

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Iniciação à Lógica na Educação Básica

Kynttino Hélivio de Freitas Alves



Instituto de Matemática

Maceió, Agosto de 2013



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
KYNTTINO HÉLVIO DE FREITAS ALVES

**INICIAÇÃO À LÓGICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

MACEIÓ  
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
KYNTTINO HÉLVIO DE FREITAS ALVES

## INICIAÇÃO À LÓGICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Lima

Co-orientador: Prof. Dr. Walter Huaraca Vargas

MACEIÓ  
2013

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora G. da Cunha**

A474i Alves, Kynttino Hélio de Freitas.  
Iniciação à lógica na educação básica / Kynttino Hélio de Freitas Alves.  
– 2013.  
59 f. : il.

Orientador: José Carlos de Lima.  
Co-orientador: Walter Huaraca Vargas.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 59-59.

1. Medida maximizante. 2. Grau. 3. Ruelle-Perron-Frobenius – Operador. 4.  
Entropia métrica. I. Título.

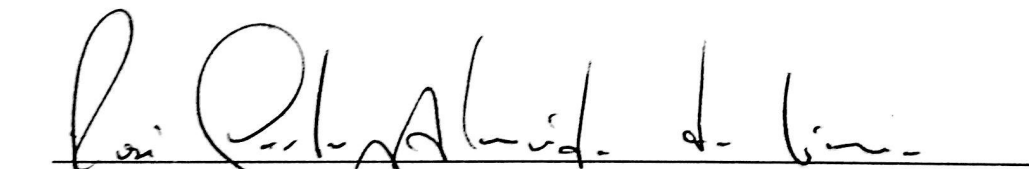
CDU: 612.643

# INICIAÇÃO À LÓGICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

**Kynttino Hêlvio de Freitas Alves**

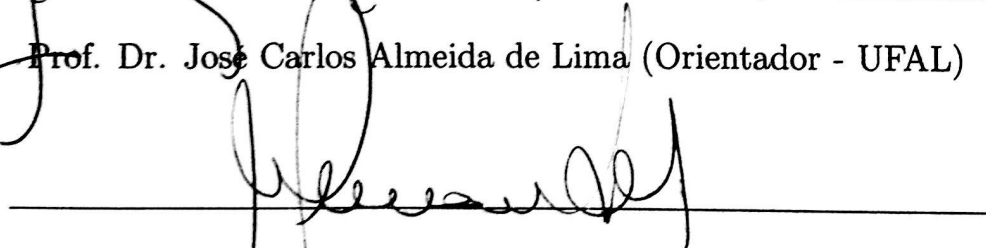
Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 09 de agosto de 2013 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:




---

Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima (Orientador - UFAL)



---

Prof. Dr. Marco Antonio Nogueira Fernandes (UFBA)



---

Prof. Dr. Fernando Pereira Micena (UFAL)

À minha esposa Carla, ao meu filho João Miguel e à minha sogra Petrucia, por me fazerem sonhar cada vez mais com a alegria e o sucesso em nossas vidas. Por contribuírem para que eu alcançasse esse objetivo, por suportarem as ausências e as chatices e por estarem sempre ao meu lado nessa conquista, meu amor e sincera gratidão. Vocês serão sempre eternos em meu coração.

# Agradecimentos

---

Ao Prof. Dr. *José Carlos de Lima*, por suas sábias palavras e por aceitar, sem nenhuma distinção, ser meu Orientador.

Ao Prof. Dr. *Walter Huaraca Vargas*, pela co-orientação recebida no trabalho.

Aos meus companheiros de caminhada, *Josivaldo, Cleverton, Tiago, Clayton, Gel-sivânio, Francisco, Valdir, Elisângelo* pelas horas de estudos, pelas informações e compreensão.

Aos meus pais e irmãos, pelo amor, carinho e incentivo. Sem vocês eu não estaria aqui no meio do caminho, já caminhei bastante, mas ainda falta muito chão para trilhar.

A minha tia *Helida Pereira*, pelo total apoio e pela revisão sintática e ortográfica.

Aos meus alunos de Feliz Deserto, por contribuírem com essa minha conquista.

À todas as pessoas que de certa forma, contribuíram e estiveram presentes nessa Jornada.

# Resumo

---

Embora a Matemática se encontre num nível avançado de sua construção formal, a construção do pensamento matemático na Educação Básica, na maioria das vezes, deixa a desejar devido a muitos aspectos. Aqui tentaremos destacar um desses problemas: a falta da representação do raciocínio lógico matemático. Sabe-se, atualmente, que alguns pensamentos são heurísticas fundamentais, ou seja, formas de pensar imprescindíveis para a compreensão e resolução de problemas utilizando o pensamento matemático. O destaque aqui será dado à importância da Lógica proposicional. A estrutura e sua representação, assim como alguns níveis de compreensão e exposição possíveis desse pensamento. Para isso, faz-se um breve viagem na história da Lógica, desde Aristóteles até a Lógica moderna, mostrando princípios da Lógica matemática e suas relações com as primeiras noções de conjuntos. Por fim, apresentamos argumentos para sua inserção já na Educação Básica e apresentamos um material numa linguagem mais acessível ao aluno.



# Abstract

---

Although Mathematics is in an advanced level of its formal construction, the construction of mathematical thinking in basic education, in most cases, is weak due to many aspects. Here we will try to highlight one of these problems: the lack of representation of logical mathematical. We know, now, that some fundamental thoughts are heuristic, ie, ways of thinking essential to understanding and solving problems using mathematical reasoning. The focus here will be given to the importance of propositional logic. The structure and its representation, as well as some level of understanding and possible exposure of this thought. For this, it is a short trip in the history of logic, from Aristotle to the modern logic, showing principles of mathematical logic and its relations with the rudiments of sets. Finally, we present arguments for their inclusion as basic education and present a material with a language more accessible to the student.

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Um pouco de história</b>	<b>3</b>
1.1 Da Lógica contemporânea aos dias atuais . . . . .	5
1.2 A Lógica, a Linguagem e a Matemática . . . . .	7
<b>2 Lógica Matemática</b>	<b>11</b>
2.1 Noções sobre conjuntos . . . . .	11
2.1.1 Uniões e interseções . . . . .	14
2.1.2 Complementos . . . . .	16
2.1.3 Diagramas de Venn . . . . .	17
2.2 Lógica Matemática . . . . .	19
2.2.1 Proposições e Sentenças Matemáticas . . . . .	20
2.2.2 Os quantificadores universal e existencial . . . . .	21
2.2.3 Conectivos e proposições compostas . . . . .	22
2.2.4 Ampliando a Tabela-verdade . . . . .	28
2.2.5 Tautologias e Contradições . . . . .	29
2.2.6 Equivalência entre proposições . . . . .	30
2.2.7 Negação de proposições compostas . . . . .	31
2.2.8 Negação de sentenças quantificadas universalmente e existencialmente	35
<b>3 Ensinando Lógica na Educação Básica</b>	<b>36</b>
3.1 Existe o “melhor momento” para ensinar Lógica na Educação Básica? . . . .	36
3.2 Uma proposta de aplicação possível para o ensino de Lógica na Educação Básica . . . . .	38
3.2.1 Uma Introdução a Lógica . . . . .	39
3.3 Uma breve análise da aplicação do material . . . . .	55

---

**4 Conclusão**

**56**

**Bibliografia**

**58**

# Introdução

---

Desde a graduação, a Lógica norteou minha trajetória profissional. As demonstrações matemáticas, as conversas com outros professores, a experiência em sala de aula eram premissas de uma conclusão que parecia cada vez mais óbvia: o estudo da Lógica facilita a aprendizagem matemática. Porém, só depois de alguns anos pude comprovar essa minha teoria.

O cérebro humano é formado por dois hemisférios ligados por um corpo caloso. Segundo, Roger Sperry, ganhador do prêmio nobel de Filosofia/Medicina, cada hemisfério cerebral têm funções específicas. O hemisfério esquerdo é o da lógica racional, do raciocínio, da linguagem, do pensamento sequencial, e o hemisfério direito é o da intuição, da linguagem não verbal, da música. Assim, a Lógica racional é uma das características do hemisfério esquerdo onde se encadeia o pensamento por meio de associações com conhecimentos estabelecidos para tirar conclusões. Portanto a estimulação e o desenvolvimento do raciocínio Lógico desde cedo é um dos passos importantes no desenvolvimento da aprendizagem.

Naquele momento, descobri a importância da Lógica como uma das características no processo de desenvolvimento da aprendizagem do ser humano.

Porém algumas perguntas ainda estavam sem respostas. “Qual o melhor momento para se iniciar tal conteúdo?” e “Como aplicá-lo em sala de aula?”

Neste trabalho não responderemos a esses questionamentos de maneira absoluta, até por que esse tipo de conteúdo ainda não é abordado de forma explícita na educação básica, e provavelmente cairíamos no erro de encerrar uma discussão que só está a começar. Tentaremos, sim, dar subsídios e sugestões para que cada professor encontre, na sua prática pedagógica, uma maneira para introduzir, ou de pelo menos refletir sobre o assunto.

Para isso, faremos um breve resumo histórico do desenvolvimento da Lógica desde o tempo de Aristóteles até a Lógica moderna, procurando entender como se deu sua origem e seu desenvolvimento. Faremos, também, uma análise sobre a relação existente entre o

desenvolvimento da Lógica e a Matemática.

Damos continuidade iniciando um breve estudo teórico sobre a Lógica Proposicional, com o objetivo de dar ao professor que não conhece o conteúdo uma primeira referência sobre o assunto. Para isso, iniciamos algumas noções de conjuntos, mostramos os conceitos e os princípios mais importantes da Lógica proposicional, e por fim fazemos um paralelo entre os dois conteúdos.

Iniciamos o último capítulo com a seguinte pergunta: Existe o “melhor momento” para ensinar Lógica na Educação Básica? Damos continuidade ao capítulo tentando fazer uma releitura do conteúdo visto no capítulo anterior, apresentando uma proposta possível para se começar a trabalhar Lógica no ensino médio.

Por fim, concluímos ressaltando a importância da introdução desse conteúdo já na Educação Básica, pois com ele é possível resgatar a construção de conceitos e procedimentos didáticos, além de utilizá-los em situações problemas tanto na própria Matemática como em outras disciplinas.

---

## Um pouco de história

---

O estudo da Lógica inicia-se propriamente com Aristóteles, no século IV a. C. Na Antiguidade, os gregos foram os primeiros a se interessarem pela arte da argumentação. Desde o tempo de Homero (séc. IX ou VIII a. C.) que a possibilidade de persuadir pessoas fascinava os gregos, porém o seu interesse por essa capacidade só se desenvolveu a partir do momento em que a democracia substituiu a monarquia e a oligarquia em algumas das principais cidades da Grécia. Com a chegada da democracia, a palavra passou a estar no primeiro plano da ação política e social e, portanto, era fundamental o seu domínio nos tribunais para convencer os juízes e nas assembleias para persuadir o povo.

A formação do homem na Grécia Antiga incluía três disciplinas básicas: a Lógica, a Gramática e a Retórica. O estudo da Gramática era necessário para o domínio da língua, tanto escrita como falada. A Lógica tratava da capacidade de argumentação, no discernimento entre bons e maus argumentos. A Retórica dizia respeito ao convencimento dos outros, a persuasão. Um cidadão a fim de possuir uma formação política deveria possuir o currículo mínimo constituído por essas três disciplinas que era chamado de **Trivium** (origem da palavra trivial).

Com tudo isso, surge na Grécia, uma classe de professores itinerantes, os sofistas, os mais famosos foram Protágoras e Górgias, que, enquanto ensinavam aos jovens ricos que pretendiam fazer carreira política, estudavam o poder persuasivo do discurso. Os mestres sofistas diziam poder “melhorar” seus discípulos, ou seja, que a “virtude” poderia ser ensinada. Entretanto, foi apenas com Aristóteles, que mesmo não sendo sofista, mas filósofo, que a arte da argumentação grega clássica atingiu o ponto máximo de sofisticação e sistematização.

A maior parte da contribuição relevante de Aristóteles, para o estudo da Lógica,

---

encontra-se no grupo de trabalhos conhecidos como Organon (significa “ferramenta”), mais especificamente nos *Analytica Priora* e no *De Interpretatione*.

Segundo Aristóteles, a Lógica estuda a razão, um importante meio da ciência para adquirir e possuir a verdade. Assim, raciocinar é o próprio ato da razão. Logo, quando um indivíduo argumenta, ele está organizando logicamente suas idéias para, depois, tirar uma conclusão. Essa organização passa por vários intermediários indo de uma idéia a outra e exigindo o uso de palavras.

*Naturalmente, os homens não eram irracionais antes disso, tendo sido transformados em seres racionais pelos estudos aristotélicos: eles sempre pensaram, raciocinaram, escolheram, decidiram. Com Aristóteles, no entanto, tem início a caracterização das formas legítimas de argumentação, em contraposição a outras que poderiam parecer corretas, mas que eram inadequadas - as falácias.*

[11]

Ainda segundo Aristóteles, a Lógica é o que devemos estudar e aprender antes de iniciar uma investigação filosófica ou científica, pois somente ela pode indicar qual o tipo de proposição, de raciocínio, de demonstração, de prova, e de definição que uma determinada ciência deve usar. A Lógica é uma disciplina que fornece as leis, regras ou normas ideais de pensamento e o modo de aplicá-las para demonstrar a verdade.

Aparentemente, Aristóteles não percebeu que sua introdução a teoria dos silogismos estaria dando origem a uma teoria lógica mais geral, a das proposições. Ele falava de “silogismos a partir de hipóteses”, dando a entender que se referia a alguns dos princípios da Lógica das proposições que ainda não haviam sido apresentados.

Ao observar o estudo da Lógica em outras culturas, percebe-se que a Lógica não se desenvolveu tanto como na cultura ocidental, o que parece ter sido um produto exclusivo da cultura ocidental.

*Os árabes nada desenvolveram independentemente dos gregos. A Lógica dos indianos, comparada com a dos gregos, não é significativa - parece que a Lógica das proposições foi antecipada por alguns lógicos budistas, sendo que a Lógica das expressões substantivas foi mais firmemente desenvolvida, sem atingir, o nível da silogística aristotélica. Mesmo se desenvolvendo independente da lógica grega, a Lógica indiana foi severamente limitada pelo não uso de variáveis. A Lógica chinesa, tratou essencialmente com questões relativas a dilemas morais e práticos, por um lado, e com interpretações místicas da vida, de outro, não avançou além do estágio alcançado pelos sofistas, no século V a. C. [6]*

Depois de Aristóteles, os séculos se seguiram, e, com o fim da Antigüidade, não trouxeram nenhuma mudança que tenha tido significado no campo da Lógica. A Lógica era vista como parte do curriculum básico de estudantes de leis e teologia, assim como, a gramática e a retórica, a Lógica havia sido considerada parte das “artes liberais” na educação clássica, estando num grupo diferente da aritmética, geometria, astronomia e música.

Na Lógica medieval, destaca-se três ramos: os bizantinos, os árabes e os escolásticos. Além das versões das lógicas de expressões substantivas (onde se abandona o uso de variáveis) encontradas nos outros ramos, foram encontradas, também, lógicas das proposições e lógicas das expressões modais, estas duas últimas entre os escolásticos.

No século XV, surge um lado mais intelectual e crítico com o Renascimento e o Humanismo, mesmo assim, o desenvolvimento da Lógica não acompanha tais tendências. Leibniz inicia a Lógica moderna apenas no século XVII e esta desenvolveu-se em parceria com a matemática. Leibniz influencia seus contemporâneos e sucessores com um programa bem ambicioso, só a partir deste momento a Lógica deixa de ser uma “diversão de pesquisadores” e começa a tomar a forma de uma “matemática universal”. Ele buscava a construção de uma linguagem universal, baseada em um alfabeto do pensamento.

Em 1666, quando publica seu *Dissertatio de arte combinatória*, Leibniz inicia um projeto da construção de um sistema exato e universal de notação, uma linguagem simbólica universal baseada em um alfabeto do pensamento, a língua “characterica universalis”, que deveria ser como uma álgebra. Essa nova linguagem era fundamental, pois propiciaria um conhecimento de todas as coisas. Leibniz também acrescentou a seu trabalho o projeto da construção de um “calculus ratiocinator”, ou cálculo da razão.

## 1.1 Da Lógica contemporânea aos dias atuais

O calculus ratiocinator é um importante marco da metodologia da Lógica contemporânea, mesmo este não sendo teoricamente exequível na forma como foi introduzido.

*Leibniz antecipou o uso dos quantificadores. E em vários de seus trabalhos chamou a atenção sobre a lei da identidade (“A é A”, ou “todo A é A”), “verdade primitiva da razão”, e da lei da (não) contradição, parecendo considerá-las suficientes para a demonstração das verdades que independem da experiência, ou de todos os princípios da matemática. Entretanto, as contribuições de Leibniz para a Lógica permaneceram, na maioria, não publicadas durante sua vida, tendo ficado desconhecidas até o princípio do século XX. Parte de sua obra foi publicada em Erdmann 1840 e Gerhardt 1890 e, em 1903, Louis Couturat,*



*filósofo da matemática francês, publicou a obra Opuscles et fragments inédits de Leibniz.* [6]

Acredita-se que apenas aspectos mais gerais do programa de Leibniz teriam influenciado os lógicos que vieram depois dele. Especula-se que, se seus trabalhos tivessem sido publicados no século XVII, o reviver da Lógica, que só ocorreu no final do século XIX, talvez tivesse ocorrido bem mais cedo.

Immanuel Kant teve pouca contribuição em suas obras para a Lógica, porém, devido à sua boa imagem em outros ramos do conhecimento, sua influência foi grande. No prefácio do seu livro *Kritik der reinen Vernunft*, edição de 1787, ele afirma explicitamente que a Lógica não tinha tido nenhum desenvolvimento, desde Aristóteles, e parecia, sob qualquer aspecto, estar acabada e completa.

Alguns nomes foram importantes para o desenvolvimento da Lógica contemporânea.

*Devemos mencionar, entre os precursores da lógica contemporânea: Boole (1847) e De Morgan (1847 e 1860) em álgebra da Lógica; Peirce, precursor da pesquisa moderna, que introduziu a definição de ordem simples, o primeiro tratamento do cálculo proposicional como um cálculo com dois valores de verdade e a definição de igualdade, tendo iniciado em 1881 o tratamento dos fundamentos da aritmética; Schröder; e McColl que, em 1877, construiu o primeiro cálculo de proposições.* [6]

A princípio, as primeiras operações lógicas, apresentadas por esses autores, não chegaram a constituir sistemas no sentido da Lógica moderna, mas operações num sentido menos rigoroso.

Embora Leibniz, Boole, de Morgan e Peirce tenham feito um bom trabalho como precursores, trabalho esse que já se contrapunha à posição de Kant, o verdadeiro fundador da lógica moderna foi Gottlob Frege. O pensamento de Frege, praticamente desconhecido, foi descoberto por Bertrand Russel. Os importantes passos para a introdução do método logístico foram dados em 1879, em seu livro *Begriffsschrift* (Frege 1977). Pela primeira vez, um livro continha o cálculo proposicional em sua forma logística moderna, a noção de função proposicional, o uso de quantificadores e a análise lógica de prova por indução matemática. Este livro de Frege só é comparável, na história da Lógica, aos *Analytica Priora* de Aristóteles.

Frege foi um dos primeiros a distinguir a linguagem e metalinguagem. No ano de 1884, Frege adota a tese “logicismo” onde a aritmética é um dos ramos da Lógica, sendo possível definir todos os termos da aritmética com o auxílio apenas de termos lógicos e

que todos os teoremas da aritmética podem ser provados a partir dos axiomas lógicos. Frege apresenta rigorosamente essa posição em 1893.

Em 1874, George Cantor apresenta seu primeiro trabalho sobre a denumerabilidade dos conjuntos infinitos. Nele, Cantor mostra uma nova teoria do infinito, onde uma coleção de objetos, mesmo que infinita, é concebida como uma entidade completa. Em 1895 e 1897, Cantor publica seus principais trabalhos sobre números ordinais e números cardinais, resultado de três décadas de pesquisa.

Para Cantor, um conjunto era “qualquer coleção de objetos num todo  $M$ , definidos e separados de nossa intuição ou pensamento”. Intuitivamente, um conjunto seria uma seleção de elementos que satisfaziam uma mesma propriedade. Essa definição de qualquer coleção como um conjunto propicia, no começo do século XX, traz o surgimento de paradoxos nos fundamentos da nascente teoria de conjuntos. Com o paradoxo de Cantor, relativo ao maior número cardinal, Russell obteve o famoso paradoxo de Russell e comunica-o a Frege, em 1902. Como esse paradoxo pode ser obtido a partir dos axiomas lógicos introduzidos pelo próprio , Frege acreditou que os fundamentos de sua construção da aritmética estivessem destruídos.

*Frege recebeu a carta de Russell no momento em que estava para publicar o segundo volume de uma obra em que fundamentava toda a aritmética na teoria dos conjuntos. Ele reagiu com as seguintes palavras: “nada mais indesejável para um cientista do que ver ruir os fundamentos do edifício, justamente no momento em que ele está sendo concluído. Foi nessa incômoda situação que me encontrei ao receber uma carta do Sr. Bertrand Russell no momento em que meu trabalho já estava indo para o prelo.” [4]*

Dedekind, que também trabalhava na época nos fundamentos da aritmética, sustou a publicação de seu livro. No Apêndice do segundo volume do *Grundgesetze der Arithmetik*, publicado em 1903, Frege tratou de sugerir alterações nos axiomas originalmente introduzidos, procurando evitar as inconsistências, porém, não logrou solucionar os problemas.

## 1.2 A Lógica, a Linguagem e a Matemática

A Lógica Formal estuda as formas dos argumentos válidos, ou seja, os modos legítimos de chegar a conclusões a partir de um conjunto de premissas. Deve estar claro que o ponto de partida de seu estudo foi a estrutura da língua grega, e sua pressuposição básica foi

que antes de uma argumentação coerente encontra-se o uso adequado das palavras e das frases, evitando-se as ambigüidades e as incertezas.

Aristóteles excluiu do terreno da Lógica, sentenças que não fossem proposições e proposições que não fossem categóricas. Partindo da forma básica do silogismo, duas premissas e uma conclusão, ele examinou todas as maneiras possíveis de interconectar causas e conseqüências. Segundo suas palavras, um argumento não passa de “uma série de palavras em que, sendo admitidas certas coisas, delas resultarão necessariamente alguma outra, pela simples razão de se terem admitido as primeiras”.

Em nosso cotidiano é “normal” as pessoas associarem o raciocínio lógico à Matemática. Os currículos de Matemática escolar dão ênfase a tal relação e, modernamente, a expressão “Lógica Matemática” passou a ser utilizada com frequência e de forma natural. Porém, pode-se perceber, nesses primeiros estudos sobre a Lógica, que em suas origens mais fundas, a Lógica alimentou-se muito mais primariamente e essencialmente da língua do que da técnica ou da linguagem Matemática.

O grande problema em estudar a Lógica formal por meio da língua é a dificuldade de separar a forma do conteúdo. É óbvio que a verdade das premissas é importante, porém provar sua veracidade não é um trabalho simples. Quando argumentamos, pretendemos partir de premissas verdadeiras e, para garantir isso, podemos afirmar que o conteúdo das premissas:

- \* é um conhecimento plenamente justificado, no terreno científico;
- \* é garantido pela autoridade de especialistas no tema;
- \* é uma questão de princípios, ou é um dogma, indiscutível;
- \* é amplamente conhecido, no nível do senso comum;
- \* é garantido pela confiança que depositamos na palavra de quem as enuncia;

Até o conhecimento dito “científico” não é fácil de se sustentar, visto que está em permanente estado de construção e fatos que eram considerados verdades indiscutíveis ontem, hoje pode não mais sê-lo.

O fato é que, em nosso dia-a-dia, numa argumentação é muito difícil argumentar sem interessar-se pelo conteúdo. E como o que se busca, em geral, é convencer os outros, muitos recursos extralógicos são utilizados na argumentação.

A influência da Matemática na tematização das regras ou das leis do pensamento lógico é, sem dúvida, relevante, mas é muito posterior. Observando a linha do tempo, percebe-se

que a Matemática e a Lógica foram estudos inteiramente distintos. A Matemática esteve ligada à ciência; a Lógica, à língua grega.

Porém, as duas desenvolveram-se, nos tempos modernos, de tal forma que a Lógica tornou-se mais Matemática e a Matemática tornou-se mais Lógica. Segundo Bertrand Russell, a consequência é que “agora se tornou impossível traçar uma linha entre as duas; de fato, as duas são uma. Diferem como um menino e um homem: a Lógica é a juventude da Matemática, e a Matemática, a maturidade da Lógica”.

*A prova da identidade de ambas, claro, é uma questão de detalhe: começando com premissas que seriam universalmente admitidas como pertencentes à Lógica, e chegando, por dedução, a resultados que pertencem de maneira igualmente óbvia à Matemática, descobre-se que não há ponto algum em que uma linha nítida possa ser traçada, com à Lógica a esquerda e a Matemática à direita. O que pode explicar esta associação tão forte entre Lógica e a Matemática, em detrimento da língua, é o fato de que um estudo inicial da Lógica costuma ser realizado admitindo-se a possibilidade de uma separação nítida entre a forma e o conteúdo de uma argumentação, e partindo-se do estudo das formas lógicas, sem conteúdo: Todo  $a$  é  $b$  e todo  $b$  é  $c$  acarreta que todo  $a$  é  $c$ , qualquer que seja o significado dos termos representados por  $a, b$  e  $c$ . Esta separação faz com que a Lógica (formal) se pareça mais com a Matemática do que com a língua. Na língua, em seu uso corrente, é muito mais difícil tal separação. [7]*

Isso pode ser claramente explicitado, aplicando-o ao caso do silogismo. Por exemplo, “*Todos os homens são mortais e Sócrates é um homem, então Sócrates é um mortal.*”. Aqui, o que se pretende dizer é que as premissas implicam a conclusão, independentemente se elas são realmente verdadeiras. Dessa maneira, podemos substituir *homens* por  $a$ , *mortais* por  $b$  e *Sócrates* por  $c$ , em que  $a$  e  $b$  são quaisquer classes e  $c$  é qualquer indivíduo. Chegamos, então, à afirmação: “*Quaisquer que sejam os valores de  $a, b$  e  $c$ , se todos os  $a$  são  $b$  e  $c$  é um  $a$ , então  $c$  é um  $b$ .*”. Em outras palavras, a função proposicional “*se todos os  $a$  são  $b$  e  $c$  é um  $a$ , então  $c$  é um  $b$ .*” é sempre verdade.

Lembramos que a Lógica formal não trata da verdade ou da falsidade de proposições enunciadas isoladamente, mas da validade dos argumentos, ou seja, da veracidade de se apresentar uma proposição (a conclusão) como verdadeira a partir da verdade de outras proposições (as premissas). É a forma do argumento que determina sua validade, independentemente da verdade das premissas.

Portanto, antes de se ter um filtro aguçado para crenças consideradas, muitas vezes,

naturais e indiscutíveis é importante o estudo da prática sistemática de um pensamento crítico, para que não sejam aceitas conclusões falaciosas, ou sofismas tentadores.

---

# Lógica Matemática

---

Neste capítulo, damos ênfase ao estudo teórico da Lógica Matemática com o olhar voltado para o professor de Matemática. Nossa intenção é dar subsídios para que este profissional tenha um material onde possa iniciar seus estudos, devendo, claro, procurar outras referências para que possa ampliar seu conhecimento.

Iniciamos abordando um tema bastante estudado nas séries iniciais, a Teoria dos Conjuntos. Abordaremos aqui a parte básica da Teoria dos Conjuntos de modo que o docente analise e faça suas analogias à Lógica Matemática. Nessa primeira seção, foram usadas referências como [1], [2], [4] e [5].

## 2.1 Noções sobre conjuntos

Nesta seção, não vamos nos ater o teoria dos conjuntos, até por que, esta possui uma abordagem axiomática complexa. Vamos apresentar, de maneira bem simples, noções sobre conjuntos, subconjuntos, e operações entre conjuntos (união, intersecção e complementação), destacando as regras fundamentais dessas operações.

O conceito de conjunto tinha a seguinte definição: um *conjunto* é qualquer coleção dentro de um todo de objetos definidos e distinguíveis, chamados elementos, de nossa intuição ou pensamento. Essa foi a definição intuitiva de um conjunto, dada primeiramente por Georg Cantor (1845-1918), que criou a teoria dos conjuntos em 1895.

Esta definição iniciou o princípio da compreensão intuitiva de conjuntos, ou seja, toda propriedade determinava um conjunto. Por exemplo,

$$\{n; n \text{ é um número natural primo}\}$$
$$\{n; n \text{ é um número natural par}\}$$

No entanto, essa maneira de entender os conjuntos ocasionava problemas, pois, era possível definir uma coleção do seguinte modo:

$$\{x; x \notin x\}$$

Podemos perceber que se pudessemos definir conjuntos desta maneira, chegaríamos a contradições. Neste caso, específico, o conjunto não pode pertencer a si mesmo e não pode não pertencer a si mesmo.

Para eliminar estes problemas, foi desenvolvido uma teoria axiomática chamada de ZERMELO-FRAENKEL. Toma-se como primitivos os conceitos de conjunto e pertinência e a partir dos axiomas se deduz as consequências lógicas.

Neste trabalho, quando falarmos em conjunto, entenderemos que se trata de uma coleção bem definida de objetos, independente da natureza.

**Exemplo 2.1.** *São exemplos de conjuntos:*

- (a) *O conjunto dos estados do Brasil;*
- (b) *O conjunto das vogais do nosso alfabeto;*
- (c) *O conjunto de todos os números naturais;*
- (d) *O conjunto de todos os números reais entre 0 e 1.*
- (e) *O conjunto dos números naturais menores que 0.*

Um conjunto que contem, apenas, um número finito de elementos é chamado *conjunto finito*. Um *conjunto infinito* é um conjunto que não é finito. Nos exemplos acima, temos três conjuntos finitos (a), (b) e (e) e dois conjuntos infinitos (c) e (d).

Os conjuntos podem ser definidos pela simples listagem de seus elementos entre chaves ou pela especificação de uma propriedade que caracterize seus elementos. Dessa forma, o conjunto (b) é representado por  $\{a, e, i, o, u\}$  e o conjunto (c) é representado por  $\{x ; x \text{ é um número natural}\}$ . No caso da especificação da propriedade, deve-se deixar claro tal propriedade, de modo que dado um elemento qualquer, seja possível dizer se tal elemento faz ou não parte do conjunto.

O conjunto do exemplo (e) não possui elementos. Um conjunto que não tem elementos é chamado de vazio, sendo denotado pelo símbolo  $\emptyset$ .

Em nosso texto, convencionaremos que os conjuntos serão denotados por letras maiúsculas, e que os elementos serão denotados por letras minúsculas. Se  $a$  é um elemento de um conjunto  $A$ , escrevemos  $a \in A$  (leia-se: “ $a$  pertence a  $A$ ” ou “ $a$  é um elemento de  $A$ ”), por outro lado,  $a \notin A$  significa que  $a$  não é elemento de  $A$ .

As definições (2.1) e (2.2) são baseadas no seguinte axioma da extensão:

**Axioma 2.1.** *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, tem os mesmos elementos.*

Mesmo parecendo algo tão óbvio, este axioma deixa claro que dois conjuntos podem ter a mesma regra, mas não necessariamente os mesmos elementos, ou ainda, que dois conjuntos podem ter regras diferentes e possuírem os mesmos elementos.

**Definição 2.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Se todo elemento de  $A$  é elemento de  $B$ , então  $A$  é chamado subconjunto de  $B$ , em símbolos:  $A \subset B$  ou  $B \supset A$ . (leia-se: “ $A$  está contido em  $B$  ou  $B$  contém  $A$ ”).*

Observe que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo.  $A$  é um subconjunto próprio de  $B$  quando todo elemento de  $A$  é um elemento de  $B$ , mas existe um elemento de  $B$  que não é elemento de  $A$ . Se  $A$  não é subconjunto de  $B$ , escrevemos  $A \not\subset B$ .

**Exemplo 2.2.** *Seja  $X = \{x \in \mathbb{R} ; x > 2\}$ ,  $Y = \{y \in \mathbb{N} ; 4 < y < 10\}$  e  $Z = \{1, 2\}$ , qual a relação entre  $X$  e  $Y$ ? e entre  $X$  e  $Z$ ?*

Observe que  $X$  é um conjunto infinito dos números reais maiores que 2 e  $Y$  é um conjunto finito tal que  $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ . Como todos os elementos de  $Y$  são também elementos de  $X$ , concluímos que  $Y \subset X$  ou  $X \supset Y$ . Portanto,  $Y$  é subconjunto de  $X$ .

Por outro lado, observe que o conjunto  $Z$  possui um elemento que não pertence a  $X$ , deste modo,  $Z \not\subset X$ .

**Definição 2.2.** *Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais ou idênticos quando contém os mesmos elementos. Assim, se  $A \subset B$  e  $B \subset A$ , então,  $A = B$ .*

Não tem importância a ordem em que aparecem os elementos no conjunto, ou seja, o conjunto  $\{a, b, c\}$  é o mesmo que  $\{b, c, a\}$ . Além disso, como os elementos de um conjunto são distintos,  $\{a, a, b\}$  não é a notação apropriada de um conjunto, e deveria ser substituída por  $\{a, b\}$ . Se  $a$  é um elemento de um conjunto,  $a \neq \{a\}$ . Pois  $\{a\}$  denota o conjunto consistindo do elemento  $a$  somente, enquanto que  $a$  é apenas o elemento do conjunto.

Se  $A$  não é igual a  $B$ , escrevemos  $A \neq B$ . É evidente que  $A$  é diferente de  $B$  se existe um elemento de  $A$  não pertencente a  $B$  ou existe em  $B$  um elemento não pertencente a  $A$ .

**Exemplo 2.3.** *Seja  $X = \{x \in \mathbb{R} ; x^2 - 3x + 2 = 0\}$  e  $Y = \{y \in \mathbb{R} ; y^3 - 4y^2 + 5y - 2 = 0\}$ . Qual a relação entre  $X$  e  $Y$ ?*

Temos que os elementos de  $X$  são as raízes da equação  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , ou seja,  $X = \{1, 2\}$ . Já os elementos de  $Y$  são as raízes da equação  $y^3 - 4y^2 + 5y - 2 = 0$ , isto é,  $Y = \{1, 2\}$ . Observe que todos os elementos de  $X$  são elementos de  $Y$  ( $X \subset Y$ ) e que todos os elementos de  $Y$  são elementos de  $X$  ( $Y \subset X$ ). Portanto, pela definição 2.2,  $X = Y$ .



**Teorema 2.1.** *O conjunto  $\emptyset$  é um subconjunto de qualquer conjunto.*

**Demonstração:** Seja  $A$  um conjunto qualquer. Suponhamos, por absurdo, que  $\emptyset$  não é subconjunto de  $A$ . Logo, pela definição 2.1, existe algum elemento de  $\emptyset$  que não pertence a  $A$ , o que é um absurdo pois  $\emptyset$  não tem elementos. Portanto,  $\emptyset$  é subconjunto de  $A$ . ■

Pode acontecer que elementos de um conjunto sejam também conjuntos. Por exemplo, o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado  $A$  tem conjuntos como seus elementos. Este conjunto é chamado **conjunto das partes de  $A$** , e é denotado por  $\wp(A)$ .

**Exemplo 2.4.** *Dado o conjunto  $X = \{1, 2\}$ , determine o conjunto  $\wp(X)$ .*

Sendo  $\wp(X)$  o conjunto das partes de  $X$ , então  $\wp(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .

**Teorema 2.2.** *Se  $A$  tem  $n$  elementos, então seu conjunto das partes  $\wp(A)$  contém exatamente  $2^n$  elementos.*

**Demonstração:** Usaremos indução matemática para provar essa afirmação. Observe que se o conjunto  $A = \emptyset$ , temos que  $A$  possui apenas um subconjunto (ele próprio). Daí, temos que  $\wp(A) = 1 = 2^0$ . Portanto, a fórmula é válida para o caso do conjunto não ter elementos.

Suponhamos que se  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , ou seja, o conjunto  $A$  possui  $n$  elementos, então o número de subconjuntos é dado pela fórmula  $2^n$ . Dado um conjunto  $A$  com  $(n + 1)$  elementos, ou seja,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ , seja  $a_k$  um elemento qualquer do conjunto  $A$ . Assim sendo, os subconjuntos de  $A$  podem ser divididos em dois grupos: os do que o elemento  $a_k$  faz parte e os do que  $a_k$  não faz parte. No primeiro grupo, tem-se que  $A_k = \{a_i \in A; i \neq k\}$  tem  $n$  elementos e, portanto, pela hipótese de indução, possui  $2^n$  subconjuntos. No segundo grupo, isto é, os subconjuntos no qual  $a_k$  é um elemento, o número de subconjuntos é  $2^n$ , pois, com exceção do vazio, todos os outros, ou seja,  $2^n - 1$  subconjuntos de  $A_k$  formarão um novo conjunto onde  $a_k$  fará parte. No entanto, acrescentaremos a esses subconjuntos o subconjunto  $\{a_k\}$ .

Dessa forma, o número de elementos de  $\wp(A)$  é  $n(\wp(A)) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ . Demonstrando, assim, o teorema. ■

### 2.1.1 Uniões e interseções

Existe na teoria dos conjuntos, três operações usuais: união, interseção e complementação, essas operações são parecidas com as operações mais conhecidas da aritmética: a soma, a multiplicação e a subtração.

A definição (2.3) e (2.4) são baseadas no seguinte axioma das Reuniões:

**Axioma 2.2.** *Para toda coleção de conjuntos existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um conjunto da coleção.*

A partir dos axiomas *da extensão* e *da reunião* pode-se garantir que dado dois conjuntos  $A$  e  $B$  existe um conjunto que contém todos os elementos de  $A$  e de  $B$  e este é único.

**Definição 2.3.** *A união de dois conjuntos quaisquer  $A$  e  $B$ , denotada por  $A \cup B$  (leia-se:  $A$  união  $B$ ), é o conjunto constituído pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos  $A$  e  $B$ . Ou seja,  $x \in A \cup B$  se, e somente se,  $x \in A$  ou  $x \in B$ .*

Simbolicamente, temos:

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

**Definição 2.4.** *A interseção de dois conjuntos quaisquer  $A$  e  $B$ , denotada por  $A \cap B$  (leia-se:  $A$  interseção  $B$ ), é o conjunto dos elementos  $x$  tais que  $x$  pertence a ambos os conjuntos  $A$  e  $B$  simultaneamente. Assim temos,  $x \in A \cap B$  se, e somente se,  $x \in A$  e  $x \in B$ .*

Simbolicamente, temos:

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Pode acontecer que  $A$  e  $B$  não tenham elementos comuns. Neste caso,  $A \cap B = \emptyset$ . Quando  $A \cap B = \emptyset$ , dizemos que os conjuntos  $A$  e  $B$  são **conjuntos disjuntos**.

**Exemplo 2.5.** *Dados os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  e  $C = \{5, 6, 7\}$ . Determine  $A \cup B$ ,  $B \cap C$  e  $(A \cap B) \cap C$ .*

Temos que,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B \cap C = \{5\}$  e  $(A \cap B) \cap C = \emptyset$ .

**Exemplo 2.6.** *Seja  $A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 4x + 3 = 0\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N}; x^2 - 4x + 5 < 0\}$ . Encontre,  $A \cup B$  e  $A \cap B$ .*

Observe que o conjunto  $A$  é constituído pelas raízes da equação  $x^2 - 4x + 3 = 0$ . Dessa forma,  $A = \{1, 3\}$ . Por outro lado,  $B$  é constituído pelos números naturais que satisfazem a inequação  $x^2 - 4x + 5 < 0$ . Portanto,  $B = \emptyset$ . Dessa forma,  $A \cup B = A$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

### 2.1.2 Complementos

Começaremos esta seção falando sobre o conjunto universal. Devemos lembrar que não existe um conjunto universal no sentido absoluto, em outras palavras, o conjunto de todos os conjuntos (ver Paradoxo de Russel). Neste capítulo admitiremos que todos os conjuntos são subconjuntos de um conjunto  $\mathbb{U}$ . Consideramos um conjunto universal no sentido restrito, ou seja, universal no sentido de “universo do discurso”, significando um conjunto que contém todos os objetos do discurso.

**Definição 2.5.** *Se  $A$  e  $B$  são conjuntos, a diferença entre esses conjuntos, representada por  $A - B$ , é definida como*

$$A - B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

No caso em que  $A$  e  $B$  são conjuntos tais que  $B \subset A$ , a diferença de conjuntos  $A - B$  representa o complementar de  $B$  com relação ao conjunto  $A$  e será denotado por  $\mathcal{C}_B^A$ . Assim sendo,

$$\mathcal{C}_B^A = A - B$$

No caso do conjunto  $A = \mathbb{U}$ , ou seja,  $A$  é o conjunto universo, denotaremos  $\mathcal{C}_B^{\mathbb{U}}$  simplesmente por  $B^c$  (leia-se: complementar de  $B$ ).

Simbolicamente, temos:

$$A^c = \{x; x \in \mathbb{U} \text{ e } x \notin A\}.$$

**Exemplo 2.7.** *Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ , encontre  $A - B$  e  $A - (A \cap B)$ .*

Temos que,

$$\begin{aligned} A - B &= \{1, 2, 3, 4\} - \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2\} \\ A - (A \cap B) &= \{1, 2, 3, 4\} - \{3, 4\} = \{1, 2\} \end{aligned}$$

**Exemplo 2.8.** *Dados os conjuntos  $A$  e  $B$ , demonstre que  $A - B = A \cap B^c$ .*

Dado  $x \in A - B$ , temos que  $x \in A$  e  $x \notin B$ . Dessa forma,  $x \in B^c$ . De onde concluímos que  $x \in A \cap B^c$ . Assim sendo, temos que  $A - B \subset A \cap B^c$ .

Por outro lado, se  $x \in A \cap B^c$  então  $x \in A$  e  $x \in B^c$ , ou seja,  $x \in A$  e  $x \notin B$ . Dessa forma,  $x \in A - B$ . Logo,  $A \cap B^c \subset A - B$ . Dessa informação obtida acima, concluímos que  $A - B = A \cap B^c$ . ■

### 2.1.3 Diagramas de Venn

Os diagramas de Venn foram utilizados pela primeira vez em um artigo de Jonh Venn com o título “Sobre representação diagramática e mecânica de proposições e raciocínios”. Estes diagramas auxiliam na visualização de operações de conjuntos, pois representam conjuntos geometricamente.

Nesse trabalho, representaremos o conjunto universal  $U$  por um retângulo, e os subconjuntos de  $U$  por círculos desenhados dentro do retângulo. Representamos a operação de união na Figura 2.1, onde os conjuntos  $A$  e  $B$  são dois círculos sombreados; a área sombreada total é a união  $A \cup B$ .

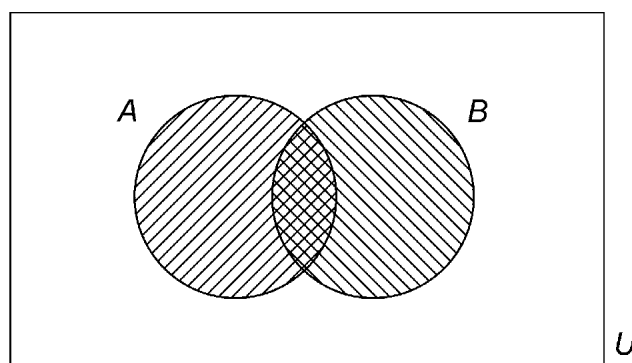


Figura 2.1: União entre conjuntos

Na Figura 2.2, está representada a área comum aos dois conjuntos, ou seja, a intersecção  $A \cap B$ .

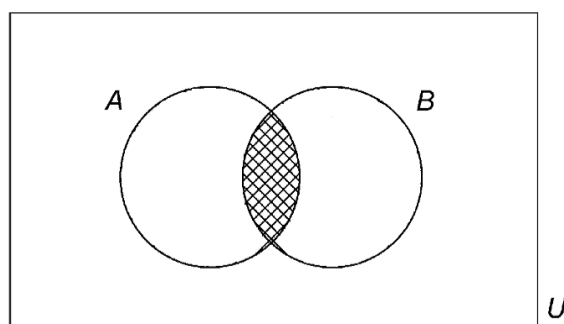


Figura 2.2: Intersecção entre conjuntos

Observe que na figura 2.3 temos dois conjuntos disjuntos, ou seja,  $A \cap B = \emptyset$ .

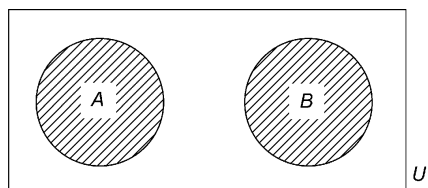
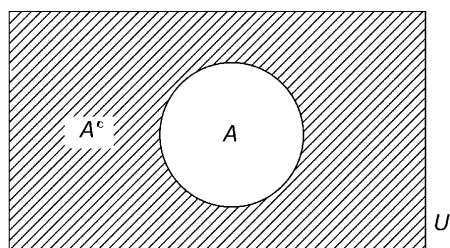
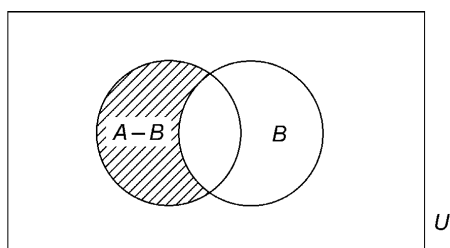


Figura 2.3: Conjuntos disjuntos

A área hachurada na Figura 2.4 representa o complemento  $A^c$  do conjunto  $A$ .

Figura 2.4: O complemento de  $A$ 

O conjunto  $A - B$ , o complemento relativo de  $B$  em  $A$ , é representado pela parte sombreada na figura 2.5.

Figura 2.5: O complemento de  $B$  em relação a  $A$ 

Usando os diagramas podemos dar argumentos heurísticos simples para a validade de, por exemplo, a lei distributiva  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Vejamos:

Na Figura 2.6, observamos  $A \cap (B \cup C)$ .

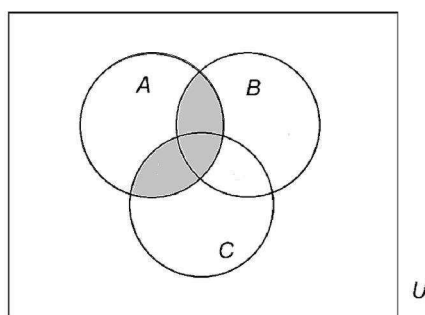


Figura 2.6: Intersecção de  $A$  com a união  $(B \cup C)$

Por outro lado,  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  é representada pela figura 2.7.

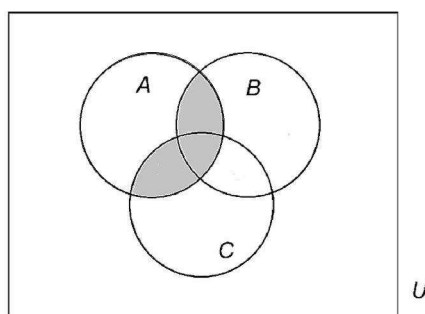


Figura 2.7: União de  $A \cap B$  com  $(A \cap C)$

Portanto a igualdade  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  parece plausível. Entretanto, em matemática um argumento heurístico não pode ser aceito como uma demonstração.

## 2.2 Lógica Matemática

Delinearemos esta seção ao estudo da Lógica proposicional, objetivando relembrar ao professor esse conteúdo ou, então, introduzir uma teoria nova em seu conhecimento, muito importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

A Lógica Matemática repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio. São eles:

**Princípio 2.1** (Princípio de identidade). O que é, é; ou seja, todo objeto é idêntico a si próprio.

**Princípio 2.2** (Princípio da Não Contradição). Um objeto não pode, simultaneamente, ser e não ser. Ou seja, não é possível afirmar e negar o mesmo predicado para o mesmo objeto ao mesmo tempo;

**Princípio 2.3** (Princípio do Terceiro Excluído). Todo objeto é ou não é. Ou seja, uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção.

## 2.2.1 Proposições e Sentenças Matemáticas

Em toda essa seção usaremos [3] para dar embasamento teórico a mesma.

Uma Proposição é qualquer afirmação, verdadeira ou falsa, que se apresenta estruturada como uma oração, com sujeito e predicado e que satisfaz os princípios acima. Por exemplo:

*A: O Brasil é o maior país da América Latina*

*B: Brasília é a capital do Brasil*

Uma *Sentença Matemática* é uma proposição, expressa em linguagem matemática. São sentenças matemáticas as três afirmações seguintes:

*C: Todo número primo maior que 2 é ímpar.*

*D: A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ .*

*E: Todo número ímpar é primo.*

Observe que dessas três sentenças, as duas primeiras são verdadeiras, mas a terceira é falsa, pois 9, 15, 21, etc., são números ímpares que não são primos.

Desta maneira, uma *proposição ou sentença matemática* é uma afirmação de significado preciso, não deixando margens para interpretações ambíguas. O *valor lógico* de uma proposição é dito **verdadeiro** quando a proposição é verdadeira, e **falso**, caso contrário.

Provar sentenças matemáticas é um dos objetivos da Matemática. Já a Lógica Matemática tem como objetivo estudar as relações entre as proposições, ou seja, dos modos legítimos de chegar a conclusões a partir de um conjunto de premissas, admitindo-se a possibilidade de uma separação nítida entre a forma e o conteúdo.

Vejamos, agora, exemplos que parecem ser sentenças matemáticas:

(i)  $\frac{1}{5} + 2$

(ii)  $9^8 > 8^9?$

(iii)  $2x + 1 = 5$

O item (i) não está estruturado como uma proposição, pois não cumpre a condição de possuir verbo e predicado, além de não haver afirmação alguma nele. Para torná-lo uma sentença matemática, temos que completá-lo do seguinte modo:

$$\frac{1}{5} + 2 = \frac{11}{5}$$

Agora, o item (i) é uma sentença matemática, pois é uma afirmação que possui um sujeito (*um quinto mais dois*), verbo e predicado (*é igual a onze quintos*) e não contraria nenhum dos três princípios fundamentais.

Já no item (ii) não existe uma afirmação e sim uma interrogação, para torná-lo uma sentença matemática devemos, apenas, retirar o ponto de interrogação.

E qual o problema do item (iii)? Pois neste temos uma afirmação que possui um sujeito (*dois  $x$  mais um*), um verbo e predicado (*é igual a 5*). Observe que (iii) não cumpre o princípio do terceiro excluído, ou seja, o item pode ser verdadeiro para  $x = 2$  e falso para  $x$  diferente desse valor. Logo, não é possível determinar se a sentença é verdadeira ou falsa.

As afirmações iguais a do item (iii) são chamadas de **sentenças abertas**, assim, chama-se de **sentença aberta** a “proposição” que está subordinada a uma variável livre e por isso não possui valor lógico definido.

### 2.2.2 Os quantificadores universal e existencial

Podemos transformar sentenças abertas em sentenças, para isso devemos encontrar um conjunto adequado e indicar a quantidade de elementos do conjunto que satisfazem as condições que envolvem a variável livre para cada variável livre da sentença aberta.

Existem algumas opções para quantificar, porém duas são bastante especiais: utilizam as palavras *existe* ou *para todo*.

Por exemplo, uma maneira de transformar a sentença aberta  $2x + 1 = 5$ , em uma sentença, é a seguinte:

$$\text{Existe } x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } 2x + 1 = 5$$

Dessa maneira, temos uma sentença. Ou ainda, poderíamos ter escrito:

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } 2x + 1 = 5$$

Veja que a primeira das sentenças acima é verdadeira, enquanto a segunda é falsa.

Os termos *para todo* ( $\forall$ ) e *existe* ( $\exists$ ) são chamados **quantificador universal** e **quantificador existencial**, respectivamente.

Os quantificadores são de grande importância na matemática, o quantificador universal é usado para expressar condições satisfeitas por todos os elementos do conjunto, já o quantificador existencial é usado para expressar condições satisfeitas por, pelo menos, um elemento do conjunto.

O quantificador *para todo* pode ser substituído por *dado*, *para qualquer*, *(para) qualquer que seja*, *para cada*. Já o quantificador *existe* pode ser substituído por *existe um*, *existe pelo menos um*.



### 2.2.3 Conectivos e proposições compostas

Geralmente, na linguagem coloquial, quando se emprega a conjunção gramatical *ou*, o fazemos no sentido excludente: “*Hoje vai chover ou fazer sol?*”, *Você é brasileiro ou estrangeiro?*, etc. Portanto, na linguagem coloquial (cotidiana), o uso do conectivo **ou** possui o significado excludente, ou seja, não pode ocorrer as duas situações ao mesmo tempo. Fazendo um paralelo com a linguagem de conjuntos, observamos que este conectivo representa sempre a união de conjuntos disjuntos, ou seja, conjuntos com intersecções vazias.

Por outro lado, dados os conjuntos  $A$  e  $B$  temos sempre que  $A \cap B \subset A \cup B$ . Portanto, na linguagem matemática, o conectivo **ou** também inclui a situação em que a intersecção dos conjuntos é diferente de vázia, ou seja, a condição de acontecer as duas afirmações simultaneamente. Nesta linguagem, a união de conjuntos é representado pelo conectivo **ou** e a intersecção pelo conectivo **e**.

Assim, diferentemente da linguagem cotidiana, nunca usáramos, na Matemática, uma frase contendo as conjunções *e/ou* simultaneamente. Matematicamente, quando usamos o *ou*, deve-se entender que também estamos considerando a possibilidade de ocorrer o *e*. É necessário que tais conceitos fiquem bem definidos.

Como no caso de conjuntos, quando trabalhamos com proposições matemáticas, podemos construir, também, proposições a partir de sentenças dadas, utilizando certas palavras, chamadas **conectivos lógicos**, ou simplesmente, **conectivos**. A lógica dispõe de cinco conectivos: “e”, “ou”, “não”, “se - então”, e “se, e somente se”. Apresentamos abaixo as cinco operações lógicas, com seus respectivos conectivos e símbolos:

Operacao	Conectivo	Simbolo
Conjunção	e	$\wedge$
Disjunção	ou	$\vee$
Negação	não	$\sim$
Condicional	se - então	$\rightarrow$
Bicondicional	se, e somente se	$\leftrightarrow$

Uma proposição é composta quando apresenta algum desses conectivos, caso contrário, a proposição é simples. Vejamos a seguir alguns exemplos que mostram essa construção.

- (a) João é magro e José é alto.
- (b) Mário foi à praia ou ao mercado.
- (c) Se a chuva cair, então o rio vai transbordar.

A teoria apresentada até o momento são os passos iniciais para o estudo do chamado **Cálculo Proposicional** ou **Cálculo Sentencial**. Cálculo proposicional é a parte da Lógica que trata de sentenças compostas resultantes de operações lógicas (a ação de combinar proposições), e dos valores lógicos das sentenças.

Usualmente representaremos uma proposição simples pela letra maiúscula **P** ou **Q**. Dessa forma, utilizando as letras **P** e **Q** e os conectivos lógicos definidos anteriormente, poderemos representar simbolicamente qualquer proposição.

**Exemplo 2.9.** .

*P: O Banco do Brasil é um banco múltiplo;*

*Q: Hoje eu começo a estudar.*

Desse modo, basta enunciar as proposições uma única vez e indicar a letra que a representa nos demais casos.

Se *P* e *Q* são proposições simples, a expressão  $P \wedge Q$  é chamada **conjunção** de *P* e *Q*, e as proposições *P* e *Q* são chamadas fatores da expressão.

Se conhecermos o valor lógico dos fatores de uma conjunção, podemos dizer o valor lógico da conjunção. A expressão “*João é magro e José é alto*” só é verdadeira se as duas proposições forem verdadeiras. Assim, a conjunção será verdadeira unicamente no caso em que os dois fatores forem verdadeiros, se um dos fatores (ou ambos) for falso, a conjunção é falsa.

O valor lógico do resultado da operação de conjunção pode ser apresentado por meio da tabela abaixo (tabela-verdade), onde *P* e *Q* são proposições quaisquer.

<i>P</i>	<i>Q</i>	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

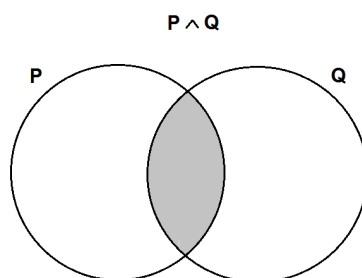
Se as proposições *P* e *Q* fossem conjuntos, tais que:

$$P = \{x|x \text{ é magro}\}$$

$$Q = \{x|x \text{ é alto}\}$$

Uma maneira interessante de tratarmos as proposições é olhá-las sob a ótica da teoria de conjuntos. Por exemplo, no caso da proposição *João é magro e José é alto*, poderíamos pensar nos seguintes conjuntos:  $P = \{x; x \text{ é magro}\}$  e  $Q = \{x; x \text{ é alto}\}$ .

Sob esse olhar a conjunção  $P \wedge Q$  equivale a intersecção entre os conjuntos *P* e *Q*. Vejamos a representação no diagrama de Venn abaixo.



Se  $P$  e  $Q$  são proposições simples, a expressão  $P \vee Q$  é chamada **disjunção inclusiva** de  $P$  e  $Q$ , e as proposições  $P$  e  $Q$  são chamadas parcelas da expressão.

Na expressão “*Maria foi a praia ou ao mercado*”, basta que Maria tenha ido, pelo menos, a um dos lugares, para que ela se torne verdadeira, ou seja, para que uma disjunção inclusiva seja verdadeira, basta que uma das parcelas (ou ambas) o seja; unicamente se ambas forem falsas, a disjunção também será.

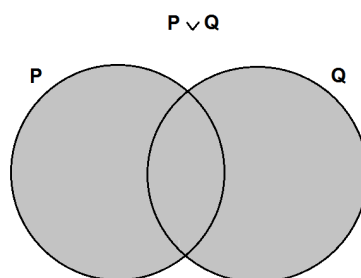
Abaixo, a tabela-verdade que apresenta o resultado da operação de disjunção inclusiva, onde  $P$  e  $Q$  são proposições quaisquer.

$P$	$Q$	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Olhando a expressão “*Maria foi a praia ou ao mercado*” sob o olhar da teoria dos conjuntos obtemos:

$$P = \{x; x \text{ foi a praia}\} \text{ e } Q = \{x; x \text{ foi ao mercado}\}.$$

Neste caso, a conjunção  $P \vee Q$  corresponde a união dos conjuntos  $P$  e  $Q$ , cuja representação no diagrama de Venn é dado a seguir:



Apesar de existir outro tipo de proposição composta muito parecida com a disjunção inclusiva que acabamos de ver, elas se diferenciam de forma muito sutil. Analisaremos o exemplo abaixo para entendermos essa diferença.

"Te darei uma bola **OU** te darei uma bicicleta."  
 "**OU** te darei uma bola **OU** te darei uma bicicleta"

Observe que enquanto na primeira proposição vê-se facilmente que se a primeira afirmação for verdadeira, isto é, te darei uma bola, isto não impedirá que a segunda afirmação, ou seja, te darei uma bicicleta, também seja verdadeira; na segunda proposição as proposições são mutuamente excludentes, ou seja, te darei uma bola implica que não te darei uma bicicleta e vice versa.

Em outras palavras, a segunda estrutura apresenta duas situações **mutuamente excludentes**, de sorte que apenas uma delas pode ser verdadeira, e a restante será necessariamente falsa. Ambas nunca poderão ser, ao mesmo tempo, verdadeiras; ambas nunca poderão ser, ao mesmo tempo, falsas.

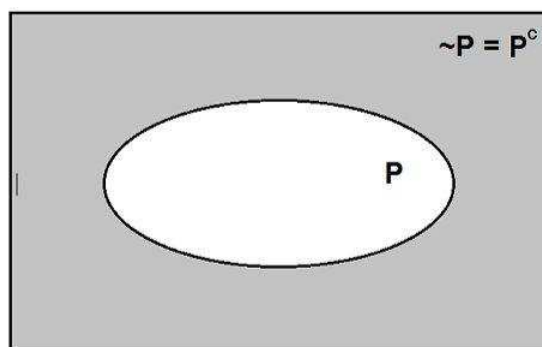
Esse tipo de proposição é conhecida como **disjunção exclusiva** e é indicada por  $P \mid Q$ . Neste texto, trataremos apenas da disjunção inclusiva, isto é, o termo “disjunção” se referirá à disjunção inclusiva; quando se tratar da disjunção exclusiva, isso será expressamente citado.

Se  $P$  é uma proposição, a expressão  $\sim P$  é chamada negação de  $P$ .

Claramente, a negação inverte o valor lógico de uma proposição, ou seja, se a sentença “*Maria foi ao cinema*” é representada por  $P$ , então sua negação  $\sim P$  representa “*Maria não foi ao cinema*”. A tabela-verdade da operação de negação é muito simples, e é apresentada abaixo, onde  $P$  é uma operação qualquer.

$P$	$\sim P$
V	F
F	V

Do ponto de vista da teoria dos conjuntos, olhando para proposição  $P$  na linguagem de conjuntos teríamos que a negação  $\sim P$  corresponde ao complementar do conjunto  $P$ , ou seja,  $P^c$ . Vejamos ilustração no diagrama de Venn a seguir.



Se  $P$  e  $Q$  são proposições, a relação entre  $P$  e  $Q$  ou a operação  $P \rightarrow Q$  é chamada de **condicional**. A proposição  $P$  é chamada antecedente, e a proposição  $Q$  conseqüente da condicional.

Observe que na operação condicional o antecedente é uma condição necessária para que ocorra o conseqüente. Vejamos um exemplo de uma sentença condicional: “*Se amanhecer chovendo, então não irei a praia.*”

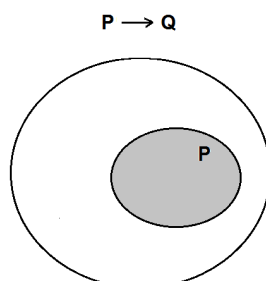
Como podemos estabelecer o valor lógico de uma operação condicional, conhecidos os valores verdade do antecedente e do conseqüente?

Considere novamente a expressão citada. Suponha que ambas as coisas aconteçam, isto é, que amanheça chovendo, e eu não tenha ido à praia; nesse caso, a condicional é verdadeira. Suponha, por outro lado, que amanheça chovendo, mas eu tenha ido à praia; significa que eu menti, pois não cumpri o prometido, logo a condicional é falsa.

Analisemos, com muito cuidado, o caso em que não amanheça chovendo, mas eu tenha ido à praia; nesse caso, ninguém pode me acusar que menti ao assegurar que “*Se amanhecer chovendo, então não irei à praia*”, ou seja, a condicional é verdadeira. Da mesma maneira, caso não amanheça chovendo e eu não tenha ido à praia, ninguém pode me acusar de mentiroso. A tabela-verdade que indica o resultado da operação de condicionamento é apresentada abaixo.

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Olhando para as proposições  $P$  e  $Q$  da sentença condicional na linguagem de conjuntos, a condicional  $P \rightarrow Q$  corresponde a inclusão do conjunto  $P$  no conjunto  $Q$ . Vejamos o diagrama de Venn a seguir.



Chamaremos de **bicondicional**, a relação ou operação entre  $P$  e  $Q$  representada por  $P \leftrightarrow Q$ .

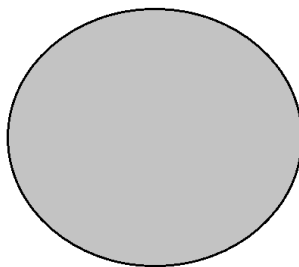
Na sentença “*joão será aprovado se, e somente se, ele estudar*”, o conectivo “*se, e somente se*” indica que se João estudar será aprovado, e que essa é a única possibilidade de João ser aprovado. Os dois acontecimentos serão ambos verdadeiros ou ambos falsos, não existindo possibilidade de uma terceira opção.

A seguir apresentamos a tabela-verdade da operação bicondicional definida anteriormente.

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Olhando para as proposições  $P$  e  $Q$  como conjuntos, observamos que a proposição bicondicional “ $P$  se, e somente se,  $Q$ ” equivale a igualdade de conjuntos. Veja esta representação no diagrama de Venn a seguir.

**P = Q**



### 2.2.4 Ampliando a Tabela-verdade

Vimos que dada uma expressão proposicional e dados os valores lógicos das proposições simples que a compõe, podemos, com a ordem de precedência, calcular o valor lógico da expressão dada. Porém, muitas vezes estamos interessados no conjunto de valores lógicos que a expressão pode assumir, para quaisquer valores lógicos das proposições componentes.

Vejam um exemplo. Considere a expressão proposicional  $P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$ . Na seção anterior, construímos pequenas tabelas para determinar o valor lógico das expressões. Agora, vamos ampliar aquela tabela, para incluir cada combinação dos valores lógicos das componentes.

Na expressão, existem apenas duas proposições componentes,  $P$  e  $Q$ . Como cada uma pode ser verdadeira ou falsa, temos quatro possibilidades:  $P$  e  $Q$  ambas verdadeiras,  $P$  verdadeira e  $Q$  falsa,  $P$  falsa e  $Q$  verdadeira ou,  $P$  e  $Q$  ambas falsas.

Dessa maneira, nossa tabela assume a seguinte forma:

$P$	$Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Na Tabela-verdade, os cabeçalhos são selecionados de modo que a proposição composta (última coluna) é gradualmente construída a partir de suas várias componentes. As duas primeiras colunas simplesmente registram todos os casos para os valores verdade de  $P$  e  $Q$ .

Observe que o número de linhas da Tabela corresponde a uma possível combinação dos valores lógicos das proposições componentes. Portanto, a Tabela-verdade de uma expressão proposicional tem  $2^n$  linhas, além do cabeçalho.

### 2.2.5 Tautologias e Contradições

Uma proposição composta é chamada **tautologia** ou **sentença tautológica** quando seu valor lógico for sempre verdade, independentemente dos valores lógicos das sentenças simples que a compõem. Por exemplo, a proposição  $P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$  é uma tautologia, por ser sempre verdadeira. Analisemos sua Tabela-verdade:

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

O que faz uma proposição composta ser uma tautologia é sua estrutura, e não as sentenças ou valores lógicos de suas sentenças simples. Por exemplo, independentemente de seus valores lógicos e do que possam significar, quaisquer sentenças  $P$  e  $Q$  quando substituídas em  $P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$  tornam essa última verdadeira. Nesse caso dizemos que  $P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$ , ou seja,  $(P \text{ e } Q)$  implica logicamente em  $(P \text{ ou } Q)$ .

Devemos ter cuidado para não confundir os símbolos, pois o símbolo ' $\rightarrow$ ' é reservado para sentenças condicionais da Lógica Formal, representando uma operação com sentenças. Já o símbolo ' $\Rightarrow$ ' é usado na implicação lógica de proposições.

Um conceito oposto ao de tautologia é o de sentença contraditória. Uma sentença composta é dita um **absurdo**, uma **contradição**, **contratautologia** ou **contraválida**, quando seu valor lógico for sempre falso, independentemente dos valores lógicos das sentenças simples que a compõem. Por exemplo, a sentença  $\sim P \wedge P$  é uma contradição, qualquer que seja a sentença  $P$ . Analisemos sua Tabela-verdade:

$P$	$\sim P$	$P \wedge (\sim P)$
V	F	F
F	V	F

Por mais incrível que possa parecer, sentenças absurdas têm muita importância quando se trata de técnica de demonstração.



### 2.2.6 Equivalência entre proposições

Duas proposições são ditas *equivalentes* se apresentam os mesmos valores lógicos em suas tabela-verdade.

**Exemplo 2.10.** Considere a expressão: *Se usar roupa branca, então não irá ao cinema.*

Obviamente esta expressão é uma proposição condicional do tipo  $P \rightarrow Q$ , cuja tabela-verdade é dada a seguir:

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe, agora, a proposição condicional  $\sim Q \rightarrow \sim P$ , ou seja, a proposição “*Se não for ao cinema, então não usará roupa branca*”. A tabela verdade dessa proposição condicional é dada a seguir.

$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \rightarrow \sim P$
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

Analisando as tabelas-verdade das proposições condicionais acima, observamos que  $P \rightarrow Q$  e  $\sim Q \rightarrow \sim P$  têm os mesmos valores lógicos. Assim sendo, essas proposições são equivalentes e escrevemos  $(P \rightarrow Q) \equiv (\sim Q \rightarrow \sim P)$ . A proposição “*Se não for ao cinema, então não usará roupa branca*” é a contrapositiva da proposição “*Se usar roupa branca, então não irá ao cinema*”.

Dadas as proposições  $P$  e  $Q$ , é fácil ver, por meio da construção de suas tabelas-verdade, que a proposição bicondicional  $P \leftrightarrow Q$  e a proposição  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  são equivalentes.

**Teorema 2.3.** *A proposição composta  $P$  é equivalente à proposição composta  $Q$ , isto é,  $P \equiv Q$  se, e somente se, a bicondicional  $P \leftrightarrow Q$  for uma sentença tautológica, ou seja, a bicondicional é sempre verdadeira.*

**Demonstração:** Sejam  $P$  e  $Q$  proposições equivalentes, ou seja, suas tabelas-verdade são idênticas. Desta forma, o valor lógico da bicondicional é sempre verdade, logo a proposição é tautológica.

Reciprocamente, se a bicondicional é tautológica observa-se que a última coluna da tabela-verdade é composta apenas com verdade (V). Veja tabela abaixo:

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Dessa forma, temos que os respectivos valores lógicos de  $P$  e  $Q$  são ambos verdadeiros ou ambos falsos. Veja tabela abaixo:

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
F	F	V

Portanto, as proposições  $P$  e  $Q$  são equivalentes. ■

## 2.2.7 Negação de proposições compostas

Na seção anterior, já estudamos completamente a negação de uma proposição simples. Nos deteremos nesta seção ao estudo da negação de proposições compostas.

### NEGAÇÃO DA CONJUNÇÃO

Dadas as proposições  $P$  e  $Q$ , a negação da proposição  $P \wedge Q$  é a proposição  $\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$ . Para comprovar esta afirmação, basta analisar a tabela-verdade a seguir.

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$\sim (P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
V	V	V	<b>F</b>	F	F	<b>F</b>
V	F	F	<b>V</b>	F	V	<b>V</b>
F	V	F	<b>V</b>	V	F	<b>V</b>
F	F	F	<b>V</b>	V	V	<b>V</b>

**Exemplo 2.11.** Sejam as proposições,

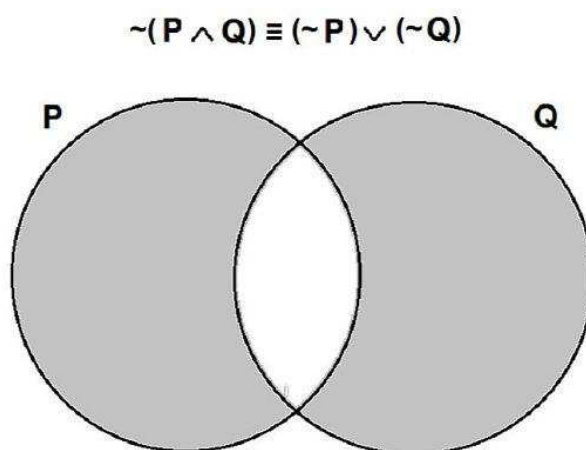
$P$ : usar roupa branca.

$Q$ : ir ao cinema.

$P \wedge Q$ : usar roupa branca e ir ao cinema.

Portanto, a negação da proposição *usar roupa branca e ir ao cinema* é a proposição *não usar roupa branca ou não ir ao cinema*.

Consideremos, agora, que  $P$  e  $Q$  são conjuntos. A negação da conjunção equivale em conjuntos ao complementar da interseção, ou seja,  $(P \cap Q)^c \equiv P^c \cup Q^c$ . A equivalência fica mais clara no diagrama de Venn:



### NEGAÇÃO DA DISJUNÇÃO

Dadas as proposições  $P$  e  $Q$ , verifica-se facilmente, através da tabela-verdade, que a negação da proposição  $P \vee Q$  é a proposição  $\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$ , como podemos ver na tabela-verdade a seguir.

$P$	$Q$	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P) \wedge (\sim Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V

**Exemplo 2.12.** Sejam as proposições,

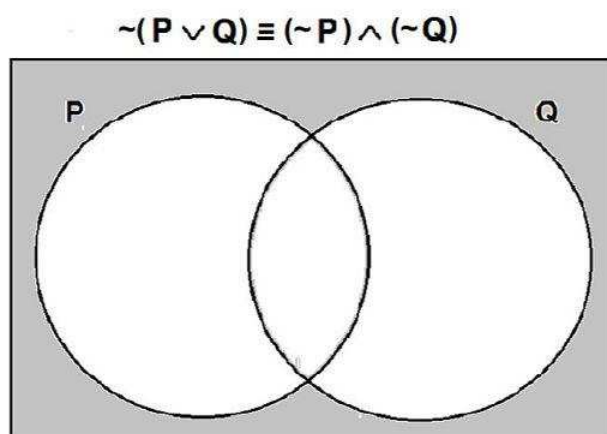
$P$ : usar roupa branca.

$Q$ : ir ao cinema.

$P \vee Q$ : usar roupa branca ou ir ao cinema.

Portanto, a negação da proposição *usar roupa branca ou ir ao cinema* é a proposição *não usar roupa branca e não ir ao cinema*.

Por outro lado, olhando para as proposições  $P$  e  $Q$  sob a luz da teoria de conjuntos, concluímos que a negação da disjunção  $P \vee Q$  equivale ao conjunto  $(P \cup Q)^c$ . É fácil ver que  $(P \cup Q)^c \equiv P^c \cap Q^c$ . Para isso basta observar o diagrama de Venn a seguir.



### NEGAÇÃO DA CONDICIONAL

Dadas as proposições  $P$  e  $Q$ , verifica-se facilmente, através da tabela-verdade, que a negação da proposição  $P \rightarrow Q$  é a proposição  $\sim(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge (\sim Q)$ , como podemos observar na tabela-verdade a seguir.

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$\sim(P \rightarrow Q)$	$\sim Q$	$(P) \wedge (\sim Q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

**Exemplo 2.13.** Sejam as proposições,

$P$ : usar roupa branca.

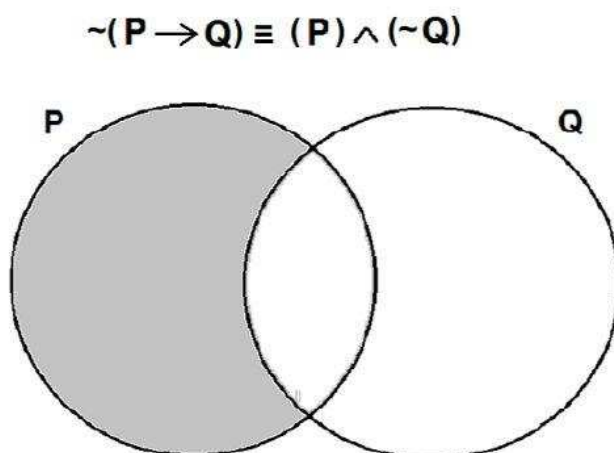
$Q$ : ir ao cinema.

$P \rightarrow Q$ : se usar roupa branca então irá ao cinema.

$(P) \wedge (\sim Q)$ : usar roupa branca e não ir ao cinema.

Portanto, a negação da proposição *se usar roupa branca então irá ao cinema* é a proposição *usar roupa branca e não ir ao cinema*.

Novamente, recorrendo a teoria dos conjuntos, concluímos que a proposição  $P \rightarrow Q$  é equivalente a inclusão  $P \subset Q$ . Desse modo, negar a condicional é negar a inclusão. Através do diagrama de Venn que se segue esta equivalência fica mais evidente.



### NEGAÇÃO DA BICONDICIONAL

Dados as proposições  $P$  e  $Q$ , sabemos que a proposição bicondicional  $P \leftrightarrow Q$  é equivalente a proposição  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ , ou seja,  $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ . Portanto, de acordo com a equivalência acima, negar a bicondicional  $P \leftrightarrow Q$  é negar a conjunção  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sim(P \leftrightarrow Q) &\equiv \sim[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)] \\ &\equiv \sim(P \rightarrow Q) \vee [\sim(Q \rightarrow P)] \\ &\equiv [P \wedge (\sim Q)] \vee [Q \wedge (\sim P)]. \end{aligned}$$

Portanto, a negação da bicondicional  $P \leftrightarrow Q$  é dada pela proposição

$$\sim(P \leftrightarrow Q) \equiv [P \wedge (\sim Q)] \vee [Q \wedge (\sim P)].$$

**Exemplo 2.14.** *Sejam as proposições,*

$P$ : usar roupa branca.

$Q$ : ir ao cinema.

$P \leftrightarrow Q$ : usar roupa branca se e somente se for ao cinema.

$\sim(P \leftrightarrow Q) \equiv [P \wedge (\sim Q)] \vee [Q \wedge (\sim P)]$ : não usar roupa branca e ir ao cinema ou usar roupa branca e não ir ao cinema.

A negação de  $P \leftrightarrow Q$  é  $\sim(P \leftrightarrow Q) = [(\sim P) \vee Q] \wedge [P \vee (\sim Q)]$ : não usar roupa branca e ir ao cinema ou usar roupa branca e não ir ao cinema.

### 2.2.8 Negação de sentenças quantificadas universalmente e existencialmente

Nesta secção salientamos a importância da negação de algumas sentenças quantificadoras. Qual é a negação de *todos são*? A resposta correta é *nem todos são*. Observe que essa afirmação é o mesmo que *pelo menos um não é*. Vale salientar que o erro mais comum nessa situação é achar que a negação de *todos são* é *todos não são*. Para comprovar que essa afirmação é falsa recorreremos ao seguinte exemplo: Para o conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  as sentenças *todos os elementos são pares* e *todos os elementos não são pares* são ambas falsas.

Portanto a negação de uma sentença quantificada universalmente é uma sentença quantificada existencialmente. Por exemplo, a negação de “todos gostam de futebol” é “pelo menos um não gosta de futebol”.

Qual é a negação do quantificador *pelo menos um é*? A resposta correta é *nenhum é* ou equivalentemente *todos não são*. O erro mais comum neste caso é achar que a negação de *pelo menos um é* é *pelo menos um não é*. Recorreremos a um exemplo para mostrar que isso é um equívoco. Considere o conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Observe que as sentenças *pelo menos um elemento é par* e *pelo menos um elemento não é par* são ambas verdadeiras.

**Exemplo 2.15.** Qual condição necessária e suficiente para que a afirmação abaixo seja verdadeira?

*“Não é verdade que todos os aldeões daquela aldeia não dormem a sesta”*

Como a afirmação acima é falsa, deve-se achar sua negação para torná-la verdadeira. A negação de “*todos não dormem*” é “*pelo menos um dorme*”, assim a condição necessária e suficiente para a afirmação seja verdadeira é: *pelo menos um aldeão daquela aldeia dorme na sesta*.

**Exemplo 2.16.** Admita que não existem marcianos em nosso universo. Julgue a afirmação a seguir:

*Todos os marcianos andam de bicicleta.*

Analisaremos primeiramente sua negação, ou seja, *pelo menos um marciano não anda de bicicleta*. Esta proposição é falsa, pois não existem marcianos. Logo, *Todos os marcianos andam de bicicleta* é verdadeira.

---

# Ensinando Lógica na Educação Básica

---

Neste capítulo, nosso olhar está voltado para o ensino de Lógica na Educação Básica. A iniciação da Lógica na Educação Básica, traz questionamentos inerentes a própria aplicação: “**Existe o "melhor momento" para ensinar Lógica na Educação Básica?**” e “**Existe algum método de aplicação satisfatório?**”. Neste capítulo, trazemos referências teóricas e sugestões, não para a resolução dos questionamentos, e sim para darmos início a essa discussão.

## 3.1 Existe o “melhor momento” para ensinar Lógica na Educação Básica?

Inicialmente, devemos entender como se dá construção do conhecimento no ser humano, essa questão tem sido alvo de vários estudos ao longo dos anos. Nesses estudos, não há um consentimento de como se dá ou o que estaria envolvido no processo de aprendizagem, porém todos partem de um denominador comum: a interação do indivíduo com o meio.

Para Piaget, além da interação do indivíduo com o meio, existem outros fatores que influenciam no processo de aprendizagem, como: **maturação** (crescimento biológico dos órgãos), **exercitação** (funcionamento dos esquemas e órgãos que implica na formação de hábitos), **aprendizagem social** (aquisição de valores, linguagem, costumes e padrões culturais e sociais) e **equilibração** (processo de auto regulação interna do organismo, que se constitui na busca sucessiva de reequilíbrio após cada desequilíbrio sofrido).

Segundo o pensamento de Vygotsky (1988), o ser humano possui dois conjuntos de funções psicológicas, as elementares (ou naturais) e as superiores (ou culturais). As fun-

ções psicológicas ligadas ao funcionamento biológico são chamadas de funções psicológicas elementares (FPE), elas se desenvolvem conforme nosso organismo vai crescendo e se tornando mais complexo. Entre elas, temos o reflexo, a percepção, a atenção e a memória imediata, funções estas que surgem em função da influência direta de estímulos externos e não utilizam signos como mediadores.

As funções psicológicas superiores (FPS) são características tipicamente humanas, e são reguladas de maneira consciente pelo indivíduo, como por exemplo: atenção dirigida e voluntária, memorização mediada, pensamento, ou qualquer comportamento que seja intencional e controlado.

*Inicialmente a criança em seu desenvolvimento depende muito de signos externos e, conforme vai se desenvolvendo ela passa a vivenciar, através da atividade mediada, processos internos de auto-regulação passando a trabalhar com os signos internamente. Portanto, todo signo antes de ser interno foi externo. Vygotsky chamou de internalização ao processo através do qual o ser humano é capaz de reconstruir internamente ações externas fazendo com que o processo interpessoal inicial se torne intrapessoal [11]*

Além dos estudos psicológicos, existem estudos biológicos sobre a construção do conhecimento humano. Em 1981, Roger Sperry realizou um trabalho pioneiro com pacientes de cérebro dividido que lhe rendeu o prêmio Nobel de Fisiologia/Medicina. Ele descobriu que cada hemisfério cerebral tem funções específicas.

*O hemisfério esquerdo é o da lógica racional, do raciocínio, da linguagem, do pensamento sequencial, e o hemisfério direito é o da intuição, da linguagem não-verbal, da música, do pensamento holístico, isto é, do todo completo. Por isso, pode-se entender por que uma pessoa gaga não gagueja quando canta, pois a gagueira está relacionada com as palavras e o hemisfério esquerdo, enquanto a música está relacionada ao direito. [10]*

Assim, a Lógica racional é uma das características do hemisfério esquerdo do nosso cérebro, nele acontece um encadeamento de pensamentos para se chegar às conclusões. Por isso, a sistematização da lógica é importante para o desenvolvimento da aprendizagem.

A capacidade de organizar e validar argumentos são temas de vários estudos feitos com crianças e adultos. Estes estudos mostram que os adultos frequentemente falham em reconhecer as distinções entre a validade lógica e o fato do mundo real. As crianças possuem conhecimento lógico, mas o uso deste conhecimento é seletivo e depende do modo de apresentação da tarefa.



Um desses estudos foi realizado por Dias & Harris (1988a, 1990). Eles separaram dois grupos de crianças, Grupo Brincar e Grupo Verbal, com faixa etária de 7 a 14 anos. No Grupo Brincar foram apresentados problemas silogísticos com premissas incongruentes, onde o experimentador apresentava cada problema como uma história, sua entonação era de um modo faz-de-conta. Os mesmos problemas foram apresentados ao Grupo Verbal de maneira normal, sem contexto de brincadeira. Neste estudo, o Grupo Brincar obteve alto desempenho, sendo capaz de raciocinar com silogismos mesmo quando o conteúdo dos mesmos era contrário aos seus conhecimentos práticos. Vale lembrar que o Grupo Verbal alcançou baixos escores nos mesmos problemas.

Como podemos perceber, a construção do conhecimento humano tem como uma de suas características, a Lógica. Porém, o seu desenvolvimento depende de outros fatores externos como, a interação com o meio em que o indivíduo se encontra e a forma como os argumentos serão transmitidos. Dessa forma, não se pode apontar um “melhor momento” para se estudar Lógica, visto que a Lógica é inerente ao ser humano desde sua mais tenra idade e seu desenvolvimento depende signos internos e externos.

## 3.2 Uma proposta de aplicação possível para o ensino de Lógica na Educação Básica

Qualquer indivíduo que deseje modificar ou complementar algum processo existente, deve partir daquilo que lhe parece mais óbvio, o início. E para que isso aconteça, é necessário ter um conhecimento histórico, a fim de conhecer as motivações e as dificuldades daqueles que construíram tal processo.

Como se pode observar, o conhecimento histórico da Lógica remete ao estudo da linguagem. Esse é o ponto inicial do processo, e a partir dele ficará mais fácil elaborar propostas na busca de seu desenvolvimento.

Aqui mostraremos uma proposta de aplicação possível, baseada, inicialmente, no estudo da linguagem e posteriormente na manipulação de símbolos. Essa proposta tenta usar meios e artifícios para que os alunos aceitem as premissas como verdadeiras e, conseqüentemente, façam uma melhor análise dos argumentos.

Essa nossa proposta poderia ser chamada de “*esboço de uma proposta*”. No dicionário, esboço quer dizer: “*s.m. Primeiro traçado de um desenho ou de um projeto de arquitetura, onde se indicam somente o conjunto e as divisões principais da obra definitiva.*” Porém um esboço, nos remete a algo “grosseiro”, “informal” e não é esse tipo de tratamento que iremos dar a nossa proposta. Não queremos tratar de uma proposta pronta, acabada, infalível, queremos, sim, trazer uma proposta passível de mudanças, adaptável ao meio e

ao grau de conhecimento dos alunos, mas obedecendo ao formalismo do conteúdo.

Nessa proposta, a intenção é dar ao professor um material que servirá como base para sua atuação em sala de aula, pois, como vimos, cabe a este profissional adequar a proposta a seu grupo, observando suas necessidades, dificuldades e expectativas. De modo geral, a proposta é que os alunos se adaptem e se envolvam com os argumentos, de forma que desenvolvam e criem uma linguagem mais formal, evitando, assim, ambiguidades existentes na linguagem natural, e conseqüentemente tornem-se capazes de deduzir e analisar a validade dos argumentos apresentados.

Este material vem sendo utilizado em aulas de matemática para o ensino médio da Escola Estadual Arnon de Melo, situada na cidade de Feliz Deserto - AL. Nele, fazemos uma releitura do capítulo anterior, numa linguagem mais acessível a este grupo. Aqui mostraremos os recursos utilizados e suas finalidades.

### 3.2.1 Uma Introdução a Lógica

Inicamos com uma situação problema na qual os alunos estão inseridos, vejamos:



Diego, ao se encaminhar para o Pontal do Peba, se depara com uma bifurcação na entrada. Ele não sabe se segue pela estrada de barro ou continua pelo asfalto. A única certeza que ele tem é que um dos caminhos leva ao Pontal do Peba, o outro, não. Na casa ao lado da dele, moram dois irmãos. Um só diz a verdade, outro só diz a mentira. Ao perguntar sobre que caminho deve seguir para chegar ao Pontal do Peba, um dos irmãos

disse: “Se meu irmão estivesse aqui, mandaria você seguir pela estrada de barro”. Por onde Diego deve ir?

Observe que iniciamos com um problema na tentativa de colocar o aluno dentro da situação e forçando o mesmo a sair da sua zona de conforto. Com o objetivo de motivar o aluno, usamos uma tira de histórias em quadrinhos e citamos uma região que é de conhecimento de todos da sala, o Pontal do Peba. Não daremos a resposta da pergunta de imediato, objetivando aguçer a curiosidade do aluno e o interesse pelo conteúdo que iremos apresentar, permitindo que o mesmo resolva o problema proposto.

Vamos responder a essa pergunta, mas primeiro vamos lhe apresentar um conteúdo bastante interessante e que irá lhe ajudar a responder, argumentar e criticar a várias informações recebidas todos os dias por você: a Lógica.

Assim como você se “inquietou” com a pergunta acima, por volta do século IV a. C., Aristoteles (384-322 a. C.) foi o primeiro a se incomodar e a estudar problemas dessa natureza. Por esta razão ele é considerado o “Pai” da Lógica. A linguagem cotidiana nem sempre é clara e precisa, sendo muito comum a ocorrência de ambiguidades que geram dúvidas sobre o significado do que se está falando.

Dessa forma o primeiro objetivo da lógica é estabelecer uma linguagem formal, na qual se pode expressar com clareza, precisão e emitir juízo de verdadeiro e falso para determinadas afirmações. A maior dificuldade na construção dessa linguagem se dá pelo fato de muitas vezes a linguagem formal e a linguagem cotidiana serem aparentemente contraditórias.

Voltando ao nosso exemplo, para responder a pergunta de Diego, iremos analisar todas as possibilidades existentes sobre a ótica da afirmação ser verdadeira ou falsa. Analisaremos, primeiro, se a resposta for dada pelo irmão mentiroso:

- 1) Neste caso, o irmão dele indicaria o caminho correto, mas ele, como mentiroso, diria que o irmão indicou o caminho errado, ou seja, a estrada de barro. Portanto, o irmão dele diria o caminho correto que é continuar pelo asfalto.

Agora, analisaremos se a resposta for dada pelo irmão que só diz a verdade:

- 2) Neste caso, o irmão dele indicaria o caminho errado, e ele, que fala a verdade, confirmaria que o irmão indicou o caminho errado, ou seja a estrada de barro.

Observe que após análise detalhada da informação, concluímos que em qualquer caso a estrada de barro é o caminho errado. Esses argumentos nos mostram como tirar proveito da linguagem para obter a informação correta sobre alguma informação.

Observe que iniciamos o desenvolvimento do conteúdo através de uma situação real, contextualizada dentro do habitat natural do grupo, procurando, dessa forma, estimular o aprendizado e o interesse pelo conteúdo exposto.

A seguir introduziremos alguns conceitos básicos, necessários ao desenvolvimento de um raciocínio lógico capaz de resolver problemas como o proposto inicialmente.

## Proposições

Uma proposição é uma frase afirmativa (com sujeito e predicado), à qual pode ser atribuída, sem ambiguidade, um dos valores lógicos (**falso (F)** ou **verdadeiro (V)**).

São exemplos de proposições:

- a) Feliz Deserto é um município de Alagoas.
- b) Hoje não choveu.
- c)  $2 + 4 = 6$
- d)  $5 > 9$

Não são proposições:

- a)  $3 + 5$  (Não tem predicado)
- b) Para que serve esse aplicativo? (é uma frase interrogativa)

A partir de uma proposição qualquer que chamaremos de  $P$ , sempre podemos construir outra proposição. Observe:

Na proposição, “5 é um número inteiro” podemos construir a proposição “5 não é um número inteiro”. Essa nova proposição é chamada a negação de  $P$  e é representada por  $\sim P$ .

Lembre-se de que  $\sim P$  só será uma proposição se formos capazes de dizer se ela é **verdadeira (V)** ou **falsa (F)**. Assim, se  $P$  é verdadeira,  $\sim P$  é falsa ou se  $P$  é falsa,  $\sim P$  é verdadeira.

## Exercícios

1. Quais das sentenças abaixo são proposições?
  - a) O Banco do Brasil foi criado em 1980.
  - b) Faça seu trabalho corretamente.
  - c) Manuela tem mais de 40 anos de idade.
  - d)  $5 \cdot 4 = 20$
  - e)  $11 - 4 \cdot 2$
  
2. Qual a negação de cada uma das seguintes proposições? Que negações são verdadeiras?
  - a) Brasília é a capital do Brasil.
  - b) O computador tem sentimentos.
  - c)  $3 \cdot 7 = 21$
  - d)  $3 \cdot 2 + 1 > 4$
  - e)  $3 \cdot (11 - 7) \neq 5$

Nestes primeiros momentos, a proximidade da lógica com a linguagem trará um certo “choque”, pois é comum a sociedade associar a Lógica Matemática a decoração de fórmulas e manipulação de símbolos.

## Conectivos lógicos

A partir de duas proposições quaisquer que chamaremos de  $P$  e  $Q$  podemos formar novas proposições utilizando palavras específicas chamadas de **conectivos lógicos**. Os conectivos fundamentais são:

Operacao	Conectivo	Simbolo
Conjunção	e	$\wedge$
Disjunção	ou	$\vee$
Negação	não	$\sim$
Condicional	se - então	$\rightarrow$
Bicondicional	se, e somente se	$\leftrightarrow$

Assim, se  $P$  é a proposição “*Flexeiras é uma praia bonita*” e  $Q$  é a proposição “*Clóvis joga xadrez*”, podemos formar as seguintes proposições:

Nova proposição	Representação
Flexeiras é uma praia bonita <b>E</b> Clóvis joga xadrez	$P \wedge Q$
Flexeiras é uma praia bonita <b>OU</b> Clóvis joga xadrez	$P \vee Q$
Flexeiras não é uma praia bonita	$\sim P$
<b>SE</b> Flexeiras é uma praia bonita <b>ENTÃO</b> Clóvis joga xadrez	$P \rightarrow Q$
Flexeiras é uma praia bonita <b>SE, E SOMENTE SE</b> Clóvis joga xadrez	$P \leftrightarrow Q$

### Atividade sugerida para fixar a notação

1. Sejam as proposições:  $P$ : “*O empregado foi demitido*” e  $Q$ : “*O patrão indenizou o empregado*”. Forme sentenças, na linguagem natural, que correspondam às proposições seguintes:

- $\sim P$
- $\sim Q$
- $P \vee Q$
- $P \wedge Q$
- $\sim P \vee Q$
- $\sim (\sim P)$
- $P \wedge \sim Q$

2. Sejam as proposições:  $P$ : “*Jô Soares é gordo*” e  $Q$ : “*Jô é artista*”. Escreva, na forma simbólica, cada uma das proposições seguintes:

- Jô Soares não é gordo.
- Jô Soares não é artista.
- Não é verdade que Jô Soares não é gordo.
- Jô Soares é gordo ou artista.
- Jô Soares não é gordo e é artista.

Os exercícios, nessa fase do desenvolvimento, tem como objetivo, quantificar a assimilação do conteúdo até esse momento.

## Valores lógicos de duas proposições compostas

Como já deu para perceber, o valor lógico de uma proposição ou é verdadeiro, ou é falso. Esse é um dos princípios básicos da lógica, o princípio da não contradição. Veja como é fácil dizer se uma proposição composta é verdadeira ou falsa.

Para efeito de aprendizagem, admitiremos que a proposição é falsa quando estamos mentindo e, verdadeira, quando falamos a verdade.

### Conjunção

Na operação de conjunção, usamos o conectivo “e” ( $\wedge$ ). Vejamos o seguinte diálogo:



Nesse momento será introduzido o conceito de conectivos lógicos. É interessante sugerir que dois alunos representem as falas dos personagens, com o intuito de concentrar a atenção dos demais.

Observe que na proposição “*Pitágoras era grego E Descartes era francês*” o professor só estará dizendo a verdade se ambas as proposições forem verdadeiras. Se pitágoras não for grego ou Descartes não for francês ele estará mentindo e sua afirmação será falsa. Assim:

$P$ : Pitágoras era grego;

$Q$ : Descartes era francês.

Pitágoras era grego	Descartes era francês	Pitágoras era grego <b>E</b> Descartes era francês
$(P)$	$(Q)$	$(P \wedge Q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

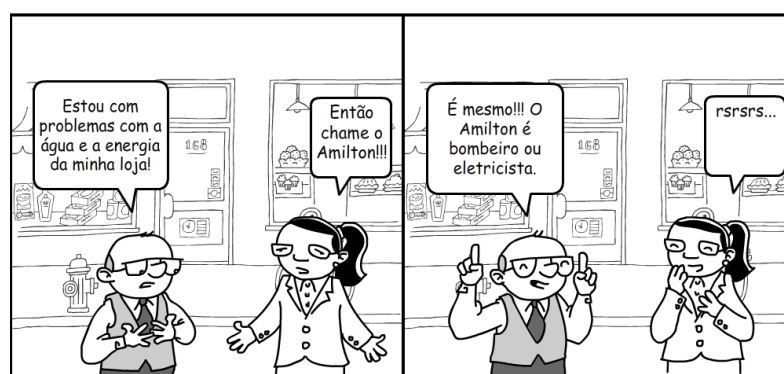
A tabela verdade está com os espaços em branco para que o resultado de cada operação lógica seja discutido em sala, onde o professor deverá convencer a todos dos resultados obtidos.

**Exemplo 3.1.** Julge a seguinte proposição:  $2 > 1$  e  $2 = 3$ .

**Solução:** A proposição  $2 > 1$  é verdadeira, mas a proposição  $2 = 3$  é falsa. Portanto, a proposição  $2 > 1$  e  $2 = 3$  é falsa.

### Disjunção

Na operação de disjunção, usamos o conectivo “ou” ( $\vee$ ). O conectivo “ou” ( $\vee$ ) não é exclusivo, ou seja, ele tem o sentido de e/ou. Vejamos, outro diálogo:



Consideraremos, agora, a proposição “Amilton é bombeiro ou electricista”, nada impede que ele seja bombeiro e electricista. Nesta proposição basta que uma das proposições seja verdadeira para que o dono da loja esteja falando a verdade. Assim:



$P$ : Amilton é bombeiro.

$Q$ : Amilton é eletricista.

Amilton é bombeiro	Amilton é eletricista	Amilton é bombeiro <b>OU</b> eletricista
$(P)$	$(Q)$	$(P \vee Q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Em nossa linguagem diária, a palavra “ou” pode traduzir tanto a idéia de hipóteses mutuamente exclusivas, quanto a de que pelo menos uma das hipóteses ocorre. Aqui trataremos, por enquanto, do segundo caso.

**Exemplo 3.2.** Julgue a seguinte proposição:  $2 > 1$  ou  $2 = 3$ .

**Solução:** Como  $2 > 1$  é verdadeira, então a proposição composta também é verdadeira.

### Condicional

Na operação de condicional, usamos o conectivo “se... então” ( $\rightarrow$ ). Observe a proposição:



“**SE** amanhã fizer sol, **ENTÃO** o cebolinha vai à fazenda”.

- \* Se amanhã fizer sol e o cebolinha for a fazenda, o anjinho estará dizendo a verdade.
- \* Se amanhã fizer sol e o cebolinha não for a fazenda, o anjinho estará mentindo.
- \* Se amanhã não fizer sol e mesmo assim o cebolinha for a fazenda, não podemos dizer que anjinho está mentindo, uma vez que, ele não falou o que iria acontecer caso não fizesse sol. Logo, ele está falando a verdade.

\* Se amanhã não fizer sol e o cebolinha não for a fazenda, da mesma forma que o item anterior o anjinho não pode estar mentindo. Logo, ele está falando a verdade.

Então, como ficará a tabela abaixo?

Amanhã fizer sol	Cebolinha vai à fazenda	SE $P$ , ENTÃO $Q$
$(P)$	$(Q)$	$(P \rightarrow Q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

**Exemplo 3.3.** Julgue a seguinte proposição: Se  $1 + 2 = 4$ , então  $3 + 4 = 7$ .

**Solução:** A proposição  $1 + 2 = 4$  é falsa e a proposição  $3 + 4 = 7$  é verdadeira. Logo, como visto anteriormente, a proposição “Se  $1 + 2 = 4$ , então  $3 + 4 = 7$ ” é verdadeira.

### Bicondicional

Duas proposições podem ser combinadas pelo conectivo lógico “se, e somente se” para formar uma nova proposição denominada bicondicional. Observe a seguinte proposição:



O que a Mônica quis dizer com “*Eu vou bater em você SE, E SOMENTE SE, você mentir para mim?*”

Essa proposição é a conjunção da proposição “**SE** eu vou bater em você, **ENTÃO** você mentiu para mim” com a proposição “**SE** você mentiu para mim, **ENTÃO** eu vou bater em você”. Deste modo, a bicondicional só é verdadeira se as duas proposições tiverem o mesmo valor lógico (as duas verdadeiras ou as duas falsas). Assim:

$P$ : Eu bato em você.

$Q$ : Você mentir pra mim.

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

**Exemplo 3.4.** Julgue a seguinte proposição:  $1 + 2 = 4 \leftrightarrow 3 + 4 = 7$ .

**Solução:** Já vimos que a proposição  $1 + 2 = 4$  é falsa. Portanto,  $1 + 2 = 4 \leftrightarrow 3 + 4 = 7$  é falsa.

## Exercícios

1. Classifique em verdadeiro ou falso cada uma das proposições abaixo.

a)  $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3 \cdot 4$

b)  $2^2 = 4 \leftrightarrow (-2)^2 = 4$

c)  $5 + 7 \cdot 1 = 10 \rightarrow 3 \cdot 3 = 9$

d)  $\text{mdc}(3, 6) = 1 \leftrightarrow 4$  é número primo

e)  $(6 \leq 2) \wedge (6 - 2 \geq 0)$

2. Consideremos as sentenças P, Q, R e S tais que:

$$P: 5 > 4 \quad Q: 2 < 8 \quad R: 3 > 7 \quad S: 6 > 9$$

Dê o valor lógico (verdadeiro ou falso) às sentenças:

a)  $P \rightarrow Q$       d)  $P \vee S$

b)  $R \rightarrow Q$       e)  $R \wedge S$

c)  $P \leftrightarrow Q$       f)  $S \rightarrow P$

3. Complete a tabela abaixo com os valores lógicos das respectivas proposições:



( )  $3^2 = 9$  ou  $0 \cdot 4 = 4$

( ) Se 3 é primo, então  $4 < 5$

7. Paloma fez as seguintes declarações:

- “Sou inteligente e não trabalho”

- “Se não tiro férias, então trabalho”

Supondo que as duas declarações sejam verdadeiras, é FALSO concluir que Paloma:

a) é inteligente.

b) tira férias.

c) trabalha.

d) não trabalha e tira férias

e) trabalha ou é inteligente.

8. Há três suspeitos de um crime: o cozinheiro, a governanta e o mordomo. Sabe-se que o crime foi efetivamente cometido por um ou mais de um deles, já que podem ter agido individualmente ou não. Sabe-se, ainda, que: **A) se o cozinheiro é inocente, então a governanta é culpada; B) ou o mordomo é culpado ou a governanta é culpada, mas não os dois; C) o mordomo não é inocente.**

Logo:

a) a governanta e o mordomo são culpados;

b) o cozinheiro e o mordomo são culpados;

c) somente a governanta é culpada;

d) somente o cozinheiro é inocente;

e) somente o mordomo é culpado.

9. Todas as proposições abaixo envolvem implicações lógicas. A única que representa uma proposição VERDADEIRA é:

a)  $(4^2 - 1 = 15) \rightarrow (50 + 1 = 6)$ ;

b)  $(5^2 + 1 = 26) \rightarrow (2 + 3 \cdot 5 = 25)$ ;

c)  $(7^0 - 1 = 0) \rightarrow (110 = 10)$ ;

d)  $(5^2 + 1 = 11) \rightarrow (2 + 3 \cdot 5 = 25)$ ;

e)  $(2 + 3 \cdot 5 = 17) \rightarrow (12 + 1 = 3)$ .

10. Construa uma história em quadrinhos usando os conectivos lógicos adequadamente.

*Os exercícios, desta seção, visam praticar e desenvolver a análise de situações matemáticas e não matemáticas.*

## Tautologias e Contradições

Vimos que algumas proposições compostas, dependendo das proposições simples, podem ser verdadeiras ou falsas. Mas, existem proposições que **independentemente** das proposições iniciais são sempre verdadeiras ou são sempre falsas. Vejamos alguns exemplos:

I) Se Paulo é dentista e Miguel é médico então Paulo é dentista ou Miguel é médico.

II) Paulo é dentista e não é dentista.

Na primeira proposição, consideremos  $P$ : “Paulo é dentista” e  $Q$ : “Miguel é médico”. Analisando o valor lógico das proposições compostas teremos:

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Observe que a última coluna da tabela (representação simbólica da primeira proposição) contém apenas V. Esse tipo de proposição chama-se de **tautologia**.

Na segunda proposição, só temos a proposição  $P$ : Paulo é dentista e sua negação  $\sim P$ : Paulo não é dentista. Analisando o valor lógico da conjunção entre as duas, teremos:

$P$	$\sim P$	$P \wedge (\sim P)$
V	F	F
F	V	F

Observe que a última coluna é formada apenas por F. Esse tipo de proposição chama-se de **contradição**.

## Equivalência entre proposições

Duas proposições compostas são equivalentes (dizem a mesma coisa) se têm a mesma tabela de valores lógicos. Exemplo:



I) Se Rodrigo mentiu, então ele é culpado.

II) Ele não é culpado, então Rodrigo não mentiu.

Analisemos a primeira proposição, onde  $P$ : “Rodrigo mentiu” e  $Q$ : “ele é culpado”. A proposição é do tipo condicional  $P \rightarrow Q$ :

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
V	V	<b>V</b>
V	F	<b>F</b>
F	V	<b>V</b>
F	F	<b>V</b>

Na segunda, há uma proposição condicional entre as negações de  $P$  e  $Q$ , onde  $\sim Q$ : “ele não é culpado” e  $\sim P$ : “Rodrigo não mentiu”. Assim,

$\sim Q$	$\sim P$	$(\sim Q) \rightarrow (\sim P)$
F	F	<b>V</b>
V	F	<b>F</b>
F	V	<b>V</b>
V	V	<b>V</b>

Deste modo, dizemos que:

$$P \rightarrow Q \equiv (\sim Q) \rightarrow (\sim P)$$

Agora que você sabe quando duas proposições são equivalentes, analise se as proposições: “Rodrigo mentiu, então ele é culpado” e “Se ele é culpado, então Rodrigo mentiu” são equivalentes.

## Negação de proposições

Já falamos, aqui, sobre a negação de proposições simples. Agora, iremos mostrar como se dá a negação de proposições compostas.

### Negação da negação

Na língua portuguesa, a dupla negação é usada como recurso para reforço de uma negação. Ex.: “*Não faça isso não*”, “*Eu não vou àquele lugar não*”.

Do ponto de vista lógico, uma dupla negação equivale a uma afirmação.

- I. A proposição: “*Não é verdade que o Mário não é estudioso*” é logicamente equivalente a “*Mário é estudioso*”.
- II. A proposição: “*Não dá para ler não*” é logicamente equivalente a “*Dá para ler*”.

### Negação da conjunção

Considerando a proposição composta “Usar roupa branca e ir ao cinema”, sua negação é dada por: “Não usar roupa branca ou não ir ao cinema”.

Representando simbolicamente:  $\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$

### Negação da disjunção

Considerando a proposição composta “Usar roupa branca ou ir ao cinema”, sua negação é dada por: “Não usar roupa branca e não ir ao cinema”.

Representando simbolicamente:  $\sim (P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$

### Negação da condicional

Considerando a proposição composta “Se usar roupa branca então irá ao cinema”, sua negação é dada por: “Usar roupa branca e não ir ao cinema”.

Representando simbolicamente:  $\sim (P \rightarrow Q) \equiv P \wedge (\sim Q)$



### Negação da bicondicional

Considerando a proposição composta “Usar roupa branca se, e somente se, for ao cinema”, sua negação é dada por: “ Não usar roupa branca e ir ao cinema”.

Representando simbolicamente:  $\sim (P \leftrightarrow Q) \equiv (\sim P) \wedge Q$

*Nesse momento, é necessário destacar a importância da manipulação dos símbolos.*

### Exercícios

1. Verifique se a proposição  $(\sim P \vee \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$  é uma contradição.
2. A proposição  $P \vee [P \rightarrow (Q \wedge \sim Q)]$  é tautológica?
3. A negação de “ $x > 4$  ou  $x < 2$ ” é:
  - a)  $x < 4$  e  $x > 2$ .
  - b)  $x < 4$  ou  $x > 2$ .
  - c)  $x \leq 4$  e  $x \geq 2$ .
  - d)  $x \leq 4$  ou  $x \geq 2$ .
  - e) se  $x \leq 4$ , então  $x < 2$ .
4. A negação da afirmação condicional “se estiver chovendo, eu levo o guarda chuva” é:
  - a) se não estiver chovendo, eu levo o guarda-chuva.
  - b) não está chovendo e eu levo o guarda-chuva.
  - c) não está chovendo e eu não levo o guarda-chuva.
  - d) se estiver chovendo, eu não levo o guarda chuva.
  - e) está chovendo e eu não levo guarda-chuva.
5. Das proposições abaixo, a única que é logicamente equivalente a  $P \rightarrow Q$  é:
  - a)  $(\sim Q) \rightarrow (\sim P)$
  - b)  $(\sim Q) \rightarrow P$
  - c)  $(\sim P) \rightarrow (\sim Q)$
  - d)  $Q \rightarrow (\sim P)$

e)  $\sim (Q \rightarrow P)$

6. Se  $x + y = 2$ , então  $x = 0$ . Ora,  $x$  não é zero. Então, pode-se afirmar que:

a)  $y = 2$

d)  $x + y \neq 2$

b)  $y = 0$

e)  $y \neq 0$

c)  $y = 2 - x$

7. Surfo ou estudo. Fumo ou não surfo. Velejo ou não estudo. Ora, não velejo. Assim:

a) estudo e fumo.

b) não fumo e surfo.

c) não velejo e não fumo.

d) estudo e não fumo.

e) fumo e surfo.

8. Se  $a > b$ , então  $c > d$ . Se  $c > d$ , então  $f > a$ . Ora,  $a > b$ . Logo:

a)  $a > d$

d)  $b > c$

b)  $a > c$

e)  $b > d$

c)  $f > b$

### 3.3 Uma breve análise da aplicação do material

Este material vem sendo aplicado a turmas do ensino médio na cidade de Feliz Deserto - AL. Como foi dito anteriormente, a proposta não visa encerrar a discussão sobre aplicação da Lógica na Educação Básica, pois existe diversas maneiras de se abordar o conteúdo, o que mostramos, aqui, foi uma proposta possível dentro das peculiaridades daquela região, um “ponta pé” inicial para que cada professor desenvolva sua metodologia de acordo como a turma a ser trabalhada.

O que se pode observar com tal proposta, é que houve um aumento considerável no envolvimento dos alunos nas aulas, perguntando e discutindo sobre o conteúdo, eles aprendem de maneira mais significativa quando comparada aos métodos tradicionais de ensino de matemática. Outro ponto que merece destaque, é que a proposta apresentada é melhor assimilada pelos alunos do 1º ano em relação a turma do 3º ano.

## Conclusão

---

O ensino tradicional da Matemática conduz o aluno a uma compreensão dissociada da realidade, cuja aprendizagem é obtida através da repetição de argumentos. Nesse trabalho, tentamos resgatar a construção dos conceitos e procedimentos, de modo que, com a aprendizagem do conteúdo seja possível não só a compreensão do conceito matemático, mas a sua utilização em situações problemas, a sua relação com outros conteúdos, tanto da própria Matemática como das outras ciências, assim como também, a sua aplicabilidade na compreensão e atuação no mundo.

Modificar a perspectiva sobre o desenvolvimento do conhecimento e a inteligência na busca por uma aprendizagem significativa tem consequências diretas e profundas na concepção e organização dos conteúdos escolares, compreendendo que há um desafio que envolve muito mais do que novas estratégias didáticas. Requer uma mudança na concepção de todos os elementos dos processos de ensino aprendizagem, desde o tratamento aos conteúdos, como o centro da questão didática, mas a avaliação diagnóstica, como método para a construção do conhecimento, interferindo diretamente na postura do professor que se transforma no mediador, que usará novas lentes para perceber os alunos distintamente.

Entre a realidade e a compreensão dos símbolos que a representam, existe a mediação a ser construída pelo professor durante o diálogo estabelecido com o aluno. Esta mediação entre os processos da construção do pensamento prático, simbólico e lógico-formal, implica em um percurso de possibilidades múltiplas. E, para conduzir esses processos existe a necessidade de um profissional mais reflexivo e consciente do seu papel de educador, construtor de habilidades, competências e procedimentos. Portanto, precisamos de profissionais mais qualificados e que sejam a referência interveniente no processo de transformação ou mediação entre o real e a linguagem científica e vice-versa.

---

Aqui nesse trabalho só destacamos a importância do raciocínio lógico que, na perspectiva da Educação Básica, não vem ainda, recebendo tratamento adequado. A proposta que surge aqui é de um compromisso diante da possibilidade de se trabalhar o desenvolvimento lógico dedutivo desde as séries iniciais, utilizando representações, a partir das linguagens significativas, fazendo as transposições didáticas necessárias e possíveis, objetivando a construção do conhecimento, efetivamente, mais abrangente, significativo e agradável.

Obviamente que essa abordagem não objetiva resolver todos os problemas da construção do pensamento matemático na Educação Básica. Sabemos que, o pensamento matemático atual é muito mais complexo do que essas formas mais simples da Lógica dedutiva. Necessitamos também da construção de hermenêuticas, ou seja, interpretações para representações do pensamento lógico analógico, intuitivo, indutivo, todos, fundamentais para a compreensão e construção da Matemática. A maior preocupação destacada aqui, nesse trabalho, é que, nem essa forma mais simples do pensamento matemático, o cálculo proposicional, tem merecido a devida reflexão para ações mais efetivas no sentido de sua construção.

É importante saber também que o aprofundamento dos estudos sobre a Lógica das proposições pode conduzir à compreensão de toda matemática, através de suas sínteses e antíteses, chegando-se, por exemplo, aos paradoxos da Lógica dedutiva e a formulação da negação do princípio do terceiro excluído, formulada por Gödel (1936), que propõe que em alguns sistemas como os infinitos, algumas proposições não podem ser reconhecidas como tendo valor lógico, verdadeiro ou falso. Essa teoria, dos indecidíveis, proposta por esse matemático, alerta para a necessidade de se construir abordagens para justificar também essas questões.

Portanto, a iniciação da Lógica na Educação Básica traz benefícios importantes e imprescindíveis não só na construção do conhecimento matemático, mas principalmente numa sociedade como a nossa, onde o conhecimento e informação transbordam a todo momento.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] HALMOS, Paul R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.
- [2] DI PRISCO, Carlos Augusto. *Una Introducción a la Teoría de Conjuntos* Campinas: UNICAMP. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1997.
- [3] DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. *Um convite à Matemática*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] ÁVILA, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura*. 3ª edição. São Paulo: Edgar Blucher, 2006.
- [5] SAMPAIO, João. *Notas da disciplina ITC-UFSCar*. [www.dm.ufscar.br/sampaio/itc.html](http://www.dm.ufscar.br/sampaio/itc.html) em 21 out 2012.
- [6] D'OTTAVIANO, Ítala Maria Ioffredo; Feitosa, Hércules de Araújo. *Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*. <ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf>, em 23 set 2012.
- [7] RUSSELL, Bertrand. *Introdução à filosofia matemática; tradução, Maria Luiz X. de A. Borges; revisão técnica, Samuel Jurkiewicz*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.
- [8] ABDALLA, Samuel Lilo. *Raciocínio Lógico para concursos*. São Paulo: Saraiva, 2012.
- [9] IEZZI, Gelson; Murakami, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*. 3ª edição, São Paulo, Atual Ed., 1977.
- [10] MACHADO, Luiz. *Superinteligência*. 1ª edição, Rio de Janeiro: Editora Quality-mark, 2005.

- 
- [11] MACHADO, Nilson José. *Lógica e linguagem cotidiana: verdade, coerência, comunicação, argumentação*. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.
- [12] MORGADO, Augusto C.; Cesar, Benjamin. *Raciocínio Lógico-Quantitativo: teoria, questões resolvidas, questões de concursos, mais de 700 questões*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- [13] SÉRATES, Jonofon. *Raciocínio lógico: lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico*. 8ª edição, Brasília: Editora Jonofon Ltda., 1998.