UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fabiana Chagas de Andrade

Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio

Rio de Janeiro

2014

Fabiana Chagas de Andrade

Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática – UFRJ

Rio de Janeiro

2014

ANDRADE, Fabiana Chagas de

Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio/ Fabiana Chagas de Andrade - 2014

Fabiana Chagas de Andrade

Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 26 de Fevereiro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática – UFRJ

Aline Caetano da Silva Bernardes
Mestre em Matemática – UFRJ

Vânia Cristina Machado
Mestre em Matemática - UFRJ

A meus pais, pelo apoio e incentivo ao estudo.

Ao meu esposo Célio, pelo apoio e paciência durante o curso.

Aos meus professores do curso, pelo empenho, orientação e ensinamentos preciosos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois através da fé pude acalmar meu coração nos momentos de ansiedade, preocupação e dúvida. Sem a fé em Deus e nos meus objetivos não teria concluído esta etapa tão importante em minha vida.

Agradeço aos meus pais por terem me mostrado a importância de estudar, e terem me proporcionado uma educação de qualidade.

Agradeço também aos meus professores da UNIRIO, por ensinar tão bem os conteúdos e sempre estarem dispostos a me dar direção não somente na sala de aula, mas na vida. Em especial a Ronaldo Busse, pela orientação nesse trabalho, e Silas Fantin, por sua inegável dedicação à turma.

Agradeço aos colegas de curso pela união e pelas dúvidas sanadas, pelos grupos de estudo e pelo carinho e apoio ao longo de nossa caminhada.

RESUMO

Neste trabalho, é apresentado um método de ensino de Geometria Espacial – tema Poliedros, com duas sugestões de aula: Relação de Euler e diagonal do paralelepípedo e do cubo. Com base na Neurociência e nos níveis de aprendizagem de Van Hiele, propomos a utilização de palitos de dente e jujubas (balas de goma), com o objetivo de ampliar a visão espacial dos discentes e melhorar a aprendizagem deste conteúdo no Ensino Médio.

Palavras-chave: Poliedros - Lúdico - Material concreto.

ABSTRACT

In this project, a teaching method of Spatial Geometry is presented - The theme is Polyhedron, with two lesson suggested: Euler's polyhedral formula, and parallelepiped and cube's diagonal. Based on Neuroscience and Van Hiele's levels of learning, we suggest to use toothpicks and jelly beans in order to expand the student's notion of spatial vision, and to improve the learning of this subject in high school.

Key words: Polyhedron - Playful - Concrete material.

SUMÁRIO

Introdução **11**

1. Ensino e Aprendizagem em Geometria **14**

1.1. Neurociência e aprendizagem Matemática 14

1.1.1. A estrutura do aparelho cognitivo 14

1.1.2. A Teoria das Inteligências Múltiplas (TIM) 16

1.2. O modelo de Van Hiele e Gutièrrez 18

1.3. A visualização na Geometria Espacial... 21

2. O ensino de Geometria no Brasil.. **24**

2.1. História da Geometria no Brasil.. 24

2.2. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio 26

2.3. Alguns materiais concretos existentes para o Ensino de Geometria Espacial..28

3. Uma proposta de material concreto para o ensino de Geometria Espacial **32**

3.1. A técnica das jujubas (balas de goma) 32

3.1.1. Proposta de aula para trabalhar a para Relação de Euler.. 42

3.1.2. Proposta de aula para trabalhar a diagonal do cubo e do paralelepípedo retângulo.. 47

3.2. Relatos de experiência.. 51

3.3. Outras utilidades das jujubas 57

Considerações finais **59**

Referências bibliográficas **60**

Bibliografia consultada... **62**

Lista de figuras

Figura 1 – Colmeia constituída por hexágonos...11

Figura 2 – Parthenom...11

Figura 3 – Estrutura do encéfalo..15

Figura 4 – Modelo de Van Hiele...19

Figura 5 – Prisma Rotacionado..21

Figura 6 – Poliedros com garrote e varetas...29

Figura 7 – Hexaedro de palitos e massa de modelar.......................................29

Figura 8 – Poliedro estrelado construído com criat-ímã...................................30

Figura 9 – Tutorial de construção do tetraedro regular com canudos e linha...30

Figura 10 – Icosaedro construído com dobraduras..31

Figura 11 – Kit de sólidos geométricos em madeira...31

Figura 12 – Triângulo equilátero...33

Figura 13 – Triângulo com palitos espetados...33

Figura 14 – Tetraedro...33

Figura 15 – Quadrado...34

Figura 16 – Quadrado com palitos espetados..34

Figura 17 – Hexaedro...34

Figura 18 – Pirâmide de base quadrada...35

Figura 19 – Pirâmide de cabeça para baixo com palitos espetados.................36

Figura 20 – Octaedro..36

Figura 21 – Triângulo com palitos espetados...37

Figura 22 – Prisma de base triangular..37

Figura 23 – Pentágono..38

Figura 24 – Pentágono com palitos espetados..38

Figura 25 – Pentágono com palitos e jujubas..38

Figura 26 – Palitos em “V”...39

Figura 27 – Dodecaedro..39

Figura 28 – Pirâmide de base pentagonal..40
Figura 29 – Pirâmide com palitos em “V”..41
Figura 30 – Icosaedro...41
Figura 31 – Tetraedro de jujubas..43
Figura 32 – Hexaedro de jujubas...44
Figura 33 – Pirâmide de base quadrada, octaedro e prisma de base pentagonal 44
Figura 34 – Paralelepípedo com diagonais...47
Figura 35 – Cubo com diagonais..47
Figura 36 – Cubo de jujubas com diagonais...48
Figura 37 – Cubo em perspectiva no quadro...48
Figura 38 – Triângulo retângulo no paralelepípedo...49
Figura 39 – Triângulo retângulo no cubo...50
Figura 40 – Altura do tetraedro..51
Figura 41 – Tetraedro e octaedro...52
Figura 42 – Tetraedro e octaedro dos alunos..53
Figura 43 – Alunos ProEMI com suas construções...54
Figura 44 – Poliedros construídos pelos alunos...54
Figura 45 – Turma 2003 durante a aula..55
Figura 46 – Poliedros da turma 2003...56
Figura 47 - Poliedros da turma 2003...56
Figura 48 – Estruturas moleculares com jujubas...57
Figura 49 – Tabela periódica com jujubas..57
Figura 50 – DNA com jujubas...58

INTRODUÇÃO

Certamente, todos concordam sobre a importância do ensino de Geometria na formação do aluno. Estamos rodeados de formas e de ideias geométricas para onde quer que nossos olhos alcancem. A Geometria está presente nas colmeias (Fig. 1), nas flores, em construções (Fig. 2)... Enfim, no mundo que nos cerca. Se os alunos concebessem o quão maravilhoso é compreender todo esse universo geométrico, é certo que esse seria o conteúdo mais aprendido na escola.

Fig.1 Colmeia constituída por hexágonos[1] **Fig. 2 Parthenon[2]**

Mas por que a Geometria tem esse lugar renegado tanto pelos alunos quanto pelos professores? Por que é tão difícil ensinar e aprender Geometria? A resposta talvez muitos de nós saibamos: a dificuldade na visualização dos elementos geométricos, em especial, aqueles em três dimensões.

Frequentemente, esbarramos em dificuldades quando tentamos ensinar este conteúdo em nosso dia a dia profissional. Em meio a tanta correria e tanta falta de estrutura que muitas vezes encontramos nas escolas públicas, acabamos desmotivados em inserir práticas pedagógicas diferenciadas, principalmente no ensino da Geometria Espacial. Segundo os PCN's,

> "Quanto às aulas expositivas, é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a ideia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante."
> (BRASIL, 2006, p.53)

---

[1] Disponível em: http://thoth3126.com.br/as-abelhas-e-o-sagrado-feminino/. Acesso em Janeiro de 2014.
[2] Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/tvmultimidia/imagens/matematica/2parazau.jpg. Acesso em Janeiro de 2014.

Se, ao ensinarmos Álgebra, sabemos que os alunos terão dificuldade em abstração, por que logo a Geometria, que também pode auxiliar no problema da abstração da Álgebra, não é vista como uma aliada no processo de aprendizagem? Podemos e devemos inserir o lúdico no ensino da Geometria, e com isso, tornaremos o aprendizado mais rápido, interessante e eficaz.

Desde criança, sempre gostei de Geometria. Tive a sorte de ter a disciplina “Desenho Geométrico” no 9º ano do ensino fundamental, e foi ela que me incentivou a cursar técnico em Edificações, no CEFET – RJ, onde estudei outros três anos de Desenho Técnico. Por ter exercitado bastante esse conteúdo, desenvolvi uma boa visualização espacial e, com isso, não tive grandes dificuldades no curso de Licenciatura em Matemática. Estudando com os colegas em vésperas de provas, observei que muitos deles tinham grande dificuldade neste assunto, devido à problemas na visualização espacial.

Ao escrever o trabalho de conclusão da graduação, não pensei em outro tema a não ser Geometria, e com ajuda do professor e orientador Geovane André Teles de Oliveira desenvolvi o trabalho “Jujubas e palitos de dente: Um método lúdico para ensinar Geometria Espacial”, (ANDRADE, 2010) no qual apresentava a técnica das jujubas para construção de esqueletos de poliedros. Depois que concluí o curso, pude utilizar esta técnica na prática docente no estado e no município do Rio de Janeiro e constatar que a mesma, de fato, potencializava o aprendizado, e assim desenvolvi duas aulas utilizando esse material concreto.

O objetivo do presente trabalho é consolidar a técnica das jujubas sob a perspectiva da Neurociência, a partir da proposta de duas aulas. A fundamentação teórica também é baseada na Teoria das Inteligências Múltiplas (TIM), no modelo de Van Hiele e na Teoria de Gutièrrez. As aulas foram aplicadas em duas turmas de uma escola do município do Rio de Janeiro, e relatos desta experiência serão apresentados.

No primeiro capítulo, fundamentamos o uso do material concreto na Geometria Espacial com base nas mais recentes teorias da Neurociência e na Teoria das Inteligências Múltiplas (TIM). Descrevemos a Teoria de Van Hiele e a Teoria de Gutièrrez, que serão utilizadas nas propostas de aula e realizamos um breve estudo sobre a visualização espacial.

No capítulo seguinte é apresentado um resumo sobre o ensino da Geometria Espacial no Brasil e tomamos como base os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)[3] para justificar o uso do material concreto nas aulas. Comentamos sobre a proposta de implementação de laboratórios de Matemática nas escolas públicas e descrevemos os principais materiais concretos que já são utilizados no ensino da Geometria Espacial.

Finalmente, no terceiro capítulo, descrevemos a técnica das jujubas e fazemos o tutorial da construção de alguns poliedros. Apresentamos também duas propostas de aula contemplando a teoria de Van Hiele e de Gutièrrez: *Introdução à geometria espacial e Relação de Euler* e *Diagonal do cubo e do paralelepípedo*. Em seguida, fazemos dois relatos de experiência de aulas ministradas na rede pública sobre Relação de Euler e citamos outras disciplinas em que as jujubas podem ser utilizadas.

Este trabalho foi desenvolvido em conjunto com o trabalho de conclusão de curso "A Geometria Espacial no Ensino Médio: Um estudo sobre o uso do material concreto na resolução de problemas", da colega de turma Luciana de Souza de Moraes (MORAES, 2014), que, assim como eu, acredita na inserção, não somente da técnica das jujubas, mas de qualquer material concreto que facilite o ensino da Geometria. Entendemos que todo conhecimento e prática pedagógica são ricos o suficiente para serem compartilhados, contribuindo para a melhoria de nossa educação, já tão sucateada e sem infraestrutura.

[3] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf . Acesso em março de 2014.

1. ENSINO E APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA

Neste capítulo, buscamos fundamentar nosso estudo nas mais novas teorias de aprendizagem, baseadas na Neurociência e na TIM (Teoria das Inteligências Múltiplas). Utilizamos como base de nosso trabalho a Teoria de Van Hiele e a Teoria de Gutiérrez no aprendizado em Geometria Espacial.

1.1. Neurociência e aprendizagem Matemática

Com o objetivo de potencializar o aprendizado, cada vez mais os educadores buscam, nas bases da Neurociência, um meio de reafirmar suas teorias de aprendizagem. Segundo Relvas (2012, p.27), “Neurociência é um conjunto de disciplinas que permeiam os estudos do sistema nervoso e originou-se das bases cerebrais da mente humana.”

Recentes estudos mostram que existe uma interrelação entre o sistema nervoso, as funções cerebrais, mentais e o meio ambiente. Isto mostra que a aprendizagem e o comportamento começam no cérebro e são mediados por processos neuroquímicos, o que motivou a criação do termo Neuropedagogia, (Ibidem, p. 23) que tem como objetos de estudo a educação e o cérebro, entendido como um órgão social que pode ser modificado pela prática pedagógica.

O objetivo da Neuropedagogia é reestruturar a prática docente e discente em função de novas descobertas sobre o funcionamento do aparelho cognitivo humano.

1.1.1 A estrutura do aparelho cognitivo

O encéfalo é o complexo que forma o aparelho cognitivo. Podemos dividi-lo em três partes (Fig. 3):

1. Cerebelo: É a parte responsável por estruturar comandos mecânicos do corpo. É este sistema que recebe instruções, como orientações necessárias para aprender a andar de bicicleta, que programam a rede de neurônios e que depois de implantadas não são posteriormente esquecidas.

2. Sistema límbico: Compõe-se de hipotálamo, tálamo, amígdalas e hipocampo. É responsável pelos instintos básicos, como medo e decisão de lutar ou correr diante de uma ameaça (amígdalas e hipotálamo). Já o hipocampo perfaz a memória que faz um registro dos dados colhidos durante o dia e os copia para o córtex. Depois, este registro é apagado para que novas informações sejam armazenadas no dia seguinte.

3. Córtex: É onde se registra definitivamente o que foi aprendido durante o dia. À noite, durante os sonhos, o córtex grava as informações colhidas pelo hipocampo durante o dia e as armazena para o resto da vida. Ao contrário do cerebelo, que escolhe as informações a serem gravadas, no córtex essa escolha é inconsciente. Na verdade, a escolha do que se copia é feita pela "profundidade" das marcas deixadas no hipocampo. Esta profundidade é dada pela emoção associada à informação ou pelo estudo, pois o esforço empregado na aprendizagem atribui um status de importante à informação e a copia para o córtex.

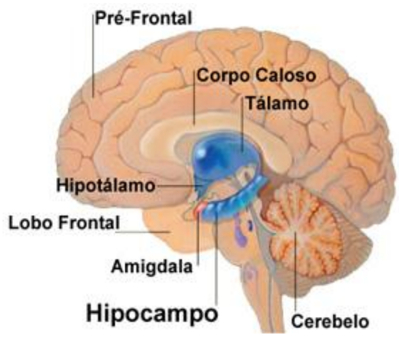


Fig.3 Estrutura do encéfalo[4]

Com base nessa informação, para um melhor aprendizado, o ideal é que o aluno estude o conteúdo no mesmo dia em que assistiu à aula, para que a informação adquirida tenha status de importante, seja transferida para o córtex e gravada para o resto da vida.

A Neuropedagogia relata que o ensinar implica em maximizar o funcionamento do cérebro através de práticas pedagógicas que estimulem áreas especificas do mesmo. Para promover este estímulo, John Locke[5] sustentou que

[4] Disponível em: http://www.psiqweb.med.br/site/?area=NO/LerNoticia&idNoticia=292. Acesso em Dezembro de 2013.
[5] Filósofo empirista inglês (1632-1704).

o conhecimento e a aprendizagem são obtidos por meio de experiências sensoriais, pois ao nascer o ser humano é uma folha de papel vazia, que vai sendo preenchida através das experiências, as quais chegam ao sistema nervoso central sob a forma de estímulos sensoriais.

1.1.2. A Teoria das Inteligências Múltiplas (TIM)

Segundo Relvas (2012, p. 54), para garantir que as informações sejam processadas e aprendidas, as aulas devem estar baseadas na preparação, expectativa, emoção e atenção, pois a memória humana é seletiva e armazena experiências atreladas às emoções positivas e negativas. Cabe ao educador inserir em suas práticas pedagógicas atividades que estimulem a emoção pelo lado positivo e consequentemente, a armazenagem do conteúdo pretendido na memória, construindo as inteligências.

Mas o que seriam, de fato, inteligências? O cérebro é um órgão extremamente complexo, e o conceito de inteligência não se baseia mais na hipótese de que possuímos apenas uma inteligência - a dos testes de Q.I. -, que avaliam, principalmente, a linguística e o raciocínio lógico matemático. Desde a década de 80, Howard Gardner[6] vem desenvolvendo a Teoria das Inteligências Múltiplas (TIM), a qual se apoia nas mais recentes descobertas da Neurociência, que explicam memória, aprendizagem, consciência e inteligências em geral.

A prova de que a mente humana abriga diferentes inteligências pode ser compreendida ao observar pacientes com lesão cerebral, na qual se perdem elementos específicos de uma ou mais inteligências, conservando intactos os demais.

A TIM defende o estímulo cerebral nas escolas, que devem ser “centros estimuladores das inteligências”, e que o ser humano deve ser compreendido em sua amplitude através de cada uma das inteligências: Linguística, Lógico-Matemática, Espacial, Criativa, Sonora, Cinestésico-corporal, Naturalista e Emocional. Através delas, pode-se perceber o aluno de forma integral, por sua inteligência em determinada área e dificuldade em outra.

[6]Psicólogo cognitivo e educacional dos Estados Unidos.

Segundo Antunes (2001, p.19), especificamente, a Inteligência Lógico-Matemática compreende a capacidade para discernir padrões lógicos ou numéricos e a percepção de grandeza, peso, distância e outros elementos. As áreas cerebrais de sua ação são o lobo parietal esquerdo e pontos no hemisfério direito. Já a Inteligência

Espacial está ligada aos sólidos geométricos. Associa-se à compreensão do espaço e à orientação aos seus limites. As áreas de ação são regiões posteriores do hemisfério direito. Observa-se que a Geometria Espacial envolve as duas inteligências, e os lados direito e esquerdo do cérebro, o que pode explicar a natural dificuldade na aprendizagem por parte dos alunos.

De fato, a TIM apenas confirmou as experiências dos educadores quando relatavam que alguns alunos tinham facilidade ou dificuldade com Geometria. É por compreender o aluno como um ser humano integral, que pode ou não possuir a inteligência lógico-matemática e espacial, que nos motivamos a utilizar a Neuropegadogia, que é baseada na aprendizagem sensorial e na emoção, para desenvolver um método para a aprendizagem em Geometria Espacial.

Para estimular a aprendizagem em Geometria Espacial através da TIM, Antunes, (2001, p. 23) propõe atividades que:

- reconheçam objetos diferentes, permitindo associação, comparação, padrões e relacionamentos entre eles;
- utilizem símbolos abstratos para representar objetos concretos;
- usem peças para resolver desafios que envolvam a construção de objetos, estimulem a formação do pensamento matemático e formulação de modelos.

O novo caminho do professor será de reconhecer e despertar as inteligências, através de conexões afetivas e emocionais do sistema límbico. É através das conexões, que serão liberadas substâncias naturais como serotonina e dopamina, pois estão relacionadas à satisfação, ao prazer e ao humor. Já o estresse da sala de aula provoca a liberação de adrenalina e cortisol, substâncias que agem como bloqueadores da aprendizagem e que alteram a fisiologia do neurônio, interrompendo as transmissões das informações das sinapses nervosas.

Este trabalho foi concebido com base nas propostas acima, ao se estudar as mais recentes teorias de aprendizagem baseadas nos avanços da Neuropegagogia e nos estímulos às diferentes áreas do cérebro, com base na TIM, na Teoria de Van Hiele e na Teoria de Gutièrrez, através do uso de materiais manipulativos no ensino de Geometria Espacial, que estimulam os sentidos e inserem a emoção no ambiente escolar.

1.2. A Teoria de Van Hiele e a Teoria de Gutièrrez

Estudos sobre visualização e aprendizagem levaram alguns estudiosos à formulação de teorias que identificam fases do aprendizado em Geometria. Dentre esses estudos, podemos destacar a Teoria de Van Hiele na Geometria Plana e a Teoria de Gutièrrez na Geometria Espacial.

A Teoria de Van Hiele concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica (ou pensamento geométrico) (KALEFF, 1994, p. 25 e 26) (Fig. 4):

0. Nível Reconhecimento (Visualização): Avaliação das figuras apenas pela sua aparência. Reconhecimento, comparação e nomenclatura.
1. Nível Análise: Avaliação das figuras em relação a seus componentes, reconhecimento de propriedades e uso das propriedades na resolução de problemas.
2. Nível Percepção: Ordenação das propriedades e construção de definições.
3. Nível Dedução: Domínio do processo dedutivo e das demonstrações, reconhecimento de condições necessárias e suficientes e demonstração de algumas propriedades.
4. Nível Rigor: Capacidade de compreender demonstrações formais, comparação e estabelecimento de teoremas em diversos sistemas.

Fig. 4 Modelo de Van Hiele

Ao analisar o modelo de Van Hiele, observa-se que as aulas de Geometria Espacial no 2º ano do Ensino Médio contemplam apenas os três primeiros níveis, e muitas vezes não há a construção da aprendizagem através de cada nível. O que ocorre é a apresentação do conteúdo de forma expositiva, o que resulta numa memorização dos sólidos geométricos que é posteriormente esquecida pelos alunos.

O uso de materiais manipulativos permite a construção do conhecimento através dos três níveis iniciais e possibilita que o aluno alcance o quarto nível (dedução). Nos capítulos seguintes, mostraremos como o método das jujubas propicia que os alunos deduzam a Relação de Euler e a fórmula da diagonal do paralelepípedo e do cubo.

Crowley (1994) destacou o papel do professor em cada nível de Van Hiele, e observa-se que este papel difere em muito do modelo de aulas expositivas no quadro bidimensional que a maioria dos professores utilizam.

1. Informação: Professor e aluno dialogam sobre o material de estudo, e o docente deve perceber quais são os conhecimentos prévios do discente sobre o assunto a ser estudado.
2. Orientação Dirigida: Os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor (no caso deste trabalho o manipulativo), e as atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.
3. Explicação: O papel do professor é o de observador do aluno, que está construindo um conhecimento inicial sobre o assunto.

4. Orientação Livre: O professor propõe tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiências e autonomia.

5. Integração: O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas e discordantes ideias.

O mais importante na teoria de Van Hiele é a descoberta de que o aluno não alcança um nível a frente sem passar pelos anteriores, ou seja, há uma hierarquia de conhecimento. Cabe ao professor adequar sua linguagem à medida que o aluno avança nesses níveis.

Alguns estudos têm procurado adaptar os níveis de Van Hiele para além das figuras no plano, estendo-os às figuras 3D e transformações geométricas. Dentre

estes, destacamos o de Gutiérrez (1996), para quem a visualização em Geometria é um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais quanto físicos, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades. A visualização integra-se a quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização. De acordo com este autor:

> [...] uma imagem mental é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade, por meio de elementos visuais ou espaciais; [...] uma representação externa pertinente à visualização é qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc, que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e produzir raciocínio visual; [...] um processo de visualização é uma ação física ou mental, onde imagens mentais estão envolvidas. Existem dois processos realizados na visualização: a "interpretação visual de informações" para criar imagens mentais.
> (Gutièrrez, 1996, p. 9-10)

Em relação às habilidades de visualização espacial, Gutièrrez (1996, p.10) define os diferentes segmentos:

- Percepção de figura-base: habilidade de identificar uma figura específica, isolando-a de um fundo complexo.
- Constância perceptual: habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são

independentes do tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer não confuso quando um objeto ou figura é percebido em diferentes orientações.

- Rotação mental: habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas para visualizar uma configuração em movimento.
- Percepção de posições no espaço: habilidade de relacionar um objeto, figura ou imagem mental em relação a si mesmo.
- Percepção de relações espaciais: habilidade de relacionar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais uns com os outros ou simultaneamente consigo mesmo.
- Discriminação visual: habilidade de comparar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

Dentre as habilidades de visualização, observa-se que os alunos têm maior dificuldade em constância perceptual e rotação mental, o que se observa quando, ao resolver exercícios envolvendo prismas, o aluno confunde as faces laterais com a base pelo fato de a figura ter sofrido uma rotação (Fig. 5).

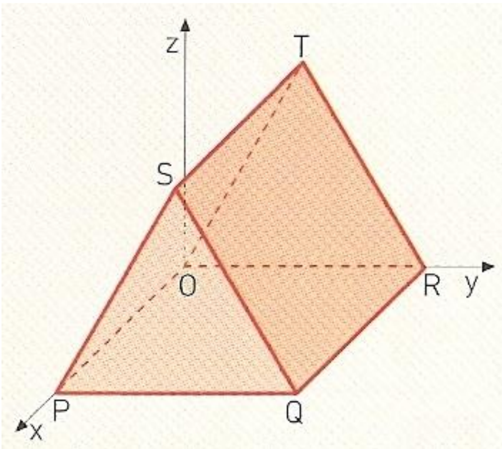


Fig. 5 Prisma rotacionado

Encontrar alternativas de ensino que atuem na construção da aprendizagem através dos níveis de Van Hiele e das habilidades de visualização espacial de Gutiérrez é uma discussão necessária para melhorar o rendimento dos alunos do Ensino Médio em Geometria Espacial.

1.3 A visualização na Geometria Espacial

A importância da visualização tem sido apontada em muitas por muitos estudiosos nos últimos anos na área de Educação Matemática.

De acordo com Marcelo Becker:

> Gutiérrez (1992) afirma que quando se trabalha Geometria Espacial, é fundamental que se tenha em mente a visualização. A capacidade de visualização é uma habilidade básica nesse campo de conhecimento. Uma pessoa que tem dificuldades em visualização terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e apresentará dificuldades em expressar suas próprias ideias.
> (BECKER, 2009, p. 27)

Sabemos que os alunos encontram bastante dificuldade na habilidade de visualização e podemos perceber essa dificuldade durante nossa atuação em sala de aula. Se decidirmos pesquisar um pouco mais, perceberemos que esse problema já persiste há algum tempo, e não precisamos ir tão longe para constatar este fato. Analisando os Relatórios Pedagógicos do Exame Nacional do Ensino Médio[7] nos anos de 2005 a 2008, notamos que, no que se refere ao campo de Geometria, questões que tratavam do campo de visualização obtiveram um índice muito baixo de acertos.

O material manipulável vem contribuir para o desenvolvimento da capacidade de visualização. É importante o professor ter em mãos modelos que representem os sólidos que estão sendo estudados, para que os alunos se familiarizem e formem uma imagem dos mesmos. Uma outra alternativa para desenvolver essas imagens mentais é utilizar embalagens que se assemelhem a essas figuras espaciais, até mesmo para que os estudantes busquem uma relação com o mundo em que vivemos.

Outro ponto essencial para se trabalhar a visualização são as planificações dos sólidos. Este material é crucial para fazer a conexão entre os elementos do plano e do espaço, além de trabalhar a ideia de superfície do sólido e a representação do próprio sólido.

Marcelo Becker afirma:

---

[7] Relatório Pedagógico do ENEM disponível em http://portal.inep.gov.br. Acesso em Janeiro de 2014.

> Segundo Gutiérrez (1991), é fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano. Os tipos de atividades propostas nos livros não permitem o desenvolvimento dessas habilidades por não oportunizarem aos alunos a experiência e a possibilidade da criação de suas próprias hipóteses.
> (BECKER, 2009, p. 20)

Ainda neste campo, podemos identificar dificuldade em diferenciar modelos do plano e do espaço. É muito comum ouvir um aluno identificar um tetraedro como um triângulo ou até mesmo um octaedro como um losango. Além disso, outro problema é a representação gráfica em vistas diferentes, pois outro fato que ocorre bastante é a confusão da base de um prisma se visto de uma perspectiva diferente.

A utilização de modelos concretos permite que a figura geométrica possa ser observada em várias posições e angulações, tornando o registro da imagem mental mais dinâmico e com isso o aluno poderá explorar melhor as propriedades do objeto, fazer conjecturas e tirar conclusões sobre o mesmo.

Segundo Kaleff, deve-se ressaltar que não podemos confundir tal habilidade com a percepção visual. A segunda refere-se à representação concreta do que está se vendo, isto é, a apreciação do objeto através da visão, enquanto que a outra trata da imagem mental, que é construída a partir do contato e da manipulação do mesmo. A autora afirma:

> Crianças pequenas percebem o espaço à sua volta por meio do conjunto de seus sentidos, isto é, o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com os mesmos. É a partir deste contato com as formas do objeto, a textura e as cores do material de que ele é composto, bem como da possibilidade de sua manipulação, que tem origem a construção de uma imagem mental, a qual permitirá evocar o objeto na sua ausência. Assim é que a criança vai formando um conjunto de imagens mentais que representam o objeto, as quais são envolvidas no raciocínio. A partir deste ponto, ela poderá vir a representar com sucesso o objeto observado, através da elaboração de um esboço gráfico ou de um modelo concreto.
> (KALEFF, 2008, p.16)

Deste modo, a fim de desenvolver a visualização espacial é necessário dar o estímulo visual para que ocorra a construção das imagens mentais, e o uso do material concreto irá nos auxiliar positivamente nesta tarefa.

2. O ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL

Neste capítulo, faremos um histórico sobre o ensino de Geometria no Brasil, em específico a Geometria Espacial, e versaremos sobre as diretrizes norteadoras do ensino de Geometria no Ensino Médio, destacando sua importância. Ademais, mostraremos os principais materiais concretos utilizados no ensino deste conteúdo.

2.1. Um breve histórico acerca do ensino da Geometria no Brasil

Segundo Valente (2008), os primeiros registros históricos sobre o ensino da Matemática no Brasil remontam o ano de 1669, quando a Coroa Portuguesa viu a necessidade de treinar melhor seus militares e, para isto, criou a *Aula de Artilharia e Fortificações.* No início houve dificuldades em sua implementação, pela falta de livros adequados, e em 1710 o curso ainda não havia iniciado. Apenas em 1738, depois que o militar português José Fernandes Pinto Alpoim chegou ao Brasil, as aulas tiveram início e foram consideradas obrigatórias a todo oficial. Alpoim foi o autor dos dois primeiros livros didáticos de Matemática escritos no Brasil, que ensinavam conceitos de Geometria e Aritmética: *Exame de Artilheiros* (1744) e *Exame de Bombeiros (1748).* Com isto podemos concluir que o ensino de Matemática no Brasil iniciou-se com a necessidade de defesa da colônia por parte dos militares, incentivada pela Coroa Portuguesa.

Com a independência do Brasil, houve a necessidade de se criar a primeira Universidade Brasileira. Então, em 1827 são criados os Cursos Jurídicos, cujo acesso era dado por um exame que continha, dentre outras disciplinas, a Geometria. Por conta deste exame, surgem os cursos preparatórios com a disciplina Geometria, que perduram por cerca de 100 anos, e a partir desta época, os conhecimentos matemáticos deixam de ser um conteúdo que servia apenas ao comércio e aos militares, e são promovidos à categoria de cultura geral. (VALENTE, 2008, p. 15)

Com a criação do Colégo Pedro II, em 1837, iniciam-se as tentativas de exigência do diploma do secundário seriado para ingresso nas faculdades. Depois de várias reformas, segundo Ferreira (2005, p. 95), foi elaborado um plano gradual de estudos, com Geometria, Álgebra e Aritmética, no qual o aluno era promovido por série e não mais por disciplinas.

Segundo Valente (2008), nos anos 30 surgem as faculdades de filosofia que formavam professores, e com isso alguns livros didáticos começam a ser publicados. A partir da reforma Francisco Campos, no primeiro governo de Getúlio Vargas, há a primeira reestruturação de ensino, que extingue os cursos preparatórios e faz surgir a disciplina Matemática, unindo Geometria, Álgebra e Aritmética.

Em 1929, Euclides Roxo lança o livro *Curso de Mathematica Elementar*, numa tentativa de unir as 3 grandes áreas da Matemática. Seu livro ensinava, através da Geometria, conceitos de Álgebra e Aritmética, sendo adotado pelo Colégio Pedro II em 1930. Este autor propõe o uso do material concreto, pois ao ensinar o conceito de reta, por exemplo, solicitava que os alunos verificassem arames, bordas de papel, etc. Nessa mesma época surgem ginásios e liceus públicos, e a educação, antes exclusiva da elite, passa a ter adesão da classe média.

Já na década de 60, surge o movimento da Matemática Moderna, onde a mesma é ensinada com rigor e formalidade. Segundo Pavanello (1993), a partir desse movimento a geometria assume posição secundária no ensino, pois perde seu caráter intuitivo e pauta-se na demonstração e no formalismo. Assim, o ensino dos conhecimentos geométricos inicia-se "pela noção de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjunto de pontos do plano, adotando-se, para sua representação a linguagem da teoria dos conjuntos."

A Lei de Diretrizes e Bases do ensino do 1º e 2º graus (5692/ 71) contribui para o abandono do ensino da Geometria ao permitir que cada professor monte seu programa de ensino. Assim, muitos alunos do 1º grau deixam de aprender Geometria, pois os professores das quatro séries iniciais limitavam-se ao ensino de Aritmética e noções de conjunto. Logo, os alunos tinham aulas de Geometria no 2º grau, onde chegavam sem ter os conhecimentos prévios necessários, já que o Desenho Geométrico havia sido substituido pela Educação Artística. (PAVANELLO, 1993, p. 13).

Com isso observa-se que a Geometria perdeu espaço com o movimento da Matemática Moderna, e a relutância por parte dos professores em ensinar este conteúdo contribuiu para que os alunos apresentassem baixo rendimento neste assunto.

Porém, a partir da década de 80, surgem as teorias da Neurociência e a Teoria das Inteligências Múltiplas, que promovem o ensino de Geometria com base na experimentação sensorial dos alunos. Acreditamos que há uma tendência ao resgate da Geometria como posição de destaque, pela diversidade de materiais concretos que vêm sido utilizados pelos professores.

2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2006) são propostas que norteiam e organizam o conhecimento no Ensino Médio.

Esses conjuntos de parâmetros afirmam que, no Ensino Médio, a Matemática deverá apresentar novas informações e, além disso, deverá oferecer instrumentos necessários para que o aluno continue aprendendo. Ainda ressalta a importância de que a Educação esteja voltada para o desenvolvimento da capacidade de comunicação. Com relação aos objetivos gerais da Matemática, não podemos deixar de destacar o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e a resolução de problemas para aprimorar o entendimento de conceitos matemáticos. Deste modo, a fim de que se cumpram essas metas, trazemos a proposta do uso do material manipulável.

Sabemos que a Matemática se faz presente no mundo e tem relação em diversas áreas do conhecimento, contribuindo diretamente para a evolução da humanidade. Sendo esta uma disciplina muito importante para o desenvolvimento do raciocínio, os PCNEM destacam nesta direção as habilidades de argumentação lógica e no que se refere ao campo geométrico, citam o desenvolvimento das habilidades de visualização e desenho. Os PCN's afirmam que:

> Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física.
> (BRASIL, 2006, p. 44)

Por outro lado, se buscarmos um olhar mais crítico para o ensino da Matemática, perceberemos que este vem sendo feito ainda com muita formalidade dentro da sala de aula. E ainda tem-se observado um baixo rendimento nesta disciplina em avaliações como Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) , por exemplo.

Visando a melhoria do ensino de Matemática e da atuação do professor em sala de aula, o deputado Stepan Nercessian elaborou o Projeto de Lei Nº 5.218, de 2013[8], que estabelece a obrigatoriedade da existência do Laboratório de Matemática nas escolas públicas. Tal processo ainda está em tramitação, ou seja, em fase de análise para aprovação.

De acordo com Sérgio Lorenzato,

> O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas. Nesse caso, o professor pode precisar de diferentes materiais com fácil acesso. Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender.
> (LORENZATO, 2006, p.7)

Acreditamos que com o LEM poderemos trabalhar melhor essas habilidades citadas anteriormente nos PCNEM. Porém, é preciso que o professor conheça seu laboratório.

Sérgio Lorenzato também afirma que:

---

[8] Disponível em: http://www.camara.gov.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra;jsessionid=0F86842988FE6EF04BE06232C1E00164.node1?codteor=1071439&filename=Avulso+-PL+5218/2013 . Acesso em Janeiro de 2014.

> A atuação do professor é determinante para o sucesso ou fracasso escolar. Para que os alunos aprendam significativamente, não basta que o professor disponha de um LEM. Tão importante quanto a escola possuir um LEM é o professor saber utilizar corretamente os materiais didáticos, pois estes, como outros instrumentos, tais como o pincel, o revólver, a enxada, a bola, o automóvel, o bisturi, o quadro-negro, o batom, o sino, exigem conhecimento especifico de quem os utiliza. (LORENZATO, 2006, p.23, 24)

Para que Laboratório de Matemática funcione, existe uma série de fatores determinantes, porém o docente é a chave fundamental para utilizar essa ferramenta de maneira correta e ampliar os conhecimentos dos alunos.

2.3 Alguns materiais concretos existentes para o Ensino de Geometria Espacial

Nas últimas duas décadas, observa-se uma preocupação por parte dos educadores em inserir materiais concretos no ensino de Geometria Espacial. Na internet, principalmente, há diversos exemplos de materiais que podem ser utilizados em sala de aula.

Nessa linha de pesquisa, destaca-se o trabalho de Ana Maria Kaleff, da Universidade Federal Fluminense (UFF). Em seu livro, "Vendo e Entendendo Poliedros" (KALEFF, 2003), há diversas sugestões de materiais, não apenas para Geometria Espacial, como para Geometria Plana. Kaleff é coordenadora científica do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG), laboratório itinerante criado pelo Departamento de Geometria da UFF. Desde 2009, o LEG tem adaptado seus materiais didáticos para deficientes visuais, aplicando-os no Instituto Benjamin Constant (IBC).

Abaixo relacionamos alguns métodos baseados em esqueletos de poliedros:

Garrote e varetas

O método consiste em construir esqueletos de poliedros com garrotes (material hospitalar) como vértices e varetas como arestas (Fig. 6).

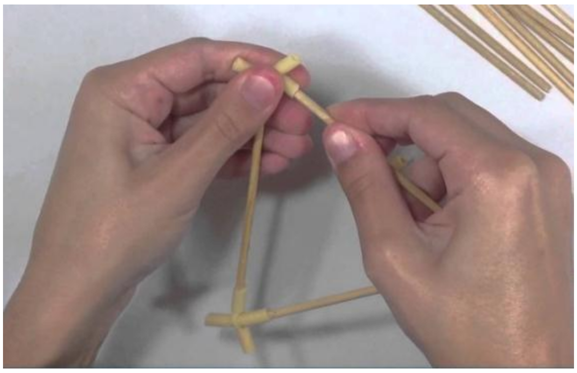


Fig. 6 Poliedros com garrotes e varetas[9]

Massa de modelar e palitos

O método consiste em utilizar massa de modelar como vértices e palitos como arestas (Fig 7).

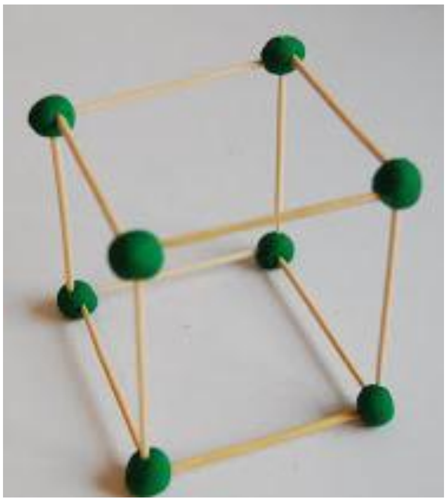


Fig. 7 Hexaedro de palitos e massa de modelar.[10]

[9] Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=YVn0xcUbfM4. Acesso em Dezembro de 2013.
[10] Disponível em: http://mathiassantanna.blogspot.com.br/2008_06_01_archive.html. Acesso em Dezembro de 2013.

Criat-ímã

É um kit composto por ímãs e hastes plásticas, vendido por empresas de materiais didáticos manipuláveis (Fig. 8).

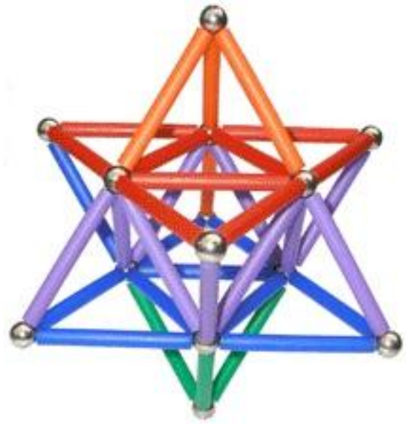


Fig. 8 Poliedro estrelado construído com criat-ímã.[11]

Canudos e linha

Neste método de montagem de esqueletos de poliedros, a linha passa pelo interior dos canudos com auxílio de uma agulha, unindo-os para formar os poliedros (Fig. 9).

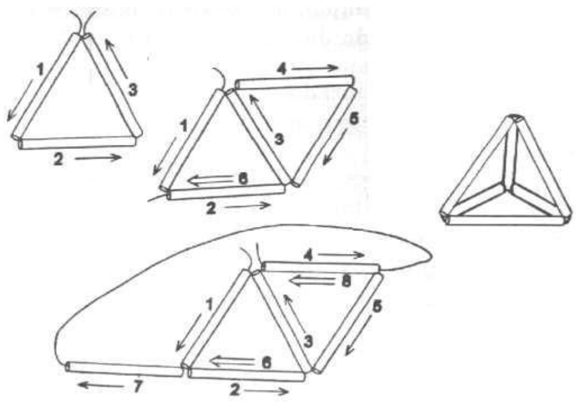


Fig. 9 Tutorial de construção do tetraedro regular com canudos e linha.[12]

É importante ressaltar que existem outros materiais concretos que levam em consideração apenas o formato dos poliedros, e não o seu interior, como

---

[11] Disponível em: http://produto.mercadolivre.com.br/MLB-523718653-brinquedo-magnetico-criat-im-kit-56-pecas-colorido-_JM. Acesso em dezembro de 2013.
[12] Disponível em: http://www.oocities.org/br/jaymeprof/tg/Platao/varetas.htm. Acesso em dezembro de 2013.

dobraduras, maquetes, sólidos em madeira, etc. Estes materiais fogem ao escopo deste estudo, pois dificultam a distinção de vértices e arestas para o aluno no primeiro contato com Geometria Espacial, e não permitem a visualização de segmentos de reta e figuras no interior dos poliedros (Figs. 10 e 11).

Fig.10 Icosaedro construído com dobraduras.[13]

Fig. 11 Kit de sólidos geométricos em madeira.[14]

[13] Disponível em: http://origamimat.blogspot.com.br/2009/02/poliedros-de-platao-1-curiosidades.html. Acesso em Dezembro de 2013.

[14] Disponível em: http://www.pititi.com/shop/product-info.php?15poliedros-pid1339.html. Acesso em Dezembro de 2013.

3. UMA PROPOSTA DE MATERIAL CONCRETO PARA O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Neste capítulo, ensinaremos a técnica das jujubas (balas de goma), fazendo um tutorial da construção de alguns poliedros. Apresentaremos também duas propostas de aula utilizando a técnica: *Introdução ao estudo dos Poliedros e Relação de Euler* e *Diagonal do Cubo e do Paralelepípedo*. Ademais, relataremos duas aulas ministradas com as jujubas e citaremos sua utilidade em outras disciplinas escolares.

3.1. A técnica das jujubas (balas de goma)

A técnica das jujubas ou balas de goma (nome recebido em alguns estados do Brasil) consiste na construção de esqueletos de poliedros, de modo que as jujubas representam os vértices, e os palitos, as arestas. A construção dos poliedros é de fácil execução e demanda pouco tempo, o que facilita seu uso na própria sala durante as aulas. Além disso, o material é de baixo custo, fácil acesso, e possibilita que a estrutura fique estável, o que geralmente representa um problema em outras técnicas.

A seguir são apresentadas sugestões de construção de alguns poliedros notáveis utilizando a técnica[15].

[15] É importante destacar que há várias formas de construir um mesmo poliedro, o que pode ser explorado junto aos alunos. Os materiais podem ser substituídos por palitos de diferentes tamanhos, hastes de pirulito e jujubas de outros formatos.

Tetraedro regular

Material: 4 jujubas e 6 palitos.

1º Passo: Construção de um triângulo equilátero.

Encaixe duas jujubas nas extremidades de um palito e espete um palito em cada uma dessas jujubas. Feche o triângulo encaixando uma jujuba para unir os dois palitos com as extremidades livres (Fig. 12).

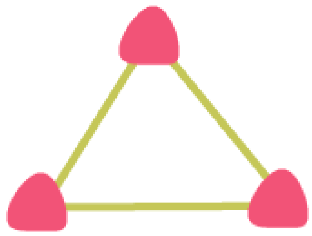


Fig. 12 Triângulo equilátero

2º Passo: Em cada uma das três jujubas do triângulo equilátero, espete um palito na vertical, inclinado para o interior do triângulo (Fig. 13).

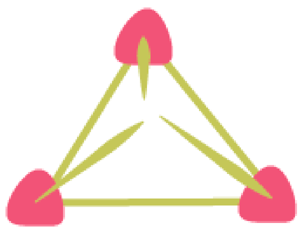


Fig. 13 Triângulo com palitos espetados

3º Passo: Una as extremidades livres dos três palitos colocados no 2º passo com uma jujuba (Fig. 14).

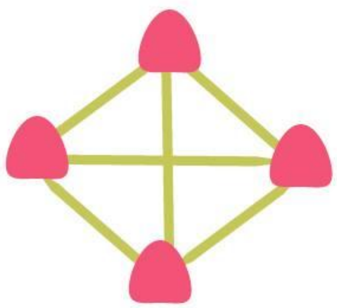


Fig. 14 Tetraedro

Hexaedro regular (Cubo)

Material: 8 jujubas e 12 palitos.

1º Passo: Construção de um quadrado.

Encaixe duas jujubas nas extremidades de um palito e espete um palito em cada uma dessas jujubas. Encaixe uma nova jujuba em cada extremidade livre dos palitos e feche o quadrado espetando um novo palito entre as duas jujubas soltas (Fig. 15).

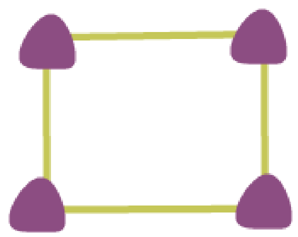


Fig. 15 Quadrado

2º Passo: Em cada uma das quatro jujubas do quadrado espete um palito na posição vertical (Fig. 16).

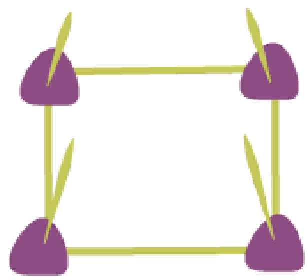


Fig. 16 Quadrado com palitos espetados

3º Passo: Construa outro quadrado seguindo o 1º passo e encaixe-o nas extremidades livres dos palitos espetados no 2º passo (Fig. 17).

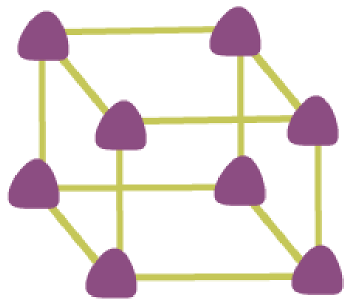
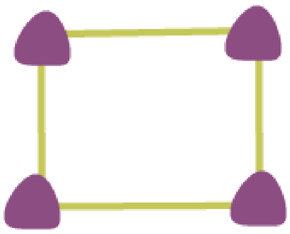


Fig. 17 Hexaedro

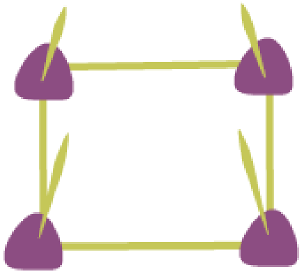
Pirâmide regular de base quadrada

Material: 5 jujubas e 8 palitos.

1º Passo: Construa um quadrado. (Vide hexaedro regular). (Fig. 15)



2º Passo: Em cada uma das quatro jujubas do quadrado espete um palito na posição vertical (Fig. 16).



3º Passo: Una as extremidades livres dos quatro palitos colocados no 2º passo com uma jujuba (Fig. 18).

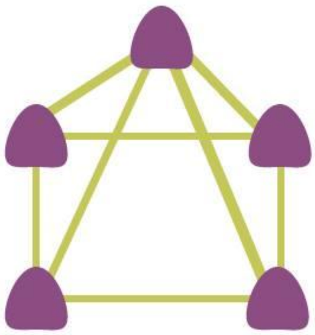
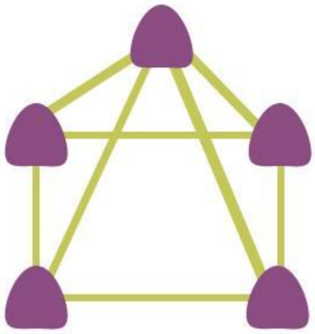


Fig. 18 Pirâmide de base quadrada

Octaedro regular

Material: 6 jujubas e 12 palitos.

1º Passo: Construa uma pirâmide regular de base quadrada (Vide construção anterior) (Fig. 18).



2º Passo: Vire a pirâmide de cabeça para baixo e espete um palito no sentido vertical em cada uma das quatro jujubas da base quadrada. (Fig. 19)

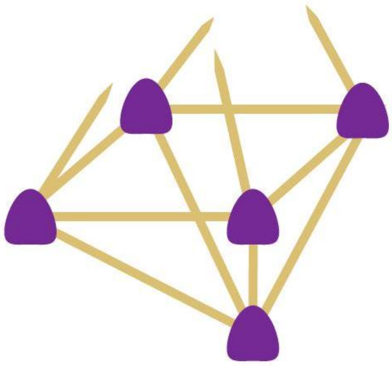


Fig. 19 Pirâmide de cabeça para baixo com palitos espetados

3º Passo: Una as extremidades livres dos quatro palitos colocados no 2º passo com uma jujuba (Fig. 20).

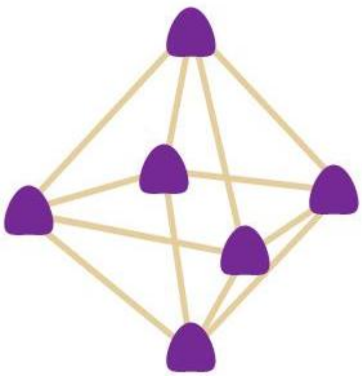
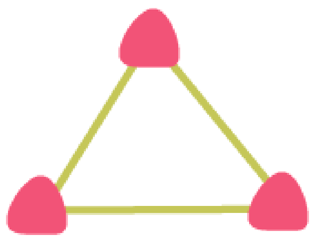


Fig. 20 Octaedro

Prisma regular de base triangular

Material: 6 jujubas e 9 palitos.

1º Passo: Construa um triângulo equilátero (Vide 1º passo da construção do tetraedro regular) (Fig. 12).



2º Passo: Em cada uma das três jujubas do triângulo espete um palito na posição vertical (Fig. 21).

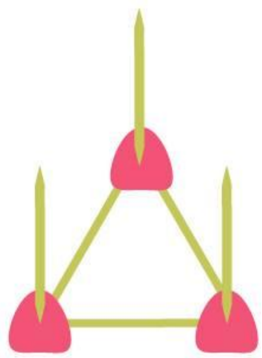


Fig. 21 Triângulo com palitos espetados

3º Passo: Construa outro triângulo e encaixe-o nas extremidades livres dos palitos espetados no 2º passo (Fig. 22).

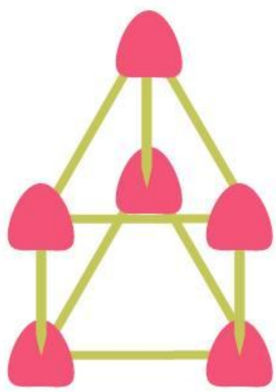


Fig. 22 Prisma de base triangular

Dodecaedro regular

Material: 20 jujubas e 15 palitos cortados ao meio (total de 30 palitinhos).

1º Passo: Construção de um pentágono regular.

Para isso, una cinco palitos com cinco jujubas, formando um pentágono (Fig 23).

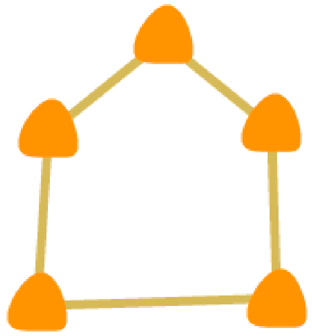


Fig. 23 Pentágono

2º Passo: Em cada uma das cinco jujubas do pentágono espete um palito levemente inclinado para fora do mesmo (Fig. 24).

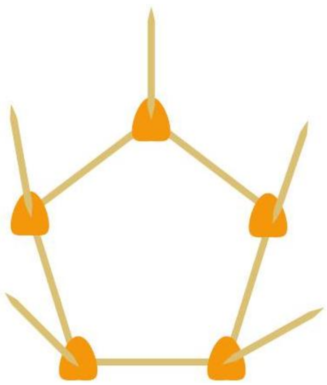


Fig. 24 Pentágono com palitos espetados

3º Passo: Encaixe uma jujuba em cada extremidade livre dos cinco palitos (Fig. 25).

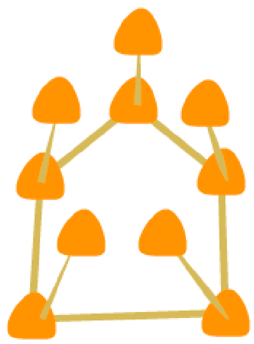


Fig. 25 Pentágono com palitos e jujubas

4º Passo: Em cada uma das novas jujubas, espete dois palitos em formato de "V" levemente inclinados para dentro. Una cada dois palitos com uma jujuba (Fig 26).

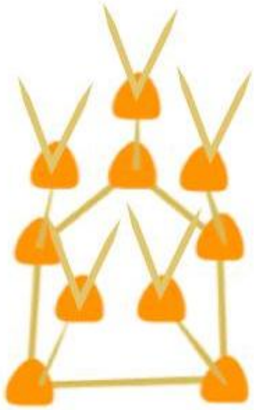


Fig. 26 Palitos em "v"

5º Passo: Espete em cada jujuba um palito e encaixe uma nova jujuba na extremidade livre do mesmo.

6º Passo: Una as cinco novas jujubas com palitos formando um pentágono paralelo ao primeiro pentágono (1º Passo) (Fig. 27).

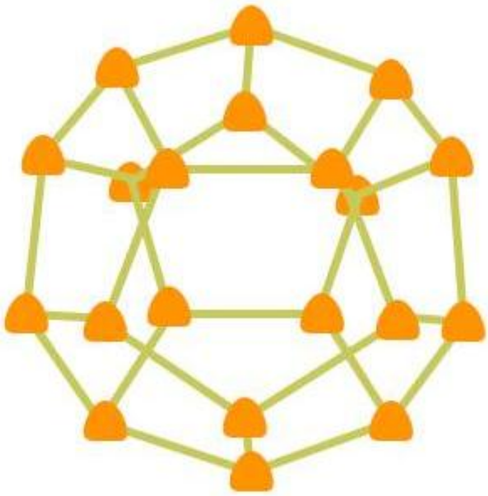


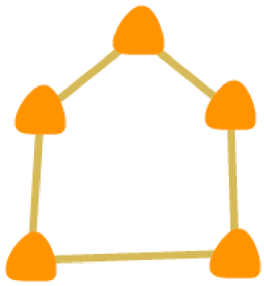
Fig. 27 Dodecaedro

Observação: Na montagem deste poliedro foi necessário utilizar palitos cortados ao meio, para reduzir o tamanho da aresta e melhorar a estabilidade da construção.

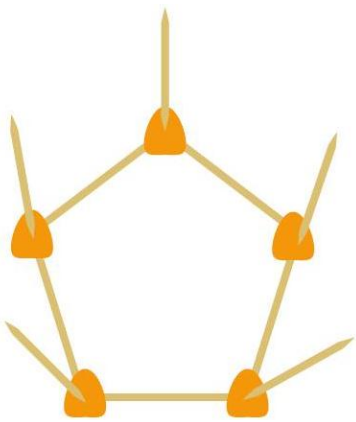
Icosaedro regular

Material: 12 jujubas e 30 palitos.

1º Passo: Construa um pentágono regular (Vide construção anterior) (Fig. 23)



2º Passo: Em cada uma das cinco jujubas do pentágono espete um palito (Fig 24).



3º Passo: Una as extremidades livres dos cinco palitos com uma jujuba. (A figura construída é uma pirâmide regular de base pentagonal) (Fig. 28)

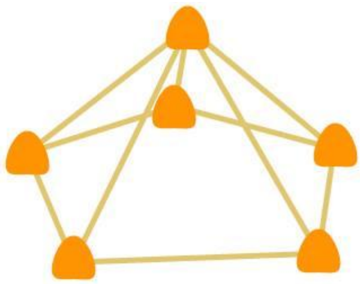


Fig. 28 Pirâmide de base pentagonal

4º Passo: Vire a pirâmide de cabeça para baixo e espete dois palitos em cada jujuba do pentágono da base formando um "V". (Fig. 29)

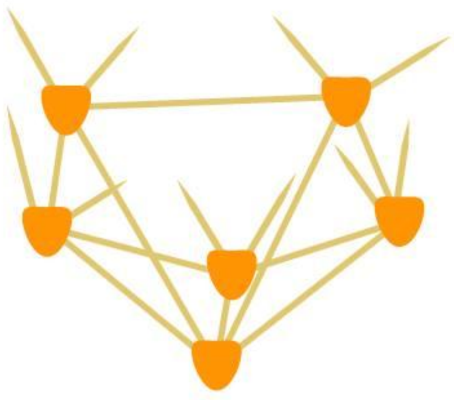


Fig. 29 Pirâmide com palitos em "v"

5º Passo: Construa separadamente outra pirâmide regular de base pentagonal e ligue-a à outra construção, de forma que cada jujuba da nova pirâmide seja encaixada em dois palitos (Fig. 30).

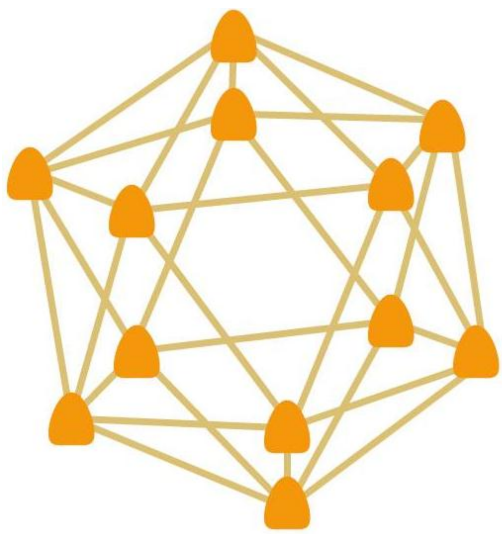


Fig. 30 Icosaedro

É importante evidenciar a possibilidade de construção de vários outros poliedros utilizando jujubas, e cabe ao professor ensinar a técnica de acordo com as particularidades de cada turma. Nas turmas regulares, sugerimos a construção de prismas e pirâmides com bases de diferentes formatos e diferentes tamanhos de palitos, para os casos de figuras não regulares. Para enriquecer o aprendizado, devem-se ressaltar as diferenças e semelhanças entre as figuras construídas, tornando o aluno agente construtor de seu conhecimento. Recomendamos a construção do dodecaedro regular e do icosaedro regular apenas em turmas avançadas.

3.1.1. Proposta de aula para trabalhar a Relação de Euler

Nesta seção, propomos uma aula introdutória sobre poliedros e Relação de Euler, com a utilização da técnica das jujubas. A aula contempla os níveis de Van Hiele até o nível 3 (dedução informal). Este conteúdo é ensinado no primeiro bimestre do segundo ano do ensino médio na rede estadual do Rio de Janeiro.

<u>Introdução ao estudo dos Poliedros e Relação de Euler</u>

Objetivos: Reconhecer e nomear os principais poliedros; identificar vértices, faces e arestas nos mesmos e utilizar a Relação de Euler para resolver problemas.

Pré-requisitos: Ponto, reta e plano no espaço. Posições relativas entre retas, perpendicularidade e paralelismo.

Duração: 2 tempos (aproximadamente 1h40min)

Materiais: Quadro, marcador, jujubas, palitos e folha de papel.

Para essa aula, os alunos podem trabalhar individualmente ou em grupos de até 4 integrantes.

Para tornar aula mais divertida e atraente, sugerimos que os alunos possam comer as jujubas ao final da atividade. Para tanto, o professor deve solicitar que os alunos estejam com as mãos lavadas e trabalhem sobre uma folha de papel, a fim de que as jujubas não entrem em contato com a mesa.

O professor deve iniciar a aula conceituando poliedro e poliedro regular e entregando uma tabela, como a abaixo, para que aluno preencha conforme construa os poliedros utilizando o material proposto:

Nome do Poliedro	Vértices (jujubas)	Faces	Arestas (Palitos)

Em seguida, deve-se explicar aos alunos que os elementos de um poliedro são os **vértices**, que serão representados pelas jujubas, as **arestas**, representadas pelos palitos, e as **faces**, que serão os apoios do poliedro (os vazios).

Atividade 1. Como primeira atividade, sugerimos construir um **tetraedro regular** (conforme visto no início desse capítulo). Durante a construção do triângulo da base, o professor deve revisar a classificação quanto aos lados de um triângulo (equilátero, isósceles ou escaleno) e conduzir os alunos a concluírem que, por se tratar de um poliedro regular e os palitos possuírem mesmo tamanho, trata-se de um triângulo equilátero (Fig. 31).

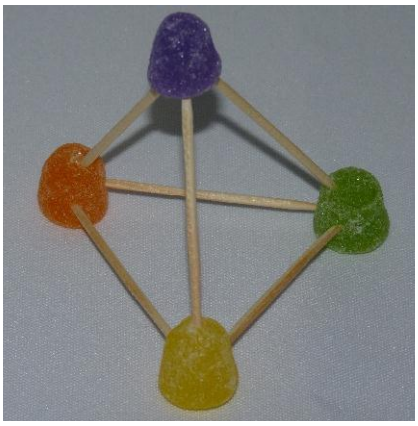


Fig. 31 Tetraedro de jujubas

Terminada a construção, os alunos devem preencher a tabela, segundo suas observações.

O professor deve estimular que os alunos manipulem o tetraedro, girando-o e percebendo o formato das faces, e quantidade de vértices, arestas e faces para posterior preenchimento da tabela.

Atividade 2. A atividade seguinte, consiste na construção de um **hexaedro regular** (conforme visto no início desse capítulo) (Fig. 32). É importante que o professor explore o passo a passo da construção, para revisar conteúdos já vistos pelos alunos. Ao construir o quadrado da base, é possível relembrar as propriedades do quadrado; ao espetar as jujubas no sentido vertical, é interessante falar sobre perpendicularidade; ao término da construção, os alunos podem tirar conclusões sobre paralelismo das faces opostas. Novamente, os alunos devem preencher a tabela, segundo suas observações.

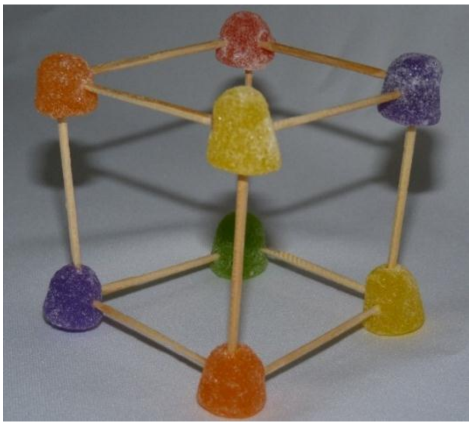


Fig. 32 Hexaedro de jujubas

Após a realização das atividades 1 e 2, sugerimos que sejam construídos outros poliedros, como prismas e pirâmides com bases no formato de diferentes polígonos (Fig. 33), e o professor deve comentar sobre os detalhes de cada poliedro para que juntos preencham a tabela. É importante ressaltar aos alunos a possibilidade de se construir poliedros não regulares utilizando palitos de diferentes formatos.

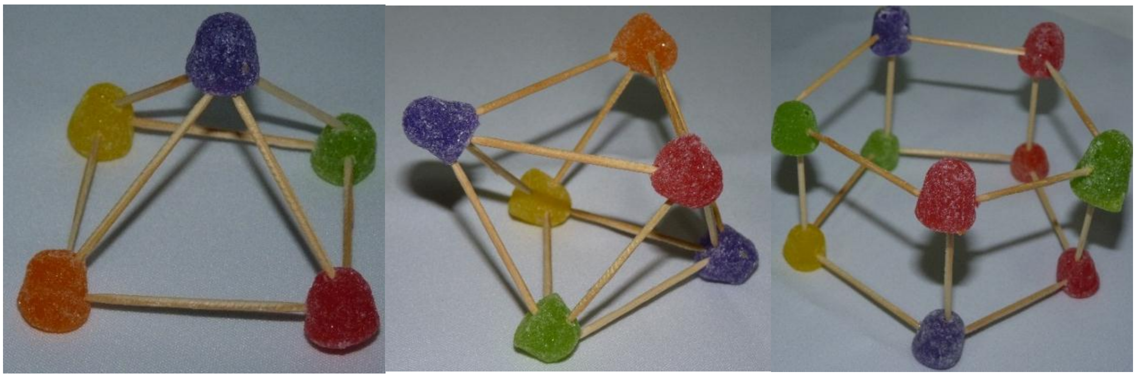


Fig. 33 Pirâmide de base quadrada, octaedro e prisma de base pentagonal

Com a tabela preenchida, o professor deve estimular a percepção dos alunos de algum padrão na quantidade de faces, vértices e arestas. Espera-se que algum aluno observe que a soma dos vértices e faces sempre excede em duas unidades o número de arestas.

O professor pode acrescentar uma linha à tabela e preencher apenas vértices e faces para que os alunos completem com a quantidade de arestas sem construir o poliedro.

<u>Sugestão de tabela</u>

Nome do Poliedro	Vértices (jujubas)	Faces	Arestas (Palitos)
Tetraedro Regular	4	4	6
Hexaedro Regular	8	6	12
Pirâmide de base quadrada	5	5	8
Pirâmide de base pentagonal	6	6	10
Prisma de base triangular	6	5	9
Icosaedro Regular	**12**	**20**	**?**

Linha acrescentada

Utilizando as letras V, F e A para vértices, faces e arestas respectivamente, o professor deve escrever no quadro a fórmula que os alunos deduziram.

$$\mathbf{V + F = A + 2}$$

Deve-se ressaltar a importância da ferramenta para encontrar a quantidade de alguns dos elementos (V, F ou A) quando os poliedros são mais complexos e não temos o modelo concreto em mãos.

Observação: Caso a turma seja avançada, sugerimos que o professor forneça os dados do icosaedro para o preenchimento da tabela e solicite que os alunos tentem, sozinhos, construir o poliedro observando um modelo pronto.

Após a dedução da fórmula, o professor pode solicitar aos alunos que construam poliedros de sua preferência e observem que a relação continua válida.

Para complementar a aula e fixar melhor a relação de Euler, propomos a aplicação de alguns exercícios como:

Exercício 1. Um poliedro possui 8 faces e 6 vértices. Quantas são as arestas?
Solução:

$$V + F = A + 2$$
$$6 + 8 = A + 2$$
$$14 = A + 2$$
$$A = 12$$

Exercício 2. Um poliedro possui 8 faces triangulares. Quantos são os seus vértices?

Solução: Nesse exercício, é importante atentar para o formato das faces na contagem das arestas e que uma aresta é comum a duas faces do poliedro. Por isso, devemos multiplicar o número de faces pelo número de lados das mesmas e dividir o resultado por dois.

Contagem das arestas:

$$8F_3 = 8 \times 3 = 24$$
$$\frac{24}{2} = 12 \text{ arestas}$$

Cálculo dos vértices:

$$V + F = A + 2$$
$$V + 8 = 12 + 2$$
$$V = 6$$

3.1.2 - Proposta de aula para estudar as diagonais do cubo e paralelepípedo

Outra proposta de uso das jujubas é utilizá-las na aula sobre paralelepípedos. Este conteúdo é ensinado no segundo bimestre do segundo ano do ensino médio na rede estadual do Rio de Janeiro.

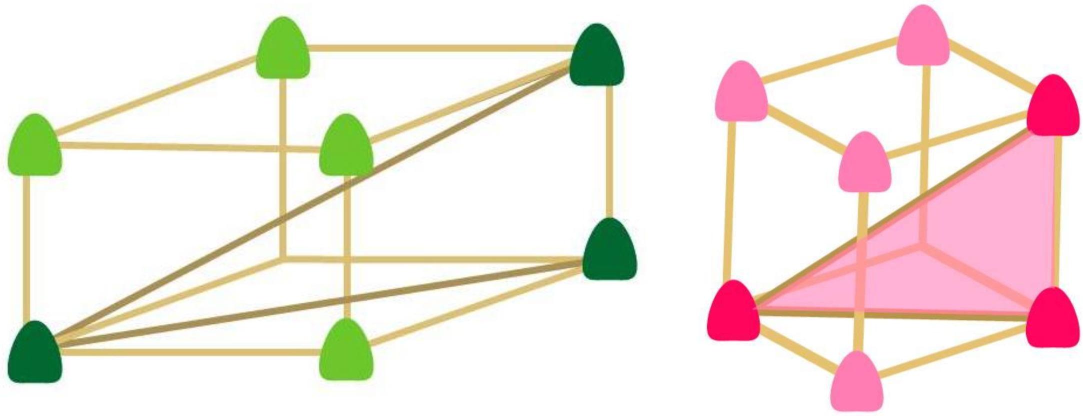
Ressaltamos que o principal objetivo do uso das jujubas na aula abaixo é possibilitar que o aluno "enxergue" o ângulo reto dos triângulos e que não precise decorar a fórmula, pois ficará em sua memória a construção da mesma.

Diagonais do cubo e do paralelepípedo retângulo

Objetivos: Reconhecer ângulos retos e triângulos retângulos no interior de cubos e paralelepípedos. Resolver problemas que envolvam diagonal de paralelepípedo e cubo.
Pré-requisitos: Teorema de Pitágoras, perpendicularidade, diagonal do quadrado e propriedades dos paralelepípedos.
Duração: 2 tempos (aproximadamente 1:40h)
Materiais: Quadro, marcador, jujubas, palitos e folha de papel.

O professor deve iniciar a aula solicitando aos alunos que construam com as jujubas um cubo e um paralelepípedo reto-retângulo (Para este, utilizar palitos de dois tamanhos para diferenciá-lo do cubo).

O professor deve construir utilizando varetas e jujubas maiores e encaixar o palito na diagonal do cubo e do paralelepípedo, além de encaixar outro palito na diagonal da face inferior das duas figuras (Figs 34 e 35).



Figs. 34 e 35 Paralelepípedo e Cubo com diagonais.

A partir da construção, o professor deve deduzir, junto aos alunos, o conceito de diagonal de poliedros no quadro.

"A diagonal de um paralelepípedo retângulo é um segmento de reta cujos extremos são vértices que não pertencem a uma mesma face."

Deve-se mostrar que a diagonal não é única, e que, pelas propriedades destes sólidos (paralelismo das faces opostas), todas as diagonais que podem ser traçadas possuem o mesmo tamanho.

O professor deve propor que seja criada uma fórmula para calcular a diagonal de um paralelepípedo sabendo-se apenas as medidas de suas arestas.

A partir deste momento, deve-se mostrar aos alunos que a diagonal forma com a altura e com a diagonal da face do paralelepípedo um triângulo retângulo, relembrando suas propriedades e seus elementos. Com o método das jujubas, o aluno visualiza facilmente o ângulo reto (Fig. 36), o que geralmente gera dúvidas quando o professor desenha o sólido no quadro em perspectiva (Fig. 37).

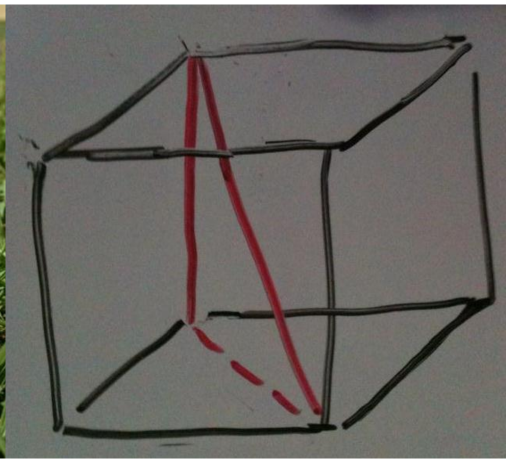


Fig. 36 Cubo de jujubas com diagonais **Fig. 37 Cubo em perspectiva no quadro**

Através do teorema de Pitágoras, espera-se que o aluno deduza a diagonal da face (d):

$$d^2 = a^2 + b^2 \, (I)$$

No triângulo retângulo, que possui a diagonal do paralelepípedo como hipotenusa (fig. 38), os alunos devem novamente utilizar o teorema de Pitágoras.

$$D^2 = d^2 + c^2 \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II) temos:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

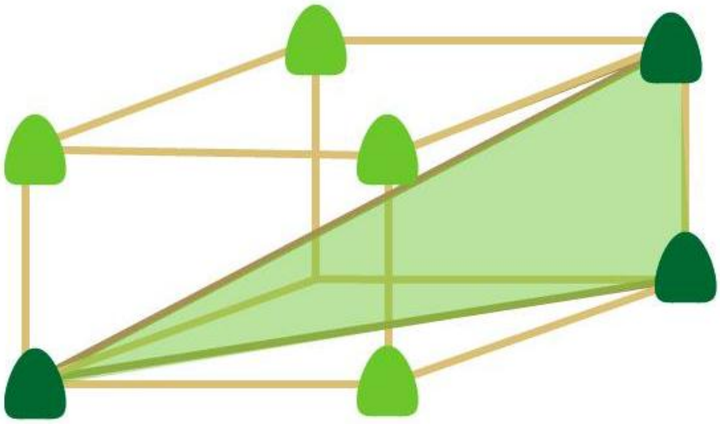


Fig. 38 Triângulo retângulo no paralelepípedo

No caso do cubo, o professor deve ressaltar que se trata da mesma fórmula do paralelepípedo, atentando aos alunos para o fato de o cubo ser um caso particular de um paralelepípedo retângulo, onde o triângulo também é retângulo (Fig. 39), porém a diagonal de face é diagonal de um quadrado de aresta a que mede $a\sqrt{2}$.

Logo,

$$D = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}$$

$$D = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$

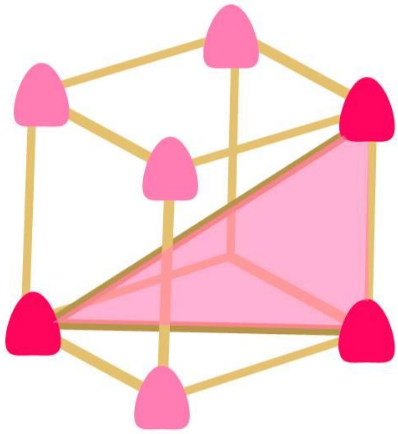


Fig. 39 Triângulo retângulo no cubo

Em seguida, recomendamos que o professor trabalhe exercícios como os abaixo, levando em consideração o nível da turma.

Exercício 1: Um cubo possui diagonal medindo $5\sqrt{3}$. Calcule seu volume.

$$\mathrm{D} = \mathrm{a}\sqrt{3}$$

$$\mathrm{D} = 5\sqrt{3}$$

$$\mathrm{a} = 5$$

$$V = 5^3$$

$$V = 125\ u.v$$

Exercício 2: Um paralelepípedo retângulo têm dimensões 3, 4 e 5 cm. Calcule sua diagonal.

$$\mathrm{D} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2}$$

$$\mathrm{D} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$$

$$\mathrm{D} = \sqrt{9 + 16 + 25}$$

$$\mathrm{D} = \sqrt{50}\ \mathrm{cm}$$

A aula descrita pode ser adaptada para o cálculo de alturas nas pirâmides (Fig. 40), seguindo o mesmo princípio, visto que o aluno enxergará mais facilmente o triângulo retângulo que tem como catetos o apótema da base e a altura da pirâmide, e como hipotenusa a altura do triângulo da face lateral.

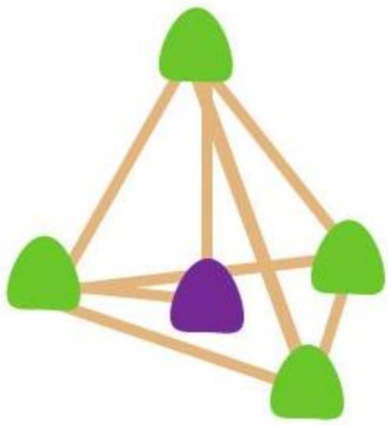


Fig. 40 Altura do Tetraedro.

3.2. Relatos de experiência

<u>CIEP 198 - ProEMI</u>

No dia 18 de abril de 2013, tive a oportunidade de ministrar uma aula diferente sobre introdução ao estudo de Poliedros no CIEP 198 – Professora Roza Ferreira de Mattos, no município de Duque de Caxias, Rio de Janeiro. A turma 1001 possuía 25 alunos e era do 1º ano do Programa Ensino Médio Inovador- ProEMI, do Ministério da Educação, cujo objetivo é ampliar o tempo de permanência na escola e diversificar a prática pedagógica para reduzir o abandono escolar e preparar os alunos para o ENEM. A turma estuda as disciplinas obrigatórias do currículo escolar pela manhã e as disciplinas extras no horário de 12:30 às 14:10.

Uma das aulas de Matemática elaboradas foi de introdução à Geometria Espacial – Poliedros e Relação de Euler, com o objetivo de familiarizar os alunos com o conteúdo do 2º ano do Ensino Médio e exercitar os aspectos da visão espacial propostos por Gutièrrez. A aula contempla a TIM, pois os alunos desenvolvem a Inteligência Lógico Matemática e a Espacial.

Na semana anterior à aula, foi pedido que os discentes trouxessem jujubas, palitos de dente e o caderno para os registros. Quem tivesse câmera fotográfica também poderia trazer, e logo os alunos começaram a fazer perguntas sobre o que aprenderiam. Com isso, gerou-se uma expectativa positiva. Alguns meninos falaram: “*Ah, jujuba é coisa de criancinha, vai ser uma aula pra criancinha.”* E apenas respondi que aguardassem a data para que tirassem suas próprias conclusões.

No dia da aula, mais da metade dos alunos trouxe o material e alguns trouxeram câmeras e celulares para fotografar.

Inicialmente foi pedido que colocassem uma folha sobre a mesa para que as jujubas não ficassem sujas e pudessem ser comidas depois. Muitos se anteciparam e já foram comendo algumas.

Construí um tetraedro (Fig. 41), utilizando os palitos e jujubas, e aproveitei para retomar alguns conceitos de Geometria Plana, como as principais figuras. Após dar as definições de poliedro, vértices, faces e arestas, foi pedido aos alunos que observassem o formato das faces e contassem a quantidade de vértices, faces e arestas, registrando em uma tabela no caderno. Em seguida, cada aluno construiu seu próprio tetraedro sem dificuldades. Após o tetraedro, construímos algumas pirâmides de diferentes bases e registramos os dados na tabela.

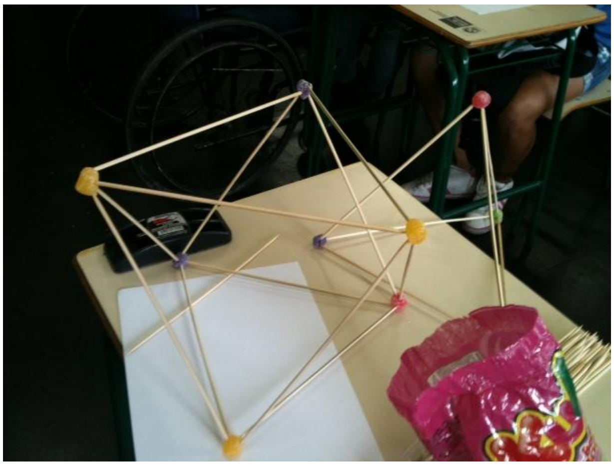


Fig. 41 - Tetraedro e Octaedro

Depois falei sobre os elementos de uma pirâmide e expliquei que de um único vértice saem as arestas que intersectam as arestas da base. Os alunos fizeram comparações de onde podiam encontrar pirâmides no dia a dia, como a pirâmide do Egito. Também construímos o octaedro unindo duas pirâmides de base quadrada e os alunos compararam ao balão de São João (Fig. 42).

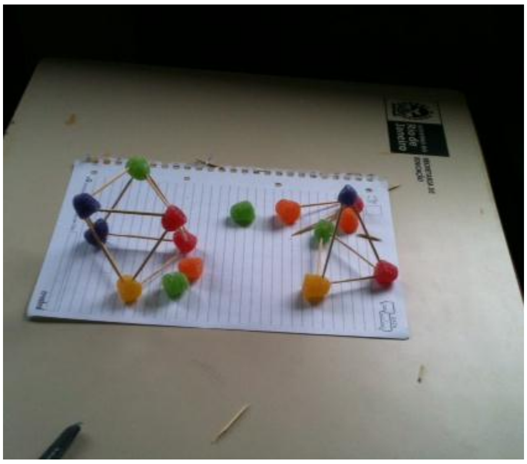


Fig. 42 Tetraedro e Octaedro dos alunos

Num segundo momento, construímos um cubo e uma série de prismas de diferentes formatos, e os alunos foram tirando fotos e registrando os dados no caderno. Falei sobre perpendicularidade, paralelismo das faces, e pedi que os alunos diferenciassem as duas famílias de poliedros. A resposta dos alunos foi que os prismas têm duas bases, e as pirâmides apenas uma, e foi explorada essa diferenciação, sempre com exemplos do dia a dia, como caixas de sapato, embalagem do chocolate *toblerone,* dentre outros. Alguns alunos mais motivados construíram outros poliedros com os palitos e fotografaram a si mesmos com suas criações para postar nas redes sociais. Tive um pouco de dificuldade no final para retomarmos o foco e analisarmos as anotações, pois a essa altura eles só queriam tirar fotos e comer as jujubas. Porém, conseguimos deduzir que o número de arestas era sempre duas unidades menor que a soma das faces e vértices, e exibi a relação de Euler, que eles mesmos haviam "descoberto". Mencionei que a relação possibilitava saber mais sobre poliedros mais complexos, como o icosaedro, que foi exibido no sofware *Poli.* Ao final da aula, fizemos alguns exercícios básicos utilizando a relação e relembramos alguns nomes dos poliedros estudados.

Um grupo de alunos saiu da aula dizendo que foi "a melhor aula de matemática" que eles assistiram e a "mais gostosa!" (Figs. 43 e 44). Seguindo os conceitos da Neurociência, os quais os alunos devem praticar o conteúdo no mesmo dia em que assistiram à aula, alguns exercícios ficaram como tarefa e foram pedidos mais exemplos desses poliedros no dia a dia. Metade dos alunos fez a tarefa e trouxe vários exemplos diferentes.

Fig. 43 Alunos PROEMI com suas construções

Fig. 44 Poliedros construídos pelos alunos

CIEP 368

A segunda experiência ocorreu na aula do 2º ano do Ensino Médio, no dia 25 de abril de 2013, na turma 2003 do CIEP 368 – João Conceição Canuto, no município de Itaguaí, Rio de Janeiro. Esta turma possuía 35 alunos. Como na primeira experiência, foi solicitado o material para a aula com dois dias de antecedência, e muitos alunos esqueceram, o que gerou uma certa frustração inicial. Porém, um grupo teve a ideia de pedir autorização para comprar o material na barraca de doces em frente à escola, e 15 minutos depois, as jujubas se multiplicavam na sala de aula. Emprestei alguns palitos e iniciamos a aula (Fig.45).

Fig.45 Turma 2003 durante a aula

As meninas eram as mais animadas, e quando começamos a construir o tetraedro e as pirâmides elas já tiravam fotos. Conceituei poliedro, vértices, faces e arestas e construímos a tabela para os registros. Como os alunos já haviam assistido a aula sobre Geometria Espacial – ponto, reta e plano e posições relativas, os conceitos de paralelismo e perpendicularismo das arestas foram assimilados. Construímos o octaedro e uma família de prismas, os quais diferenciamos das pirâmides (Fig 46). Os alunos foram estimulados a observar os poliedros e dar exemplos de sua existência no dia a dia (Fig. 47). Foi mais difícil controlar a indisciplina devido à turma ter 35 alunos, mas alguns fizeram grupos e foram discutindo juntos sobre os poliedros.

Ao final, um aluno conseguiu notar um padrão na tabela, antes que fosse perguntado sobre isso. Disse que só contava as jujubas (vértices) e os vazios (faces) e que somava os dois e diminuía duas unidades, e assim não precisava contar as arestas. Aproveitei a oportunidade e disse que o objetivo da aula era deduzir essa relação, a relação de Euler, que nos permitia contar elementos de poliedros mais complexos e também conhecer melhor cada poliedro. Falamos um pouco de corpos redondos e diferenciamos de poliedros, e finalizamos a aula com alguns exercícios sobre o conteúdo, muitas fotos e comendo as jujubas!

Fig.46 Poliedros da turma 2003

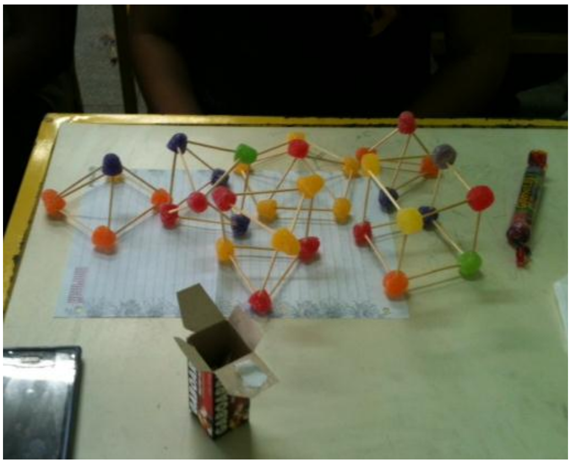


Fig.47 Poliedros da turma 2003

A notícia da aula neste CIEP se espalhou, e alguns professores de Matemática vieram me parabenizar e dizer que tentariam usar o método em suas aulas, pois seus alunos comentaram, e outros professores contaram para seus colegas de trabalho no município de Seropédica como exemplo de boa prática pedagógica.

3.3 Outras utilidades das jujubas

As jujubas também são excelentes opções para aulas de Química, na construção de moléculas, visualização do ângulo entre as ligações (Fig. 48) e tabela periódica (Fig. 49).

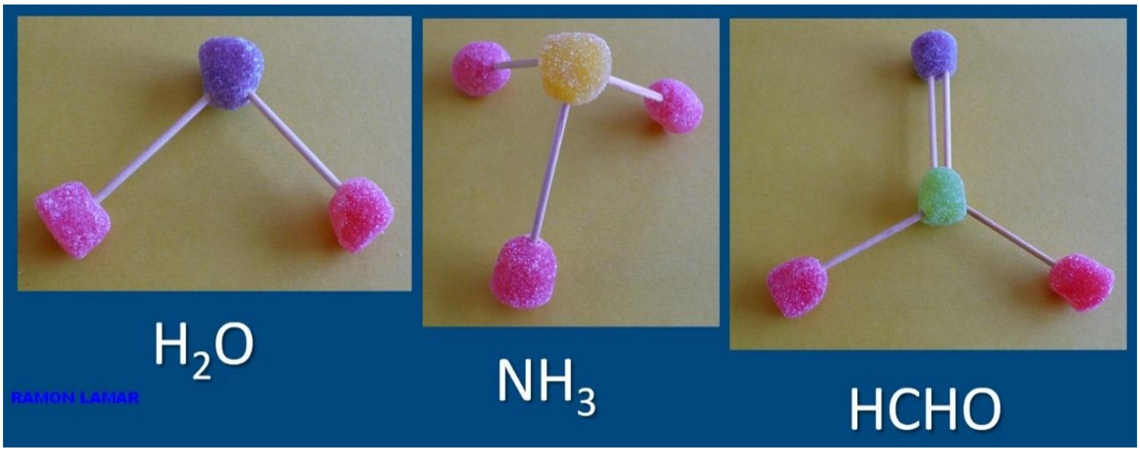


Fig. 48 Estruturas moleculares com jujubas[16]

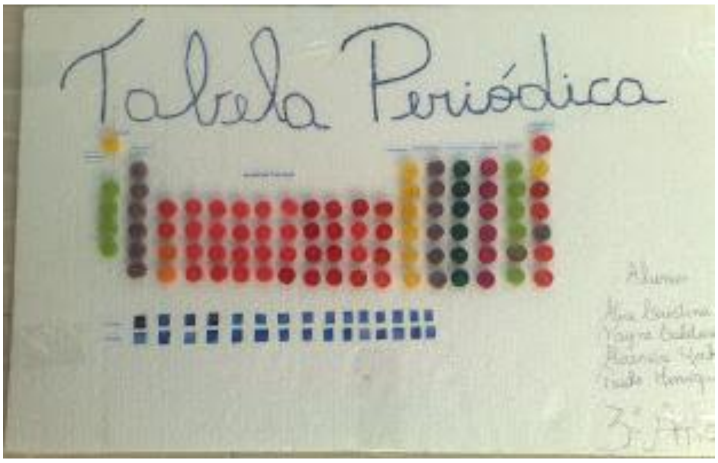


Fig. 49 Tabela Periódica com jujubas[17]

---

[16] Disponível em: http://ramonlamar.blogspot.com.br/2012/11/modelos-moleculares-quimicos-baratos.html. Acesso em: dezembro de 2013

[17] Disponível em: http://professorgeneses.blogspot.com.br/. Acesso em: dezembro de 2013.

Para a aula de Biologia, as jujubas podem ser utilizadas na construção de moléculas de DNA (Fig. 50).

Fig. 50 DNA com jujubas[18]

[18] Disponível em: http://mabelcienciasesaude.blogspot.com.br/2012/06/turma-1002-e-o-dna-de-jujubas.html. Acesso em: Dezembro de 2013.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, observamos a importância do uso de materiais concretos em Geometria Espacial. O material escolhido foram as jujubas e a técnica se mostrou aplicável, eficaz e divertida. Aplicável, pois os materiais são de baixo custo e fácil acesso; divertida, pois motivou os alunos; e eficaz, pois os alunos que assistiram à aula de jujubas obtiveram mais acertos no Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro (SAERJ) nesse conteúdo, do que as turmas que tiveram aulas no quadro.

Além disso, a técnica contempla as novas teorias de aprendizagem baseadas na Neuropedagogia e respeita a especificidade de cada aluno, que pode ou não ter facilidade de visualização (Inteligência Espacial – TIM). Assim, observamos que nas aulas os alunos desenvolveram as Inteligências Lógico Matemática e Espacial, e a sua aprendizagem se deu através da emoção, armazenando o conteúdo no córtex cerebral.

Naturalmente, não é suficiente que o professor apresente uma aula motivadora com jujubas a seu aluno para que ele aprenda. Existem outros processos e estratégias de ensino que, em conjunto, favorecem a aprendizagem, como a apresentação dos conteúdos, os conhecimentos prévios do aluno, a participação da vivência nas atividades e a oportunidade de rever os conceitos ensinados.

Esperamos, com este trabalho, oferecer uma alternativa ao ensino da Geometria Espacial, ensinada em quadros bidimensionais, e com isso potencializar a aprendizagem através dos níveis de Van Hiele.

A Geometria Espacial pode e deve ser um conteúdo leve e divertido, que através da emoção faz o aluno armazenar no córtex as informações e não esquecê-las, dando assim eficácia na aprendizagem e melhores resultados em avaliações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, Fabiana Chagas de. *Jujubas e palitos de dente: um método lúdico para ensinar Geometria Espacial*. Monografia. 43 p. Duque de Caxias, RJ. Unigranrio, 2010.

ANTUNES, Celso. *Como desenvolver conteúdos explorando as inteligências múltiplas*. Fascículo 3. Petrópolis, RJ: Vozes, 9ª edição, 2001.

BECKER, Marcelo. *Uma alternativa para o ensino de Geometria: Visualização Geométrica e representações de sólidos no plano*. 111 p. Dissertação. Porto Alegre, RS. 2009. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17161/000712216.pdf?sequence=1>. Acesso em 22.Jan.2014

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio*. Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC, 2006.

CROWLEY, Mary L. *O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.* In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

FERREIRA, Ana Célia da C. *Ensino da Geometria no Brasil: enfatizando o período do Movimento da Matemática Moderna*. In: EDUCERE. III Congresso Nacional da área de educação, 5. Curitiba, PR. Resumo. Paraná. PUC, 2005, p. 94-101.Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI136.pdf>. Acesso em: 04. Set. 2013.

GUTIERREZ, Angel. *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework.* University of Valence, Spain, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>. Acesso em: 04. Nov. 2013.

KALEFF, A. M. M. R. ; REI, Dulce Monteiro . *Vareta, canudos, arestas. . . sólidos geométricos.* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, v. 28, p. 29-36, 1995.

______., A. M. M. R. ; REI, Dulce Monteiro ; HENRIQUES, A. S. ; FIGUEIREDO, L. G. . *Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de Van Hiele*. Bolema (Rio Claro), Rio Claro-SP, v. 10, p. 21-30, 1994.

______., A. M. M. R. *Vendo e entendendo poliedros. Do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concreto.* 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora UFF, 2003.

LORENZATO, Sérgio et al. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* Campinas: Autores Associados, 2006.

MORAES, Luciana de Souza de. *A Geometria Espacial no Ensino Médio: Um estudo sobre o uso do material concreto na resolução de problemas*. TCC, 60 p. Rio de Janeiro, RJ. UNIRIO, 2014.

NOVA ESCOLA, Revista Nova Escola – *Neurociência: Como ela ajuda a entender a aprendizagem*. Edição nº 253, 2012. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/gestao-escolar/neurociencia-como-ela-ajuda-entender-aprendizagem-691867.shtml>

PAVANELLO, R. M. "O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Conseqüências." In: Zetetiké, n.1, p. 07-17, Unicamp, mar. 1993.

REGO, Rogéria G. Do, REGO, Rómulo M. Do, VIEIRA, Kleber M. Laboratório de Ensino de Geometria. Campinas, SP: Autores associados, 1ª edição, 2012.

RELVAS, Marta P. *Neurociência na prática pedagógica*. Rio de Janeiro: Wak, 1ª edição, 2012.

VALENTE, W.R. O nascimento da matemática do Ginásio. Annablume, São Paulo. 2004.

VALENTE, W.R. Quem somos nós, professores de matemática? Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 11-23, jan./abr. 2008. Disponível em <http://www.cedes.unicamp.br>. Acesso em 01.mar.2014

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

CHAVES, Juliana de O. *Geometria Espacial no ensino fundamental: uma reflexão sobre as propostas metodológicas*. 88 p. Tese. Viçosa, MG. 2013. Disponível em: <http://www.tede.ufv.br/tedesimplificado/tde_arquivos/61/TDE-2013-07-01T142940Z-4666/Publico/texto%20completo.pdf>. Acesso em 04.Set.2013.

FONSECA, Laerte. *Protocolo Neuropsicopedagógico de avaliação das habilidades matemáticas*. Rio de Janeiro: Wak, 2013.