontos distintos e não colineares.

Definição 1.2. Retas contidas em um mesmo plano são denominadas **retas coplanares**.

Definição 1.3. Retas coplanares que não possuem ponto comum são chamadas **retas paralelas distintas**.

Definição 1.4. Retas coincidentes são retas que possuem todos os pontos em comum.

Definição 1.5. Duas retas distintas que se interseccionam são chamadas **retas concorrentes**

Observação 1.6. Retas concorrentes são sempre coplanares.

Definição 1.7. Duas retas que não possuem um plano que as contém recebem o nome de **retas reversas**.

Teorema 1.8. Duas retas concorrentes interseccionam-se em um único ponto.

Demonstração: Consideramos r e s duas retas concorrentes num ponto P. Seja Q um ponto que, também, esteja em ambas as retas. Como por dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém, obtemos, a reta r como sendo a reta determinada pelos pontos P e Q, e a reta s, também, como sendo a reta determinada por P e Q. Pela unicidade apresentada nos Postulados de Incidência, r e s seriam a mesma reta, o que contradiz a hipótese de serem retas concorrentes. Logo, P é único. $\square$

Corolário 1.9. 1) Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente à ela.

2) Dado um ponto qualquer, existe pelo menos uma reta não o contendo.

3) Dado um ponto qualquer, existem pelo menos duas retas que passam por ele.

Demonstração:

1) Seja r uma reta. Pelo Postulado 3, existem pelo menos três pontos distintos não colineares, logo, pelo menos um destes pontos não pertence à reta r.

2) Dado um ponto P, o Postulado 3 garante a existência de 3 pontos não colineares P_1, P_2 e P_3. Se P coincide com um destes pontos, basta tomar a reta que passa pelos outros dois. Se P não coincide com nenhum deles, temos que $\overleftrightarrow{PP_1}$ não contém P_2 ou P_3. Então $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ou $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ é a reta procurada.

3) Dado um ponto P, o Postulado 3 garante a existência de 3 pontos não colineares P_1,P_2 e P_3. Se P coincide com um destes pontos, basta tomar as retas $\overleftrightarrow{PP_1}$ e $\overleftrightarrow{PP_2}$ ou $\overleftrightarrow{PP_2}$ e $\overleftrightarrow{PP_3}$ ou $\overleftrightarrow{PP_1}$ e $\overleftrightarrow{PP_3}$. Se P não coincide com nenhum deles, temos que $\overleftrightarrow{PP_1}$ não contém P_2 ou P_3. Então $\overleftrightarrow{PP_1}$ e $\overleftrightarrow{PP_3}$ ou $\overleftrightarrow{PP_1}$ e $\overleftrightarrow{PP_2}$ são as retas procuradas. $\square$

Postulado 4. (Postulado da Distância) A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.

O número obtido através do postulado acima é denominado **distância entre dois pontos**. Denotamos por PQ a distância entre os pontos P e Q.

Postulado 5. (Postulado da Régua) Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que:
(1) cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real;
(2) cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta, e
(3) a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

Uma correspondência do tipo descrito pelo postulado acima é chamada **um sistema de coordenadas para a reta**. O número correspondente a qualquer ponto da reta é chamado **coordenada do ponto**. Assim se temos dois pontos A e B cujas coordenadas são a e b respectivamente, a distância entre os pontos A e B é dada por $AB = |a - b|$.

Postulado 6. (Postulado da Colocação da Régua) Dados dois pontos P e Q numa reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva.

Definição 1.10. Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se $AB + BC = AC$, dizemos que o ponto B **está entre** os pontos A e C e denotamos por $A - B - C$.

Obeserve que se temos $A - B - C$ então também temos $C - B - A$.

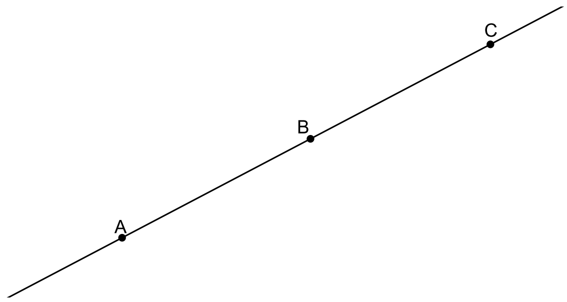


Figura 1.3: O ponto B está entre os pontos A e C

Na demonstração de alguns teoremas necessitamos da relação estar entre para os números reais, a qual é definida da forma: se x, y e z são números reais, dizemos que y está entre x e z se $x < y < z$ ou $z < y < x$. Nas duas situações denotamos por $x - y - z$.

Teorema 1.11. Sejam dados uma reta r e três pontos A, B e C pertencentes ela, com coordenadas x,y e z, respectivamente. Se y está entre x e z, então B está A e C.

Demonstração: Pelo Postulado da Colocação da Régua, se $x < y < z$, então $AB = |y - x| = y - x$; $BC = |z - y| = z - y$; e $AC = |z - x| = z - x$. Logo, temos $AB + BC = (y - x) + (z - y) = z - x = AC$. Portanto, $A - B - C$. Se $z < y < x$, procedendo analogamente, obtemos $C - B - A$. $\square$

Teorema 1.12. Dados três pontos distintos pertencentes em uma mesma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Demonstração: Sejam A, B e C, três pontos colineares distintos. Vamos mostrar inicialmente que um deles está entre os outros dois. Sejam x, y e z, as coordenadas dos pontos A,B e C, respectivamente. Pela propriedade de números reais, apenas um, entre os números x, y e z, está entre os outros dois. Pelo teorema anterior obtemos que o correspondente ponto A, B ou C está entre os outros dois.

Provando a unicidade:

Considere que um dos pontos, por exemplo B, está entre os pontos A e C, vamos mostrar que não podemos ter que A está entre B e C e nem que C está entre A e B.

Supondo A entre os pontos B e C, temos que $BA + AC = BC$. Por hipótese o ponto B está entre A e C, logo $AB + BC = AC$, ou seja, $AB + BA + AC = AC$. Portanto, $2AB = 0$, o que é impossível, pois A e B são pontos distintos. De forma análoga, demonstramos que o ponto C não pode estar entre A e B. $\square$

Teorema 1.13. Se A e B são pontos distintos quaisquer, então:

1) existe um ponto C tal que $A - B - C$;

2) existe um ponto C' tal que $C' - A - B$;

3) existe um ponto D tal que $A - D - B$.

Demonstração: Sejam x e y as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente. Suponha $x < y$. Tome o ponto C com coordenada $y + 1$, o ponto C', com coordenada $x - 1$ e o ponto D com coordenada $\dfrac{x+y}{2}$.

1) Por propriedade dos números reais, $x < y < y + 1$, então $A - B - C$.

2) Usando a mesma propriedade do item acima $x - 1 < x < y$, logo $C' - A - B$.

3) Da mesma forma, $x < \dfrac{x+y}{2} < y$, portanto $A - D - B$. Para o caso $y < x$, o procedimento é análogo. $\square$

Definição 1.14. Sejam A e B pontos distintos. O **segmento de reta** $\overline{AB}$, ou simplesmente **segmento** $\overline{AB}$, o qual é denotado por $\overline{AB}$, é definido como sendo o conjunto dos pontos A e B, e dos pontos X, tais que $A - X - B$. Os pontos A e B são denominados **extremidades do segmento** $\overline{AB}$. A **medida** ou **comprimento** de um segmento $\overline{AB}$ é definida como a distância entre os pontos A e B e denotada por AB.

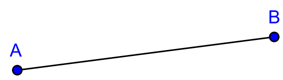


Figura 1.4: Segmento de reta $\overline{AB}$

Definição 1.15. A semirreta de origem no ponto A contendo o ponto B, a qual é denotada por $\overrightarrow{AB}$, é definida como a união do segmento $\overline{AB}$ com o conjunto de todos os pontos X para os quais B está entre A e X. O ponto A é denominado **origem** da semirreta.

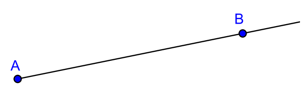


Figura 1.5: Semirreta $\vec{AB}$

Definição 1.16. Dois segmentos que possuem a mesma medida são denominados **segmentos congruentes**.

Teorema 1.17. (**Teorema da Localização de Pontos**) Sejam $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta e x um número positivo. Então, existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

Demonstração: Pelo Postulado da Colocação da Régua, podemos escolher um sistema de coordenadas para a reta $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja um número positivo r. Seja P o ponto cuja coordenada é o número positivo x. Então $P \in \overrightarrow{AB}$ e $AP = |x - 0| = |x| = x$. Como somente um ponto da semirreta tem coordenada x, somente um ponto da semirreta estará a uma distância x de ponto A. $\square$

Definição 1.18. Um ponto B é um ponto médio de um segmento $\overline{AC}$ se B está entre A e C, e $AB = BC$.

Teorema 1.19. Todo segmento tem um único ponto médio.

Demonstração: Em primeiro lugar devemos provar a existência do ponto médio.

Considere o segmento $\overline{AC}$ e seja x um número real positivo tal que $x = \frac{1}{2}AC$. Pelo Teorema da Localização de Pontos , existe um único ponto B na semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que $AB = x$. Como $B \in \overrightarrow{AC}$, temos que B ou pertence ao segmento $\overline{AC}$ ou A está entre B e C, sendo $B \neq A$, e $B \neq C$.

Se B está em $\overline{AC}$, $AB + BC = AC$ então $BC = AC - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC = AB$.

Se C está em $\overline{AB}$, temos $AC + CB = AB$ e $CB = \frac{1}{2}AC - AC = -\frac{1}{2}AC < 0$, absurdo.

Portanto, $AB + BC = AC$ e $AB = BC$, ou seja, B é o ponto médio de $\overline{AC}$.

Provando a unicidade do ponto médio:

Suponha que existe M, outro ponto médio de $\overline{AC}$, logo, $AM + MC = AC$ e $AM = MC$.

Temos então, $2AM = MC$ e, $AM = \frac{1}{2}AC$.

Portanto, pelo Teorema da Localização de Pontos $M = B$, ou seja, o ponto médio de $\overline{AC}$ é único. $\square$

Definição 1.20. Um conjunto é convexo se, para todo par de pontos P e Q desse conjunto, o segmento $\overline{PQ}$ está inteiramente contido nele.

Postulado 7. (Postulado da Separação do Plano) Dada uma reta, os pontos que não pertencem a ela formam dois conjuntos disjuntos tais que:
(1) cada um dos conjuntos é convexo,
(2) se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento $\overline{PQ}$ intersecciona a reta $\overleftrightarrow{PQ}$.

Definição 1.21. Dada uma reta r, os conjuntos determinados pelo postulado acima são denominados **semiplanos**, e r é chamada **origem** de cada um deles. Dizemos que r separa o plano em dois semiplanos.

1.2 Ângulos

Definição 1.22. Chamamos de **ângulo**, a união de duas semirretas que possuem a mesma origem, porém não estão contidas numa mesma reta. Se o ângulo é formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ então estas semirretas são ditas **lados** do ângulo e o ponto A é chamado **vértice** do ângulo. Tal ângulo é representado por $B\widehat{A}C$ ou $C\widehat{A}B$. Algumas vezes, é denominado ângulo A e representado por $\widehat{A}$, desde que o texto ofereça esta condição.

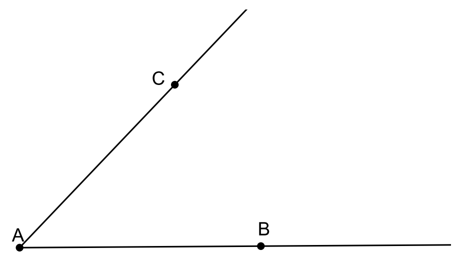


Figura 1.6: Ângulo $B\widehat{A}C$

Definição 1.23. Dizemos que o ponto P pertence ao interior do ângulo $B\widehat{A}C$ ou é ponto interior do ângulo $B\widehat{A}C$ se os pontos P e B estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ e os pontos P e C estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$.

Postulado 8. (Postulado da Medida de Ângulos) A cada ângulo $B\widehat{A}C$ corresponde um número real entre 0 e 180.

Definição 1.24. O número correspondente no postulado acima recebe o nome de medida do ângulo e é denotado por $m(B\widehat{A}C)$

Definição 1.25. Dois ângulos que possuem a mesma medida são chamados ângulos congruentes.

Postulado 9. (Postulado da Construção do Ângulo) Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta contida na origem de um semiplano α. Para cada número $\mathbf{r}$ entre 0 e 180, existe exatamente uma semirreta $\overrightarrow{AP}$ com o ponto P em α, tal que $m(P\widehat{A}B) = r$.

Postulado 10. (Postulado da Adição de Ângulos) Se o ponto D é um ponto interior de $B\widehat{A}C$, então $m(B\widehat{A}C) = m(B\widehat{A}D) + m(D\widehat{A}C)$.

Definição 1.26. Se a soma das medidas de dois ângulos é 180, dizemos que estes ângulos são **suplementares** e que cada um é um **suplemento** do outro.

Definição 1.27. Se a soma das medidas de dois ângulos é 90, dizemos que estes ângulos são **complementares** e que cada um é um **complemento** do outro.

Um ângulo com medida entre 0 e 90 é denominado **ângulo agudo**, um ângulo com medida igual a 90, recebe o nome de **ângulo reto** e um ângulo com medida entre 90 e 180 recebe a nomenclatura de **ângulo obtuso**.

Definição 1.28. Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semirretas opostas e $\overrightarrow{AD}$ é uma outra semirreta então os ângulos $B\widehat{A}D$ e $D\widehat{A}C$ formam um **par linear**.

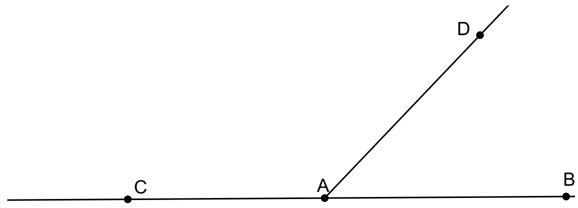


Figura 1.7: Par Linear

Postulado 11. (Postulado do Suplemento) Se dois ângulos formam um par linear, então esses ângulos são suplementares.

Os ângulos $D\widehat{A}B$ e $D\widehat{A}C$ são chamados **ângulos adjacentes**.

Definição 1.29. Se dois ângulos de um par linear são congruentes, então cada um deles é um **ângulo reto**.

Definição 1.30. Dois conjuntos, sendo cada um deles uma reta, uma semirreta, ou um segmento, são **perpendiculares** se as retas que os contêm determinam um ângulo reto. Se uma reta r é perpendicular a uma reta s, denota-se por $r \perp s$.

Definição 1.31. Dois **ângulos** são **opostos pelo vértice** se os lados de um são as semirretas opostas aos lados do outro.

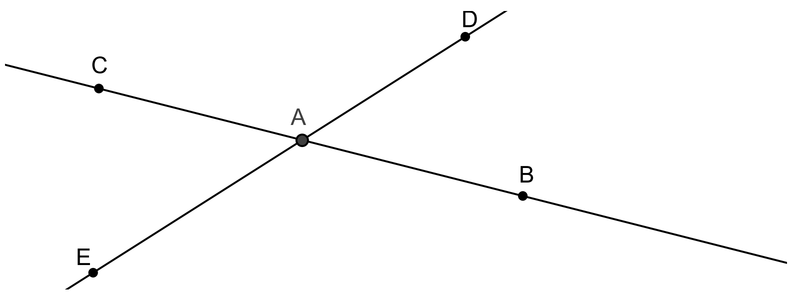


Figura 1.8: Ângulos Opostos pelo Vértice

Teorema 1.32. Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração: Consideremos os ângulos opostos pelo vértice $B\widehat{A}C$ e $D\widehat{A}E$ tais que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$, e $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sejam dois pares de semirretas opostas. Então $B\widehat{A}C$ e $C\widehat{A}D$, e $C\widehat{A}D$ e $D\widehat{A}E$ são pares de ângulos suplementares. Como $B\widehat{A}C$ e $D\widehat{A}E$ têm o mesmo suplemento, então $m(B\widehat{A}C) = m(D\widehat{A}E)$. $\square$

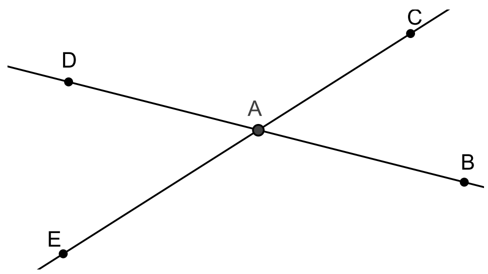


Figura 1.9: Ângulos opostos pelo vértice

Teorema 1.33. Se duas retas que se interceptam formam um ângulo reto, então formam quatro ângulos retos.

Demonstração: Considere duas retas que se interceptam formando dois pares de ângulos opostos pelo vértice, tal que um dos ângulos seja reto. Pelo teorema 1.33. e pelo Postulado do Suplemento, teremos quatro ângulos retos. □

Definição 1.34. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, n \geq 3$, uma seguência de n pontos distintos tais que os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ possuem as seguintes propriedades:

a) nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser possivemente nas suas extremidades;

b) nenhum par de segmentos com extremidades comum está na mesma reta.

A união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ é chamada **polígono**, o qual é denotado por $A_1A_2 \ldots A_n$. Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados de **vértices** e os segmentos são seus **lados**.

Definição 1.35. Um polígono é dito **convexo** se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados.

Cada polígono é denominado de acordo com o seu número de lados. Dessa forma, um polígono de 3 lados é chamado **triângulo**; um de 4 lados, **quadrilátero**; um de 5 lados, **pentágono** e, assim, um de n lados é chamado **n-ágono**.

Um **polígono regular** é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois congruentes e seus ângulos dois a dois congruentes.

Um triângulo ABC, denotado por $\triangle ABC$, tem por elementos os três vértices, que são os pontos A, B e C; os três lados, que são os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CA}$ e os três ângulos internos, $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}B$.

Definição 1.36. Quanto à medida de de seus lados um triângulo pode ser denominado:

1) **triângulo equilátero**, quando possui os três lados dois a dois congruentes.

2) **triângulo isósceles**, quando possui dois de seus lados congruentes entre si. O terceiro lado é chamado de *base* do triângulo isósceles.

3) **triângulo escaleno**, aquele em que quaisquer dois de seus lados têm medidas diferentes.

1.3 Congruência de Triângulos

Dois triângulos são chamados congruentes se existe uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes, ou seja, dados os triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, denotamos a congruência por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, assim temos: $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $\widehat{C} \cong \widehat{F}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{FD}$.

Necessariamente temos que verificar essas seis congruências para identificarmos dois triângulos congruentes pela definição. Na ideia de facilitar o trabalho, temos alguns resultados chamados **casos de congruência de triâgulos**.

1.3.1 Casos de Congruência de triângulos

Postulado 12. (Primeiro caso de congruência de Triângulos, ou Caso $L.A.L.$)
Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Teorema 1.37. (Teorema do Triângulo Isósceles)
Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração: Seja o triângulo isósceles $\triangle ABC$ de base $\overline{BC}$. Considere a correspondência que leva o $\triangle ABC$ nele mesmo de modo que $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$.

Por hipótese temos $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ e, como $\widehat{A} \cong \widehat{A}$, segue pelo caso $L.A.L.$ de congruência de triângulos, que $\triangle ABC \cong \triangle ACB$.

Portanto, os ângulos dos vértices B e C são congruentes. $\square$

Corolário 1.38. Todo triângulo equilátero possui os três ângulos de mesma medida.

Demonstração: Seja o triângulo equilátero $\triangle ABC$, ou seja, o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$. Pelo teorema acima $\widehat{B} \cong \widehat{C}$.

Da mesma forma, o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{AC}$, logo pelo teorema anterior $\widehat{A} \cong \widehat{C}$.

Portanto, $\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{C}$. $\square$

Definição 1.39. Uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ é uma **bissetriz de um ângulo** $A\widehat{O}B$ se o ponto C está no interior de $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}C \cong B\widehat{O}C$.

Neste caso, temos $m(A\widehat{O}C) = m(B\widehat{O}C) = \dfrac{1}{2}m(A\widehat{O}B)$.

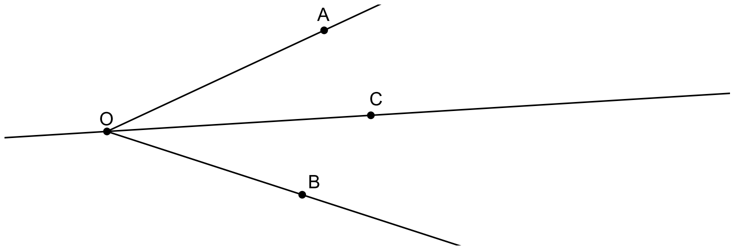
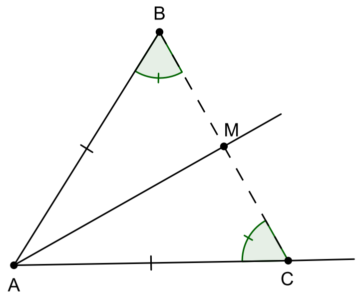


Figura 1.10: Bissetriz de $A\widehat{O}B$

Teorema 1.40. Todo ângulo tem exatamente uma bissetriz.

Demonstração: Consideremos o ângulo $\widehat{A}$ da figura:



Escolhemos os pontos B e C, um em cada lado de $\widehat{A}$, tais que $AB = AC$. Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, que está no interior de $\widehat{A}$. Pelo Teorema do Triângulo Isósceles aplicado ao triângulo $\triangle ACB$, obtemos a congruência dos ângulos $A\widehat{B}M$ e $A\widehat{C}M$. Pelo caso $L.A.L.$ de congruência de triângulos, obtemos $\triangle ABM \cong \triangle ACM$. Como consequência temos $B\widehat{A}M \cong C\widehat{A}M$.

Portanto $\overrightarrow{AM}$ é a bissetriz de $B\widehat{A}C$.

Provando a unicidade da bissetriz:

Suponha que uma outra semirreta $\overrightarrow{AD}$, seja também a bissetriz de $\widehat{A}$. Então, $m(B\widehat{A}D) = m(B\widehat{A}M) = \dfrac{1}{2}m(B\widehat{A}C)$.

Pelo Postulado da Construção do Ângulo $\overrightarrow{AD}$ coincide com $\overrightarrow{AM}$.

Logo, $\overrightarrow{AM}$ é a única bissetriz de $\widehat{A}$. $\square$

Definição 1.41. Uma **bissetriz de um triângulo** é um segmento da bissetriz de um ângulo do triângulo compreendido entre o vértice correspondente e o lado oposto.

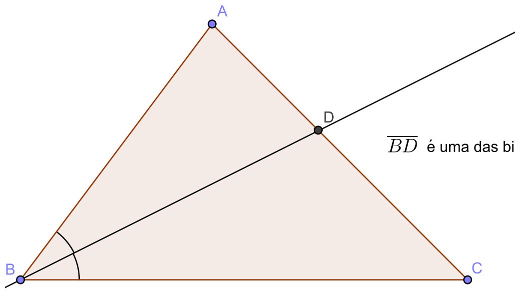


Figura 1.11: Bissetriz do triângulo

Teorema 1.42. (Segundo Caso de Congruência de Triângulos, ou Caso $A.L.A.$**)**
Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Demonstração: Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{E}$.

Seja G um ponto pertencente à semirreta $\overrightarrow{DF}$ de modo que $DG = AC$.

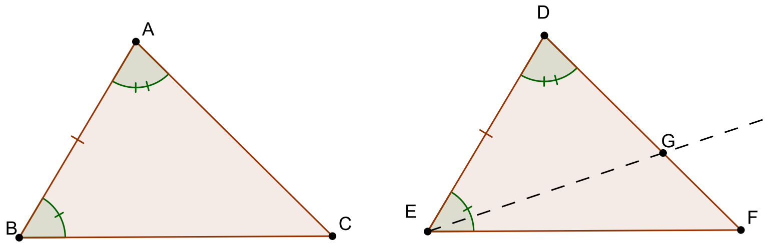


Figura 1.12: Segundo caso de congruência de triângulos

Observe os triângulos: $\triangle ABC$ e $\triangle DEG$. Sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ e por construção, $\overline{AC} \cong \overline{DG}$, logo, pelo caso $L.A.L.$, $\triangle ABC \cong \triangle DEG$.

Portanto $D\widehat{E}F \cong D\widehat{E}G$, ou seja, $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{EG}$ são coincidentes, então, $F = G$.

Assim, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. $\square$

Teorema 1.43. (Terceiro Caso de Congruência de Triângulos ou Caso $L.L.L.$**)**
Se dois triângulos possuem os três pares de lados correspondentes congruentes, então são triângulos congruentes.

Demonstração: Considere $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$.

Considere o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o ponto A, consideremos uma semirreta de origem B formando com $\overrightarrow{BC}$ um ângulo congruente ao $D\widehat{E}F$. Marque sobre esta semirreta um ponto G tal que $BG = DE$. Pelo caso $L.A.L.$, temos $\triangle\ GBC \cong \triangle\ DEF$.

Seja H o ponto de intersecção entre $\overline{AG}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

* H está entre B e C.

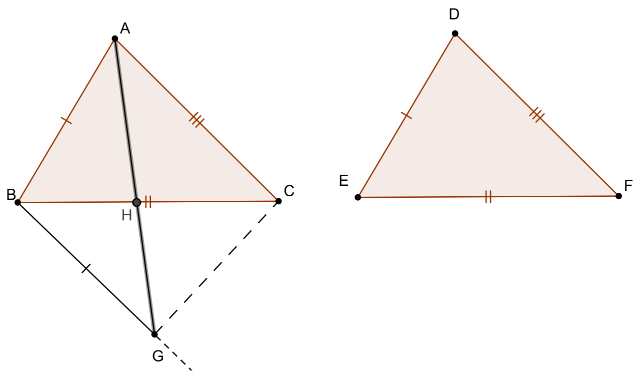


Figura 1.13: Terceiro caso de congruência de triângulos - H está entre B e C

Observe que $\triangle BGA$ e $\triangle CAG$ são triângulos isósceles, logo $B\widehat{A}G \cong B\widehat{G}A$ e $C\widehat{A}G \cong C\widehat{G}A$, além disso: $m(B\widehat{A}C) = m(B\widehat{A}G) + m(D\widehat{A}C) = m(B\widehat{G}A) + m(A\widehat{G}C) = m(B\widehat{G}C)$. Então pelo caso $L.A.L.$, temos que $\triangle ABC \cong \triangle GBC$.

* B está entre H e C.

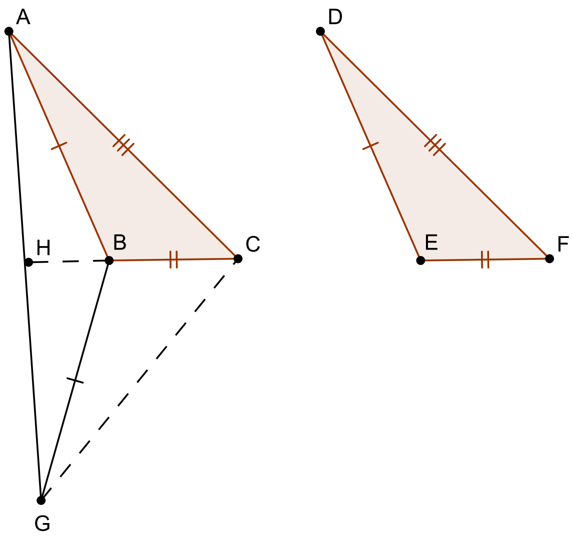


Figura 1.14: Terceiro caso de congruência de triângulos - B está entre H e C

Demonstramos analogamente que $\triangle ABC \cong \triangle GBC$. Logo, $\triangle ABC \cong \triangle GBC \cong \triangle DEF$, ou seja, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

* Se $H = B$.

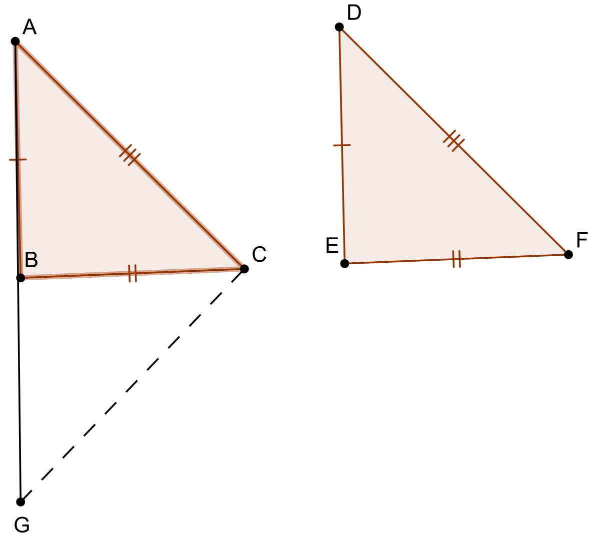
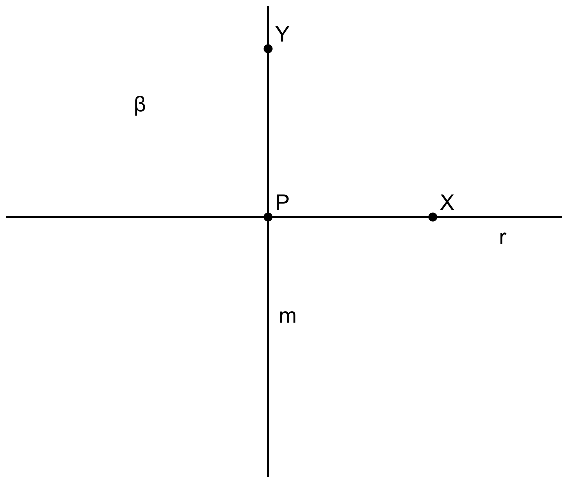


Figura 1.15: Terceiro caso de congruência de triângulos - $H = B$

Sendo $H = B$ temos que A, B e G são colineares. Neste caso, $\triangle ABC$ e $\triangle GBC$ são isósceles, logo, $\widehat{A} \cong \widehat{G} \cong \widehat{D}$. Portanto, pelo caso $L.A.L.$, temos, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Os outros dois casos, $H = C$ ou $B - C - H$ são demonstrados de maneira semelhante aos já existentes. $\square$

Teorema 1.44. Por um ponto de uma reta dada passa uma única reta perpendicular a essa reta.

Demonstração: Considere uma reta r e o ponto P pertencente a r.



Seja β um dos semiplanos que contém r com a origem, e seja X um ponto da reta r distinto do ponto P. Pelo Postulado da Construção do Ângulo, existe um ponto Y em β tal que $X\widehat{P}Y$ é um ângulo reto. Seja m a reta $\overleftrightarrow{PY}$. Então $m \perp r$, logo existe pelo menos uma reta que satisfaz às condições do problema.

Provando a unicidade:

Suponha que existam duas retas, m e n, passando pelo ponto P e perpendiculares à reta r, contendo os pontos Y e W, ambos pertencentes a β. As retas m e n contêm respectivamente as semirretas $\overrightarrow{PY}$ e $\overrightarrow{PW}$ que estão no mesmo plano de β tendo a reta r como origem. Pela definição de retas perpendiculares, $X\widehat{P}Y = 90$. Da mesma forma $X\widehat{P}W = 90$. Isto contradiz o Postulado da Construção do Ângulo que diz que a semirreta $\overrightarrow{PY}$ com $Y \in \beta$, tal que $X\widehat{P}Y = 90$ é única.

Portanto existe uma única reta passando pelo ponto P e perpendicular à reta r. $\square$

Definição 1.45. A **reta mediatriz** ou **mediatriz** de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio.

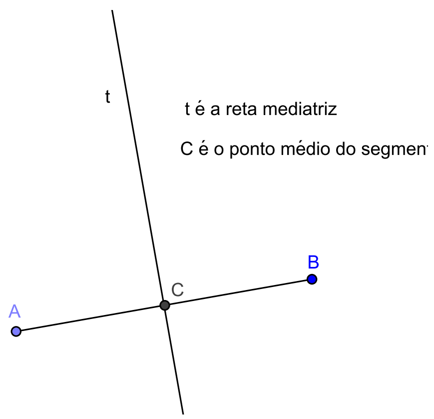


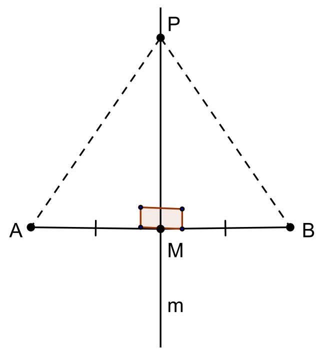
Figura 1.16: Mediatriz de $\overline{AB}$

Todo segmento tem exatamente um ponto médio, e pelo ponto médio passa exatamente uma reta perpendicular. Assim, a mediatriz é única.

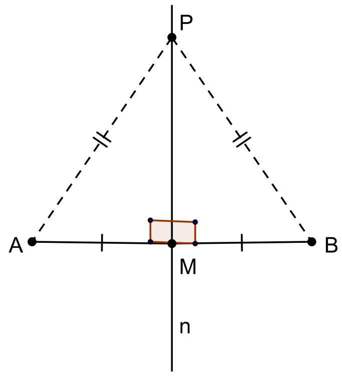
Teorema 1.46. A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos equidistantes das extremidades do segmento.

Demonstração: Seja $\overline{AB}$ um segmento cujo ponto médio é o ponto M. Seja m a reta mediatriz de $\overline{AB}$ e finalmente, um ponto P pertencente a reta m.

* Se o ponto P está em $\overline{AB}$, então $P = M$, pela definição de ponto médio.



Se o ponto P não pertence ao segmento $\overline{AB}$, então $\overline{PM}$ lado comum aos triângulos $\triangle APM$ e $\triangle BPM$, $MA = MB$ e $P\widehat{M}A = P\widehat{M}B$, por hipótese. Pelo caso $L.A.L.$, temos, $\triangle PMA \cong \triangle PMB$, logo, $PA = PB$, em outras palavras, o ponto P é equidistante dos pontos A e B. Logo, o ponto P pertence a reta m.



* Seja $n = \overleftrightarrow{PM}$. Temos que $\overline{PM}$ é lado comum aos triângulos $\triangle APM$ e $\triangle BPM$, $MA = MB$ e $PA = PB$, pelo caso $L.L.L.$ temos $\triangle PMA \cong \triangle PMB$, ou seja, $m(P\widehat{M}A) = m(P\widehat{M}B) = 90$, logo por definição, n é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Pela unicidade da mediatriz, temos $n = m$, e portanto P pertence à reta m.

$\square$

Definição 1.47. **Mediana** de um triângulo é um segmento de reta que possui como extremidades um vértice e o ponto médio do lado oposto a este vértice.

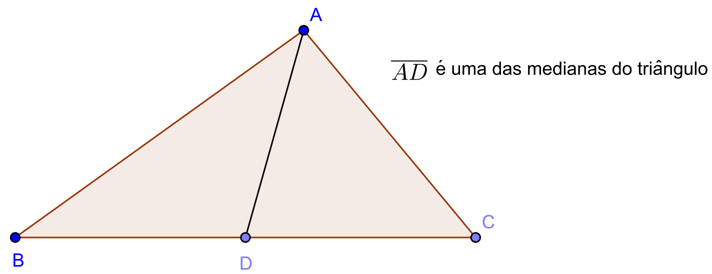


Figura 1.17: Mediana do triângulo

1.4 Desigualdades Geométricas

Nesta seção apresentamos o Teorema do Ângulo Externo para triângulos, pois, auxiliará na demonstração de resultados pertinentes a esta dissertação.

Definição 1.48. Se C está entre B e D então $A\widehat{C}D$ é um **ângulo externo** do triângulo $\triangle ABC$.

Neste caso, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são **ângulos internos não adjacentes** ao ângulo externo $A\widehat{C}D$.

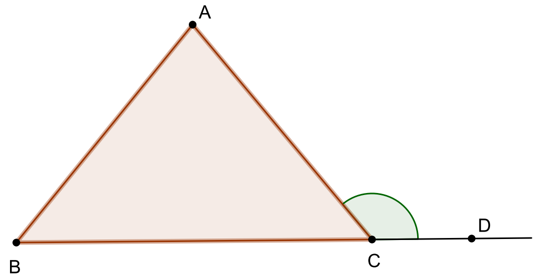
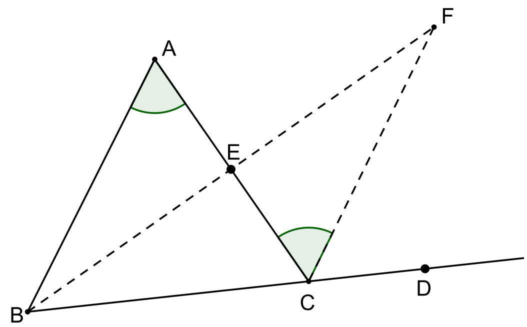


Figura 1.18: Ângulo Externo do triângulo

Teorema 1.49. (Teorema do Ângulo Externo) Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer.



Seja D um ponto tal que C está entre B e D.

A mostrar: $A\widehat{C}D > \widehat{A}$ e $A\widehat{C}D > \widehat{B}$.

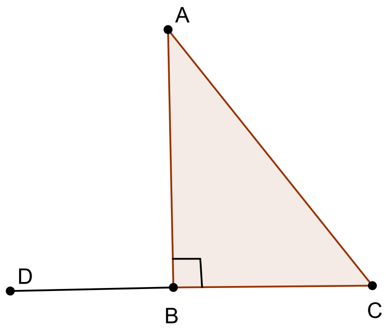
Seja E o ponto médio de $\overline{AC}$ e seja F o ponto da semirreta oposta a $\overrightarrow{EB}$ tal que $EF = EB$.

Temos $\triangle BEA \cong \triangle FEC$ pelo Postulado $L.A.L.$, já que $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ e $\overline{BE} \cong \overline{FE}$ por construção e $B\widehat{A}E \cong F\widehat{E}C$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

Portanto, $\widehat{A} \cong E\widehat{C}F$. Também o ponto F é um ponto interior ao ângulo ACD, logo pelo Postulado da Adição de Ângulos aplicado aos ângulos ACD, ACF e FCD, ou seja, $A\widehat{C}D = A\widehat{C}F + F\widehat{C}D$, então, $A\widehat{C}D = E\widehat{C}F + F\widehat{C}D$, logo, $A\widehat{C}D > E\widehat{C}F$. Portanto, $A\widehat{C}D > \widehat{A}$. $\square$

Corolário 1.50. Se um triângulo possui um ângulo reto, então os seus outros dois ângulos são agudos.

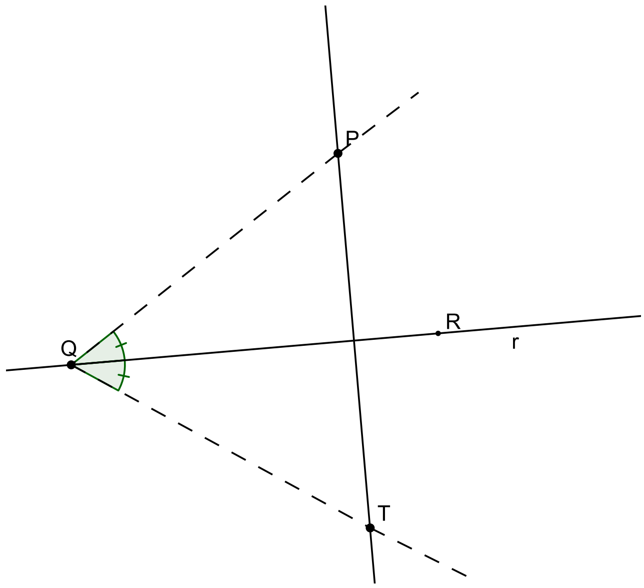
Demonstração: Considere o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em B, e o ponto D de tal forma que B esteja entre C e D. Note que $D\widehat{B}A$ e $A\widehat{B}C$ formam um par linear, portanto ambos são ângulos retos.



Pelo teorema anterior $m(A\widehat{B}D) > m(B\widehat{C}A)$, e portanto, $m(B\widehat{C}A) < 90$. Usando o mesmo raciocínio, temos que $m(B\widehat{A}C) < 90$. □

Teorema 1.51. Por um ponto não pertencente a uma reta, existe uma única reta perpendicular à reta dada.

Demonstração: Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a ela.



Provando a existência:

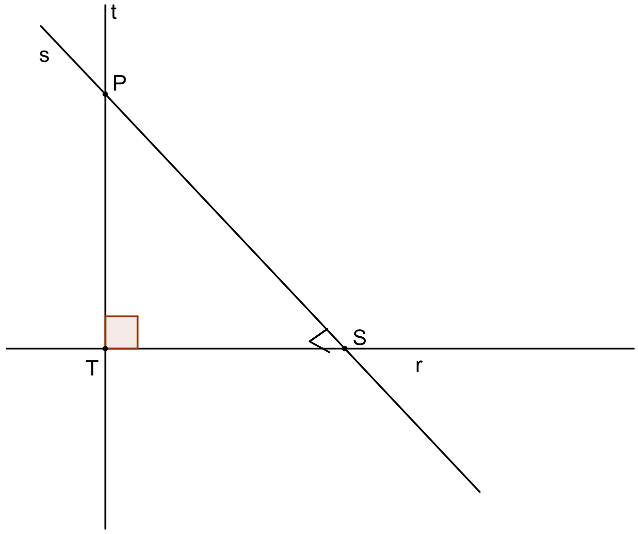
Vamos construir pelo ponto P uma reta perpendicular à reta r. Sejam Q e R dois pontos distintos quaisquer de r. Se $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{PR}$ for perpendicular a r, situação está demonstrada.

Caso contrário, consideremos, no semiplano determinado por r e que não contém o ponto P, uma semirreta com origem no ponto Q, formando com $\overrightarrow{QR}$ um ângulo congruente ao $P\widehat{Q}R$.

Seja T um ponto dessa semirreta tal que $QP = QT$. O $\triangle QTP$ assim determinado, é isósceles de base $\overline{PT}$, sendo $\overrightarrow{QR}$ a bissetriz do ângulo $T\widehat{Q}P$. Logo, por congruência de triângulos, a reta $\overleftrightarrow{PT}$ é perpendicular à reta r.

Provando a unicidade:

Suponha que pelo ponto P não pertencente à reta r passem duas retas s e t, ambas perpendiculares à reta r, as quais cortam r nos pontos S e T respectivamente.



Dessa forma, os ângulos $P\widehat{T}S$ e $P\widehat{S}T$ são ambos ângulos retos do triângulo $\triangle PTS$, absurdo, pois contradiz o corolário anterior.

Portanto, a reta perpendicular é única. $\square$

Definição 1.52. Uma **altura de um triângulo** é o segmento perpendicular que une um vértice do triângulo à reta que contém o lado oposto.

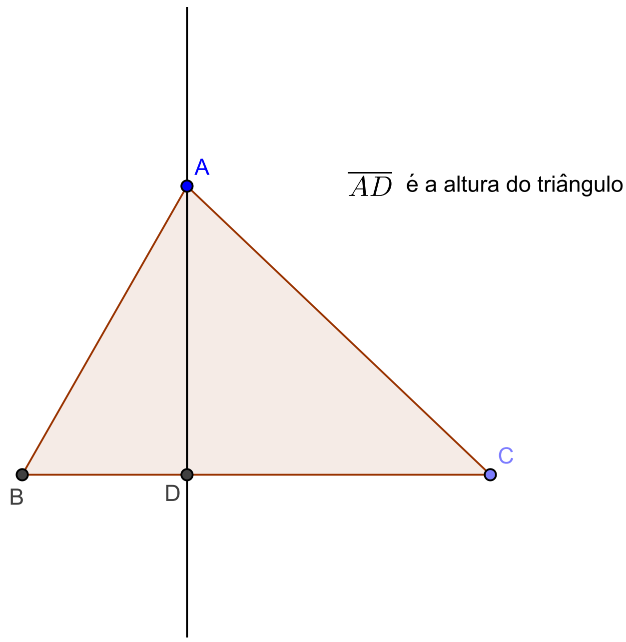


Figura 1.19: Altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$

1.5 Sobre o Postulado das Paralelas

Até o presente momento apresentamos resultados que são verdadeiros para a Geoemtria Euclidiana como também para as Geometrias Não-Euclidianas. Por Geometria Não-Euclidiana, entendemos um sistema geométrico construído sem a hipótese euclidiana das paralelas.

Nesta seção, apresentamos o Postulado das Paralelas ou Postulado de Euclides, pois é o que norteia a Geometria Euclidiana.

1.5.1 Parâmetros para o Paralelismo de Retas

Duas retas podem estar situadas no espaço de três modos diferentes:

1- Elas se interceptam em um ponto. Neste caso são coplanares.

2- Não são coplanares. Neste caso, são chamadas reversas.

3- Finalmente, as duas retas podem estar num mesmo plano, sem se interceptarem. Neste caso, dizemos que as retas são paralelas.

Observação 1.53. Quando uma reta r for paralela a uma reta s, esse fato será denotado por $r \| s$.

Nesta dissertação trabalhamos a Geometria Euclidiana Plana.

Teorema 1.54. Duas retas paralelas estão contidas em exatamente um plano.

Demonstração: Sejam s_1 e s_2 retas paralelas e E um plano, tal que s_1 e s_2 estejam contidas em E.

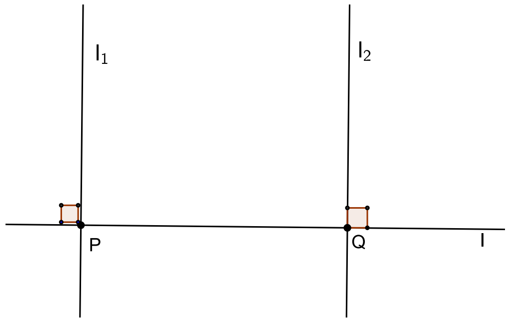
A mostrar: o plano E é único.

Seja P um ponto pertencente à reta s_2, logo, existe apenas um plano contendo o ponto P e a reta s_1.

Portanto existe um único plano contendo s_1 e s_2, pois, todo plano que contém s_2, contém o ponto P. $\square$

Teorema 1.55. Duas retas coplanares são paralelas se ambas forem perpendiculares a uma mesma reta.

Demonstração: Sejam: $l_1 \perp l$ no ponto P, $l_2 \perp l$ no ponto Q e l_1, l_2 retas coplanares.



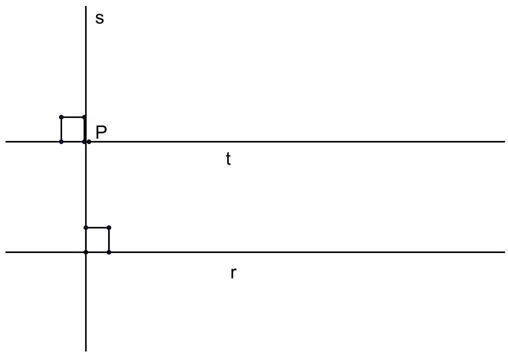
A mostrar: l_1 e l_2 não se interceptam.

Suponha por absurdo que l_1 intercepte l_2 no ponto R. Então existem duas retas perpendiculares à reta l pelo ponto R, o que é impossível, pois, por um ponto não pertencente a uma reta existe somente uma reta perpendicular a ela.

Logo, $l_1 \parallel l_2$. $\square$

Teorema 1.56. Por um ponto não pertencente a uma reta passa, no mínimo, uma reta paralela à reta dada.

Demonstração: Sejam a reta r e um ponto P não pertencente a ela.



Seja s a reta passando pelo ponto P e perpendicular a r.

Seja t uma reta passando pelo ponto P e perpendicular à reta s. Pelo teorema anterior, temos $t \parallel s$. $\square$

Definição 1.57. Dadas duas retas r e s não coincidentes, uma **transversal** a estas retas é uma reta t tal que $t \cap s = \{P\}$; $t \cap r = \{Q\}$ e $P \neq Q$.

Definição 1.58. Seja r uma transversal às retas s e t, interseccionando as mesmas nos pontos P e Q, respectivamente. Seja A um ponto da reta s e B um ponto da reta t, tais que A e B estejam em lados opostos de r. Os ângulos $A\widehat{P}Q$ e $P\widehat{Q}B$ são denominados **ângulos alternos internos** formados por s, t e a transversal r.

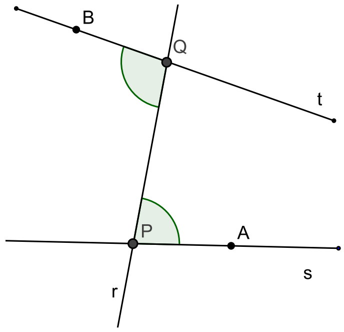


Figura 1.20: Ângulos Alternos Internos

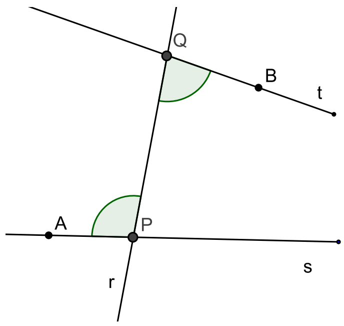


Figura 1.21: Ângulos Alternos Internos

Teorema 1.59. Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então estas retas são paralelas.

Demonstração: Sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t, nos pontos P e Q respectivamente. Sejam $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ ângulos alternos internos congruentes, como mostra a Figura 1, então as retas r e s são paralelas.

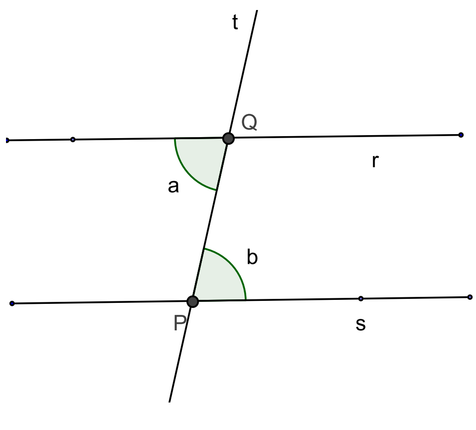


Figura 1.22: Figura 1

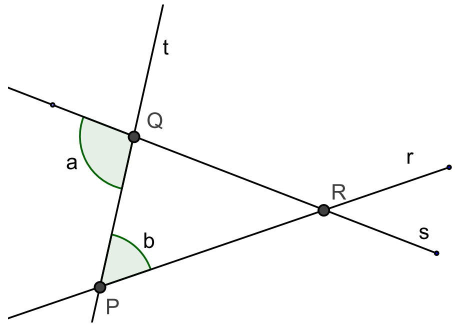


Figura 1.23: Figura 2

Se as retas r e s se interseccionam em um ponto R, como na Figura 2, elas formam um triângulo $\triangle RPQ$ do qual $\widehat{a}$ é um ângulo externo, sendo $\widehat{b}$ um ângulo interno não adjacente a ele.

Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos que $\widehat{a} > \widehat{b}$, o que contradiz a hipótese.

Portanto, as retas r e s são paralelas. $\square$

Definição 1.60. Sejam $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ ângulos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Se $\widehat{z}$ é tal que $\widehat{y}$ e $\widehat{z}$ são ângulos opostos pelo vértice, então $\widehat{x}$ e $\widehat{z}$ são chamados **ângulos correspondentes**.

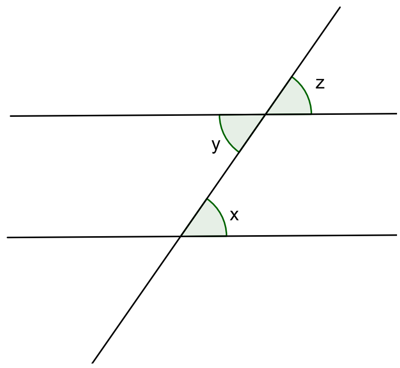
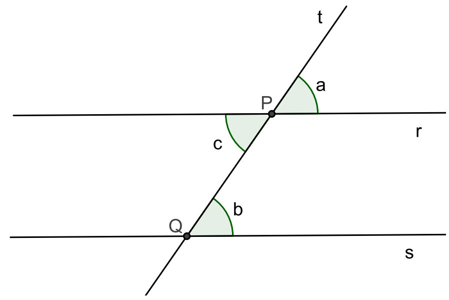


Figura 1.24: Ângulos Correspondentes

Teorema 1.61. Se duas retas são cortadas por uma transversal, e se dois ângulos correspondentes são congruentes, então as retas são paralelas.

Demonstração: Sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t, nos pontos P e Q respectivamente. Sejam $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ ângulos correspondentes congruentes, e $\widehat{c}$ tal que $\widehat{a}$ e $\widehat{c}$ são ângulos opostos pelo vértice.

Os ângulos $\widehat{b}$ e $\widehat{c}$ são alternos internos congruentes, logo pelo teorema anterior, as retas r e s são paralelas. $\square$



1.5.2 Postulado das Paralelas

Por aproximadamente dois mil anos, o livro texto padrão usado para o estudo da geometria foi *Os Elementos* de Euclides. Este livro foi muito importante para o desenvolvimento da Matemática.

O referido livro não apresenta a geometria como um mero agrupamento de dados desconexos, utiliza um sistema lógico. As definições, os postulados e os teoremas não aparecem agrupados ao acaso, são expostos numa ordem perfeita. Cada teorema resulta das definições, dos postulados e dos teoremas anteriores, com demonstração rigorosa.

Euclides, neste livro, apresenta um postulado afirmando a unicidade de uma reta paralela, traçada por um ponto não pertencente a ela.

De modo geral, os matemáticos gostam de supor o mínimo e demonstrar o máximo. Desta forma, vários matemáticos tentaram fazer do Postulado das Paralelas de Euclides, um teorema. Não obteveram sucesso.

No século XIX, foi descoberto que não era possível demonstrar o Postulado das Paralelas, usando os postulados existentes.

Postulado 13. (Postulado das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.

Teorema 1.62. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então seus ângulos alternos internos são congruentes.

Demonstração: São dadas duas retas paralelas r e s e uma reta transversal t. Esta reta t intercepta as retas paralelas nos pontos P e Q respectivamente.

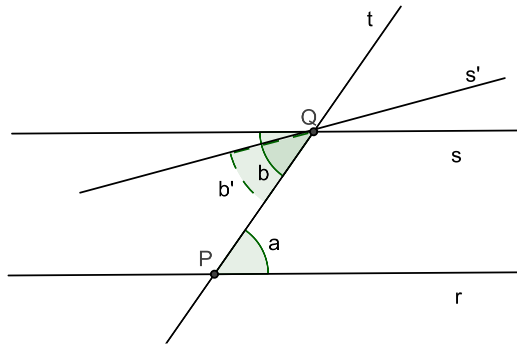
Suponhamos que os ângulos internos $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ não sejam congruentes.

Seja s' uma reta que passa pelo ponto Q formando com as retas r e s os ângulos alternos internos congruentes $\widehat{a}$ e $\widehat{b'}$.

Pelo Teorema 1.59., a reta s' é paralela à reta r. Desta forma, passando pelo ponto Q, as duas retas s e s' são paralelas à reta r, o que contradiz o Postulado das Paralelas.

Portanto, $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ são ângulos alternos internos congruentes. $\square$

Teorema 1.63. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180.



Demonstração: Sejam o $\triangle ABC$ e r a reta paralela ao lado $\overline{BC}$ passando pelo vértice A. Considere os ângulos $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ e $\widehat{c}$, como na figura abaixo:

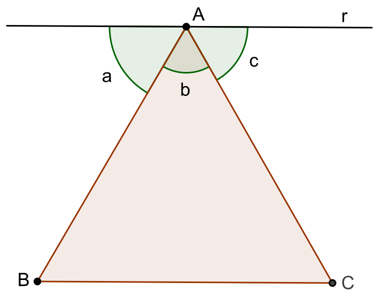


Figura 1.25: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Usando os Postulados da Adição de Ângulos e do Suplemento, temos que:

$m(\widehat{a}) + m(\widehat{b}) + m(\widehat{c}) = 180$. Como $\overleftrightarrow{AB}$ é transversal a $\overleftrightarrow{BC}$ e a reta r, temos pelo Teorema 1.62., que $\widehat{b} \cong A\widehat{B}C$.

Da mesma forma, demonstramos que $\widehat{c} \cong A\widehat{C}B$.

Logo, $m(B\widehat{A}C) + m(B\widehat{C}A) + m(B\widehat{C}A) = 180$. $\square$

2 Dobraduras e Construções Básicas

2.1 A origem do Origami

Origami é uma palavra de origem japonesa que significa arte de dobrar papel.

Esse nome foi preservado porque além de manter sua origem, no idioma japonês essa palavra é de fácil pronúncia. A arte do Origami foi desenvolvida no Japão em torno do século VIII. No Brasil, utiliza-se também a palavra dobradura, porém, o termo Origami é mundialmente reconhecido e utilizado.

Um erro comum é acreditar que a arte de construir figuras com dobraduras, seja exclusividade japonesa. Existem relatos que a Europa recebeu também, no século VIII alguns conhecimentos parecidos com o Origami, vindos da Espanha, além disso, não podemos esquecer da China, onde a história do papel é bem mais antiga.

No início acreditava-se que o Origami era uma simples arte de imitação, mas o tempo mostrou que não é bem assim, porque não conseguimos reproduzir um objeto, usando a dobradura, sem antes entender como devemos proceder para efetivar sua constução, ou seja, quais as técnicas que devemos usar na situação em questão.

Na confecção de um Origami, devemos conhecer o princípio básico, evitar o uso da cola e da tesoura, fazendo com que a dobradura obtenha o formato adequado, não utilizando outro material que não seja o papel, sendo assim, estaremos estimulando a nossa imaginação e criatividade.

A confecção de um Origami, exige o desenvolvimento de inúmeras habilidades, tais como, paciência, concentração e coordenação motora. Um exemplo simples é o de uma criança quando constrói seu primeiro avião de papel. No momento inicial alguém mostra como proceder, em seguida, ela não consegue efetuar a dobradura com perfeição, porém, após algumas tentativas, ela acaba adquirindo a intimidade com o papel, conseguindo até, criar modelos mais sofisticados e com melhor performance.

Nosso objetivo educacional é o aluno. Portanto, nossa principal função, como educadores, é que exista uma aprendizagem efetiva e duradoura. Para isso, é necessário a existência de propósitos definidos e atividade reflexiva dos mesmos.

Desta forma, a autêntica aprendizagem ocorre quando o aluno está interessado e se mostra empenhado em aprender, isto é, quando está motivado. É a motivação interior deste que o impulsiona e vitaliza o ato de estudar e aprender.

Como alternativa para que esta aprendizagem ocorra de maneira significativa, este trabalho sugere as dobraduras.

O Origami facilita o entendimento dos conceitos matemáticos, e posteriormente, a escrita matemática, devido, sobretudo, à diminuição da resistência por parte dos alunos que passam a ter um contato com a matemática num ambiente em que são estimulados a apresentar suas próprias reflexões e considerações.

Segundo Tomoko Fuse "Todo Origami começa quando pomos a mão em movimento. Há uma grande diferença entre compreender alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato", portanto este trabalho, oferece as oficinas abaixo como sugestão de melhoria no ensino aprendizagem da Geometria.

2.2 Reta passando por dois pontos

1. Dados dois pontos A e B distintos, existe uma única reta que os contém.

   Tome uma folha de papel, marque na mesma dois pontos distintos quaisquer.

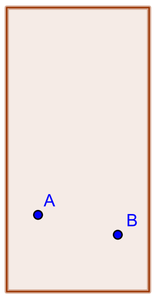


Figura 2.1: Reta por dois pontos - passo 1

2. Faça uma dobradura que contenha os dois pontos marcados.

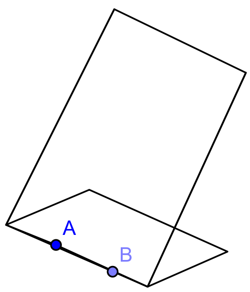


Figura 2.2: Reta por dois pontos - passo 2

3. Volte a folha a posição inicial e a reta estará marcada.

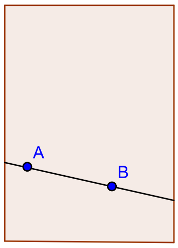


Figura 2.3: Reta por dois pontos - passo 3

2.3 Mediatriz e ponto médio de um segmento de reta

1. Tome uma folha de papel, marque na mesma dois pontos distintos quaisquer.

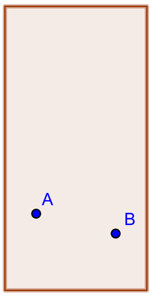


Figura 2.4: Mediatriz e ponto médio de um segmento de reta - passo 1

2. Em seguida, faça uma dobradura que contenha os dois pontos marcados.

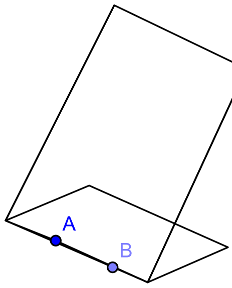


Figura 2.5: Mediatriz e ponto médio de um segmento de reta - passo 2

3. Dobre o papel fazendo com que o ponto A coincida com o ponto B.

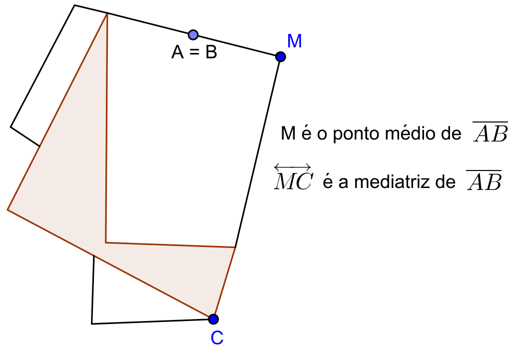


Figura 2.6: Mediatriz e ponto médio de um segmento de reta - passo 3

4. Desdobre, como na figura abaixo, marcando o ponto médio M na intersecção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MC}$.

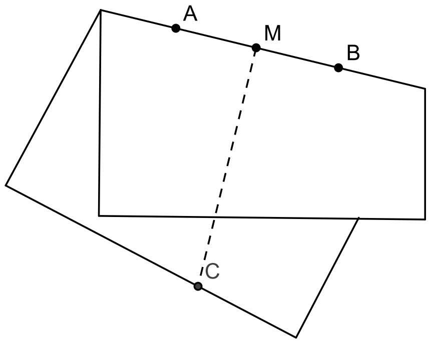


Figura 2.7: Mediatriz e ponto médio de um segmento de reta - passo 4

5. Volte a folha a posição inicial.

   As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MC}$ formam ângulo reto e o ponto M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

   Portanto, $\overleftrightarrow{MC}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, como mostra a figura abaixo.

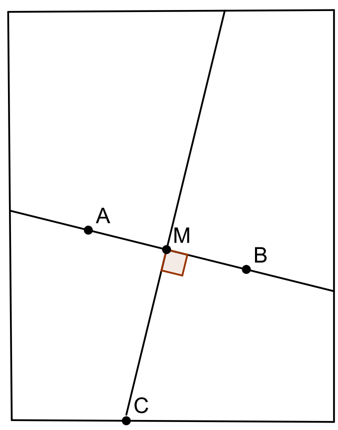


Figura 2.8: Mediatriz e ponto médio de um segmento de reta - passo 5

2.4 Bissetriz de um ângulo

1. Desenhe em uma folha de papel duas retas concorrentes quaisquer. Marque o ponto de intersecção das mesmas e um ponto em cada reta como mostra a figura abaixo:

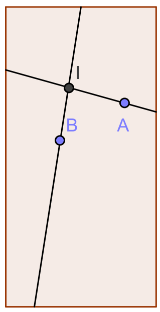


Figura 2.9: Bissetriz de um ângulo - passo 1

2. Em seguida, faça uma dobradura sobre $\overrightarrow{AI}$ e outra sobrepondo $\overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{IB}$, como o esquema a seguir:

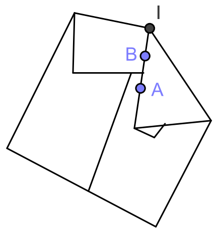


Figura 2.10: Bissetriz de um ângulo - passo 2

3. Volte o papel a posição incial, marcando um ponto M sobre a dobradura.

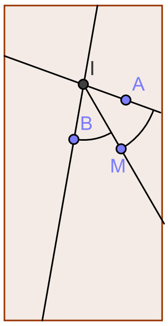


Figura 2.11: Bissetriz de um ângulo - passo 3

Observe que $A\widehat{I}M = B\widehat{I}M$, portanto $\overrightarrow{IM}$ é a bissetriz de $B\widehat{I}A$.

2.5 Reta perpendicular a uma reta, passando por um ponto

Dada uma reta e um ponto P, existe uma única reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P.

2.5.1 O ponto P pertence à reta

1. Desenhe em uma folha de papel uma reta, marque nela o ponto P, como no esquema abaixo:

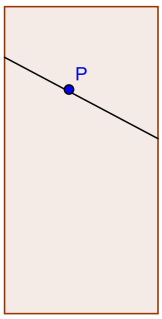


Figura 2.12: Reta perpendicular, $P \in r$ - passo 1

2. Dobre a folha sobre a reta r.

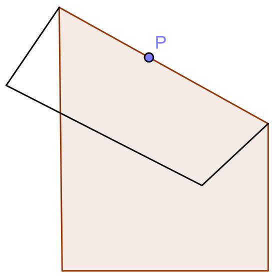


Figura 2.13: Reta perpendicular, $P \in r$ - passo 2

3. Em seguida, faça uma dobradura passando por P de modo que as duas semirretas sobre a reta r com origem no ponto P sejam coincidentes.

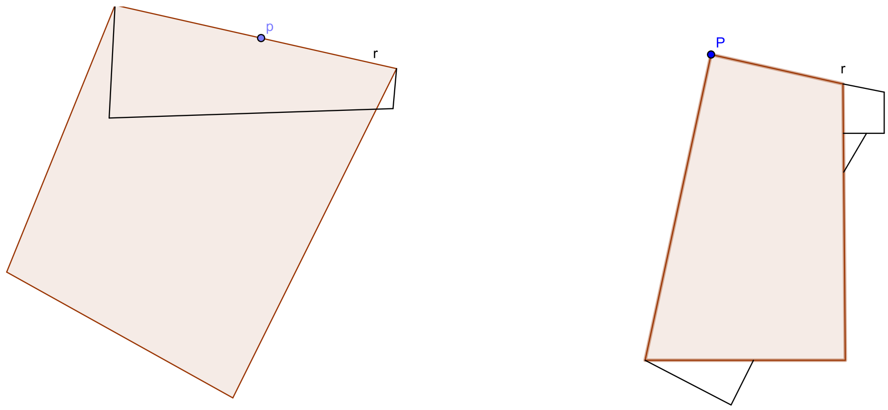


Figura 2.14: Reta perpendicular, $P \in r$ - passo 3

4. Volte o papel a posição inicial, ou seja, desdobre. Verifique que além da reta r, existe uma outra reta que chamaremos de s. As retas r e s são perpendiculares.

   Observe que na construção, os ângulos formados pelas retas r e s são congruentes, pois eles se sobrepõem, logo as retas r e s formaram ângulos retos.

   Portanto, r e s são perpendiculares, como mostra a figura a seguir.

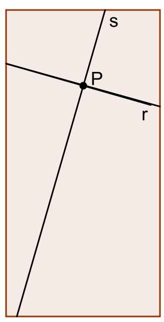


Figura 2.15: Reta perpendicular, $P \in r$ - passo 4

2.5.2 O ponto P não pertence à reta

1. Em uma folha faça uma reta r e marque um ponto P fora da mesma.

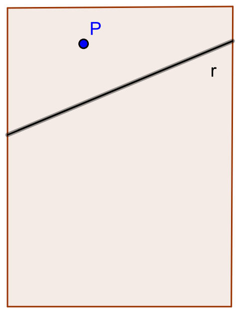


Figura 2.16: Reta perpendicular, $P \notin r$ - passo 1

2. Sobre a reta r faça uma dobradura deixando o ponto P visível, como mostra a figura abaixo:

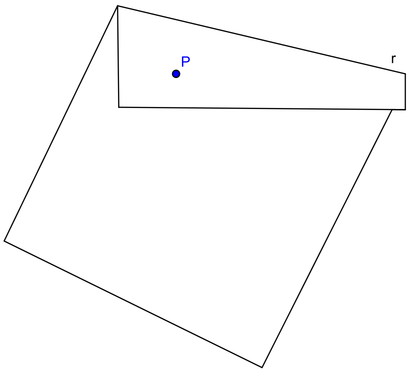


Figura 2.17: Reta perpendicular, $P \notin r$ - passo 2

3. Em seguida, faça uma dobradura passando por pelo ponto P, fazendo com que as duas semirretas coincidam, como indica a figura a seguir.

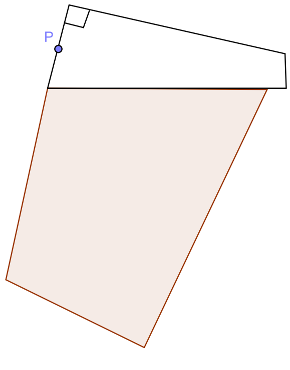


Figura 2.18: Reta perpendicular, $P \notin r$ - passo 3

4. Volte a folha a posição inicial, temos o seguinte desenho:

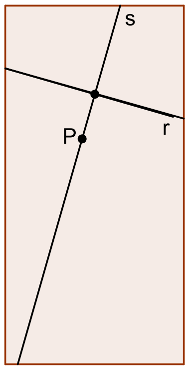


Figura 2.19: Reta perpendicular, $P \notin r$ - passo 4

Observe que os ângulos formados pelas retas r e s são congruentes, pois, eles se sobrepõem, logo as retas r e s formam ângulos retos e portanto, r e s são retas perpendiculares.

2.6 Congruência dos ângulos opostos pelo vértice

Sejam r e s retas concorrentes, com interseção no ponto O, os pontos A e B, pertencentes à reta r e tendo O entre eles.

Marque também, os pontos C e D pertencentes à reta s e tendo o ponto O entre os mesmos.

Os ângulos $A\widehat{O}C$ e $B\widehat{O}D$ são denominados ângulos opostos pelo vértice.

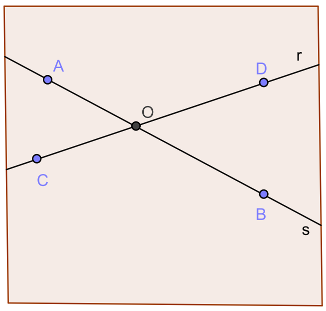


Figura 2.20: Ângulos opostos pelo vértice

1. Faça uma reta r em uma folha de papel, usando dobradura.

Figura 2.21: Congruência dos ângulos opostos pelo vértice - passo 1

2. Faça uma reta s qualquer, usando dobradura, concorrente com a reta r. Marque o ponto O na interseção das retas r e s.

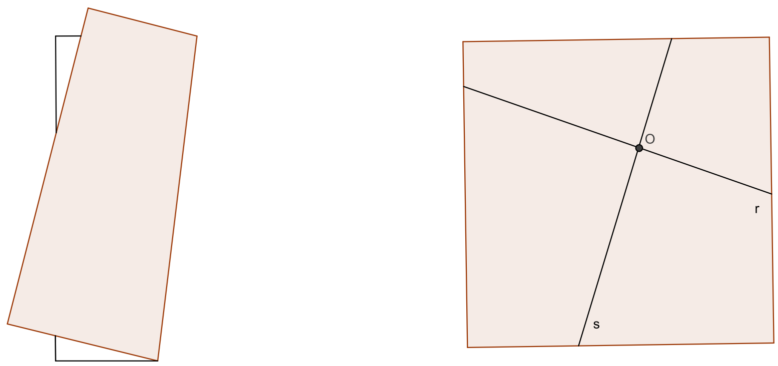


Figura 2.22: Congruência dos ângulos opostos pelo vértice - passo 2

3. Marque os pontos A e B na reta r, de modo que o ponto O fique entre os mesmos, em seguida, marque os pontos C e D na reta s, da mesma forma, tal que o ponto O fique entre eles.

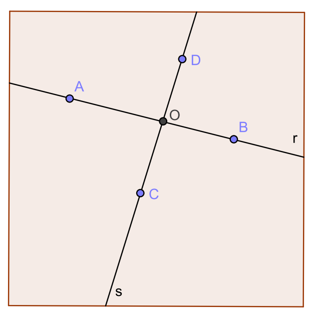


Figura 2.23: Congruência dos ângulos opostos pelo vértice - passo 3

4. Dobre a folha sobre a reta r. Em seguida, faça uma dobradura fazendo com que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OD}$ sejam coincidentes e outra dobradura coincidindo as semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$. Volte o papel a posição inicial, ou seja, desdobre, observando que existe a sobreposição dos ângulos, logo são congruentes.

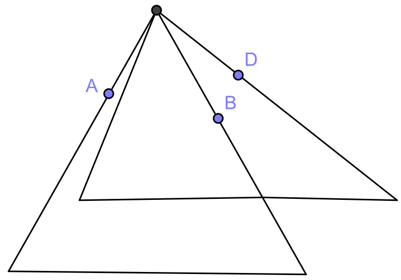


Figura 2.24: Congruência dos ângulos opostos pelo vértice - passo 4

2.7 Soma dos ângulos internos de um triângulo

1. Em uma folha de papel desenhar um triângulo nomeando seus vértices por A, B e C. Em seguida, recorte o $\triangle ABC$.

2. Construa a altura relativa a um dos vértices, como mostra a figura abaixo.

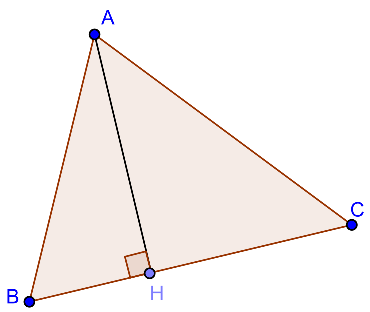


Figura 2.25: Soma dos ângulos internos de um triângulo - passo 1

3. Faça dobraduras de modo que os pontos A e H coincidam. Faça com que B e H também sejam coincidentes, assim como, com os pontos C e H, como na figura a seguir:

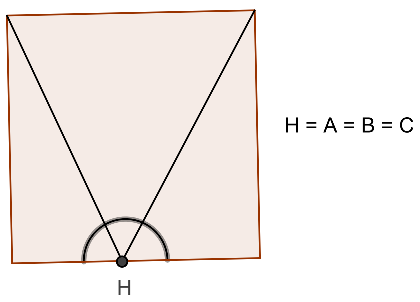


Figura 2.26: Soma dos ângulos internos de um triângulo - passo 2

Observe que soma dos ângulos resulta em uma reta. Portanto a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo mede 180.

2.8 Pentágono regular

1. Desenhe em uma folha de papel um quadrado, por exemplo de 4cm de lado. Em seguida recorte o mesmo. Dobre a folha de modo que o vértice A coincida com o vértice B, faça o mesmo com o vértice D e o vértice C, ou seja, encontre os pontos médios, E e F.

   Observe a figura abaixo:

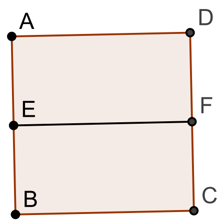


Figura 2.27: Pentágono regular - passo 1

2. Obtemos um retângulo de dimensões 4cm por 2cm, como mostra a figura a seguir:

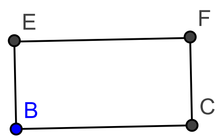


Figura 2.28: Pentágono regular - passo 2

3. Trace uma das diagonais, por exemplo a $\overline{BF}$. Em seguida, desdobre.

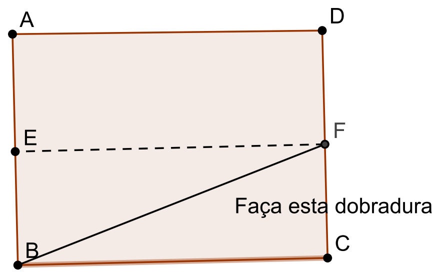


Figura 2.29: Pentágono regular - passo 3

4. Construir a bissetriz do ângulo ABF e marcar um ponto Y sobre $\overline{AD}$

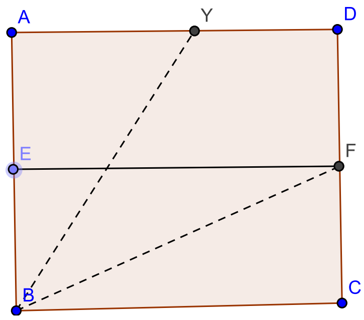


Figura 2.30: Pentágono regular - passo 4

5. Faça uma dobradura coincidindo os pontos D e Y, marque o ponto X na dobradura, com o lado $\overline{BC}$.

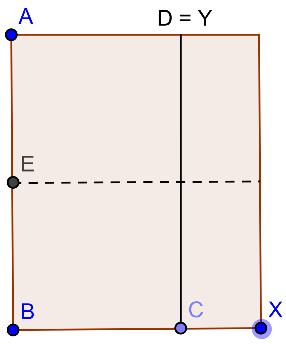


Figura 2.31: Pentágono regular - passo 5

6. Volte a folha a posição inicial, observe a figura abaixo:

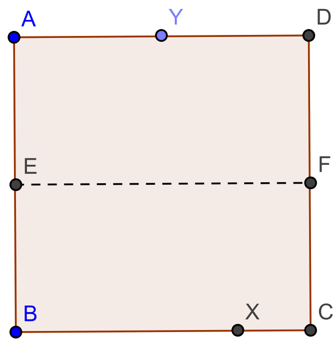


Figura 2.32: Pentágono regular - passo 6

7. Dobre o papel fazendo $\overline{CD}$ coincidir com $\overline{AB}$, marque o ponto Z na intersecção do ponto X com $\overline{BC}$, veja ilustração:

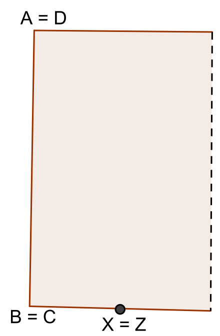


Figura 2.33: Pentágono regular - passo 7

8. Desdobre a folha:

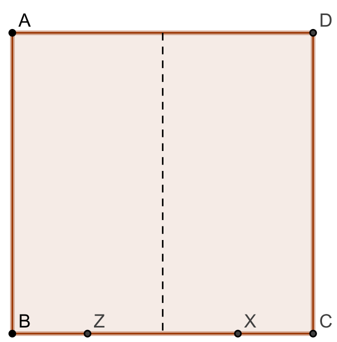


Figura 2.34: Pentágono regular - passo 8

9. Dobre a folha levando o ponto X até o segmento $\overline{AB}$ de tal forma que esta dobradura passe pelo ponto Z.

   Marque o ponto W na interseção de X com $\overline{AB}$.

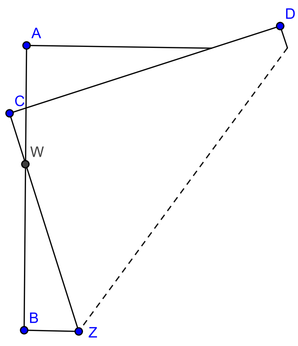


Figura 2.35: Pentágono regular - passo 9

10. Em seguida, desdobre a folha.

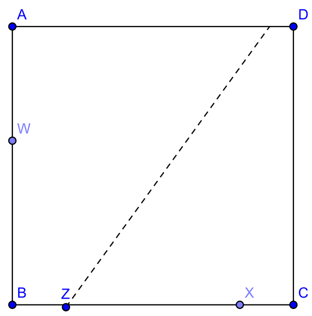


Figura 2.36: Pentágono regular - passo 10

11. Faça uma dobradura levando $\overline{AB}$ sobre $\overline{CD}$. Em seguida, marque o ponto L na intersecção do ponto W com $\overline{CD}$. Marque os pontos P e Q nas extremidades da dobradura, como mostra a figura a seguir:

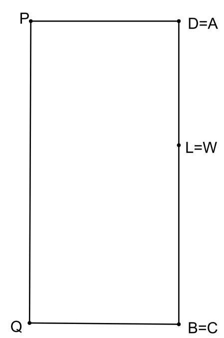


Figura 2.37: Pentágono regular - passo 11

12. Desdobre.

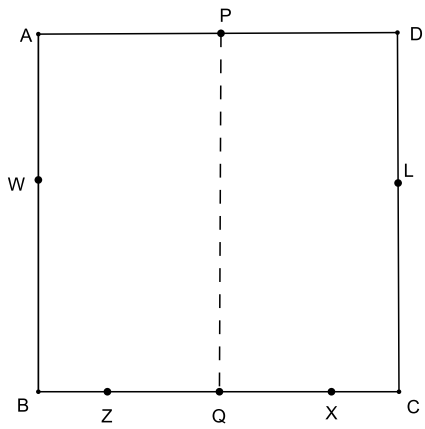


Figura 2.38: Pentágono regular - passo 12

13. Faça uma dobradura levando o ponto Z sobre $\overline{PQ}$ de tal forma que a dobradura passe pelo ponto W. Marque o ponto M na intersecção de Z com $\overline{PQ}$.

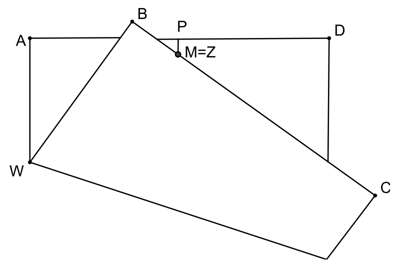


Figura 2.39: Pentágono regular - passo 13

14. Desdobre, obtendo a figura abaixo:.

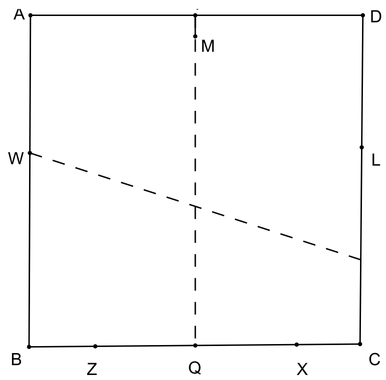


Figura 2.40: Pentágono regular - passo 14

15. Faça as dobraduras determinando $\overline{MW}$, $\overline{WZ}$, $\overline{ZX}$, $\overline{XL}$ e $\overline{LM}$, obtendo o pentágono regular.

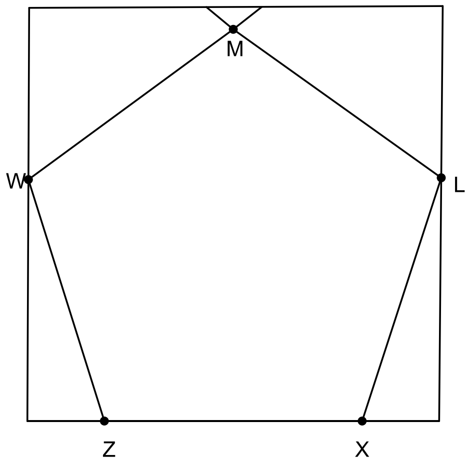


Figura 2.41: Pentágono regular - passo 15

3 Segmentos Construtíveis

A busca pela solução dos problemas considerados clássicos da antiga Grécia, envolvendo construções realizadas apenas usando régua e compasso, acabaram por contribuir de forma significativa, no desenvolvimento da Matemática. Essa contribuição possibilitou a criação e o aperfeiçoamento dos conceitos básicos referentes à estrutura da Álgebra aliada à Geometria.

Esses problemas cujas a construções envolvem somente régua e compasso, mostram o interesse dos matemáticos gregos por desafios intelectuais. Com o aparecimento dos *Elementos* de Euclides, a busca pela solução dos cinco problemas clássicos, possibilitou um avanço considerável no estudo da ciência Matemática.

Duplicação do cubo, retificação da circunferência, quadratura do círculo, trissecação do ângulo e construção de polígonos regulares, foram os cinco grandes desafios que permaneceram, por cerca de dois mil anos, sem solução.

Segundo Courante e Robbins (2000), a compreenção profunda dos problemas geométricos consiste na tradução dos mesmos para uma linguagem algébrica, porém isso somente foi possível no século $XVIII$, a partir dos trabalhos de Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel e Évariste Galois.

Denominamos segmentos construtíveis aqueles que são obtidos, a partir de segmentos dados, por meio de construção com régua e compasso.

Em particular, este trabalho apresenta algumas situações que a construção possa ser realizada usando dobraduras.

3.1 Divisão de um segmento de reta em partes iguais

1- Divisão de um segmento de reta em 2^n partes iguais.

Dividir um segmento em 2^n partes iguais, significa que para $n = 1$, divide-se $2^1 = 2$ partes iguais, isto é, encontrar o ponto médio do segmento. Para $n = 2$,ou seja, $2^2 = 4$ partes iguais, procede-se da seguinte maneira:

a) Tome uma folha de papel quadrada, denote seus vértices por A, B, C e D. Em seguida, dobre a folha ao meio, traçando a mediatriz de um segmento. Dobradura trabalhada anteriormente. Desdobre e marque os pontos M e N, como mostra a figura abaixo:

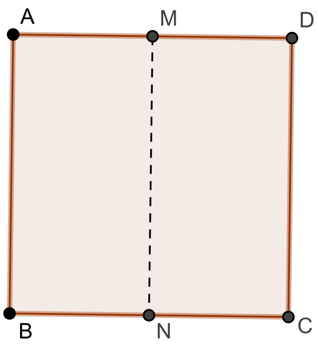


Figura 3.1: Divisão de um segmento de reta em 2^n partes iguais - passo 1

b) Dobre a folha fazendo com que os pontos A e M, B e N coincidam, faça o mesmo com os pontos C e N, D e M. Desdobre a folha, marcando os pontos X, Y, Z e W. Observe a figura abaixo:

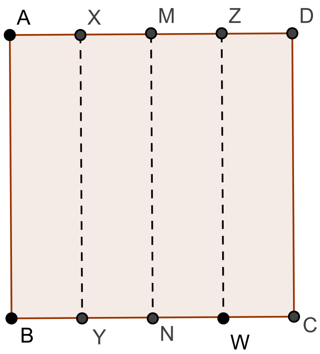


Figura 3.2: Divisão de um segmento de reta em 2^n partes iguais - passo 2

Seguindo este modelo de divisão, é possível dividir cada parte dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ ao meio, obtendo oito partes iguais, o que corresponde a $n = 3$, se cada parte for dividida novamente ao meio, obtém-se 16 partes iguais; e assim, sucessivamente, para se obter todas as potências de 2, partes iguais.

2- Divisão de um segmento de reta em 3 partes iguais.

a) Tome uma folha de papel quadrada, denote seus vértices por A, B, C e D. Em seguida, dobre a folha ao meio, traçando a mediatriz de um segmento. Dobradura trabalhada anteriormente. Desdobre e marque os pontos M e N, como mostra a figura abaixo:

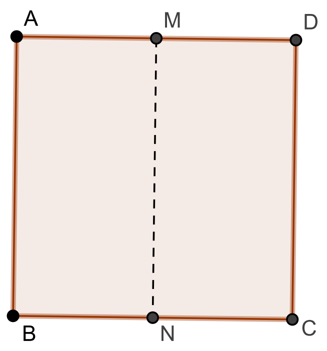


Figura 3.3: Divisão de um segmento de reta em 3 partes iguais - passo 1

b) Faça uma dobradura coincidindo o ponto B com o ponto M, marcando o ponto G na interseção de $\overline{CD}$ com $\overline{BC}$.

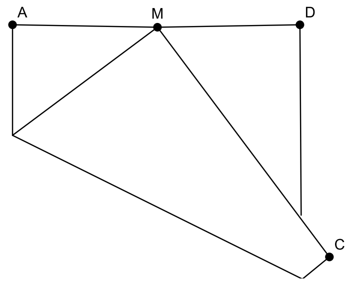


Figura 3.4: Divisão de um segmento de reta em 3 partes iguais - passo 2

c) Desdobrando, obtemos:

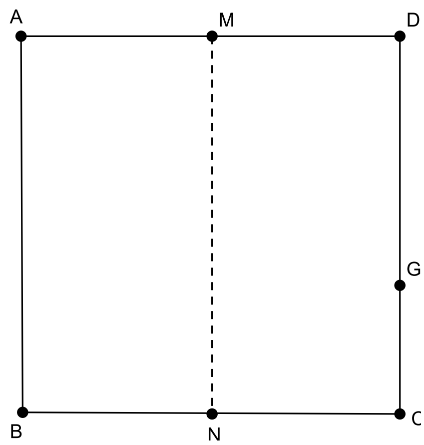


Figura 3.5: Divisão de um segmento de reta em 3 partes iguais - passo 3

d) Faça o mesmo procedimento com o vétice C, ou seja, coincida o ponto C com o ponto M, marque o ponto H sobre $\overline{AB}$, desdobrando obtemos a figura:

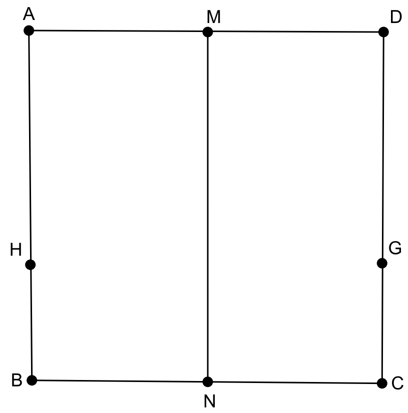


Figura 3.6: Divisão de um segmento de reta em 3 partes iguais - passo 4

e) Faça uma dobradura fazendo coincidir $\overline{AD}$ com $\overline{GH}$. Desdobre. Marque nas extremidades desta dobradura os pontos X e Y.

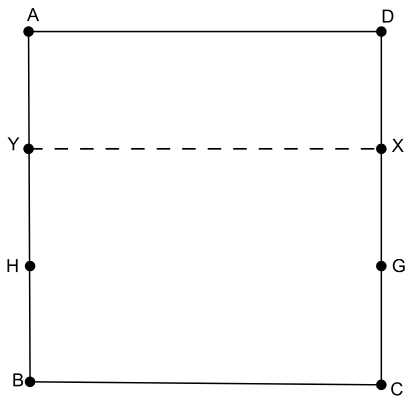


Figura 3.7: Divisão de um segmento de reta em 3 partes iguais - passo 5

f) Faça uma dobradura levando o segmento $\overline{BC}$ sobre o segmento $\overline{XY}$. Desdobrando, obtemos a figura:

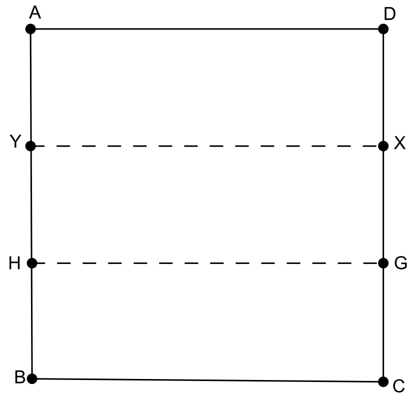
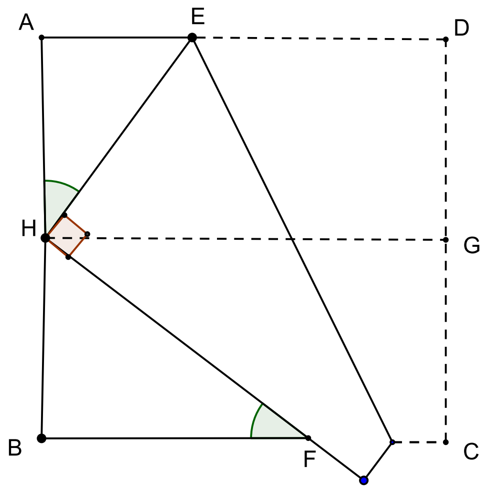


Figura 3.8: Divisão de um segmento de reta em 3 partes iguais - passo 6

Resultado: Observe que os pontos Y e H dividiram $\overline{AB}$ em 3 partes iguais, ocorrendo o mesmo com os pontos X e G em $\overline{CD}$.

Justificativa: Observe a figura.



Os ângulos $A\widehat{H}E$ e $B\widehat{H}F$ são complementares, pois, $E\widehat{H}F$ é reto, por ser o refletido de $E\widehat{D}C$ que também é reto.

Como, $\triangle EAH$ e $\triangle HBF$ são retângulos. Como $A\widehat{H}E$ é complementar de $B\widehat{H}F$, então $A\widehat{H}E$ é congruente de $B\widehat{F}H$. Como os triângulos são retângulos e possuem um dos ângulos congruentes, eles são semelhantes.

Considere o lado do quadrado com medida de uma unidade, além disso, seja $x = AE$ e $y = BF$. Como E é um ponto entre A e D, $ED = EH = 1 - x$. Temos também que $AH = HB = \dfrac{1}{2}$.

Usando o Teorema de Pitágoras no $\triangle EAH$, temos:

$(1-x)^2 = x^2 + (\frac{1}{2})^2$

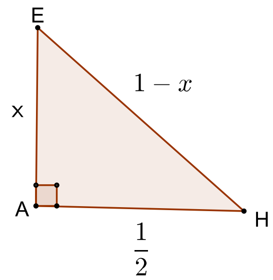
$x^2 - 2x + 1 = x^2 + \frac{1}{4}$

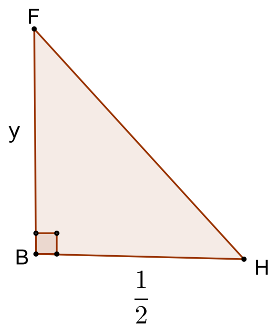
$2x = 1 - \frac{1}{4}$

$2x = \frac{3}{4}$,

então:

$x = \frac{3}{8}$.





Pela semelhança de triângulos, temos:

$\frac{1/2}{3/8} = \frac{y}{1/2} \Longrightarrow \frac{3y}{8} = \frac{1}{4}$

$\Longrightarrow y = \frac{2}{3}$, logo,

$FC = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

3- Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais.

a) Considere que a folha de papel seja um quadrado $\square ABCD$.

Divida os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ em três partes iguais, como realizado no item 2. Observe a figura abaixo:

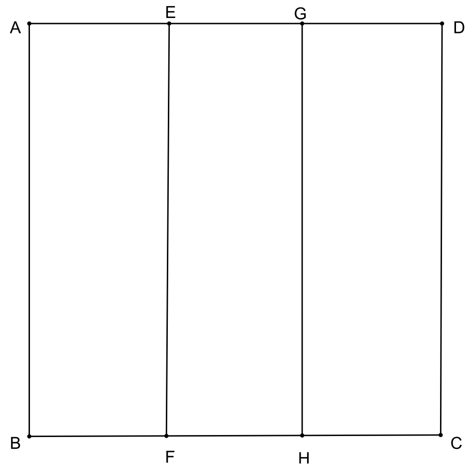


Figura 3.9: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 1

b) Faça uma dobradura levando o ponto B até o ponto G. Marque o ponto P, pertencente a $\overline{CD}$, na interseção de $\overline{BC}$ com $\overline{CD}$.

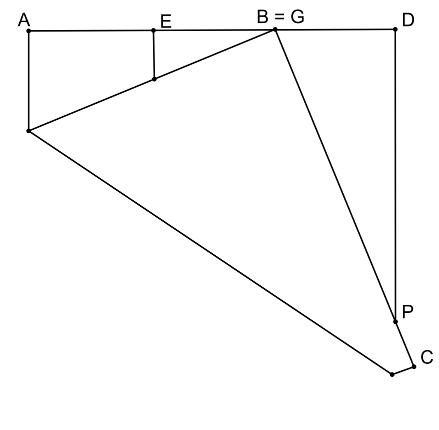


Figura 3.10: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 2

c) Desdobre.

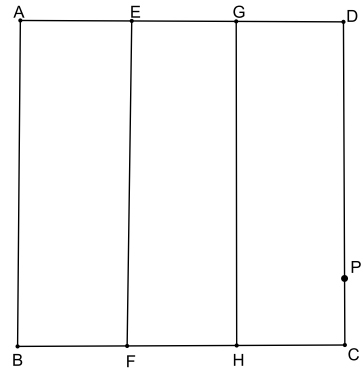


Figura 3.11: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 3

d) Faça uma dobradura levando o ponto C até o ponto E. Marque o ponto Q, pertencente a $\overline{AB}$, na interseção de $\overline{BC}$ com $\overline{AB}$.

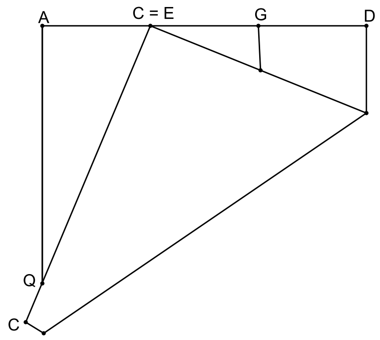


Figura 3.12: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 4

e) Desdobre.

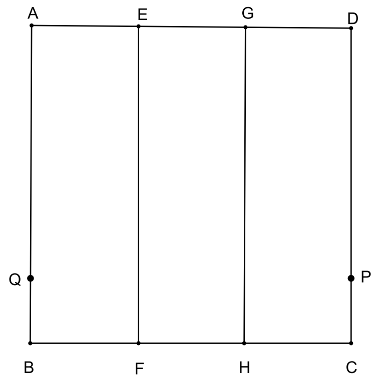


Figura 3.13: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 5

f) Faça uma dobradura passando pelos pontos P e Q.

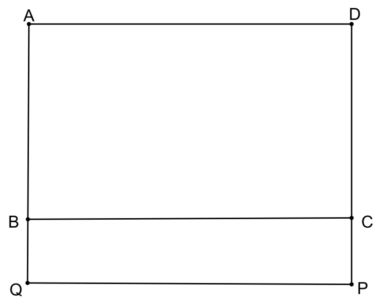


Figura 3.14: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 6

g) Marque o ponto X pertencente a $\overline{AB}$ na interseção do ponto B com $\overline{AQ}$. Marque o ponto Y pertencente a $\overline{CD}$ na interseção do ponto C com $\overline{DP}$.

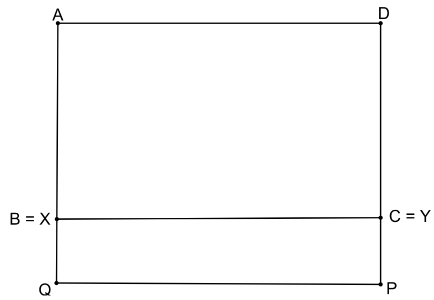


Figura 3.15: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 7

h) Desdobre.

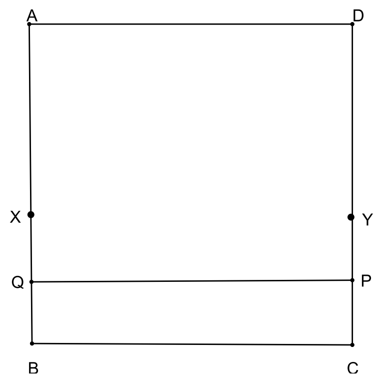


Figura 3.16: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 8

i) Faça uma dobradura sobre o segmento $\overline{XY}$. Marque o ponto K pertencente a $\overline{DY}$, na intersecção do ponto P com o segmento $\overline{DY}$. Marque o ponto L pertencente ao segmento $\overline{AX}$, na intersecção do ponto Q com o segmento $\overline{AX}$. Marque o ponto M pertencente ao segmento $\overline{DY}$ na intersecção do ponto C com

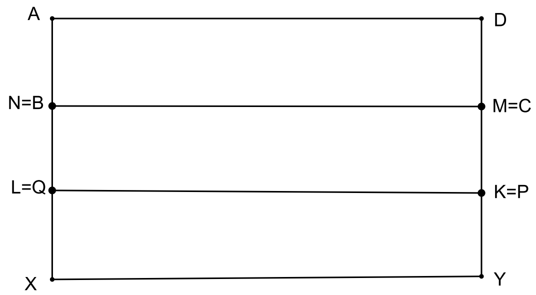


Figura 3.17: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 9

o segmento $\overline{DY}$. Marque o ponto N pertencente ao segmento $\overline{AX}$ na intersecção do ponto B com o segmento $\overline{AX}$.

j) Volte a folha a posição inicial.

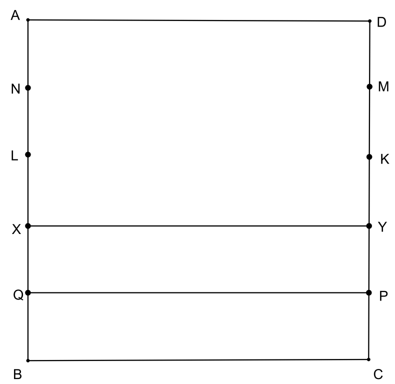


Figura 3.18: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 10

k) Faça uma dobradura sobre o segmento $\overline{KL}$ e desdobre. Faça uma dobradura sobre o segmento $\overline{MN}$ e desdobre.

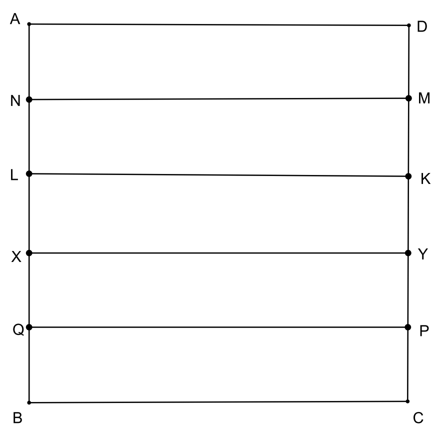


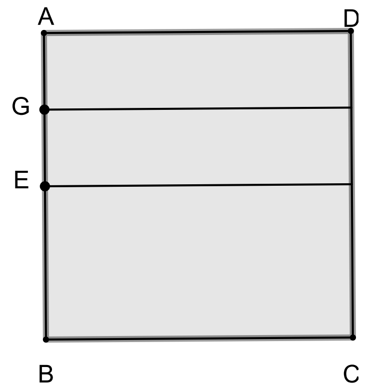
Figura 3.19: Divisão de um segmento de reta em 5 partes iguais - passo 11

Resultados:

1) Observe que os pontos N, L, X e Q dividem o segmento $\overline{AB}$ em cinco partes iguais, da mesma forma, os pontos M, K, Y e P dividem o segmento $\overline{CD}$ em cinco partes iguais.

2) Os segmentos $\overline{MN}, \overline{KL}, \overline{XY}$ e $\overline{PQ}$ dividem o quadrado $\square ABCD$ em cinco partes iguais.

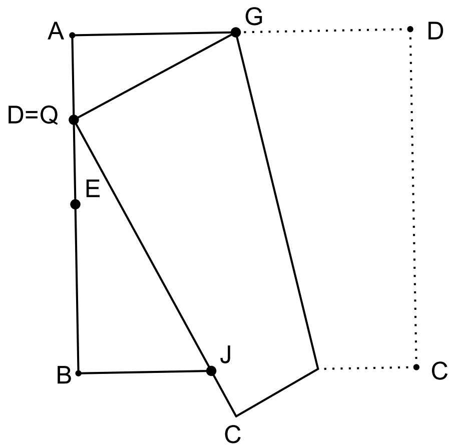
Justificativa: Tome um quadrado $\square ABCD$ de lado 1, para facilitar os cálculos. Encontre o ponto médio E do segmento $\overline{AB}$. Agora, encontre o ponto médio entre os pontos A e E. Observe a imagem a seguir:



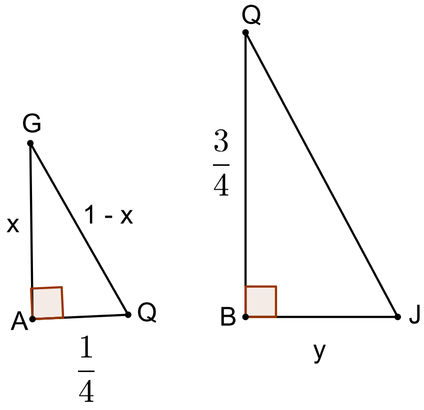
Temos: $4AQ = 2AE = 2EB = AB$, então, $AQ = \dfrac{1}{4}AB$.

Como $AB = 1$, temos: $AQ = \dfrac{1}{4}$.

O vértice D do quadrado $\square ABCD$ é levado ao ponto Q, determinando o ponto J no segmento $\overline{BC}$.



Observe que $\triangle AGQ \sim \triangle BQJ$, pois são triângulos retângulos com um dos ângulos congruentes. Portanto, $\dfrac{AG}{BQ} = \dfrac{AQ}{BJ} = \dfrac{GQ}{DJ}$.



Sejam $x = AQ$ e $y = BJ$, como mostra a figura abaixo:

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$(1-x)^2 = (\frac{1}{4})^2 + x^2$

$1 - 2x + x^2 = \frac{1}{16} + x^2$

$2x = 1 - \frac{1}{16}$

$2x = \frac{16-1}{16}$

$2x = \frac{15}{16}$

$x = \frac{15}{32}$.

Como $\frac{AG}{BQ} = \frac{AQ}{BJ} = \frac{GQ}{DJ}$, temos:

$\frac{15/32}{3/4} = \frac{1/4}{y}$, então, $\frac{15y}{32} = \frac{3}{16}$.

Assim, $BJ = y = \frac{2}{5}$.

Para finalizar, basta dividir por dois o valor do segmento $\overline{BJ}$, obtendo $\frac{1}{5}AB$.

4 Planos de Aula

4.1 Construção da bissetriz de um ângulo

Objetivos Gerais

Realizar a construção da bissetriz de um ângulo, usando dobraduras. Mostrar que ao construir a bissetriz é possível desenvolver conceitos geométricos, compreender alguns procedimentos algébricos, dar significado à escrita matemática e desta forma, chegar à formalização dos fundamentos com clareza e objetividade. Além de proporcionar aos alunos um aprendizado mais significativo e prazeroso.

4.1.1 Objetivos Específicos

- Identificar, nomear ângulos e seus elementos.
- Identificar, nomear e classificar triângulos.
- Construir a bissetriz de um ângulo.
- Medir ângulos com o transferidor.
- Justificar matematicamente que a bissetriz divide um ângulo em dois ângulos congruentes.

4.1.2 Conteúdos

- Nomenclatura dos elementos de um ângulo.
- Bissetriz de um ângulo.
- Uso do transferidor.
- Classificação de triângulos.
- Congruência de triângulos.
- Demonstração matemática.

- Escrita formal de uma demonstração matemática.

4.1.3 Público Alvo

9^oano / 8^asérie.

4.1.4 Tempo Estimado

Cinco horas aulas.

4.1.5 Material

- Folha de papel sulfite.
- Folha de papel sulfite impressa com a figura da Bandeira da Guiana.
- Lápis.
- Borracha.
- Régua.
- Transferidor.
- Caderno.

4.1.6 Desenvolvimento

- 1^a etapa: Dividir os alunos em duplas. Em seguida, retomar o conceito de ângulo, nomear seus elementos, definir bissetriz de um ângulo. Rever o uso do transferidor e os casos de congruência de triângulos.
- 2^a etapa: Identificação do ângulo e determinação de seus elementos, como nas definições 1.22.,1.24. e 1.25.
- 3^a etapa: Construção da bissetriz do ângulo, usando dobraduras, como realizado na seção 2.4.
- 4^a etapa: Medir, usando o transferidor, o valor de cada ângulo determinado pela bissetriz.
- 5^a etapa: Realizar a demonstração matemática da existência da bissetriz, como feito no Teorema 1.40.

- 6^a etapa: Aplicação dos conceitos matemáticos estudados em uma situação problema. Como sugestão a problemática abaixo.

  Dobrando Bandeiras

  As bandeiras são construídas usando formas geométricas, em especial, observe a bandeira da Guiana, ela contém ângulos, triângulos e um contorno retangular. Marque na bandeira o $\triangle ABC$, que está colorido de vermelho. Tarefas:

  1) Classifique o $\triangle ABC$ quanto aos lados.
  2) Encontre a bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$, usando dobraduras.
  3) Use o transferidor para medir os ângulos do triângulo e os ângulos formados pela bissetriz.

Figura 4.1: Bandeira da Guiana

4.1.7 Avaliação

O processo de avaliação será realizado durante toda a aplicação da atividade proposta, através da observação do posicionamento do aluno, isto é, postura perante o trabalho em grupo, questionamentos, organização de suas ideias na forma escrita e socialização dos resultados.

4.2 Construção da reta mediatriz de um segmento de reta

4.2.1 Objetivos Gerais

Mostrar que ao construir uma reta mediatriz, usando dobraduras, é possível desenvolver conceitos geométricos, compreender alguns procedimentos algébricos, dar significado à escrita matemática e desta forma, chegar à formalização dos fundamentos com clareza e objetividade. Além de proporcionar aos alunos um aprendizado mais significativo e prazeroso.

4.2.2 Objetivos Específicos

- Construir a reta mediatriz de um segmento $\overline{AB}$.
- Encontrar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- Justificar, matematicamente, que os pontos da reta mediatriz equidistam das extremidades do segmento.

4.2.3 Conteúdos

- Reta mediatriz.
- Ponto médio de um segmento.
- Congruência de triângulos.
- Demonstração matemática.
- Escrita formal de uma demonstração matemática.

4.2.4 Público Alvo

9^oano / 8^asérie.

4.2.5 Tempo Estimado

Quatro horas aulas.

4.2.6 Material

- Folha de papel sulfite.
- Folha de papel sulfite impressa com a figura Vida no Campo.

- Lápis.
- Borracha.
- Régua.
- Caderno.

4.2.7 Desenvolvimento

- 1^a etapa: Dividir os alunos em duplas. Em seguida, retomar o conceito de reta mediatriz como o Lugar Geométrico dos pontos que equidistam das extremidades de um segmento de reta. Rever também, os conceitos de ponto médio de um segmento de reta e os casos de congruência de triângulos.
- 2^a etapa: Construção da reta mediatriz e determinação do ponto médio de um segmento de reta, usando dobraduras como realizado na seção 2.3.
- 3^a etapa: Verificação da propriedade do Lugar Geométrico, ou seja, marcado um ponto qualquer na mediatriz, medir a distância do mesmo até as extremidades do segmento de reta.
- 4^a etapa: Realizar a demonstração matemática da propriedade do Lugar Geométrico, como feito no Teorema 1.46.
- 5^a etapa: Aplicação dos conceitos matemáticos estudados em uma situação problema. Como sugestão a problemática abaixo.

  Vida no Campo

  Bartolomeu e Josefino são dois amigos que se dedicam ao estudo da matemática. Eles adoram conversar todas as tardes sobre os mais diversos assuntos, em especial, hoje estão falando a respeito de conceitos geométricos.

  Suas casas estão marcadas na figura abaixo pelas letras A e B.

  Já que o assunto de hoje é a geometria, decidiram se despedir num ponto que esteja a igual distância de suas casas.

  Como sabemos, esse ponto não é único. Vamos ajudá-los a encontrar todos esses pontos?

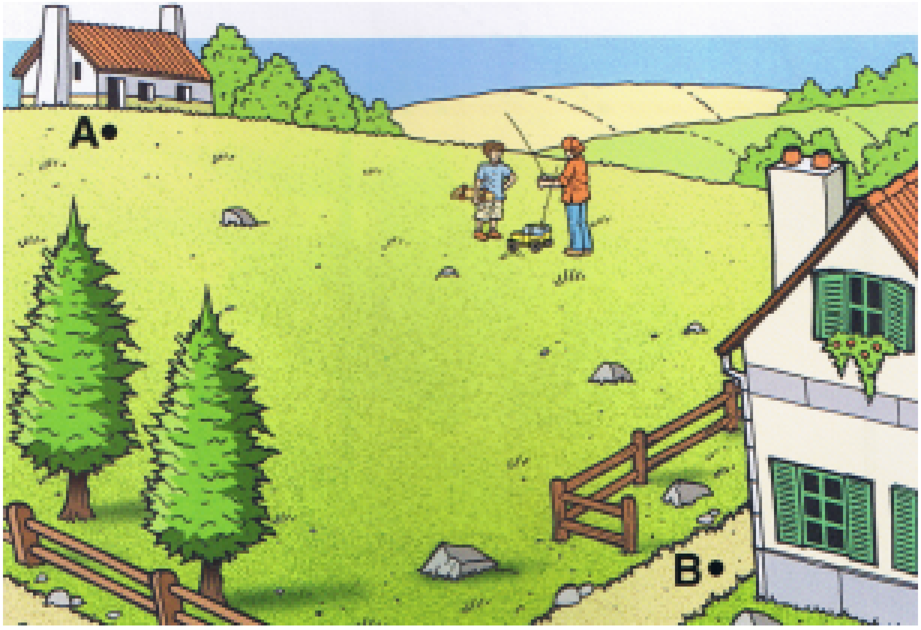


Figura 4.2: Vida no Campo

4.2.8 Avaliação

O processo de avaliação será realizado durante toda a aplicação da atividade proposta, através da observação do posicionamento do aluno, isto é, postura perante o trabalho em grupo, questionamentos, organização de suas ideias na forma escrita e socialização dos resultados.

4.3 Relatório

Atualmente é uma tarefa difícil encontrar meios facilitadores para o ensino aprendizagem, devido a competição desleal com o mundo digital, muito mais rápido e interessante para os alunos. Ambas atividades foram aplicadas durante o segundo semestre de 2013, para alunos do oitavo ano.

Para a realização das atividades a classe foi divida em duplas, proporcionando a socialização de ideias, além disso, desenvolveram atividades manuais que os obrigaram a desacelerar e por algum tempo abandonar a tecnologia "touch screen", trabalhando com um instrumento milenar, as dobraduras, ou como é mais conhecido, com o Origami.

Além da dificuldade de socialização da classe, também houve problemas com a divagação, pois enquanto alguns prestavam atenção nas instruções que eram passadas, outros construiam aviões, barcos, chapéus, leques, etc. Superados estes fatores, as atividades transcorreram de forma satisfatória. Deixando claro que atividades diferenciadas, bem planejadas, proporcionam aos alunos uma melhor fixação, mesmo que o tempo dedicado para elas seja limitado, pois existe a necessidade em cumprir o cronograma oficial da escola.

A manipulação do papel é uma atividade que conduz à estimulação das funções psicomotoras, contribuindo por excelência para o desenvolvimento da coordenação motora fina. Como educadora evitei sempre julgamentos sobre a beleza e apresentação das atividades, corrigindo os erros quando necessário e utilizando expressões como: interessante, original, diferente, porém completando ao final, vamos refazer para atingir os resultados necessários para completarmos os objetivos desta aula.

A maior dificuldade ocorreu na passagem do concreto para o abstrato, em outras palavras, durante a formalização dos conceitos matemáticos. Os alunos não estavam acostumados com a escrita formal, comum na matemática e nem com o formato de como é realizada uma demonstração matemática.

Infelizmente, por questões jurídicas, não possuo imagens da realização das atividades e nem dos resultados obtidos.

Apesar das dificuldades encontradas e o tempo escasso para a realização das atividades, os resultados obtidos foram satisfatórios.

Referências

[1] ALMEIDA, V. L. M. C.; LEITE, A. S.; SANTOS, M. F. L.; AZEVEDO, T. C. A. M.; BASTARZ, C. F. ***Um dicionário de palavra-chave, figuras, textos e sugestões metodológicas como subsídio para o ensino da Geometria Euclidiana***.Guaratinguetá: FE/UNESP. Disponível em: < http://wwwp.fc.unesp.br/∼hsilvestrini/Artigo%20unesp%20Guara.pdf>. Acesso em Janeiro de 2014.

[2] ANTUNES, L. ***Ficha de trabalho sobre: "Mediatriz de um segmento de recta"***. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/∼nep02/Material_ficheiros /nov_mat/FT_Mediatriz.pdf>. Acesso em Dezembro de 2013.

[3] BRASIL. ***Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Secretaria de Educação***. Brasília: MEC/SEF,1997.

[4] CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. ***Explorando Geometria com Origami***. São Carlos: USFCar, 2009. 83 p.

[5] COSTA, E. M. ***Ensñar y aprender matemáticas con Origami***. Separata de: Revista de Didáctica de las Matemáticas. Espanha: GRAÓ, ano $XVII$,n.53, 2010. 37 p.

[6] DANTE, L. R. ***Matemática: contexto e aplicações***. 1v. São Paulo: Ática, 2010. 504 p.

[7] GENOVA, C. ***Origami - Dobras, Contas e Encantos***. São Paulo: Escrituras Editora e Distribuidora de Livros Ltda, 2008. 216 p.

[8] KAWANO, C. ***A Matemática do Origami***. São Paulo: Editora Globo S. A..Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT516776-2680,00.html >. C

[9] LEROY, L. ***Aprendendo Geometria com Origami***. Belo Horizonte: UFMG, 2010. 79 p.

[10] MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. Jr. ***Geometria Moderna Parte I***. Tradução técnica Renate G. Watanabe, Dorival A. Mello. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1971. 343 p.

[11] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. ***Geometria Euclidiana plana e construções geométricas***. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2008. 264 p.

[12] SUZUKI, S.; MARQUES, R. C.; PARRA, D. ***A Geometria do Origami***. Unicamp. 2006. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/∼eliane/ma241 /trabalhos/origami.pdf>. Acesso em Março de 2013.

[13] WAGNER, E. ***Construções geométicas***. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM Editora, 2007. 108 p.

[14] Só Matemática ***História da Geometria***. Disponível em <http://somatematica.com.br/geometria.php>. Acesso em Janeiro de 2014.