Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Marcos José Machado da Costa

Rotas Aéreas e a Geometria do Globo Terrestre

Rio de Janeiro
2014

Marcos José Machado da Costa

Rotas Aéreas e a Geometria do Globo Terrestre

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro

2014

Costa, Marcos José Machado

Rotas Aéreas e a Geometria do Globo Terrestre / Marcos José Machado Costa - 2014

67.p

1.Matemática 2. Geometria. I.Título.

CDU 536.21

Marcos José Machado da Costa

Rotas Aéreas e a Geometria do Globo Terrestre

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 26 de Fevereiro de 2014

BANCA EXAMINADORA

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Leonardo Tadeu Silvares Martins

Doutor em Matemática - UFF

Patrícia Nunes da Silva

Doutor em Matemática - UNICAMP

Dedico esta monografia a meus pais, Cely e Sidney, e a meu filho, Aluizio, que sempre acreditaram que seria possível. Até mesmo em momentos que nem eu acreditei. Muito obrigado com todo meu amor.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo propor uma aula sobre Geometria Elíptica. Para isto, realizou-se uma pesquisa histórica para compreender como o problema do quinto postulado de Euclides implementou o estudo das Geometrias Não Euclidianas. Será apresentado uma cronologia com os principais resultados e os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dessas Geometrias. As definições na superfície esférica serão apresentadas e alguns teoremas demonstrados. Será feita uma proposta de aula com a utilização do programa Spherical Easel e a correção de algumas questões de vestibular. Finalmente, será apresentado o resultado de uma pesquisa feita em três escolas do município do Rio de Janeiro.

Palavras-chaves: **aula, Geometria Elíptica, Geometrias Não Euclidianas**.

Abstract

This study aims to propose a class on Spherical Geometry. For this was made a history research to comprehend how the problem of Euclid's fifth postulate implemented the study of Non-Euclidean Geometries. Will be presented a chronology of the main results and the leading mathematicians who contributed for developing these Geometries. The definitions on the spherical surface will be presented and some theorems proving. Anelliptic case proposed class will be made using Spherical Easel program and correction of some vestibular questions. Finally shall be presented the results of a survey conducted in three schools of Rio de Janeiro county.

Keywords: Class, Elliptic Geometry, Non-Euclidean Geometries.

Agradecimentos

Agradeço aos meus amigos e professores, pelo estímulo, paciência, compreensão e, principalmente, pela ajuda inestimável na elaboração deste trabalho.

Sumário

1 Introdução

Há milênios, o homem se debruça sobre soluções de problemas envolvendo medições terrestres e astronômicas. Da tentativa de fazer essas medições surgiram as primeiras ideias sobre a Geometria - geos: terra; metron: medida.

As primeiras formalizações desse estudo, de que se têm notícia, devem-se a Euclides (323 - 285 a.C.) com o registro de sua obra **Os Elementos**. Obra essa que organizou e sintetizou, através de definições, postulados, axiomas e teoremas, vários estudos até então feitos sobre Geometria.

Nessa organização, Euclides enunciou um postulado – conhecido como Postulado V:

> "Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado, cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos."

que gerou controvérsia quanto a sua simplicidade e evidência. A não aceitação como Postulado e as tentativas frustradas de demonstração, como teorema, nortearam as primeiras ideias das chamadas Geometrias Não Euclidianas, destacando-se a Geometria Elíptica e a Geometria Hiperbólica.

Os conceitos e propriedades da Geometria Euclidiana são válidos sobre superfícies planas. Por exemplo, um resultado dessa geometria é o fato de que a linha reta é a menor distância que se pode percorrer de um ponto a outro. Entretanto, como poderíamos afirmar a mesma coisa sobre uma superfície curva, como por exemplo, a superfície terrestre?

Em casos, como o citado acima, a Geometria Euclidiana não é satisfatória, pois a Terra é aproximadamente esférica e, neste caso, conforme Coutinho:

> "... qualquer linha que se trace não é mais uma reta, mas, inevitavelmente, uma

curva. Daí, a geometria adequada ao estudo de figuras, sobre uma esfera, não é mais a bem antiga e conhecida Geometria Euclidiana.” ([1], p.15)

No entanto, quando consideramos pequenas distâncias, podemos pensar que estamos trabalhando no plano – para a construção de um edifício, por exemplo – o mesmo não ocorre para grandes distâncias em viagens marítimas ou aéreas, onde a curvatura da Terra não pode ser desprezada.

A Geometria Não Euclidiana está presente em situações do dia a dia. A motivação principal da escolha, desse tema, foi minha experiência profissional como controlador de tráfego aéreo, que sempre utilizei em minhas aulas sobre esferas. Por exemplo, no cálculo de combustível de aeronaves, no percurso Rio-Paris, deve-se considerar que a distância percorrida não será uma reta, cujo gasto seria menor. Esse conhecimento é fundamental para evitar falta de combustível antes do destino, assim como para o cálculo do tempo de voo. Entretanto, esse conteúdo não é trabalhado na Educação Básica. Apesar disso, as duas questões a seguir fizeram parte dos vestibulares para instituições públicas no Rio de Janeiro e ter esse conhecimento ajudava muito na solução delas.

1. (UFRJ – 2007 – Não específica) Um grupo de cientistas parte em expedição do Polo Norte e percorre 200 km em direção ao sul, onde estabelece um primeiro acampamento para realizar experiências. Após algum tempo, o grupo percorre 200 km em direção ao leste, onde instala o segundo acampamento para experimentos. Após três dias, o grupo parte em viagem e percorre 200 km em direção ao norte, onde estabelece o terceiro acampamento. Supondo que a superfície da Terra seja perfeitamente esférica, determine a distância entre o terceiro acampamento e o Polo Norte. Justifique sua resposta (faça um desenho, se preferir).

2. (UERJ – 2005 – 2º Exame de Qualificação) A Terra pode ser representada por uma esfera cujo raio mede 6.400 km. Na representação (1.1), está indicado o trajeto de um navio do ponto A ao ponto C, passando por B.

Qualquer ponto da superfície da Terra tem coordenadas (x, y), em que x representa a longitude e y, a latitude. As coordenadas dos pontos A, B e C estão indicadas na tabela (1.2):

Figura 1.1: Trajeto de um navio do ponto A ao ponto C, passando por B. (Fonte: Internet)

Considerando π igual a 3, a distância mínima, em quilômetros, a ser percorrida pelo navio

Pontos	Coordenadas	
	x	y
A	135°	0°
B	135°	60°
C	90°	60°

Figura 1.2: (Fonte: Internet)

no trajeto ABC é igual a:

(A) 11.200

(B) 10.800

(C) 8.800

(D) 5.600

No Capítulo 1, deste trabalho, serão apresentados aspectos históricos do desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas e alguns dos principais matemáticos que contribuíram para sua evolução.

No Capítulo 2, será dada uma atenção especial à Geometria Elíptica, em função desta trabalhar sobre superfícies esféricas, destacando-se as suas diferenças em relação à Geometria Euclidiana, com demonstração dos principais resultados.

No Capítulo 3, faremos uma reflexão/discussão sobre a importância de se introduzir, no Ensino Médio, algumas ideias acerca da Geometria Elíptica, com a apresentação de uma proposta de aula, na qual resolveremos e analisaremos as questões apresentadas anteriormente. Finalmente, relataremos a aplicação dos exercícios propostos na aula a três turmas, sem a apresentação da teoria, com fins de medir o grau de conhecimento intuitivo acerca do assunto por parte dos alunos.

2 Como surgiram as Geometrias Não Euclidianas

2.1 O método axiomático

Não se sabe se Euclides escreveu *Os Elementos* para uso no ensino ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. O fato é que a impressão causada por esta obra foi tão grande que ela se tornou um modelo sempre que se pensa em demonstrações matemáticas.

Segundo Courant:

> "O método axiomático em Matemática começa pelo menos à época de Euclides. Não é de forma alguma verdadeira a afirmação de que a Matemática grega tenha sido desenvolvida ou apresentada exclusivamente na forma de postulados, conforme os Elementos de Euclides. No entanto, a impressão causada por esta obra foi tão grande que influenciou as gerações seguintes de tal maneira que se transformou num modelo para todas as demonstrações em Matemática."([2], p.262)

De modo geral, o método axiomático pode ser descrito da seguinte maneira: provar um resultado em um sistema dedutivo consiste em demonstrar que este é uma consequência lógica necessária de outros resultados anteriormente provados; estes, por sua vez, devem ser eles próprios provados; e, assim, sucessivamente. O processo de demonstração matemática seria, portanto, a tarefa impossível de uma volta sem fim, a não ser que, nesta volta, fosse permitido parar em algum ponto.

Assim, deve haver uma série de afirmativas, chamadas de **axiomas** ou **postulados**, admitidos como verdadeiros, e para os quais não se exige uma demonstração. Estes são os pontos de partida a partir dos quais outras afirmações, chamadas de **proposições**, são demonstradas segundo rígidas regras lógicas. Uma proposição significativa é chamada **teorema**, uma proposição cujo principal objetivo seja auxiliar na demonstração de um teorema é chamado de **lema**, e uma proposição que resulta facilmente de um teorema é chamado de

corolário.

Se uma teoria qualquer é colocada em uma ordem lógica de tal maneira que se possa mostrar que todos os resultados decorrem de certo número de axiomas, postulados e outras proposições já demonstradas, então se diz que esta teoria está apresentada de forma axiomática. Entretanto, um sistema axiomático deve satisfazer as duas condições seguintes: ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas consequências; cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é consequência deles, sob pena de ser supérfluo. Além disso, é classificado como completo quando todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão podem ser provadas verdadeiras ou falsas.

2.2 O problema do quinto postulado

Por cerca de dois mil anos a Geometria de Euclides foi considerada como a única possível. O livro *Os Elementos* de Euclides é o livro de maior número de edições, depois da Bíblia.

No volume I, Euclides apresenta a Geometria, no modelo axiomático, a partir de 5 postulados:

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade.
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado (Figura 2.1).

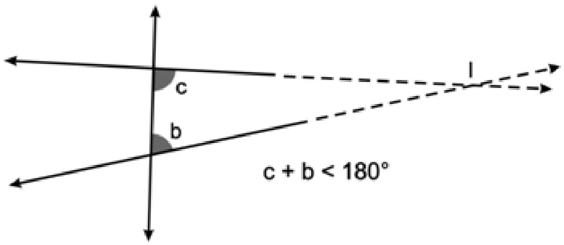


Figura 2.1: Figura que representa o postulado 5.

Além de os postulados 1, 2, 3 e 4 serem simples e evidentes, se caracterizam por serem a base para um sistema axiomático classificado como "uma Geometria". Conhecido como postulado das paralelas, o quinto postulado era considerado pouco evidente e é apresentado em linguagem atual conforme enunciado pelo matemático e físico escocês John Playfair[1] em 1796:

> "dada uma reta e um ponto exterior, existe uma e uma só reta contendo o ponto e paralela à reta dada."

Foram realizadas, desde a Antiguidade, investigações para provar sua validade, ou seja, deduzi-lo a partir dos quatro postulados anteriores. Porém as tentativas falharam e, hoje, dentro do conhecimento matemático, é consenso que sua validade depende diretamente da opção da superfície geométrica para realizar sua prova. De acordo com a substituição que se faça do postulado das paralelas surgem dois tipos clássicos de Geometrias Não Euclidianas: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

Vários matemáticos tentaram provar o quinto postulado de Euclides. Os principais geômetras que realizaram estudos buscando uma prova para o quinto postulado, o das paralelas, segundo Garbi, foram:

> "Posidônio (século I a.C.), Gêmino (século I a.C.), Cláudio Ptolomeu (século II), Proclo (século V), Nasir ed-din (século XIII), Commandino (século XVI), John Wallis (século XVII), Girolamo Saccheri (século XVIII), Johann Heinrich Lambert

[1] John Playfair (1748 – 1819) foi um cientista escocês e matemático, e um professor de filosofia natural na Universidade de Edimburgo. Playfair é lembrado por sua proposta de uma alternativa ao postulado das paralelas de Euclides.

(século XVIII) e Adrien-Marie Legendre (séculoXVIII). Outros matemáticos, tais como Johann Carl Friedrich Gauss, Felix Klein, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, János Bolyai e Georg Friedrich Bernhard Riemann, no período que compreende meados do século XVIII ao final do século XIX, realizaram estudos e apresentaram soluções satisfatórias para o impasse. Suas descobertas marcaram a sistematização das Geometrias Não Euclidianas e, por conseguinte, uma mudança importante de concepção da Matemática."([3])

1. **Euclides**

   Os relatos descritivos sobre Euclides são poucos, ou seja, pouco se sabe sobre ele. Em minhas pesquisas, não encontrei quaisquer narrativas sobre onde e quando nasceu ou morreu, mas constam descritos que afirmam sua atividade como diretor da área de Matemática do Museu de Alexandria, onde teria ensinado e escrito *Os Elementos*, por volta de 300 a.C.. Para muitos, não existem dúvidas quanto aos objetivos de Euclides ao escrever *Os Elementos*, em 13 livros. A maioria dos que escreveram sobre o assunto acreditava que a finalidade era a elaboração de material didático para o ensino, o que, para mim, também parece provável.

   Os Elementos têm uma importância excepcional na história da Matemática e exerce influência até os dias atuais. Mesmo, hoje, existindo outras Geometrias, o ensino da Geometria presente nos programas e nas propostas de ensino de Geometria no âmbito educacional escolar brasileiro, em todos os seus níveis, aborda, principalmente, a Geometria sistematizada nos Elementos.

   Ainda segundo Garbi:

   > "Os Elementos de Euclides estabeleceram um padrão lógico-expositivo que vem sendo seguido até hoje em todas as ciências exatas. Sua influência na maneira de pensar da Humanidade tem sido enorme e pode ser percebida mesmo em áreas que aparentemente nada têm em comum com a Matemática. A introdução da Declaração de Independência dos Estados Unidos, por exemplo, fala de 'verdades evidentes por si mesmas' e desenvolve-se dentro de uma lógica claramente euclidiana." ([3], p.63)

2. **Girolano Saccheri (1667 – 1723)**

Outro matemático, Saccheri, um jesuíta italiano nascido em San Remo, atuou como professor de retórica, filosofia e teologia em Turim, Pavia e Milão, onde teve contato com grandes matemáticos italianos da época, que o apresentaram ao *Os Elementos*. Saccheri interessou-se demasiadamente por eles e a partir de então, dedicou-se ao desenvolvimento de seu agudo raciocínio lógico.

Conhecendo as inúmeras tentativas anteriores para a demonstração do quinto postulado, Saccheri resolveu elaborar sua própria prova. Acredita-se ter sido ele o primeiro a tentar provar o quinto postulado utilizando o método da redução ao absurdo.

Depois de muitos anos de estudo, um pouco antes de sua morte, Saccheri publicou suas conclusões em um famoso livro chamado *"Euclides ab omni naevo vindicatus"* (Euclides livre de todas as máculas). A estratégia utilizada por Saccheri foi estudar o que ocorre em um quadrilátero $ABCD$, em que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são retos e os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são iguais entre si, conforme Figura 2.2.

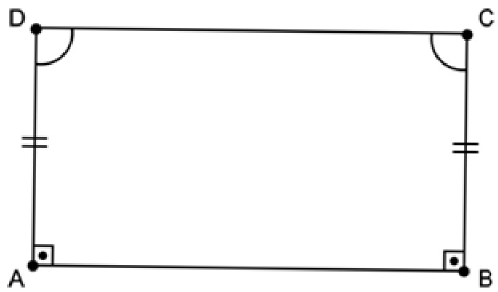


Figura 2.2: Quadrilátero $ABCD$

Observe que os triângulos ABC e BAD são congruentes, caso LAL. Logo, $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{BD}$. Portanto, os triângulos ACD e BDC são congruentes, caso LLL. Assim, os ângulos com vértices em C e D são congruentes. Na Geometria Euclidiana eles são retos, mas esta demonstração depende do quinto postulado. Deste modo, Saccheri considerou três possibilidades na esperança de poder descartar as duas últimas após encontrar algum tipo de absurdo, com o que provaria o postulado das paralelas.

1° - Os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são iguais a 90°.

2° - Os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são iguais e maiores que 90°.

3° - Os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são iguais e menores que 90°.

Para C e D maiores que 90°, conforme Figura 2.3, Saccheri concluiu que a reta seria limitada e ele pensou ter achado um absurdo (mais tarde Riemann iria mostrar que não era).

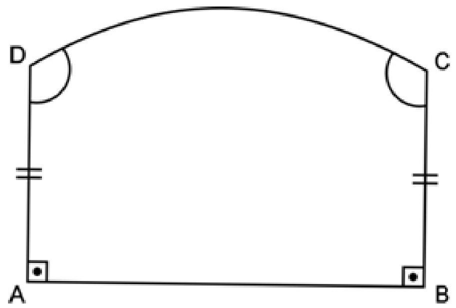


Figura 2.3: Quadrilátero $ABCD$, com C e D maiores que 90°

Para C e D menores que 90°, conforme Figura 2.4, Saccheri não conseguiu chegar a nenhuma contradição.

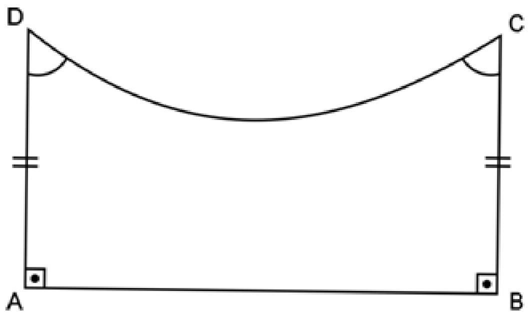


Figura 2.4: Quadrilátero $ABCD$, com C e D menores que 90°

Na verdade o que Saccheri conseguiu fazer, a partir das negativas do quinto postulado, foi provar uma série de teoremas que lhe pareciam bastante estranhos (o que era normal, pois ele estava fora da tradicional Geometria Euclidiana), porém, sem nenhuma contradição. Saccheri acabou por proclamar, segundo Ávila, que:

> "a hipótese que fizemos no início (para C e D menores que 90°) é absolutamente falsa por ser repugnante à natureza da linha reta."([4], p.80)

Assim, segundo Garbi:

"seu livro terminou de forma melancólica porque ele entrara bastante em um mundo novo, passeara por ele e retornara não acreditando em sua existência." ([3], p.246)

3. **Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777)**

Em seu livro *A solução de Poincaré*, Donal O'Shea, retrata aspectos interessantes da bibliografia de Lambert:

> "Lambert nasceu numa família numerosa e a necessidade o forçou a seguir a profissão do pai, alfaiate. Mas ele continuou os seus estudos, conseguindo um cargo de tutor na família de um nobre suíço, o que lhe deu tempo para pesquisar. Lambert era tão excêntrico quanto brilhante. Foi o primeiro a publicar a demonstração de que π é irracional. Foi indicado para a Academia Prussiana de Ciências pelo matemático Leonard Euler (1707 – 1783). Mas Frederico II recusou, tendo dito a um amigo, depois de ser apresentado a Lambert, que acabara de conhecer o maior idiota de toda a Prússia." ([5], p.85)

Lambert fez importantes contribuições no ramo da ótica, cosmologia, filosofia e matemática, dentre as quais destaca-se o livro, *Theorie der Parallelliniem*, que tratava do postulado das paralelas, escrito por ele em 1776, que decidiu não publicar porque não resolvera de forma satisfatória a questão. O livro foi publicado postumamente em 1788.

Na sua dissertação de mestrado, José Maria Eduardo Samuco, analisa os progressos desse matemático:

> "Lambert estudou quadriláteros com três ângulos retos, o que o levou a considerar três hipóteses para a natureza do quarto ângulo. A primeira é a hipótese do ângulo reto, a segunda é a hipótese do ângulo obtuso e a terceira é a hipótese do ângulo agudo. No tratamento destas hipóteses Lambert não se afastou do método de Saccheri. A primeira hipótese conduzia à Geometria Euclidiana. Assim como Saccheri, Lambert rejeitou a hipótese do ângulo obtuso. Fez isto mostrando que sob essa hipótese duas perpendiculares à mesma reta intersectam-se. Não resultava daqui nenhuma contradição com o postu-

> lado das paralelas, mas o fato, para ele, contradizia os restantes axiomas da geometria euclidiana." ([6])

Em seus estudos, Lambert analisou as possibilidades da soma dos ângulos internos de um triângulo serem maiores, menores ou iguais a dois ângulos retos. Segundo Donal O'Shea:

> "Tal como Saccheri, Lambert explorou as consequências de admitir serem falsos os resultados equivalentes ao quinto postulado. Ele chegou às fórmulas para a área do triângulo em termos da soma dos seus ângulos nos casos em que a soma é maior que dois retos, e também quando é menor que dois retos. Ele observou que na esfera, quando se consideram as linhas retas como grandes círculos, então os triângulos têm mais de 180°, e descobriu a fórmula que permite o cálculo correto das áreas desses triângulos. Ele se perguntou se a soma dos ângulos poderia ser menor que dois ângulos retos sobre uma superfície imaginária adequada. Lambert chegou a mencionar esferas cujo raio envolve a raiz quadrada de números negativos."([5], p.85)

4. **Adrien Marie Legendre (1752 – 1833)**

   Legendre foi um estudioso que elaborou pesquisas importantes em vários ramos da Matemática, da Física e da Astronomia. Assim como os demais, também se dedicou às atividades docentes, empenhando-se na promoção do estudo da Geometria Elementar, buscando facilitar seu ensino aos jovens. Legendre é autor de um livro de grande valor para o ensino de Geometria, *Éléments de Géometrie*, e, de acordo com os estudos sobre ele, foi ao escrever seu livro, que Legendre desenvolveu o interesse pelo quinto postulado.

   Nessa época, o livro de Euclides ainda era usado nas escolas, mas alguns o achavam inadequado, sob o ponto de vista didático, sendo assim, o livro de Legendre passou a ter visibilidade, substituindo a obra de Euclides.

   Eléments de Géometrie teve diversas edições, em diferentes línguas, inclusive o português e foi muito usado nas escolas brasileiras durante quase todo o século XIX.

   Segundo Ávila:

   > "em cada uma das sucessivas edições de seu livro, Legendre apresenta uma

> demonstração do quinto postulado, cada demonstração corrigindo erros da demonstração anterior. Foi assim até a última edição, que saiu no ano de sua morte. Mas todas as demonstrações de Legendre continham erros que não tinham como serem sanados.” ([4], p.81)

Nos idos de 1820 e 1830 já se suspeitava que o postulado das paralelas não pudesse ser demonstrado a partir dos outros, isto é, pensava-se que fosse possível desenvolver outras geometrias a partir das diferentes maneiras de negar o postulado das paralelas. E, na verdade, foi o que aconteceu.

Segundo Garbi:

> “Legendre parece jamais ter admitido a possibilidade de existência de outras geometrias e, embora tenha descoberto alguns importantes teoremas, seu trabalho não representou avanços em relação a Saccheri e Lambert”. ([3], p.248)

5. **Johann Friedrich Gauss (1777 – 1855)**

   Considerado um grande matemático de sua época (ficou conhecido como Príncipe da Matemática), Gauss nasceu em 1777 e demonstrou aos sete anos de idade, o seu potencial matemático, ao responder de modo rápido e seguro a seu professor, que a soma dos números inteiros de 1 a 100 não era maior do que a soma de cinquenta pares de números (sendo que a soma dos números de cada par resultava sempre em 101).

   É quase certo que Gauss tenha sido o primeiro a compreender a geometria independente do quinto postulado de Euclides. Ele foi figura dominante da matemática na sua época e suas ideias sobre o tema podem ser lidas nas inúmeras cartas a colegas ao longo de quase trinta anos.

   De início, tal qual alguns antecessores tentaram, Gauss quis provar o postulado das paralelas, deduzindo uma contradição a partir da sua negação (método da redução ao absurdo). Ele julgava que a geometria de Euclides era a geometria do espaço físico. Porém, depois de alguns estudos, ele chegou a conclusão de que o postulado das paralelas era independente dos outros, de tal modo que passou a aceitar a existência de uma nova geometria na qual mais do que uma paralela pode ser traçada a uma reta por um determinado ponto exterior a mesma. Embora Gauss possa ter encontrado a Geometria

Não Euclidiana mais no trabalho de Bolyai e Lobachevsky do que a tenha inventado sozinho, ele também sabia que as bases da matemática, ciência e filosofia do século XIX estavam em jogo.

Em 1817, ao escrever ao seu amigo, o famoso astrônomo amador Wilhelm Olbers[2], segundo Samuco, ele lamentou:

> "Continuo a aproximar-me da convicção de que a necessária verdade da nossa geometria não pode ser provada, pelo menos pelo intelecto humano para o intelecto humano. Talvez noutra vida cheguemos a outras conclusões relativamente à natureza do espaço que presentemente não conseguimos atingir. Até lá temos de colocar a geometria em pé de igualdade, não com a aritmética, que tem uma base a priori, mas com a mecânica." ([6], p.33)

Por volta de 1824, Gauss apurou os detalhes da sua Geometria Não Euclidiana e tencionava publicar as suas ideias, como se pode perceber nesta carta ao colega e matemático alemão Franz Adolph Taurinus[3], segundo Samuco:

> "No que concerne a sua tentativa, eu não tenho nada (ou não muito) a dizer exceto que está incompleta. É verdade que a sua demonstração de que a soma dos três ângulos dum triângulo plano não pode ser maior do que 180° carece de rigor geométrico. Mas isto por si só pode ser facilmente remediado, e não há dúvida que a impossibilidade pode ser provada rigorosamente. Mas a situação é bastante diferente na segunda parte, a assumpção de que a soma dos ângulos não pode ser menor do que 180°; este é o ponto crítico, o recife no qual todos os naufrágios ocorrem. Suponho que este problema não está devidamente aprofundado. Eu ponderei mais de 30 anos e não acredito que alguém pode ter pensado mais do que eu nesta segunda parte, embora eu nunca tenha publicado nada sobre isso. A assumpção de que a soma dos três

[2]Heinrich Wilhelm Olbers Matthias, nasceu em Arbergen, hoje parte de Bremen, e estudou para ser um médico em Göttingen. Após sua graduação em 1780, ele começou a praticar medicina em Bremen. A noite, ele dedicou seu tempo para observação astronômica, tornando o andar superior de sua casa em um observatório e era amigo de Gauss.

[3]Franz Adolph Taurinus (1794-1874) foi um alemão matemático que ficou famoso por seu trabalho em geometria não-euclidiana.

ângulos é menor que 180° conduz a uma geometria curiosa, bastante diferente da nossa (a euclidiana), embora consistente, que desenvolvi com inteira satisfação, de modo que eu possa resolver todos os problemas com base nela, à exceção da determinação da constante, que não pode ser designada a priori. Quanto maior se considera esta constante, mais perto se fica da Geometria Euclidiana, e quando é escolhido um valor infinitamente grande as duas coincidem. Os teoremas desta geometria parecem ser paradoxais e, para os novatos, absurdos, mas uma reflexão calma e fixa revela que eles não contêm nada de impossível. Por exemplo, os três ângulos dum triângulo ficam tão pequenos quanto se quiser se os lados forem suficientemente grandes; contudo a área do triângulo nunca pode exceder um limite definido, independentemente do tamanho dos lados, nem pode atingi-lo. Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta Geometria Não-Euclidiana foram infrutíferos e a única coisa a que é oposta às nossas concepções é que, se é verdade, deve haver no espaço uma magnitude linear, determinada por si mesma (mas desconhecida por nós). Mas parece-me que nós sabemos, apesar da sabedoria da palavra de dizer nada dos metafísicos, bastante pouco ou quase nada mesmo, acerca da verdadeira natureza do espaço, para considerar absolutamente impossível aquilo que nos parece não natural. Se esta Geometria Não-Euclidiana fosse verdade, e fosse possível comparar essa constante com tais magnitudes como encontramos nas nossas medições na terra e nos céus, poderia então ser determinado a posteriori. Consequentemente, em gracejo às vezes expressei o desejo que a Geometria Euclidiana não fosse verdade, uma vez que aí teríamos a priori um padrão absoluto de medição.

Não receio que qualquer homem que demonstrou que possui uma mente criativa matemática não perceba o que se disse acima, mas de qualquer modo, considere-a uma comunicação privada da qual não se faça uso público ou a publicitem. Talvez eu, se tiver mais tempo livre futuramente do que presentemente, torne públicas as minhas investigações." ([6], p.25)

É significativo que Gauss, cuja reputação matemática era inatacável, tenha considerado a nova geometria tão revolucionária que se recusou a publicá-la. Em 1829, ele escreveu em uma comunicação privada ao matemático Friedrich Wilhelm Bessel[4], segundo Samuco:

> "Pode demorar que eu torne públicas as minhas investigações nesta matéria; de fato, isto pode não acontecer no meu tempo de vida, pois temo o clamor dos Beócios[5]". ([6], p.27)

Ainda segundo Samuco:

> "Gauss evitava publicar muitas das suas maiores descobertas. Tinha uma forte aversão à controvérsia e ao debate público. Além disso, ele preferia apurar as suas provas e aprofundar as suas exposições até alcançar uma obra-prima completa e sem falhas, sem falsas e antecipadas partidas ou caminhos alternativos menos perfeitos. Se Gauss tivesse publicado o seu trabalho sobre Geometria Não-Euclidiana em 1824, a história teria lhe atribuído a descoberta desta nova geometria. Em vez disso, o crédito foi para aqueles que publicaram primeiro."([6])

Finalmente, Gauss tomou a decisão de publicar. Em 1831, escreveu a Schumacher, segundo Samuco:

> "Comecei a escrever nas últimas semanas algumas das minhas meditações, parte das quais nunca tinha anteriormente colocado no papel, de tal forma que agora já tenho que pensar novamente em tudo três ou quatro vezes. Mas espero que isto não morra comigo." ([6], p.27)

[4]Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846) foi um alemão matemático, astrônomo e sistematizador das funções de Bessel (que foram descobertas por Daniel Bernoulli). Ele foi contemporâneo de Carl Gauss, também um matemático e físico. O asteroide 1552 Bessel foi nomeado em sua honra.

[5]Habitantes de uma província da Grécia Antiga que ficaram conhecidos pela sua preguiça e ignorância.

Contudo, antes de completar a sua tarefa, Gauss recebeu, em janeiro de 1832, uma cópia do Apêndice de János Bolyai (1802 – 1860) depois de uma primeira cópia que lhe foi enviada em junho de 1831 não ter chegado às suas mãos. Em 14 de fevereiro, Gauss escreveu a Gerling[6], segundo Samuco:

> "Deixe-me acrescentar que hoje recebi da Hungria um pequeno trabalho sobre a Geometria não-Euclidiana, no qual encontro todas as minhas ideias e resultados desenvolvidos com grande elegância, embora numa forma tão concisa que oferece dificuldade a quem não esteja familiarizado com a temática... Considero este jovem geômetra János Bolyai um gênio de primeira classe." ([6], p.27)

Das cartas de Gauss, ficam claras evidências de que ele estudou muito sobre a Geometria não Euclidiana, tinha ideias concretas sobre o assunto, mas a falta de tempo e a necessidade de apresentar um trabalho consistente, que não levantasse polêmica, levaram-no a adiar a publicação dos seus estudos. Justifica-se, então, que seu nome seja associado aos daqueles que tornaram público os seus pensamentos sobre as Geometrias Não Euclidianas.

6. **János Bolyai (1802 – 1860)**

János Bolyai, filho de Farkas Bolyai, que era um matemático romeno muito amigo de Gauss, era brilhante em Matemática. Aos 13 anos, János já se revelara um gênio, dominando completamente os cálculos Diferencial e Integral e outros ramos da Matemática Superior, conhecendo latim em profundidade e sendo exímio violinista.

Segundo Garbi:

> "em alguma fase dos estudos de János, certamente ele e seu pai conversaram sobre as dificuldades envolvendo o quinto postulado e o interesse do próprio Gauss sobre o tema deve ter sido mencionado por Farkas ao seu filho. O fato é que o jovem, motivado por aquele desafio, passou grande parte de seus cinco

[6]Christian Ludwig Gerling (1788 - 1864) foi um matemático alemão. Foi discípulo de Carl Friedrich Gauss, doutorado em 1812 com a tese *Methodi proiectionis orthographicae usum ad calculos parallacticos facilitandos explicavit simulque eclipsin solarem die*, na Universidade de Göttingen.

anos (1817 – 1822) no Colégio Real para Engenheiros, em Viena, pesquisando sobre a Teoria das Paralelas."([3], p.252)

Seu pai, lembrando-se de toda energia que ele próprio desperdiçara em vão naquele problema aconselhou o filho, segundo Donal O'Shea:

"Imploro que você não tente dominar a teoria das paralelas; você vai gastar seu tempo... Não tente... nem pelos meios que mencionou, nem por qualquer outro meio... Atravessei a escuridão melancólica dessa noite e nela enterrei todos os raios de luz, todas as alegrias da vida. Pelo amor de Deus, imploro, desista. Ela é tão assustadora quanto as paixões sensuais, porque também ela pode tomar todo o seu tempo, privá-lo de saúde, da paz de espírito e da felicidade na vida."([5], p.95)

Contudo, János Bolyai não seguiu os conselhos do seu pai. O jovem oficial da artilharia húngara, de 21 anos, escreveu ao seu pai a 3 de novembro de 1823, segundo Garbi:

"... eu fiz descobertas tão maravilhosas que me sinto quase sufocado por elas e seria motivo de grande tristeza se elas fossem perdidas. Quando você as vir, você também as reconhecerá. Por ora, eu posso apenas dizer o seguinte: eu criei um universo inteiramente novo a partir do nada. Tudo o que lhe mandei até agora é apenas um castelo de cartas comparado a uma torre."([3], p. 253)

Em resposta, Farkas manifestou o desejo de incluir o trabalho do filho em um livro que estava escrevendo, chamado *Tentamen Juventutem Studiosan in Elementa Matheseos* (Ensaios sobre os Elementos de Matemática para Jovens Estudiosos) e fez a seguinte advertência, segundo Garbi:

"Se você realmente teve êxito na questão, é melhor não perder tempo em torná-lo público, por duas razões: primeiro, porque as ideias passam facilmente de uma pessoa a outra e alguém pode antecipar-se na publicação; em segundo lugar, há certa verdade em dizer-se que muitas coisas têm sua época, na qual elas são encontradas em vários lugares, como as violetas aparecem em toda parte na primavera." ([3], p.253)

Apesar de sua recomendação ao filho, Farkas demorou para publicar seu livro, que saiu somente em 1832, tendo como apêndice, em 26 páginas, o histórico trabalho de János Bolyai sobre aquilo que denominou A Ciência Absoluta do Espaço. Um exemplar foi encaminhado a Gauss, na compreensível expectativa de que o mesmo reconhecesse o valor das descobertas de János Bolyai, nessa época capitão do Exército Austro-húngaro. Mas a resposta de Gauss frustrou a ambos e enfureceu o jovem matemático, segundo Garbi:

> "Se eu começar afirmando que não me atrevo a elogiar tal trabalho, você certamente ficará chocado por um momento; mas eu não posso agir de outra maneira, porque elogiá-lo redundaria em elogiar a mim mesmo, uma vez que o inteiro conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho tomou, os resultados a que ele foi conduzido, coincidem quase exatamente com minhas próprias meditações, que ocuparam minha mente por cerca de trinta a trinta e cinco anos. Devido a isso, eu me encontro extremamente surpreso. Era minha intenção, a respeito de meu próprio trabalho, do qual pouquíssimo até o presente foi publicado, não permitir que ele fosse conhecido durante minha vida... Por outro lado, era meu plano colocar tudo no papel um dia, de modo que ele não perecesse comigo. Assim, eu estou enormemente surpreso por ter sido poupado desse esforço e imensamente feliz por ter acontecido de haver o filho de meu velho amigo se antecipado a mim de forma tão admirável." ([3], p.254)

János Bolyai viveu momentos conturbados depois da carta de Gauss para seu pai, chegando a ter grande aversão a Gauss e a suspeitar que o próprio pai tivesse passado informações sobre seu trabalho. Garbi, comenta:

> "János tornou-se deprimido e nunca mais voltou a publicar sobre o tema. Nova decepção veio quando ele descobriu, por volta de 1840, que Nikolai Ivanovich Lobachevsky publicara sua Geometria Imaginária em 1829, três anos antes do livro de seu pai. Ao lado de seu excepcional talento, János possuía um temperamento forte e impulsivo, conforme pode-se depreender de um episódio em que se envolveu pouco antes de deixar o exército, em 1833. Durante

um período de caserna, indispôs-se com alguns oficiais de cavalaria e acabou sendo desafiado por 13 deles a duelar com pistolas. Extremamente hábil no tiro, aceitou os desafios de todos, sob a condição de poder descansar, entre um duelo e outro, tocando seu violino. Ao final, saiu-se vencedor nas treze disputas, deixando, um a um, seus desafiantes prostrados no solo. Realmente não faltava coragem a quem não tivera medo de contrariar publicamente 21 séculos de crenças euclidianas." ([3], p.255)

7. **Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856)**

   Lobachevsky estudou na universidade de Kazan, financiado por bolsas escolares e sob a supervisão de Martin Bartels[7], correspondente de Gauss. Ele era um dos três filhos de uma família russa extremamente pobre. Ele pretendia ingressar na área de medicina, mas acabou por se interessar pela matemática devido a Martin Bartels, que adotou um livro para o estudo da história da matemática que tinha uma discussão envolvendo o quinto postulado. Lobachevsky se encantou com o desafio da Teoria das Paralelas.

   As descobertas de Lobachevsky foram divulgadas em uma conferência do Departamento de Matemática e Física da Universidade de Kazan, em 12 de fevereiro de 1826. Em 1829, publicou o seu trabalho Sobre os Fundamentos da Geometria, mas foi criticado e ignorado, possivelmente, por tê-lo escrito em russo. Além disso, as idéias de Lobachevsky punham em dúvida a geometria de Euclides. Certamente, ele foi o primeiro matemático a expor para o mundo a existência de uma geometria diferente da de Euclides. Ele voltou a realizar outras publicações em 1835, 1836 e 1837 sem obter qualquer reconhecimento da comunidade científica. Finalmente, em 1840, Lobachevsky publicou, em alemão, um resumo dos seus estudos e foi muito elogiado por Gauss, que mais tarde conseguiu a eleição de Lobachevsky para a Academia de Ciências de Göttingen. Na Universidade de Kazan, chegou a ser demitidos após 20 anos de magistério e seu último trabalho sobre o tema, em 1855, foi ditado a um auxiliar já que ele estava cego.

8. **Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)**

   A biografia de Riemann retrata um jovem promissor que impressionou Gauss na palestra

[7]Johann Christian Martin Bartels (1769 – 1836), matemático alemão, foi tutor de Gauss em Brunswick e educador de Lobachevsky na Universidade de Kazan.

de habilitação para ser professor da Universidade de Göttingen. No livro *A Rainha das Ciências*, Garbi, relata a infância e o seu desenvolvimento acadêmico:

> "Nasceu na aldeia rural de Breselenz, província de Hannover. Filho de um pastor luterano de poucas posses, mas que tudo fez para proporcionar ao filho o acesso aos estudos universitários. Tímido, introspectivo e com saúde frágil, inicialmente estudou na Universidade de Berlim e, mais tarde, transferiu-se para Göttingen, onde Gauss ainda reinava como o maior matemático do mundo. Seu doutoramento aconteceu nesta universidade e sua tese versava sobre funções de variável complexa." ([3])

Em 1854 abriu-se a possibilidade de Riemann tornar-se professor de Göttingen. Ele deveria apresentar um trabalho diante de uma banca examinadora chefiada pelo próprio Gauss. Geralmente, os candidatos apresentavam uma lista contendo três temas para que a banca escolhesse um deles, quase sempre o primeiro. Gauss escolheu o terceiro tema, intitulado "Sobre as hipóteses que constituem os fundamentos da Geometria".

Segundo Garbi:

> "Vamos ouvir o que esse jovem tem a dizer sobre isso". Durante a apresentação do tímido candidato, o velho Príncipe foi exibindo no rosto uma expressão de felicidade diante do que ouvia e balançava a cabeça em sinal de aprovação. Mais tarde comentou: "A dissertação apresentada por Herr Riemann oferece evidência convincente de uma mente criativa, ativa, verdadeiramente matemática e de uma imaginação gloriosamente fértil." ([3], p.261)

Segundo Donal O'Shea:

> "Aquela apresentação redefiniu três mil anos de geometria e o fez num alemão simples, quase sem notações matemáticas. Ela só seria publicada após a morte de Riemann, cerca de uma década depois, e ainda se passariam mais uma ou duas décadas para que o *mainstream*[8] matemático tomasse conhecimento."([5],

[8] *Mainstream* ("corrente principal") é um termo inglês que designa o pensamento ou gosto corrente da maioria da população.

p.103)

Saccheri, Lambert, Legendre, Lobachevsky, Bolyai e Gauss haviam refutado a hipótese do ângulo obtuso. Lambert fez isto mostrando que sob essa hipótese duas perpendiculares à mesma reta intersectam-se, o que, para ele, seria um absurdo, pois não poderia haver geometria em que a soma dos ângulos internos de um triângulo fosse maior que dois retos. Na Geometria Euclidiana, a soma é igual a dois retos e na Geometria Hiperbólica a soma é menor que dois retos. Por outro lado, a soma ser maior que dois retos não tinha em nenhuma geometria. Isto poderia ser um indício de que alguma coisa estava faltando e Riemann resolveu pesquisar o problema e mostrou que não tinha absurdo nenhum. Na sua Geometria Esférica, duas paralelas sempre se intersectam, conforme figura (2.5) e a soma dos ângulos internos de um triângulo, nesta geometria, é maior que 180°, que será demonstrado mais a frente neste trabalho. O problema da hipótese do ângulo obtuso fora resolvido de forma brilhante.

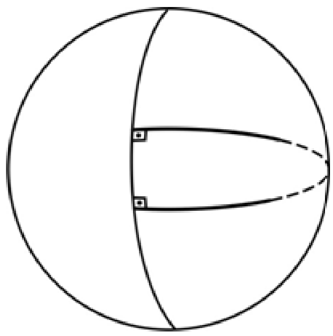


Figura 2.5: Na sua geometria esférica, duas paralelas sempre se intersectam.

Segundo Garbi:

> "Se as propriedades da Geometria Hiperbólica causam espanto, as da Elíptica causam incredulidade." ([3], p.264)

Riemann, o gênio que encantou Gauss, morreu antes de completar 40 anos, de tuberculose. Em sua breve existência, deixou seu nome gravado nos mais diversos ramos da Matemática, como o atestam expressões como Integral de Riemann, Função Zeta de Riemann, Condições de Cauchy-Riemann, Conjectura de Riemann, Teorema de Riemann-Roch, Teorema do Mapeamento de Riemann, etc. Georg Friedrich Bernhard Riemann foi, sem dúvida alguma, um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

3 Um pouco da Geometria Elíptica

A Geometria Elíptica ou de Riemann é desenvolvida na superfície esférica. É um mundo novo e, neste mundo, retas são "curvas", chamadas geodésicas, e a soma dos ângulos de um triângulo é maior que dois retos. As retas não são mais infinitas e sim ilimitadas e fechadas. A princípio, parece estranho, no entanto, no ciclo trigonométrico podemos marcar qualquer ângulo simplesmente dando voltas na circunferência. Fazemos isso o tempo todo e não nos parece estranho.

É nesta geometria que é natural descrever o mundo dos aviadores e navegadores, onde a distância entre dois pontos é medida pela distância ao longo do arco mais curto de uma grande circunferência (que veremos com mais detalhes nos próximos capítulos).

3.1 Definições preliminares

Superfície Esférica: *Chama-se superfície esférica de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que, a distância entre O e P seja igual a r, conforme Figura 3.1.*

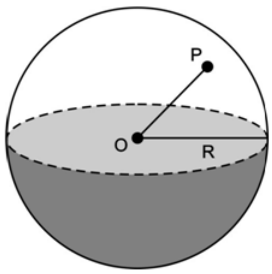


Figura 3.1: Superfície Esférica.

Corda da Superfície Esférica: *Chama-se corda da superfície esférica ao segmento de reta determinado por dois pontos distintos da superfície esférica, conforme Figura 3.2.*

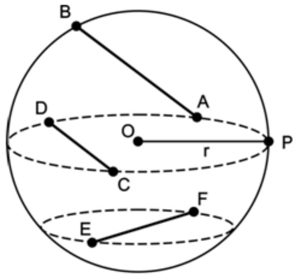


Figura 3.2: Corda da Superfície Esférica.

Diâmetro da Superfície Esférica*: Uma corda da superfície esférica que contém o centro O é dita diâmetro da superfície esférica, conforme Figura 3.3.*

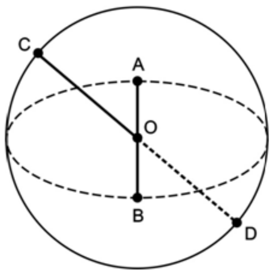
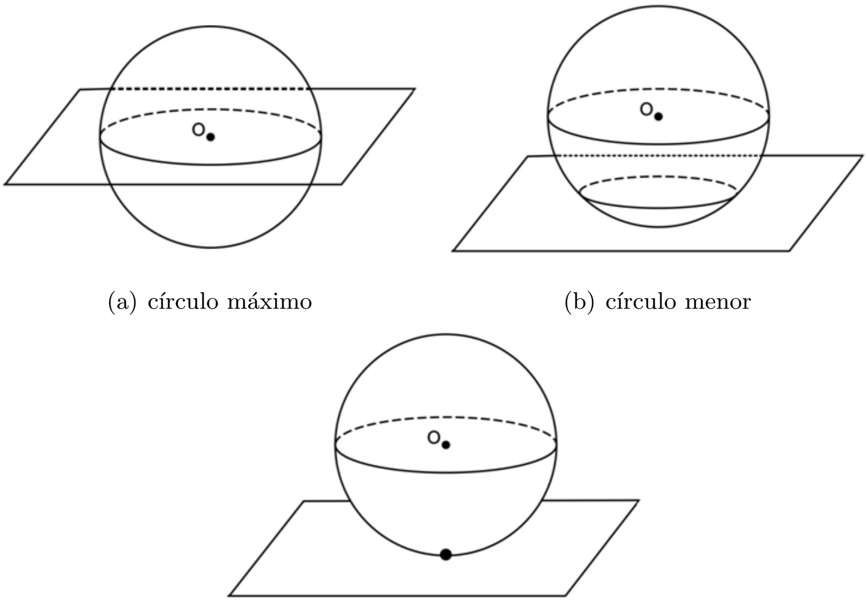


Figura 3.3: Diâmetro da Superfície Esférica.

Pontos antípodas*: Dado um ponto A qualquer na superfície esférica, seu antípoda* A'*, é o único ponto da superfície esférica tal que o segmento de reta* AA' *contém o centro* O*.*

De acordo com a Figura 3.3 o ponto A é o antípoda do ponto B e vice-versa e, os pontos C e D são pontos antípodas um do outro. Em resumo, dois pontos distintos de uma superfície esférica são antípodas quando são diametralmente opostos, isto é, são os extremos de um diâmetro da superfície esférica.

Seção Plana*: Toda interseção de um plano com a superfície esférica será uma circunferência ou círculo máximo (Figura 3.4(a)), uma circunferência ou círculo menor (Figura 3.4(b)) ou um ponto, caso o plano seja tangente a superfície (Figura 3.4(c)).*



(a) círculo máximo

(b) círculo menor

(c) um ponto

Figura 3.4: Seção Plana.

Uma circunferência máxima da esfera resulta da interseção de um plano que passa pelo centro da esfera (Figura 3.5). Todas as circunferências máximas da esfera são iguais, pois todas têm como raio o raio da esfera. Uma circunferência é dita menor quando a interseção de um plano com dois pontos da superfície esférica não passa pelo centro da esfera.

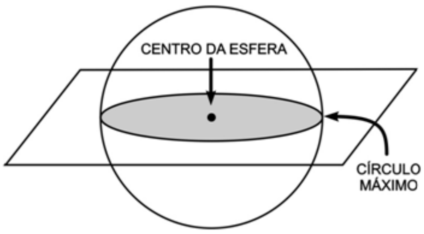


Figura 3.5: Circunferência Máxima da Esfera.

***Hemisfério**: Qualquer plano que passe pelo centro da superfície esférica a decompõe em duas partes chamadas hemisférios, conforme Figura 3.6.*

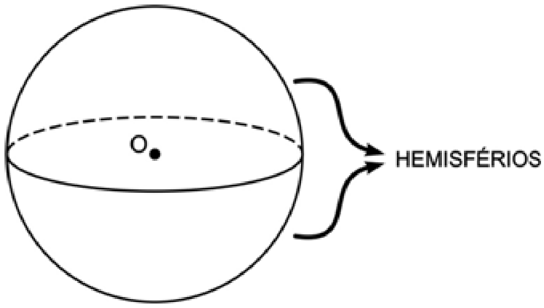


Figura 3.6: Hemisfério.

3.2 Definições e resultados principais da Geometria Elíptica

Utilizando como modelo para a Geometria Elíptica, uma geometria descrita sobre uma esfera, tem-se as seguintes definições:

Retas: *As retas correspondem, no modelo esférico, às circunferências ou círculos máximos (também são chamadas geodésicas). Observa-se que por dois pontos quaisquer sobre uma esfera sempre será possível traçar uma reta. Além disso, quaisquer duas retas sempre se interceptam em dois pontos (Figura 3.7).*

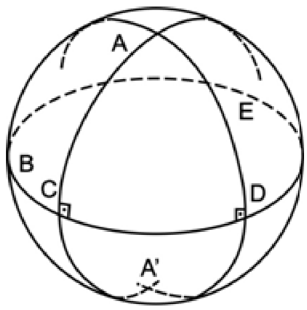


Figura 3.7: Retas.

Ângulo entre retas ou ângulo esférico: *Ângulo esférico é o ângulo formado pela interseção de dois arcos de círculos máximos. Sua medida é a mesma do ângulo plano* θ *formado pelas retas* t_1 *e* t_2 *tangentes (Figura 3.8), no ponto de intersecção, aos lados do ângulo.*

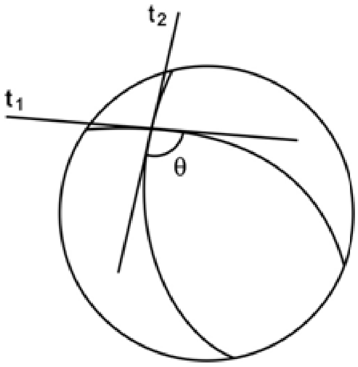


Figura 3.8: Ângulo entre retas ou ângulo esférico.

Distância na superfície esférica: *Sejam dois pontos A e B da superfície esférica de centro O. O plano secante α que contém estes dois pontos e o centro da esfera determina uma circunferência máxima que contém A e B, conforme Figura 3.9. A distância entre os pontos A e B é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por esses pontos e essa distância corresponde ao segmento de reta no modelo esférico.*

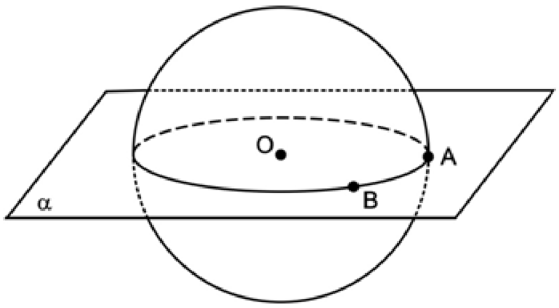


Figura 3.9: Distância na superfície esférica.

Polos: *Na Figura 3.7 as circunferências máximas, ou seja, as retas ACA' e ADA', perpendiculares à reta $BCDE$, interceptam-se nos pontos antípodas A e A'. A reta perpendicular às retas ACA' e ADA' é a polar comum dos pontos A e A' e estes dois pontos são os pólos da reta $BCDE$. A distância de A ou A' a qualquer ponto da reta $BCDE$ é constante. Observe-se que duas retas secantes como as retas ACA' e ADA' têm em comum uma única reta perpendicular $BCDE$. Na Geometria Elíptica não existem retas paralelas e nem retas não secantes, pois quaisquer duas retas nesta geometria sempre se encontram.*

Distância de qualquer reta ao um de seus pólos: *Na Geometria Elíptica a* *distância de qualquer reta a um de seus polos é uma constante igual para todas as retas. Uma reta tem comprimento finito que é igual a quatro vezes a distância polar. Temos, na Figura 3.10, que $HJ = JI = IK = KH$ e cada uma dessas distâncias HJ, JI, IK ou KH são as distâncias polares e a soma das quatro distâncias é igual ao comprimento da reta. Assim, a reta tem comprimento igual a quatro vezes a distância polar.*

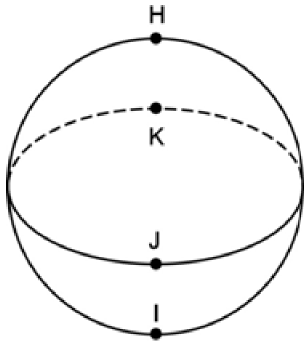


Figura 3.10: Distância de qualquer reta ao seu pólo.

Fuso Esférico*: Um fuso, conforme Figura 3.11, é uma região da superfície esférica compreendida entre duas semicircunferências máximas com os dois pontos extremos em comum. Esses pontos, diametralmente opostos, são chamados os vértices do fuso. O ângulo do fuso é, por definição, o ângulo α entre as duas semicircunferências máximas que constituem os lados do fuso.*

Um fuso de ângulo $\alpha = \pi$ é um hemisfério, cuja área é $2\pi r^2$ (metade da área da superfície esférica). Um fuso de ângulo $\frac{\pi}{2}$ ocupa $\frac{1}{4}$ da superfície esférica, de modo que sua área é πr^2. De um modo geral, a área de um fuso é proporcional ao seu ângulo. Assim sendo, se o ângulo do fuso mede α radianos então a área desse fuso é igual a $2\alpha r^2$.

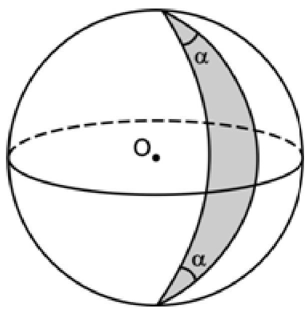


Figura 3.11: Fuso Esférico.

***Fuso Completo**: Dado um fuso φ na esfera, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de φ é ainda um fuso φ', chamado de fuso antípoda de φ. A reunião de φ e φ' ($\varphi \cup \varphi'$) é chamada de fuso completo, conforme Figura 3.12. O fuso φ e seu antípoda φ' têm a mesma área.*

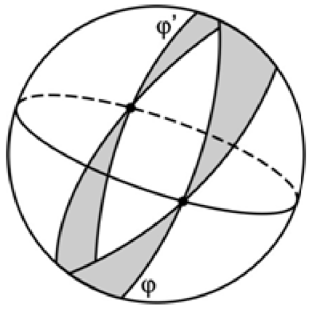


Figura 3.12: Fuso Completo.

***Triângulo Esférico**: Uma região sobre a superfície esférica chama-se triângulo esférico quando está contida propriamente em algum hemisfério e é limitada por três arcos de circunferências máximas, cujos extremos coincidem dois a dois. Esses arcos são menores do que uma semicircunferência máxima e correspondem a 3 segmentos de reta, formando, assim, os lados do triângulo no nosso modelo (Geometria Esférica). Na Figura 3.13 abaixo estão representados o triângulo esférico ABC e seu antípoda $A'B'C'$.*

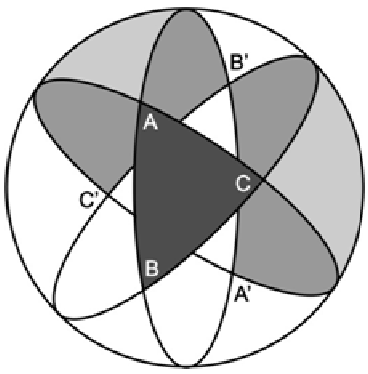


Figura 3.13: Triângulo Esférico.

Uma diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Elíptica que logo se destaca diz respeito a soma dos ângulos de um triângulo. Enquanto na primeira a soma dos ângulos do triângulo é igual a 180°, na segunda esta soma é um valor entre 180° e 540°. Para demonstrar a soma dos ângulos do triângulo na Geometria Elíptica, precisamos do teorema de Girard e para demonstrá-lo é preciso saber o teorema abaixo e algumas definições e fórmulas dadas anteriormente.

Teorema 1 *Seja ϕ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios H e H'. As partes R e R' do fuso completo ϕ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha r^2$.*

Demonstração: *A região hachurada na Figura 3.14 é a parte de um fuso completo contida num hemisfério. Vamos mostrar que esta área vale $2\alpha r^2$.*

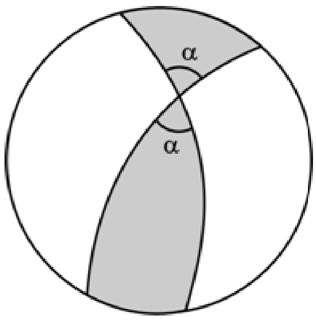


Figura 3.14: Parte de um fuso completo contida num hemisfério

Sendo E uma esfera qualquer, consideremos a função $f : E \to E$, que transforma cada ponto $x \in E$ em seu antípoda $f(x) = x'$. Esta função tem as seguintes propriedades:

1. *Se x é um ponto do hemisfério H, seu antípoda $x' = f(x)$ pertence ao hemisfério H'.*
2. *Se x é um ponto do fuso completo ϕ, seu antípoda $x' = f(x)$ também pertence a ϕ.*
3. *Dada qualquer região R na superfície esférica, a região antípoda $R' = f(R)$, formada pelos pontos antípodas dos pontos de R, têm a mesma área que R.*

Portanto, se chamarmos de R a parte do fuso completo ϕ situada no hemisfério H (Figura hachurada 3.14), veremos que sua região antípoda R' é a parte de ϕ situada no hemisfério

H'. Assim temos: Área de ϕ (fuso completo) = Área de R (figura hachurada no hemisfério H) + Área de R' (está no hemisfério H' e não aparece na Figura 3.14) Como as áreas de R e R' são iguais, vem:

$$\text{Área de } \phi = 2 \cdot (\text{área de } R).$$

Mas sabemos que a área de um fuso é $2\alpha r^2$ e, portanto, a área do fuso completo ϕ vale $4\alpha r^2$. Logo temos que:

$$4\alpha r^2 = 2 \cdot R$$

e, portanto,

$$R = 2\alpha r^2,$$

o que demonstra o teorema.

Teorema 2 ***(Teorema de Girard)*** *Se α, β e δ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \delta = \pi + \dfrac{A}{r^2}$, onde A é a área desse triângulo e r é o raio da superfície esférica.*

Demonstração: *Consideremos um hemisfério H que contenha o triângulo dado, conforme Figura 3.15.*

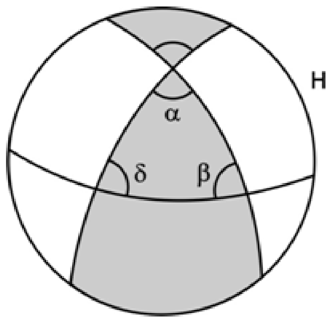


Figura 3.15: Um hemisfério H contendo o triângulo dado

Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo α, até encontrarem o bordo do hemisfério H, obtemos uma região R_α contida no hemisfério H, cuja área mede $2\alpha r^2$, de acordo com o teorema que foi visto anteriormente. Fazendo o mesmo com os ângulos β e δ, obtemos as regiões R_β e R_δ, cujas áreas medem respectivamente $2\beta r^2$ e $2\delta r^2$. A reunião dessas três regiões é o hemisfério H, com o triângulo dado sendo contado três vezes, duas vezes a *mais do que devia. Segue-se que a soma das áreas das regiões R_α, R_β e R_δ é igual a área do hemisfério H mais duas vezes a área do triângulo. Assim: $2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\delta r^2 = 2\pi r^2 + 2 \cdot A$, lembrando que a área do hemisfério H é a metade da área da superfície esférica. Dividindo ambos os membros da equação por $2r^2$ vem:*

$$\alpha + \beta + \delta = \pi + \frac{A}{r^2}.$$

Teorema 3 *A soma dos ângulos de um triângulo esférico está entre $180°$ e $540°$, não assumindo esses valores.*

Demonstração:

i - Para um triângulo esférico de área muito pequena, isto é, quando A tende para zero no teorema de Girard a soma $\alpha + \beta + \delta$ tende para π , porém, não assume este valor. Ou seja:

$$\alpha + \beta + \delta = \pi + \frac{A}{r^2}.$$

Quando A tende para zero (mas não pode atingir este valor, senão não temos triângulo) a fração $\frac{A}{r^2}$ também tende para zero e a soma $\alpha + \beta + \delta$ tende para π.

ii - Por outro lado podemos imaginar um triângulo esférico que ocupe quase todo o hemisfério que o contém. Para isso tome os três vértices equidistantes e bem próximos da circunferência máxima que separa um hemisfério do outro. Lembre-se que no outro hemisfério temos o triângulo antípoda. Logo, se isso ocorrer a área A do triângulo esférico tende para a área do hemisfério ($2\pi r^2$), então a soma $\alpha + \beta + \delta$ tende para 3π, entretanto, não assume este valor. Ou seja:

$$\alpha + \beta + \delta = \pi + \frac{A}{r^2}.$$

Quando A tende para um hemisfério sua área tende para $2\pi r^2$, (mas não pode atingir este valor senão não teríamos triângulo) e a fração $\frac{A}{r^2}$ tende para 2π e a soma $\alpha+\beta+\delta$ tende para 3π.

De i e ii podemos concluir que a soma dos ângulos de um triângulo esférico está entre π e 3π ou entre $180°$ e $540°$.

4 A Geometria Elíptica e a Educação Básica

Podemos pensar na Terra como uma grande esfera. Assim, as linhas de longitude da Terra são todas semicircunferências máximas, mas a única linha de latitude que é uma circunferência máxima é o equador. Assim, as outras linhas de latitude não são circunferências máximas e, portanto, não são retas. Observe que sempre que falarmos da Terra estaremos falando da sua superfície e, portanto, de trajetórias apenas nessa superfície. Até porque, se não estivéssemos restritos à superfície, a menor distância entre dois pontos seria a linha reta no espaço que atravessa a crosta terrestre e liga os dois pontos.

Por qualquer ponto na superfície esférica, e em qualquer direção, passa sempre uma circunferência máxima. Uma forma de se ver isso é tratar o ponto dado como pólo e considerar a coleção de linhas de longitude até o pólo oposto. Por exemplo, suponhamos que estejamos no Rio de Janeiro e queremos ir até Paris. Não vamos pensar no Rio de Janeiro estando na sua localização exata. Vamos imaginá-lo sendo um pólo, conforme Figura 4.1. Uma das linhas de longitude que passam pelo pólo Rio de Janeiro passa também por Paris. É essa a menor distância entre Rio de Janeiro e Paris e é esse o exemplo que costumo dar em sala para meus alunos.

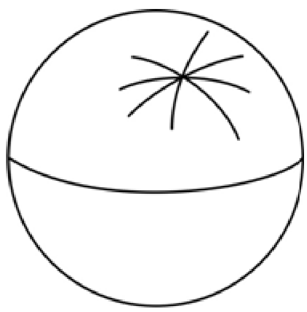


Figura 4.1: Rio como um pólo.

Se quisermos pensar num vôo e se levarmos em conta apenas a menor distância, então certamente este vôo será numa circunferência máxima (é claro que outros fatores podem modificar a rota de um vôo. Condições meteorológicas, por exemplo.). De acordo com O'Shea:

"Por exemplo, Pequim e Filadélfia estão numa mesma latitude e não é o equador. Se viajássemos de uma cidade para a outra seguindo a linha de latitude, iríamos percorrer 16208 quilômetros. A trajetória pelo grande círculo tem 11000 quilômetros e passa próximo ao pólo Norte. É bem mais curta e seria vista como uma reta pelo piloto do avião." ([5], p.121)

4.1 Uma proposta de aula

A Geometria Elíptica é interessante de se discutir nas escolas, pois os alunos já viajaram de avião ou navio ou já ouviram falar de viagens aéreas ou marítimas. É um assunto que prende a atenção, não é cheio de fórmulas para se "decorar", quase todos entendem os princípios básicos e, em minha opinião, é importante que se fale nele. Por conta disto tudo é apresentado a seguir, uma proposta de aula tendo como temática a Geometria Esférica.

Aula: Introdução a Geometria Esférica.

<u>Objetivos:</u>

- Apresentar aos alunos uma nova geometria. Acreditamos que eles não deveriam sair do Ensino Médio pensando que só existe a Geometria Euclidiana, visto que vivemos fora do plano, na Terra, que é aproximadamente esférica;

- Promover uma interdisciplinaridade ao relacionar esta geometria nova com as aulas de geografia, destacando as longitudes e latitudes como círculos máximos e menores;

- Mostrar que a soma dos ângulos de um triângulo, nesta geometria, é maior que 180°. Não é objetivo dessa aula, apresentar uma demonstração formal desse resultado e, sim, ilustrá-lo com o auxílio de recursos computacionais. Por experiências anteriores, sei que os alunos ficam entusiasmados quando se toca neste assunto, principalmente, ao misturar com aviação. Entretanto, a grande maioria perde o interesse quando se vê às voltas com fórmulas e contas que julgam complicadas. É claro que, às vezes aparecem alunos interessados em demonstrações desse tipo e, por esse motivo, propomos deixá-la à disposição de quem queira.

Série Indicada:

A melhor é a 3ª série do Ensino Médio, pois além da maturidade dos alunos, eles já tiveram contato com os pré-requisitos para a aula, tais como: Trigonometria, Geometria Espacial, Regra de Três, entre outros

Tempo necessário:

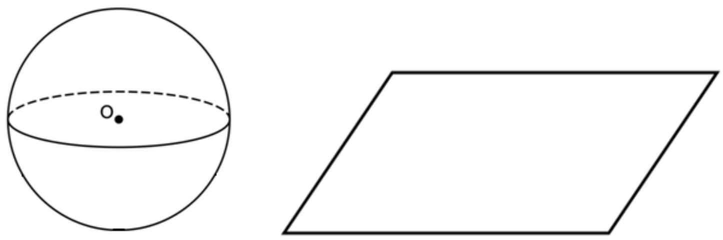
Para a apresentação da aula proposta, sugerimos um tempo de 50 minutos.

Indicamos começar a aula com a seguinte questão motivadora para os alunos discutirem, darem sugestões e tentarem resolver.

Questão 1:

a - É possível formar um triângulo com três ângulos retos na esfera, conforme Figura 4.2(a):

b - E no plano, conforme Figura 4.2(b):



(a) Esfera. (b) Plano.

Figura 4.2: Figuras para questão 1

Com esse exercício, deseja-se verificar apenas se o aluno consegue identificar a diferença entre uma geometria no plano, que ele estudou a vida inteira e uma geometria fora do plano, no caso a esfera, que ele possivelmente nunca ouviu falar, mas que pode ter uma ideia intuitiva. A seguir á apresentada a solução do exercício.

Solução:

a - Sim, conforme Figura 4.3

b - Não. No plano a soma dos ângulos de um triângulo no plano é 180° e não tem como ter três ângulos retos cuja soma é 270°.

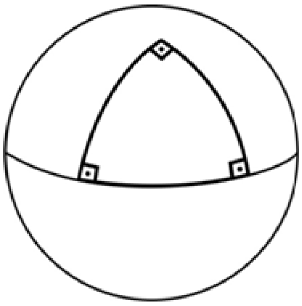


Figura 4.3: Figura disponível em ([5], p.122).

Entendendo a importância de se adquirir cultura matemática, propomos que se faça um breve relato histórico sobre o surgimento desta geometria, falando um pouco de Euclides até Riemann. Dessa forma, os alunos teriam uma boa idéia de como se desenvolve uma teoria matemática.

É importante que o professor apresente as principais definições nessa nova geometria como, por exemplo, reta, segmento de reta, pontos antípodas, distância entre pontos, círculos máximos e menores, ângulo entre duas retas e triângulo esférico.

Para auxiliar na visualização, sugerimos que o professor pode utilizar o software Spherical Easel, que pode ser obtido gratuitamente no sítio `merganser.math.gvsu.edu/easel/`. Como o programa roda remotamente, é necessário que o computador esteja conectado à rede.

Nesse programa é possível construir, sobre a superfície de uma esfera, os elementos geométricos, conforme Figuras 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7:

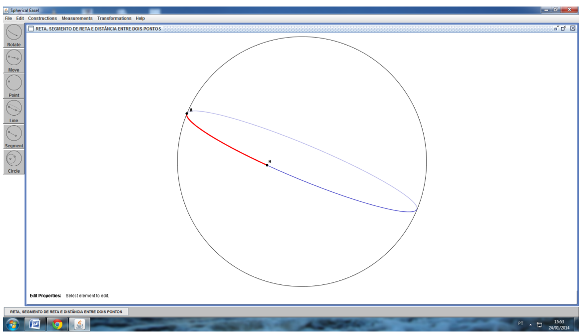


Figura 4.4: Reta - menor distância entre dois pontos

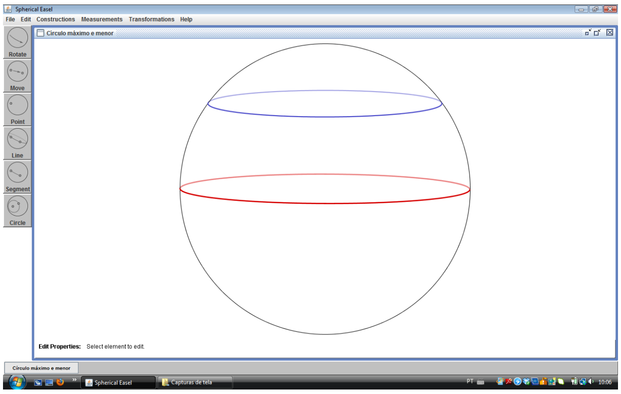


Figura 4.5: Círculos máximo e menor

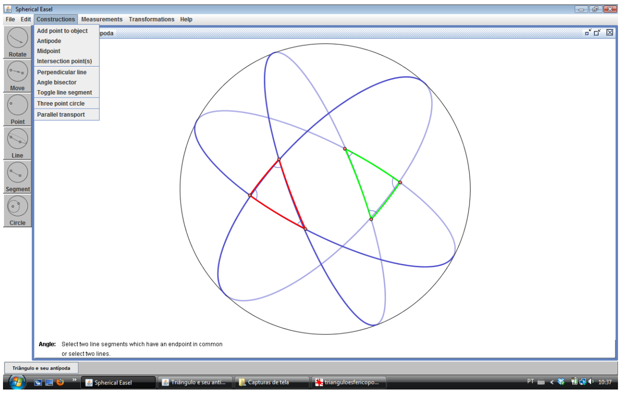


Figura 4.6: Triângulo Esférico e seu antípoda

Uma aplicação bem interessante do programa diz respeito às rotas aéreas, citadas no início do capítulo. Pode-se marcar os pontos de partida e chegada e girar a esfera (o que é possível de ser feito) de modo que o primeiro seja o polo norte, por exemplo, e, em seguida traçar uma linha de longitude que passe pelo outro ponto.

Outra ferramenta importante do programa é a possibilidade de realizar medidas desses elementos geométricos, conforme Figura 4.8. Desse modo, o professor pode medir os ângulos internos de um triângulo arbitrário e verificar, junto com os alunos que a soma é maior do que 180°, conforme Figura 4.9. Aqui será necessária a conversão entre unidades de medida, visto que o programa fornece o valor do ângulo em radianos.

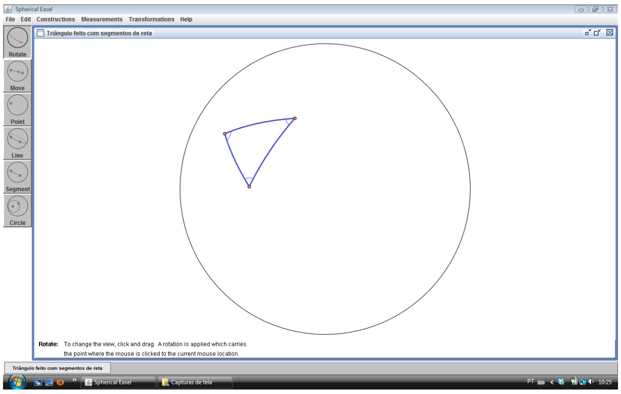


Figura 4.7: Triângulo Esférico com segmentos de retas

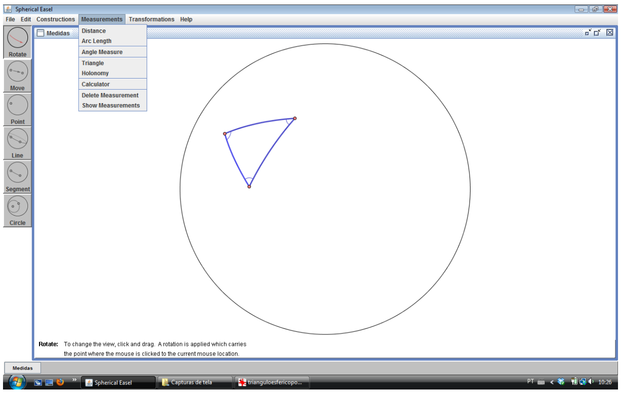


Figura 4.8: Medidas dos ângulos

Após apresentar as definições, é interessante que o professor deixe os alunos utilizarem o programa para construir livremente triângulos, marcar os ângulos internos e somar as medidas dos mesmos. Eles verão que esta soma sempre será maior do que 180°.

Acreditamos que, para muitos, será uma enorme surpresa. Fazendo este trabalho, certa vez fui à casa de um amigo, também professor de Matemática. De noite a filha dele, formanda de história, perguntou se estava tudo bem e ele comentou que eu estava com um problema para mostrar que a soma dos ângulos do triângulo era maior que 180°. Ela não teve dúvida e afirmou: “não vai conseguir nunca.”

É importante destacar aos alunos que, embora este tema não esteja no programa dos vestibulares o seu conhecimento, além de ser enriquecedor, os ajudaria na resolução das questões que caíram em vestibulares passados. Sugerimos finalizar a aula apresentado e resolvendo as questões a seguir dos vestibulares da Universidade Federal do Rio de Janeiro

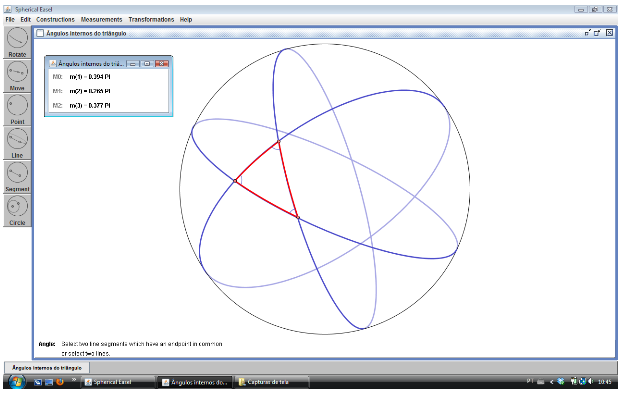


Figura 4.9: Triângulo esférico,seu antípoda e as medidas dos ângulos do triângulo

(UFRJ) e da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), respectivamente.

Questão 2: (UFRJ – 2007 – Não específica)

Um grupo de cientistas parte em expedição do Polo Norte e percorre 200 km em direção ao sul, onde estabelece um primeiro acampamento para realizar experiências. Após algum tempo, o grupo percorre 200 km em direção ao leste, onde instala o segundo acampamento para experimentos. Após três dias, o grupo parte em viagem e percorre 200 km em direção ao norte, onde estabelece o terceiro acampamento. Supondo que a superfície da Terra seja perfeitamente esférica, determine a distância entre o terceiro acampamento e o Polo Norte. Justifique sua resposta (faça um desenho, se preferir).

Solução:

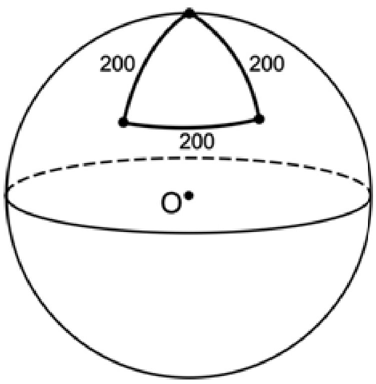


Figura 4.10: Solução da questão 2

Como estamos na esfera, o grupo de cientistas irá retornar ao Polo Norte e a distância entre o terceiro acampamento e o Polo é zero, conforme figura (4.10).

Questão 3: (UERJ – 2005 – 2º Exame de Qualificação)
A Terra pode ser representada por uma esfera cujo raio mede 6.400 km. Na Figura 4.11, está indicado o trajeto de um navio do ponto A ao ponto C, passando por B.

Figura 4.11: Trajeto de um navio do ponto A ao ponto C, passando por B. (Fonte: Internet)

Qualquer ponto da superfície da Terra tem coordenadas (x, y), em que x representa a longitude e y, a latitude. As coordenadas dos pontos A, B e C estão indicadas na tabela (4.12):

Considerando π igual a 3, a distância mínima, em quilômetros, a ser percorrida pelo navio

Pontos	Coordenadas	
	x	y
A	135°	0°
B	135°	60°
C	90°	60°

Figura 4.12: (Fonte: Internet)

no trajeto ABC é igual a:

(A) 11.200

(B) 10.800

(C) 8.800

(D) 5.600

Solução:

1. Figura com os trajetos (4.13)

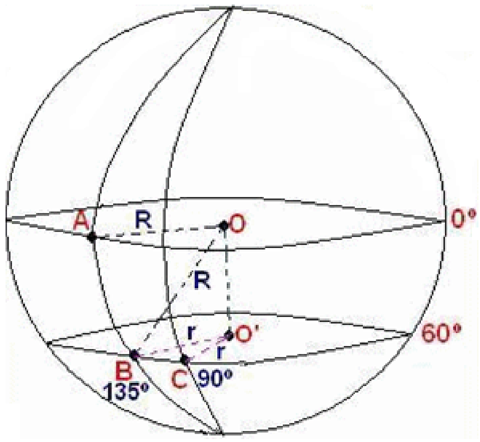


Figura 4.13: Os trajetos da questão 3

2. Da figura (4.13), vamos calcular o trajeto AB, conforme figura (4.14), que é parte de uma circunferência máxima, ou seja, tem o mesmo raio que a Terra.

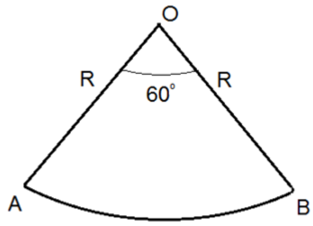


Figura 4.14: Trajeto AB

$$\frac{360^\circ}{2\pi R} = \frac{60^\circ}{m(AB)}$$
$$m(AB) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6400 \cdot 60^\circ}{360^\circ}$$
$$m(AB) = 6400km$$

3. Para calcularmos a medida do trajeto BC precisamos conhecer o raio da circunferência menor (4.15), relativa a latitude 60° sul. Da figura inicial (4.13) temos o triângulo abaixo:

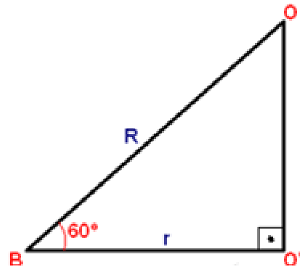


Figura 4.15: Raio da circunferência menor

$$\cos 60° = \frac{r}{R}$$
$$r = R \cdot \cos 60°$$
$$r = 6400 \cdot \frac{1}{2}$$
$$r = 3200km$$

4. Agora, sabendo o raio da latitude 60° sul, podemos calcular a medida do trajeto BC (4.16). Da figura inicial, temos:

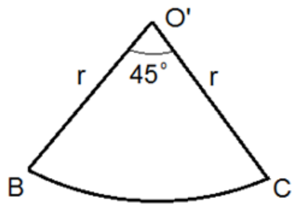


Figura 4.16: Trajeto BC

$$\frac{360°}{2\pi R} = \frac{45°}{m(BC)}$$
$$m(BC) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3200 \cdot 45°}{360°}$$
$$m(BC) = 6400km$$

5. Agora, somando os trajetos AB e BC, temos: Total percorrido $= 6400 + 2400 = 8800km$

4.2 Relato de experiência

Como eu pretendia fazer meu trabalho de conclusão de curso sobre Geometrias Não Euclidianas, em particular, Geometria Elíptica, me vieram a cabeça algumas questões que caíram em vestibulares no Rio de Janeiro e que, no meu entendimento, os alunos do Ensino Médio tiveram muita dificuldade em acertar, pois essas questões ultrapassavam os limites da Geometria Euclidiana, que é a base de toda geometria ensinada no ciclo básico das escolas no Brasil. Não tenho informações das instituições quanto aos percentuais de acerto destas questões, mas sei que meus alunos tiveram muita dificuldade na época. Então resolvi fazer uma pesquisa para verificar se minha suspeita se confirmaria.

Os três exercícios apresentados na proposta de aula foram aplicados em três colégios distintos, sem que fossem dadas as definições da Geometria Elíptica. O objetivo era aferir o grau de conhecimento intuitivo das propriedades dessa Geometria por parte dos alunos.

Vamos nomear as escolas pelas letras A, B e C. Todos os alunos já tinham visto o assunto esfera, não precisaram se identificar e não teve nenhuma influência nas médias escolares. Foram 18 alunos da Escola A, 46 da Escola B e 80 da Escola C. Todos os questionários que foram devolvidos ao professor completamente em branco eu descartei da pesquisa, pois não sei se foi desconhecimento ou se o aluno não quis participar da pesquisa. Na questão 3, da UERJ, mesmo ela sendo de múltipla escolha, quem simplesmente marcou uma letra, ainda que certa, eu considerei questão em branco. No site da UERJ tem uma revista eletrônica com o percentual de acerto das questões, mas, infelizmente, eles têm a partir do Vestibular de 2009 e esta questão é de 2005.

Com o intuito de facilitar a tabulação dos resultados, as respostas foram dividas em grupos, a partir de uma observação inicial dos questinários. Dessa forma, as questões foram corrigidas da seguinte maneira:

<u>Questão 1 - a</u>

Tipos de respostas:

I: O aluno acertou e fez o desenho do triângulo esférico.

II: O aluno acertou e não fez o desenho do triângulo esférico.

III: O aluno respondeu não ser possível construir o triângulo.

IV: O aluno deixou a questão em branco.

Questão 1 - b

Tipos de respostas:

I: O aluno acertou.

II: O aluno respondeu ser possível construir o triângulo.

III: O aluno deixou a questão em branco.

Questão 2

Tipos de respostas:

I: O aluno acertou.

II: O aluno encontrou 200 km, ou seja, ignorou o fato de estar na superfície esférica e fez como se estivesse no plano.

III: O aluno encontrou um resultado diferente de zero e de 200 km, que eram os dois resultados comumente esperados.

IV: O aluno deixou a questão em branco.

Questão 3

Tipos de respostas:

I: O aluno acertou.

II: O aluno encontrou 11200 km, ou seja, no trajeto BC também usou o raio da Terra.

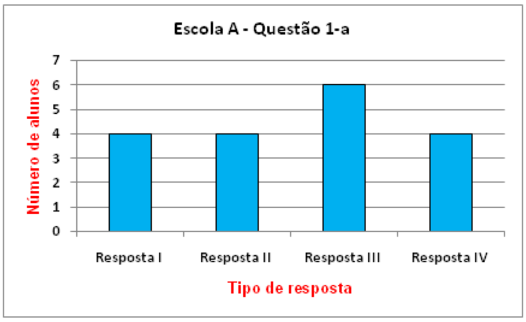
III: O aluno acertou o trajeto AB e não soube encontrar BC.

IV: O aluno encontrou um resultado diferente de 8800 km e 11200 km.

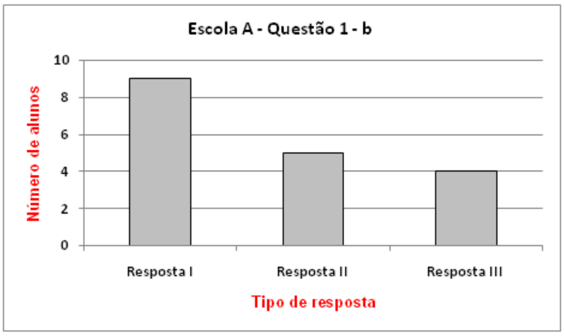
V: O aluno deixou a questão em branco.

Escola A – 18 alunos

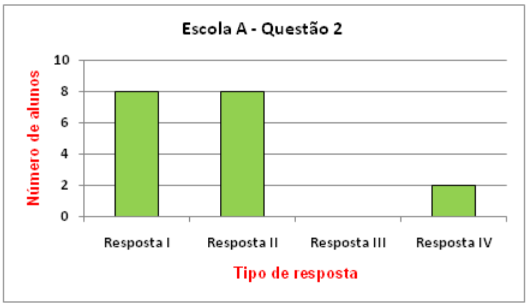
Escola A - Questão 1 - a	
Resposta I	4
Resposta II	4
Resposta III	6
Resposta IV	4



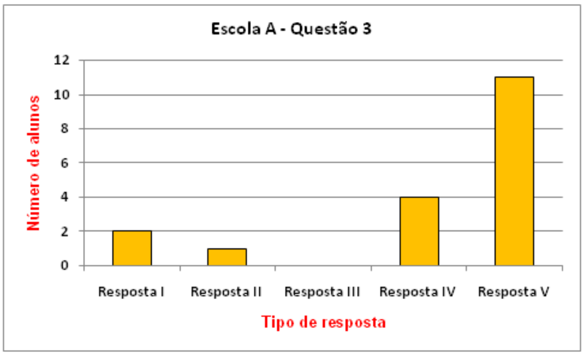
Escola A - Questão 1 - b	
Resposta I	9
Resposta II	5
Resposta III	4



Escola A - Questão 2	
Resposta I	8
Resposta II	8
Resposta III	0
Resposta IV	2

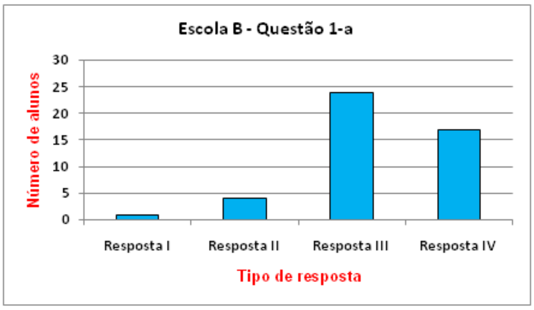


Escola A - Questão 3	
Resposta I	2
Resposta II	1
Resposta III	0
Resposta IV	4
Resposta V	11

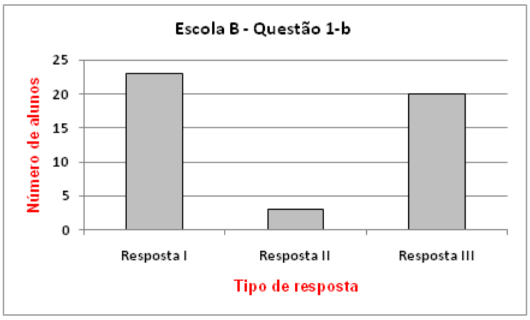


Escola B – 46 alunos

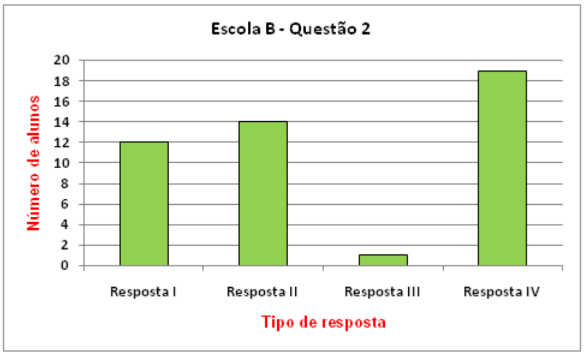
Escola B - Questão 1 - a	
Resposta I	1
Resposta II	4
Resposta III	24
Resposta IV	17



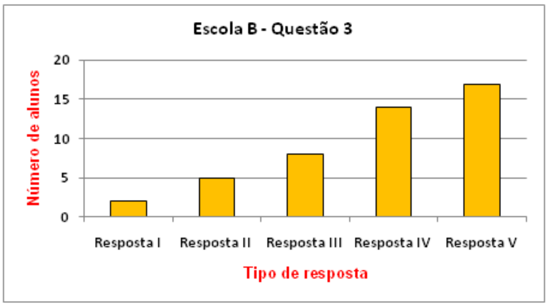
Escola B - Questão 1 - b	
Resposta I	23
Resposta II	3
Resposta III	20



Escola B - Questão 2	
Resposta I	12
Resposta II	14
Resposta III	1
Resposta IV	19

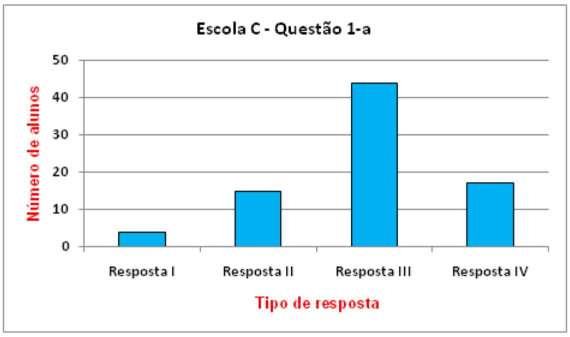


Escola B - Questão 3	
Resposta I	2
Resposta II	5
Resposta III	8
Resposta IV	14
Resposta V	17

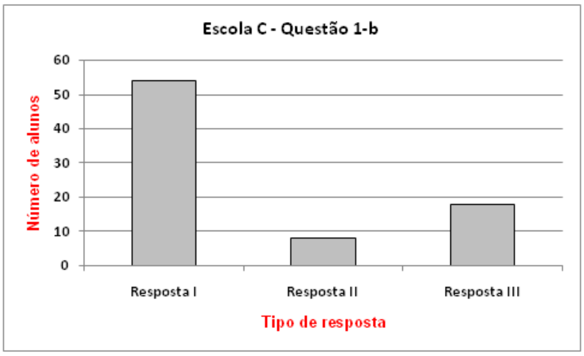


Escola C – 80 alunos

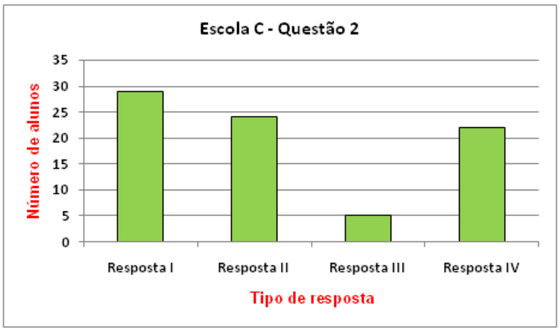
Escola C - Questão 1 - a	
Resposta I	4
Resposta II	15
Resposta III	44
Resposta IV	17



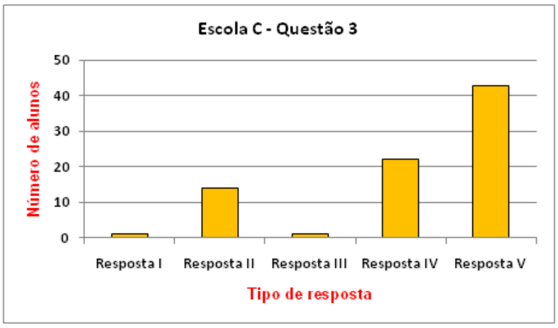
Escola C - Questão 1 - b	
Resposta I	54
Resposta II	8
Resposta III	18



Escola C - Questão 2	
Resposta I	29
Resposta II	24
Resposta III	5
Resposta IV	22

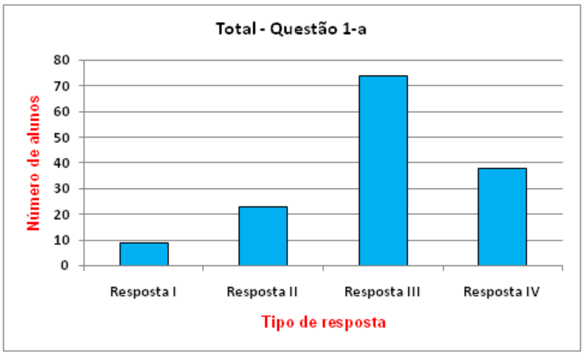


Escola C - Questão 3	
Resposta I	1
Resposta II	14
Resposta III	1
Resposta IV	22
Resposta V	43

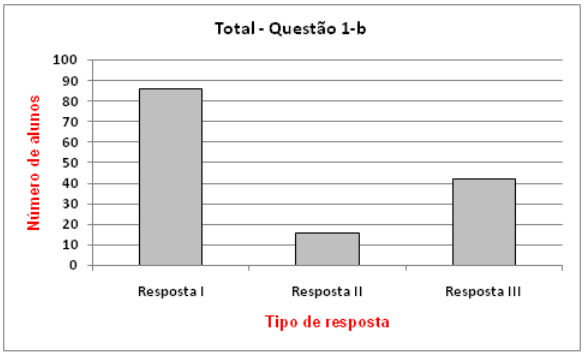


As três escolas juntas – 144 alunos

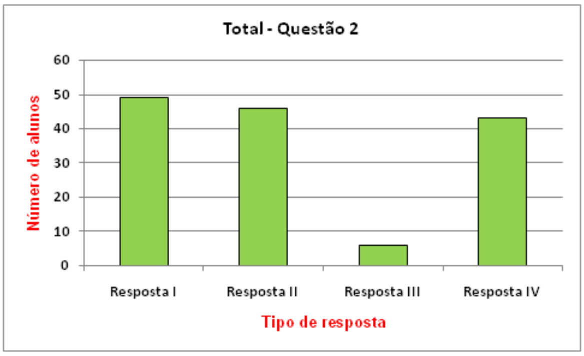
Total - Questão 1 - a	
Resposta I	9
Resposta II	23
Resposta III	74
Resposta IV	38



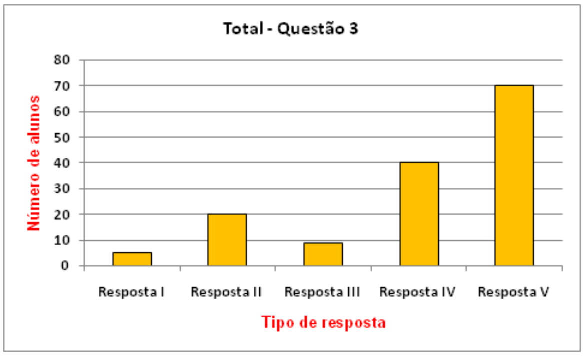
Total - Questão 1 - b	
Resposta I	86
Resposta II	16
Resposta III	42



Total - Questão 2	
Resposta I	49
Resposta II	46
Resposta III	6
Resposta IV	43



Total - Questão 3	
Resposta I	5
Resposta II	20
Resposta III	9
Resposta IV	40
Resposta V	70



Na questão 1-a eu esperava muito erro e, no entanto, trinta e dois alunos responderam sim, o que corresponde a 22% dos pesquisados. Em compensação, eu esperava que todos os alunos respondessem não na questão 1-b, mas cinquenta e oito alunos não o fizeram, ou seja, 40% dos pesquisados erraram. Como eu achei uma quantidade grande demais de erros nesta letra b, fiquei pensando se o erro não estava na interpretação do enunciado, pois não é possível que 40% dos alunos que terminam o ensino médio não saibam isto. Talvez o fato de eu ter colocado o desenho do plano tenha complicado alguns alunos.

Na questão 2, dos cento e quarenta e quatro alunos, quarenta e nove acertaram a questão. Quarenta e seis alunos encontraram 200 km, ou seja, ignoraram o fato de estar na superfície esférica e fizeram como se estivessem no plano. Seis alunos encontraram resultado diferente de zero ou 200 km e quarenta e três alunos não faziam ideia nem de como começar a questão, deixando-a em branco.

A questão 3 era uma questão difícil. Assim, apenas cinco alunos acertaram a questão, um percentual de aproximadamente 3%. Vinte e nove alunos fizeram parcialmente a questão, acertando uma das duas partes que a questão exigia. Quarenta alunos fizeram totalmente errado e setenta alunos deixaram a questão em branco. Quase 50% dos alunos não sabiam concluir nada da questão.

O que podemos constatar depois dessa pesquisa, já que os números não costumam mentir, é que um percentual ínfimo de alunos tem uma pequena noção de argumentos não euclidianos, mas sem nenhum domínio concreto. O que nos leva a uma questão que eu não tenho resposta: caso ensinássemos noções de geometria esférica, esse quadro mudaria?

5 Considerações finais

Quando pensei neste trabalho o primeiro detalhe que veio a minha mente foi: vou misturar com tráfego aéreo. Todas as minhas aulas de esfera sempre tiveram um pouco de tráfego aéreo. Sempre utilizo os conhecimentos dos alunos do que seja latitude e longitude para mostrar como se calcula a menor distância na esfera. Sem entrar em detalhes do que seja uma geodésica, eu mostrava a eles como se calcula a menor distância entre duas cidades para se fazer o cálculo de combustível necessário para a viagem. Então resolvi planejar um voo e calcular as distâncias percorridas. Mas, comecei a achar alguns empecilhos: voar a que altitude? A altitude do avião iria interferir muito na distância percorrida se comparado com o raio da Terra? E um voo a baixa altitude? O consumo aumenta muito e eu teria que saber a autonomia do avião. Tentei, com alguns colegas controladores de tráfego aéreo, se eles teriam algo neste sentido, mas o que eu consegui foi uma promessa de um vídeo com um voo de instrução, numa cabine. Como já fiz vários voos deste tipo, sei que as informações conseguidas, não teriam como serem aproveitadas num trabalho de matemática. Conversando com meu orientador, professor Ronaldo, ele deu a ideia de fazer um trabalho com Geometria Não Euclidiana, especificamente, Geometria Elíptica. Eu me lembrei das questões do vestibular e tentei escrever um pouco sobre a Geometria Elíptica. Como já disseram, se a Geometria Hiperbólica causa espanto a Elíptica causa incredulidade.

Na minha opinião, a relevância de mostrar aos alunos, na Educação Básica, a existência das Geometrias Não Euclidianas surge da necessidade de mostrá-los que a Geometria Euclidiana, que eles aprenderam ao longo de suas vidas, não resolve todos os nossos problemas. Sem contar, que daríamos um enorme auxílio aos professores de geografia que lutam para tentar mostrar latitudes, longitudes e fusos horários. Um aluno não pode chegar ao final da Educação Básica achando que só existe a Geometria Euclidiana. Até porque não é o ambiente em que ele vive!

As Geometrias Não Euclidianas formam um ramo da matemática importante e bonito do ponto de vista histórico e educacional, como vimos, e os professores em formação devem ser preparados para ensinar esta disciplina. Porém, isso não ocorre na realidade. Eu me formei na Universidade Federal Fluminense (UFF) e, na época, não sei hoje, não tinha esta matéria como obrigatória. Naquele tempo, eu já trabalhava em tráfego aéreo e queria estudar alguma coisa nesse sentido. Meu coordenador na UFF, orientou-me para escolher uma eletiva, em que o professor elegia temas interessantes e levava à sala para discussão. Um dos temas era Geometria Não Euclidiana e esse foi o único contato que tive com a matéria na minha formação. Tenho certeza que muitos colegas nunca ouviram falar nestas Geometrias. Não digo nem estudar a fundo, mas, simplesmente, saber que existem. Segundo Barreto e Tavares:

> "Os resultados de uma pesquisa realizada em sites de Instituições de Ensino Superior brasileiras, a fim de verificar o estado da arte do ensino das Geometrias Não Euclidianas nos cursos de Licenciatura em Matemática. De 166 Instituições pesquisadas, apenas 12 apresentavam, na matriz curricular, alguma disciplina cujo título evidencia o estudo de Geometrias Não Euclidianas, 06 com disciplinas obrigatórias e 06 com disciplinas optativas ou eletivas. Aproximadamente 7% das 166 Instituições formam professores que sabem da existência de outras geometrias além da euclidiana."([7])

Vale uma reflexão do que disse o matemático Henri Poincaré, que afirma que "nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra, apenas é mais conveniente". Esta frase quer dizer que, uma geometria não é melhor do que outra, mas, se aplica aquela que melhor descreve um determinado contexto. Pois, segundo Coutinho:

> "para o engenheiro ou carpinteiro, a Geometria adequada é a que aprendemos na escola, enquanto que o marinheiro, nas suas grandes travessias, usa a Geometria Esférica, que, considerada no espaço de duas dimensões, seria uma das Geometrias de Riemann." ([1])

Não estou querendo aqui criar mais uma matéria a se ensinar aos alunos. Apenas acrescentar, ao estudo de esferas, o assunto Geometria Elíptica. Aproveitar um tema real, para que eles tenham conhecimento da existência desta Geometria. No entanto, acho que as

Universidades deveriam preparar o professor para falar sobre esse assunto. Infelizmente, ao pesquisar diversos textos para realizar este trabalho, observei que existem colegas, muitos, que não sabem sequer o significado Geometria Euclidiana. Deveria haver uma maior abordagem das Geometrias Não Euclidianas nos cursos de licenciatura e com isso ser possível apresentar, em uma sala de aula, os conceitos básicos desta geometria, já que esta é de extrema importância na resolução de vários problemas reais.

A Passo a passo do programa Spherical Easel

1. Construção de reta ou circunferência máxima (geodésica):

   1°– Clicar no ícone **line**;

   2°– Clicar num ponto da circunferência que fica na tela do programa e arrastar.

   A reta, na Geometria Esférica, está pronta.

2. Construção de circunferências menores, que não são retas:

   1°– Clicar no ícone **circle**;

   2°– Clicar num ponto da circunferência que fica na tela do programa e arrastar.

   A circunferência menor está pronta. Para visualizar melhor, as vezes ajuda ir em rotate. Clicar em rotate, ir à circunferência, segurar e girar.

3. Construção de segmento de reta:

   1°– Clicar no ícone **segment**;

   2°– Clicar num ponto da circunferência que fica na tela do programa ou no seu interior e arrastar. Pronto.

   O segmento de reta, na Geometria Esférica, está pronto.

4. Construção de triângulo esférico:

   A - Usando retas:

   1°– Construir três retas;

   2°– Achar as três interseções que são os vértices do triângulo.

   OBS. Se quiser sumir com os pontos que aparecem é só ir em: **Edit**, **hide** e clicar em cima do ponto que deseja excluir.

   B - Usando segmentos de retas:

1°− Construir três segmentos de retas, que se intersectam.

5. Construção de antípoda:

   1°− Clicar em **constructions**, **antipode** e depois clicar no ponto que deseja encontrar o antípoda.

6. Para formatar:

   A - Vértices: Se quiser nomear os vértices: clicar em **edit** e **properties**. Depois, clicar no vértice que deseja nomear. Cuidado, pois pode estar marcado hiden. É só desmarcar.

   B - Linhas: Se quiser nomear, ressaltar ou trocar cor: clicar em **edit** e **properties**. Depois, clicar na linha que deseja editar.

7. Para medir ângulos no triângulo: ir em **measurements**, **angle measure**. Clicar nas duas retas que formam o ângulo, no sentido anti-horário. O programa irá marcar o ângulo na figura e irá abrir uma caixa com as medidas dos ângulos em radianos.
   OBS. O programa só trabalha em radianos.

8. Fazendo o triângulo com segmentos de reta o programa te dá as medidas de arcos (lados), ângulos e área:

   1°− Construir um triângulo com segmentos de reta. Ir em: **measurements**, **triangle**. Depois, clicar em todos os lados do triângulo, no sentido anti-horário, e o programa abrirá uma caixa com as medidas.

Referências Bibliográficas

[1] COUTINHO, L. *Convite às geometrias não-euclidianas.* 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

[2] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

[3] GARBI, G. G. *A rainha das ciências.* São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[4] ÁVILA, G. *Várias faces da matemática - tópicos para licenciatura e leitura geral.* São Paulo: Blucher, 2007.

[5] SHEA, D. O. *A solução de poincaré – em busca da forma do universo.* Rio de Janeiro - São Paulo: Record, 2009.

[6] SAMUCO, J. M. E. *A génese da geometria hiperbólica.* 2005. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2005.

[7] DOS SANTOS BARRETO, M.; TAVARES, S. Introdução às geometrias não euclidianas na educação básica. Technical report, IF Fluminense, Rio de Janeiro, 2010.