Universidade Estadual de Santa Cruz

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O RESGATE DO ENSINO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

por

Rodrigo Duarte de Souza[†]

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Ilhéus - BA

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes obtido através da SBM.

Rodrigo Duarte de Souza

O RESGATE DO ENSINO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Ilhéus
2013

Rodrigo Duarte de Souza

O RESGATE DO ENSINO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Universidade Estadual de Santa Cruz

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Ilhéus
2013

S729 Souza, Rodrigo Duarte de.

O resgate do ensino das construções geométricas na educação básica / Rodrigo Duarte de Souza. – Ilhéus, BA: UESC, 2012.

46f. : Il.

Orientador: Sérgio Mota Alves.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui bibliografia.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Construções. 3. Ensino fundamental. I. Título.

CDD 516

Rodrigo Duarte de Souza

O RESGATE DO ENSINO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 23 de fevereiro de 2013:

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves
Orientador

Prof. Dr. André Nagamine

Fabíolo Moraes Amaral

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral

Ilhéus - 2013

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos e esposa,
tesouros preciosos de
minha vida, que tanto
colaboraram ao longo dessa
caminhada e que, assim
como eu, sentiram a dor da
ausência durante os longos
períodos de estudo.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

A Deus, pelo dom da vida e por guiar meus passos ao longo dessa caminhada, dando-me força para sempre seguir em frente, sustentando-me em Seus braços nos momentos de fraqueza.

Aos meus pais, Walter e Vera Lúcia, pelo exemplo e educação, que construíram com sabedoria e amor a base forte que me dá a sustentação necessária para buscar sempre crescer, mas sem perder de foco a humildade e a simplicidade.

A minha esposa Elizangela que, acima de tudo, sempre foi minha amiga, companheira de todos os momentos, que me deu todo o apoio necessário, toda a segurança e, sobretudo, o alimento para minha alma: seu amor.

Aos meus filhos Ana Clara e Daniel, que sentiram a ausência do papai ao longo desses dois anos, com os estudos e as viagens, mas que sabem que todo sacrifício e dedicação são em busca do crescimento e do melhor para nossa família.

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Sérgio Mota Alves, que durante todo o curso soube guiar a nossa turma à união, nos tirou as vaidades e nos fez reconhecer que cada um, com suas potencialidades e fraquezas, era indispensável ao amadurecimento coletivo. À sua dedicação e colaboração na construção deste trabalho.

Aos professores e tutores que ao longo do curso compartilharam conosco seus saberes e experiências.

Aos queridos colegas do PROFMAT, por toda a colaboração e enriquecimento ao longo do curso... àqueles que tornaram-se amigos, aos que tornaram-se irmãos, cada um foi fundamental na edificação dessa família que construímos.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para essa conquista, ou que por ela torceram, toda minha gratidão e carinho.

RESUMO

Desde a antiguidade os gregos desenvolveram as construções geométricas, associadas de maneira indissolúvel à Geometria. Com o decorrer dos anos, no Brasil, e com a promulgação da LDB 5692/71, através da qual o Desenho Geométrico deixa de ser uma disciplina obrigatória da grade curricular, o ensino das construções geométricas gradativamente deixou de ser ministrado nas escolas da Educação Básica. O presente trabalho propõe o resgate do ensino das construções geométricas com régua e compasso, associado intrinsecamente ao ensino da geometria plana, dentro da Educação Básica, com o propósito de possibilitar ao educando desenvolver as habilidades motoras inerentes ao uso das ferramentas de desenho e, sobretudo, o desenvolvimento dos conceitos, propriedades, teoremas de geometria, necessários à compreensão das etapas do processo de construção. Apresenta uma adaptação de baixo custo e eficiente das ferramentas de desenho para utilização tanto em quadro de giz, quanto em quadro de fórmica ou vidro, que utilizem marcador para quadro branco. Finalizando o trabalho, apresentam-se algumas propostas de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, associando os conceitos da geometria euclidiana e as construções geométricas com régua e compasso, ressaltando o anseio do desenvolvimento futuro de material orientador para educadores e educandos a fim de fomentar o estudo e o ensino das construções geométricas na Educação Básica.

Palavras-chave: Construções Geométricas, Geometria, Educação Básica.

ABSTRACT

Since ancient Greeks developed the geometric constructions, indissolubly linked to the geometry. Over the years, in Brazil, and with the approval of LDB 5692/71 by which the Geometric Design is no longer a compulsory subject in the curriculum, the teaching of geometric constructions gradually ceased to be taught in schools of Basic Education . This paper proposes the rescue of the teaching of geometric constructions with ruler and compass, intrinsically linked to the teaching of plane geometry, in Basic Education, with the purpose to enable the student to develop motor skills inherent in the use of drawing tools and especially the development of concepts, properties, theorems of geometry needed to understand the stages of the construction process. Presents an adaptation low cost and efficient design tools for use in both blackboard, as in wood table or glass table, using a whiteboard marker. Finishing work, we present some proposals for activities to be developed in the classroom, combining the concepts of Euclidean geometry and geometric constructions with ruler and compass, noting the desire of guiding future development material for teachers and students to encourage the study and teaching of geometric constructions in Basic Education.

Keywords: Geometric Constructions, Geometry, Basic Education.

SUMÁRIO

1 Introdução **1**

1.1 Objeto de estudo, motivação e definição do tema 1

1.2 Justificativa do tema 2

1.3 Estrutura e organização do trabalho 3

2 O ensino das construções geométricas **5**

2.1 Construções geométricas com régua e compasso 5

2.2 As construções geométricas como ferramenta para o aprendizado da geometria 6

2.3 Os *Elementos* e as bases das construções geométricas 9

3 Adaptação das ferramentas de desenho para o professor **13**

4 Propostas de atividades para a exploração das construções **19**

4.1 Roteiro de atividade 1 21

4.1.1 Conteúdo abordado 21

4.1.2 Objetivos 21

4.1.3 Texto orientador 21

4.1.4 Explorando os conceitos básicos do Livro I dos Elementos 22

4.1.5 Explorando a atividade 25

4.2 Roteiro de atividade 2 28
4.2.1 Conteúdo abordado 28
4.2.2 Objetivo 28
4.2.3 Texto orientador 29
4.2.4 Compreensão do processo de construção 29
4.2.5 Estruturação do método axiomático 29
4.2.6 Representação simplificada da construção 30
4.2.7 Explorando a atividade 31
4.3 Roteiro de atividade 3 32
4.3.1 Conteúdo abordado 32
4.3.2 Objetivo: 32
4.3.3 Texto orientador 32
4.3.4 Compreensão do processo de construção 33
4.3.5 Estruturação do método axiomático 33
4.3.6 Representação simplificada da construção 34
4.3.7 Explorando a atividade 35
4.4 Roteiro de atividade 4 36
4.4.1 Conteúdo abordado 36
4.4.2 Objetivo: 36
4.4.3 Texto orientador 36
4.4.4 Compreensão do processo de construção 37
4.4.5 Estruturação do método axiomático 38
4.4.6 Representação simplificada da construção 38
4.4.7 Explorando a atividade 39

5 Considerações finais **41**

Referências 45

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Objeto de estudo, motivação e definição do tema

O interesse em explorar as possibilidades da reintrodução na educação básica das construções geométricas com régua e compasso, associadas à teoria da geometria plana tem relação direta com minha formação escolar, na qual trabalhávamos com tais construções ao longo das quatro séries finais do 1º grau, na disciplina Educação Artística, bem como com minha atuação profissional em instituições educacionais de nível fundamental e médio.

No que diz respeito à formação pessoal na educação básica, o contato com a pureza, o rigor e precisão das construções geométricas, baseadas em princípios elementares, permitiu-me o desenvolvimento de habilidades motoras e, sobretudo, o aprimoramento do raciocínio lógico na busca de soluções para as situações propostas e o enriquecimento dos conceitos geométricos.

Quanto à experiência profissional, a partir da atividade docente e da observação do cotidiano da sala de aula, pude identificar as dificuldades apresentadas pelos educandos na compreensão das construções geométricas, no manuseio das ferramentas de desenho e na relação com os conceitos da geometria euclidiana. Outro aspecto relevante dentro da observação profissional foi a constatação de que, com o passar dos anos, os livros didáticos de Matemática restringiram as situações a serem exploradas por meio das construções geométricas com régua e compasso, além de ser comum apresenta-las como uma sequência de passos a serem adotados, sem explorar a riqueza dos conceitos, propriedades e teoremas geométricos inerentes às construções.

Retornando à questão da formação básica, pude constatar, a nível pessoal, a relevância da construção dos conceitos e do aprendizado fomentados através das construções geométricas em minhas aulas de Educação Artística, quando em ocasião do estudo da disciplina Desenho Geométrico no curso de Licenciatura Plena em Ciências – Habilitação em Matemática, na UNEB – Universidade do Estado da Bahia, pude rever os conceitos e construções outrora aprendidos na escola básica. O aprendizado e as habilidades desenvolvidas com o estudo das construções geométricas com régua e compasso também foram fundamentais para a exploração dos conceitos, propriedades e teoremas explorados na disciplina Geometria I do PROFMAT, sobretudo nas unidades em que foram tratados os tópicos de geometria plana.

Durante os estudos na disciplina Geometria no PROFMAT, pude amadurecer o interesse na escolha do tema para o desenvolvimento deste trabalho, ao constatar a relevância das construções geométricas com régua e compasso para o amadurecimento do aprendizado da geometria plana, sobretudo através das demonstrações e provas relativas às construções apresentadas.

Nesse sentido evidenciou-se a importância da reintrodução das construções geométricas com régua e compasso na Educação Básica, correlacionadas ao estabelecimento de comprovações, baseadas nos conceitos elementares, axiomas, propriedades e teoremas da geometria euclidiana, a fim de que os educandos possam desenvolver a visualização e aplicação de propriedades das figuras, além do estabelecimento de novas relações, embasadas nas já conhecidas.

Com a escolha do tema a ser explorado surgiu também a necessidade de desenvolvimento de um material de baixo custo e ao mesmo tempo funcional para o professor. Embora existam alguns produtos no mercado, há algumas limitações que precisavam ser solucionadas, a fim de aperfeiçoar sua funcionalidade e precisão nas construções. Nesse sentido, desenvolvemos adaptações ao compasso e à régua, para seu uso em quadros de giz e em quadros que utilizam marcador para quadro branco, conforme veremos mais detalhes no capítulo 3.

1.2 Justificativa do tema

Ao longo dos anos, no Brasil, o ensino das construções geométricas com régua e compasso da geometria euclidiana plana perdeu seu espaço dentro do currículo escolar. Inicialmente tais construções eram trabalhadas dentro da disciplina Desenho Geométrico nas escolas de 1º e 2º graus. Com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases nº 5692/71, o Desenho Geométrico passou a configurar como disciplina optativa, sendo então extinta de muitas escolas. Algumas mantiveram o ensino da disciplina e em outras, as construções geométricas com régua e compasso passaram a ser ministradas na disciplina Educação Artística. Com a implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, a partir de 1998, há o incentivo ao retorno do ensino das construções geométricas, incorporado à disciplina Matemática.

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.(BRASIL, 1998, p.51)

Não se pode negar que o ensino da geometria na educação básica desempenha um papel fundamental no currículo, possibilitando ao educando compreender, descrever, analisar, representar e organizar os conhecimentos acerca do mundo em que vive. "*Situações cotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica, etc., demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente*" (BRASIL, 1998, p.122).

Outro aspecto relevante é o papel que o desenho exerce na construção e apreensão dos conceitos geométricos, uma vez que a imagem visual de um conceito é a primeira que o educando constrói, antes da sistematização e construção da representação escrita, após um amadurecimento e percepção das relações estabelecidas. Nesse aspecto as construções geométricas favorecem ao educando o aprimoramento de sua percepção em relação à informação visual, o desenvolvimento da coordenação motora, a organização do raciocínio lógico-dedutivo, a partir da construção do desenho em si e da correlação deste com os conteúdos de geometria.

Diante do exposto, faz-se pertinente uma reavaliação do currículo de Matemática, assim como o estabelecimento de uma relação estreita entre a teoria da geometria e o estudo das construções geométricas com régua e compasso, como ferramenta eficiente ao desenvolvimento das competências e habilidades dos educandos no estudo do espaço e forma.

1.3 Estrutura e organização do trabalho

Além da presente introdução, os capítulos deste trabalho encontram-se assim estruturados:

No segundo capítulo discorreremos sobre as construções geométricas com régua e compasso, sua aplicabilidade na formação do estudante da educação básica ao longo do ensino fundamental, o embasamento das construções geométricas nos *Elementos* de Euclides e da importância do desenvolvimento de uma proposta didática que relacione as construções geométricas e a teoria da geometria plana de maneira indissociável.

O terceiro capítulo é voltado à adaptação dos materiais de desenho geométrico, sobretudo o compasso, para o professor, com a finalidade de manter sua precisão e funcionalidade.

Na busca de soluções que viabilizem a reintrodução do estudo das construções geométricas no ensino fundamental, o quarto capítulo apresenta orientações e sugestões de roteiros de atividades que permitam a exploração das construções associada aos conceitos geométricos, desmistificando o paradigma do desenho geométrico como um passo a passo voltado apenas à construção de figuras.

O quinto capítulo apresenta a idealização de elaboração de um trabalho futuro, mais completo e detalhado, voltado a educandos e educadores da educação básica, que possa ser utilizado tanto para a formação do educador quanto para seu trabalho nas aulas de Matemática.

CAPÍTULO 2

O ENSINO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

> As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas. (Eduardo Wagner)

2.1 Construções geométricas com régua e compasso

As construções geométricas surgem na antiguidade, sendo desenvolvidas pelos gregos a partir do século V a.C. Por volta de 300 a.C. *Euclides de Alexandria*[1] elaborou os *Elementos*, um compêndio do conhecimento de Geometria existente na época, sendo esta uma grande contribuição para o desenvolvimento da Matemática.

Nas construções geométricas é permitido apenas o uso da régua não graduada e do compasso. A régua tem por finalidade desenhar uma reta que passe por dois pontos conhecidos e o compasso serve para desenhar uma circunferência cujo centro seja um ponto dado e o seu raio seja definido pelo comprimento de um segmento dado.

A utilização desses instrumentos é justificada pelos três primeiros postulados da Ge-

[1] *Euclides de Alexandria* (360 a.C. – 295 a.C.), embora pouco se tenha relatos de sua biografia, foi professor, matemático da escola platônica e escritor, possivelmente grego, intitulado o “Pai da Geometria”.

ometria euclidiana, presentes nos Elementos, que versam que:

Postulado I: É possível traçar de um ponto a outro ponto qualquer uma reta;

Postulado II: Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente sobre si mesmo;

Postulado III: Dado um ponto definido como centro e um raio qualquer é possível descrever um círculo.

Uma construção geométrica trata-se, portanto, de uma sequência finita de pelo menos um desses postulados.

As construções geométricas estão diretamente ligadas à teoria da geometria plana e "*quando Euclides elaborou sua Geometria, não era sua proposta a execução dos traçados com régua e compasso mas o estudo da possibilidade de construir a figura com aqueles instrumentos*"(PUTNOKI, 1988).

No Brasil as construções geométricas foram exploradas na disciplina Desenho Geométrico e, posteriormente nas aulas de Educação Artística. Com a definição dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a Educação Nacional, a partir de 1998, passam a ser incorporadas ao currículo da Matemática, durante o terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. No entanto não tem sido dado o devido enfoque à exploração das construções e das bases teóricas da geometria plana que as justificam. Faz-se necessário, portanto, o resgate do estudo das construções geométricas na educação básica, contribuindo para o enriquecimento da fundamentação do conhecimento geométrico do educando.

2.2 As construções geométricas como ferramenta para o aprendizado da geometria

O desenvolvimento do conhecimento geométrico é parte de grande relevância do currículo de Matemática do ensino fundamental, pois através dele o educando desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite interpretar, compreender, descrever de forma gráfica e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

O desenho possui papel essencial no desenvolvimento do conhecimento geométrico, uma vez que se trata da representação gráfica, da informação visual, acerca da realidade apresentada. A percepção visual é construída anteriormente ao conhecimento conceitual, descritivo e formal. Amadurecida a compreensão da imagem, estabelecidas as relações entre os elementos que a compõem, o educando passa a construir, gradativamente, a representação escrita do conceito aprendido.

As construções geométricas possibilitam o desenvolvimento das habilidades motoras do educando, através do manuseio do material de desenho e representação dos traçados. Possibilita também o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, da organização e da construção de estratégias pautadas nos conhecimentos prévios, além de propiciar a materialização de situações abstratas. "*Didaticamente falando, discutir como construir e, em seguida, construir, são etapas que se completam, sendo a segunda a própria materialização da primeira*" (PUTNOKI, 1988).

Para que o aprendizado do educando se torne mais significativo, é imprescindível que o ensino das construções geométricas seja fundamentado na teoria da geometria euclidiana plana, assim como os conceitos e propriedades geométricas devem ser explorados mediante a experimentação através das construções.

> [...] não há Geometria sem Régua e Compasso. Quando muito, há apenas meia Geometria, sem os instrumentos euclidianos.[...] Os problemas de construções são parte integrante de um bom curso de Geometria. O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização". Vejo a régua e o compasso como instrumentos que permitem "experimentar". Isso, por si só, dá uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas. (PUTNOKI, apud MAZIERO, 2011, p.37)

A valorização do ensino da Geometria é importante para o desenvolvimento cognitivo das crianças. Segundo Imenes (1998, apud ZUIN, 2001, p.19), *"há indícios de que crianças que trabalham com formas geométricas, tornam-se mais organizadas, desenvolvem coordenação motora e visual, melhoram a leitura, compreendem mais rapidamente gráficos, mapas e outras informações visuais."*

No Brasil, a partir da LDB 5692/71, que retirou a disciplina Desenho Geométrico da grade obrigatória do currículo, o ensino das construções geométricas na escola básica passou a perder espaço. Segundo Zuim (2001, p.14) *"O Desenho Geométrico passou a configurar como matéria optativa, sendo por esse motivo excluída de muitas escolas"*. O ensino da geometria plana pautou-se, a partir daí, na exploração de conceitos, propriedades e teoremas, pouco se explorando a construção do desenho a partir de suas propriedades, com uso da régua e do compasso.

> A falta da geometria repercute seriamente em todo o estudo das ciências exatas, da arte e da tecnologia. Mas o desenho geométrico foi afetado na sua própria razão de ser, já que em si é uma forma gráfica de estudo de geometria e de suas aplicações. Muito antes de desaparecer, como matéria obrigatória no ensino do 1º grau, o desenho geométrico já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, onde muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho, pois geralmente estes se reduziam à régua e compasso. (Costa, 1981,apud ZUIN, 2001)

Não se pode negar a importância que as construções geométricas desempenham na formação do educando do ensino fundamental. Quando trabalhados, de maneira indissociável, os conceitos, propriedades e teoremas da geometria plana e a construção dos desenhos a partir das suas propriedades inerentes, o conhecimento do educando torna-se mais sólido, mais concreto, através da constatação visual fundamentada na teoria, possível através da exploração do desenho.

Ao desenvolver a construção geométrica, o educando necessita analisar os elementos que lhe são conhecidos, elaborar uma estratégia que lhe possibilite utilizar as propriedades geométricas e executar a construção pautada na teoria, conferindo posteriormente se o objetivo foi alcançado. Trata-se, pois, de uma sistemática inerente à resolução de problemas, possibilitando ao educando desenvolver um raciocínio sistemático e estruturado, através do qual, a partir de conhecimentos mais simples, os *axiomas* ou *postulados*[2], possa alcançar a descoberta de construções mais complexas, estimulando sua capacidade de demonstração e de argumentação.

Eduardo Wagner exprime a essência da importância em valorizar-se o estudo das construções geométricas no ensino de Geometria na educação básica:

> Naturalmente que no ensino de Geometria, a construção das figuras com régua e compasso é fundamental para a perfeita compreensão das suas propriedades. Para o aluno que se inicia no estudo dessa matéria, um esboço das figuras traçadas à mão livre não é suficiente. Ele precisa ver as suas figuras traçadas com precisão para compreendê-las perfeitamente. Quando o professor desenha um ovo e diz que aquilo é uma circunferência, ele está fazendo uma abstração que para si é muito natural (porque conhece suas propriedades), mas para os alunos iniciantes não é. Os alunos precisam ver e construir uma circunferência perfeita para entende-la. Esse comentário vale para tudo; é preciso construir para entender de forma segura e permanente. Em resumo, o ensino da geometria não pode estar dissociado das construções. Com absoluta certeza, separar a Geometria de Desenho conduz a um aprendizado inseguro e não permanente. (apud RAYMUNDO, 2010, p. 21)

[2] *Axiomas* ou *postulados*: Sentenças ou proposições que não são provadas ou demonstradas, mas tomadas como verdades, por serem consideradas como óbvias ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. A partir dos axiomas iniciam-se a dedução e inferências de outras verdades.

2.3 Os *Elementos* e as bases das construções geométricas

A Geometria se estrutura como conhecimento de grande importância ainda na Grécia antiga. Por volta do século VI a.C., *Tales de Mileto*[3] passou a desenvolver a Geometria pautada no raciocínio dedutivo, em oposição à natureza *empírica*[4] dos fatos tidos como verdadeiros, até então. O raciocínio dedutivo consiste na comprovação da veracidade de uma proposição exclusivamente baseada na veracidade de outras proposições, outrora comprovadas.

> [...] a partir de Tales, a Geometria grega vai assumindo o aspecto de um corpo de proposições logicamente ordenadas: cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores, estas a partir de outras precedentes, e assim por diante; e como a demonstração de uma dada proposição teria de se basear em outras, estas também teriam de ser demonstradas (ÁVILA, 2010, p.56).

Nesse aspecto, a fim de que, na demonstração de uma proposição, não se incorra em tautologia[5], é necessário pautar-se no estabelecimento de proposições iniciais, conceitos e termos primitivos, de natureza simples e evidente ao senso comum, sem necessidade de comprovação, a partir dos quais o raciocínio dedutivo se desencadeia.

> [...] os matemáticos foram percebendo que seria preciso fixar algumas proposições iniciais, consideradas bastante simples e evidentes ao senso comum e que não seriam demonstradas a partir de outras ou o processo não teria fim. Essas proposições não demonstradas seriam aceitas como o princípio do encadeamento dedutivo. Elas são os chamados axiomas ou postulados. (ÁVILA, 2010, p.56)

Por volta dos anos 300 a.C. Euclides de Alexandria organizou os *Elementos* (Fig. 2.1), uma coletânea de treze livros reunindo quase todo o conhecimento matemático da época em que foi escrito. O grande diferencial da obra de Euclides foi a sistematização do método axiomático, do emprego do raciocínio dedutivo a partir de um reduzido número de proposições, conceitos primitivos e definições iniciais, utilizados para a demonstração dos teoremas apresentados.

Os *Elementos* trazem muito mais que o estudo da Geometria. Aborda também o conhecimento da Aritmética e da Álgebra em vários dos livros do compêndio. No entanto,

[3] *Tales de Mileto* viveu aproximadamente entre 624 a.C. e 547 a.C., intitulado um dos sete sábios da antiguidade, junto a Periandro de Corinto, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleóbulo de Lindos, Sólon de Atenas e Quílon de Esparta. É considerado o criador da geometria demonstrativa, com a utilização de métodos dedutivos.

[4] *Empírica*: Que se apoia exclusivamente na experiência e na observação.

[5] Tautologia (do grego, significa "dizer o mesmo") consiste na redundância do raciocínio. No raciocínio dedutivo, se ao demonstrarmos uma proposição B fazemos uso de uma proposição A, não podemos utilizar a mesma proposição B para demonstrar a proposição A. Caso contrário, recai-se em uma tautologia ou círculo vicioso.

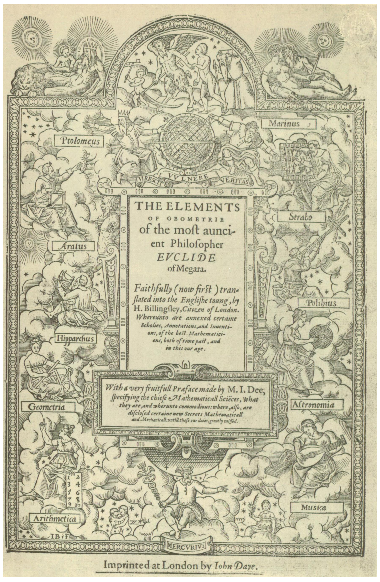


Figura 2.1: *Frontispício da primeira edição, em língua inglesa, dos Elementos de Euclides, de 1570. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Os_Elementos. Acesso em: 26 jan. 2013*

toda a abordagem da matemática grega no período se faz a partir do raciocínio geométrico, de modo que a representação de uma grandeza qualquer era feita por um segmento de reta.

Os livros I, II, III IV e VI são sobre geometria plana, sendo que o livro I aborda as construções geométricas, teoremas de congruência, áreas de polígonos e o Teorema de Pitágoras. O livro II aborda a Álgebra Geométrica. No livro III explora-se o conhecimento sobre o círculo e seus elementos, enquanto que o livro IV trata da construção de certos polígonos regulares, através de sua inscrição em um círculo, bem como da circunscrição ou inscrição de círculos em polígonos dados. Já o livro VI explora a semelhança de figuras.

O livro V apresenta a teoria das proporções, na sua forma essencialmente geométrica. Os livros VII, VIII e IX tratam da teoria dos números, abordando temas como a divisibilidade de inteiros, adição de séries geométricas, propriedades dos números primos, irracionalidade do número $\sqrt{2}$, o algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum de dois números.

O livro X é o mais extenso de todos, também considerado o de mais difícil compreensão, trata sobre a incomensurabilidade de segmentos de reta com um segmento de reta dado, contém a classificação geométrica de irracionais quadráticos e as suas raízes quadráticas.

Os livros XI, XII e XIII tratam da geometria espacial e dos poliedros regulares. Abordam-se os teoremas sobre retas e planos no espaço e os teoremas sobre paralelepípedos no livro XI. O livro XII explora o *método de exaustão*[6]. No livro XIII são abordadas as construções que exploram a inscrição dos cinco poliedros regulares em uma esfera.

A partir das definições iniciais, das bases estabelecidas pelos axiomas e postulados, Euclides estruturou todo o método dedutivo presente no compêndio Elementos, resultando em um total de quatrocentos e sessenta e cinco proposições, cada uma demonstrada a partir de afirmações vindas antes delas. Segundo Berlinghoff & Gouvêa (2010), *"O estilo de apresentação é muito formal e seco. Depois do enunciado de cada proposição, há uma figura à qual ela se refere, seguida de uma demonstração cuidadosa"*.

Um aspecto fundamental na abordagem sistemática do método axiomático presente nos Elementos é que mais que um tratado completo sobre a Matemática da época, Euclides mostra como pensar logicamente, sobre qualquer coisa, como estruturar toda uma teoria a partir do estabelecimento de elementos primitivos simples, costurados através do raciocínio dedutivo.

Após essa breve apresentação dos Elementos de Euclides, enfoque-se a importância da utilização de seus fundamentos no estudo das construções geométricas no ensino fundamental. Quanto a esse aspecto vale ressaltar que propõe-se neste trabalho uma adaptação didática do material para seu uso em sala de aula, aliando o estudo da geometria plana às construções com régua e compasso, mas sem deixar de explorar a característica de fundamental relevância da obra, que é o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, essencial ao processo de ensino aprendizagem em Matemática, bem como na resolução de situações presentes no cotidiano.

> Essa "desenfatização" da estrutura lógica de Euclides na geometria da escola secundária é realmente uma infelicidade. No mundo de hoje, a capacidade de ver uma situação em termos axiomáticos e de lidar com sua estrutura lógica é ainda muito importante, e não só na matemática. Por exemplo, isso é imensamente útil para entender, negociar e fazer que se cumpram negociações coletivas de acordos [...]; para lidar com sistemas de computadores, pacotes de softwares e coisas semelhantes, que estão rapidamente se tornando parte central da vida diária; e para lidar inteligentemente com os argumentos que giram em torno de questões sociopolíticas e legais polêmicas do dia, como o aborto, direito dos homossexuais, ação afirmativa e oportunidades iguais. (BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2010, p.164)

Os seis primeiros livros dos Elementos abordam as construções da geometria plana. Necessariamente a exploração dos livros deve ser gradativa e ordenada, uma vez que a base do método axiomático desenvolvido por Euclides consiste na comprovação de proposições

[6] *Método de exaustão* consiste em encontrar a área de uma figura inscrevendo-se nela uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada.

embasadas em proposições anteriormente comprovadas. Isso requer, portanto, uma cadeia ordenada de conceitos a serem construídos.

Partindo desse pressuposto desde o início do terceiro ciclo do ensino fundamental é importante desenvolver com o educando o trabalho a partir das construções geométricas, possibilitando-lhe a estruturação gradativa dos conceitos geométricos e o estabelecimento do raciocínio dedutivo.

Para que as construções geométricas possam ser eficientemente utilizadas na concretização dos conceitos geométricos, as definições, os postulados e axiomas, a partir dos quais as construções se estruturam, devem ser bem elucidados ao educando, partindo sempre da premissa que tais conceitos iniciais, sob a óptica do método axiomático, são de natureza simples e convencionados a partir do senso comum.

Construídos os conceitos iniciais junto ao educando, a exploração das construções geométricas terá por finalidade correlacioná-los para a busca da solução das situações propostas, com a mediação do professor, construindo os caminhos para alcançar os objetivos propostos, estimulando a dedução e a descoberta.

A abordagem das construções no ensino fundamental, para a efetiva apropriação do conhecimento por parte do educando, não deve ser focada no passo a passo, na receita do como construir-se, mas sim na compreensão do porquê, no estabelecimento das relações fundamentais para que se possa, através das atividades propostas, correlacionar a teoria da geometria plana com a sequência de ações aplicadas na construção.

O professor como mediador da construção desse conhecimento, deve instigar no educando a curiosidade e o espírito investigativo a fim de descobrir quais os conhecimentos, conceitos e propriedades que respaldam cada construção. Dessa forma, a exploração das construções geométricas, em sala de aula, estará intrinsicamente ligada à teoria da geometria, resultando em um conhecimento mais consistente e abrangente, estimulando no educando o senso crítico e o desenvolvimento de estratégias na busca de soluções para as situações cotidianas que lhe vierem surgir.

CAPÍTULO 3

ADAPTAÇÃO DAS FERRAMENTAS DE DESENHO PARA O PROFESSOR

Diante da importância em se desenvolver uma proposta para a exploração das construções geométricas com régua e compasso no ensino fundamental, surgiu o questionamento acerca das ferramentas que o professor faria uso em suas aulas. É evidente que com o avanço tecnológico há diversos softwares que possuem recursos que permitem explorar as construções geométricas na escola, como o *Geogebra*, *Cabri-Géométre*, *Sketchpad*, *Geometricks*, *Régua e Compasso*, *Euklid*, entre outros. Entretanto há alguns empecilhos que podem dificultar o uso dos softwares para o ensino das construções geométricas. Nem todas as escolas possuem laboratório de informática, ou mesmo muitas das que possuem, não dispõem de espaço condizente ao número de alunos das turmas. Há ainda a dificuldade de muitos professores em manusear os softwares.

O uso da tecnologia no estudo da geometria é de extrema importância, sobretudo pelas possibilidades de manipulação e investigação, com os recursos da geometria dinâmica, mas requer ainda uma preparação que pode servir, no momento, como entrave para o ensino das construções geométricas na educação básica. Em virtude desse paradigma, procurou-se enfatizar neste trabalho a utilização das ferramentas tradicionais de construção: o compasso e a régua não graduada.

Encontra-se facilmente em papelarias e lojas de materiais escolares o tradicional compasso de madeira para quadro de giz (Fig. 3.1), cuja ponta seca é um prego metálico em uma extremidade e na outra extremidade encaixa-se o giz. Trata-se de um instrumento de valor acessível, em torno de R$ 10,00 a R$ 15,00. No entanto, diversas escolas não mais utilizam o quadro de giz, tendo-os substituído por quadros de fórmica ou quadros de vidro, que utilizam marcador para quadro branco.

Figura 3.1: *Compasso de madeira, para uso em quadro de giz, adquirido para efetuar as adaptações pertinentes.*

Embora não tenha sido encontrado no comércio local, em pesquisa na internet, a partir de sites de busca, foi encontrada a oferta de compassos que podem ser utilizados tanto em quadro branco quanto em quadro de giz, de diversos modelos, confeccionados em madeira ou em plástico, com adaptação utilizando ventosa plástica para a ponta seca (Fig. 3.2).

(a) (b)

Figura 3.2: *Compassos para uso com marcador para quadro branco encontrados no mercado nacional. (a) Compasso para quadro branco em madeira. (b) Compasso para quadro branco em plástico.*

Analisando tais produtos destinados ao uso com marcador para quadro branco, o recurso da ventosa para fixação da ponta seca provocou questionamentos em relação à precisão das construções geométricas, uma vez que o diâmetro da ventosa possui dimensão consideravelmente maior que o diâmetro de um ponto feito pelo marcador, sendo necessário ao professor fazer coincidir o centro da ventosa com cada ponto no qual necessite fixar a ponta seca. Além dessa questão, outro aspecto ponderado foi a inclinação do marcador para quadro branco em relação ao quadro, uma vez que, na construção de um círculo ou arco de raio um pouco maior, o ângulo entre o marcador e o quadro fica muito pequeno, podendo falhar o desenho.

A fim de resolver esses possíveis entraves ao uso dos instrumentos de desenho nas aulas de matemática, sobretudo no uso com marcador para quadro branco, pensou-se em uma proposta de solução simples, de baixo custo e, sobretudo, que permitisse a precisão das construções.

Observando um compasso profissional[1] para desenho técnico (Fig. 3.3), surgiu a ideia de fazer uma adaptação no compasso de madeira para uso em quadro de giz, permitindo assim sua utilização também em quadro branco, por ser este um produto facilmente encontrado no mercado. A solução simples para a adaptação tratava-se, pois, de garantir que, ao utilizar o compasso, o professor pudesse manter a perpendicularidade entre a ponta seca e o quadro, como também entre o pincel marcador e o quadro.

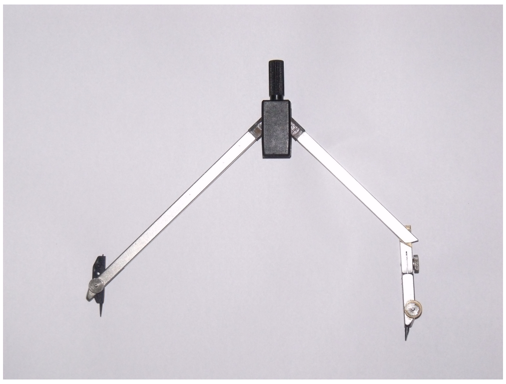


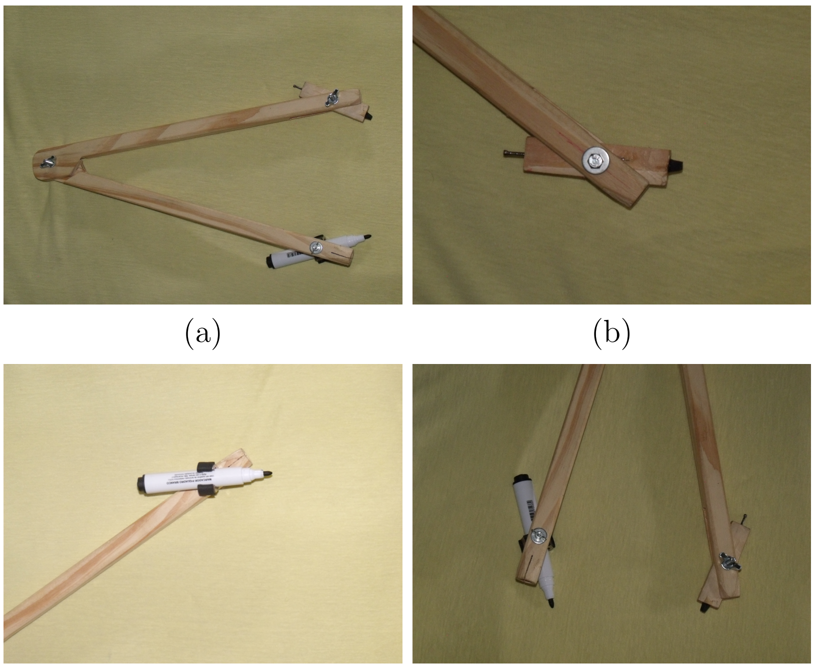
Figura 3.3: *Compasso profissional para desenho técnico observado para adaptações ao compasso de madeira.*

Para resolver o problema da ponta seca, foi necessário criar um dispositivo flexível para sua sustentação, com uma ponta metálica para uso em quadro de giz, em uma extremidade e, na outra extremidade, uma ponta de borracha, podendo ser utilizada em qualquer tipo de quadro, sem danificá-lo. Além dessa função, o dispositivo permite manter a ponta seca perpendicular ao quadro, evitando o escorregamento do compasso no momento da construção.

[1]O compasso observado é de propriedade do autor

Para criação desse dispositivo, foi feito um corte retangular, em forma de "U", na extremidade do compasso que continha a ponta seca, retirando uma porção de madeira na forma de um paralelepípedo, mantendo-se as duas bordas laterais. A peça retirada foi então fixada nas bordas com um parafuso com porca borboleta que as uniu através de um orifício central.

A fim de garantir a inclinação ideal entre o pincel marcador e o quadro, a adaptação mais simples encontrada foi a instalação de uma braçadeira de *policloroeteno*[2] [por sua durabilidade e resistência], de vinte milímetros de diâmetro, que foi revestida por uma camada de *espuma vinílica acetinada*[3] e fixada com um parafuso com porca borboleta lateralmente à extremidade do compasso que continha o orifício para inserção do giz, permitindo o encaixe do pincel marcador, sem deslizar na braçadeira por conta da espuma, além de possibilitar ao professor escolher a melhor a inclinação entre o pincel marcador e o quadro (Fig. 3.4).



(a) (b) (c) (d)

Figura 3.4: *Adaptações efetuadas em compasso para uso do professor. (a) Visão geral do instrumento. (b) Detalhe da adaptação da ponta seca. (c) Detalhe da adaptação da braçadeira para fixação do marcador. (d) Detalhe da fixação das adaptações com porca borboleta, permitindo sua mobilidade*

O serviço de adaptação do compasso implementado foi realizado de forma artesanal, utilizando-se ferramentas domésticas próprias, e sem custo operacional. Além do custo de R$ 12,00 da aquisição do compasso de madeira [pinus], em papelaria da cidade de Teixeira de

[2]Denominação oficial segundo a IUPAC do policloreto de vinila - PVC

[3]Espuma sintética de baixo custo utilizada como material escolar, popularmente conhecida pela sigla EVA, proveniente do nome técnico de sua matéria-prima, em inglês, *Ethylene Vinyl Acetate*.

Freitas – BA, somou-se ao custo final do instrumento o valor da braçadeira, de R$ 2,50 e o valor de dois parafusos com porca borboleta, de R$ 1,00. A borracha utilizada para confecção da ponta seca foi proveniente de refudo de pneu veicular e a espuma vinílica acetinada foi retalho do material utilizado no processo de adaptação da régua, que será descrito a seguir.

Completando o material necessário ao professor foi feita uma adaptação simples em uma régua de um metro de comprimento, fabricada em *placa de fibra de madeira de média densidade*[4]. Como se tratava de uma régua graduada, optou-se por inverter a posição das faces frontal e traseira, invertendo a posição do seu apoio manual. Assim, a face frontal ficou branca [sem graduação] e a face graduada tornou-se face traseira, sendo então revestida por uma camada de espuma vinílica acetinada, a fim de evitar o seu escorregamento na utilização em quadro de fórmica ou de vidro (Fig. 3.5).

(a) Régua antes da adaptação

(b) Régua após a adaptação

Figura 3.5: *Adaptação da régua. (a) Régua antes da adaptação, como comercializada. (b) Régua após a adaptação, com inversão das faces e revestimento com EVA.*

A régua também foi adquirida em papelaria da cidade de Teixeira de Freitas – BA, pelo custo de R$ 4,50, adicionado ao custo de uma placa da espuma, de R$ 2,60. Assim, a adaptação total do material assumiu um custo final de R$ 22,60, dos quais R$ 16,50 consistiram do valor original dos produtos e R$ 6,10 foram empregados nas adaptações. Com as adaptações aqui propostas, construímos um protótipo experimental, de baixo custo. A utilização das ferramentas satisfez os anseios iniciais da sua idealização, sendo um produto de viável aplicação nas escolas e de valor final ainda dentro do valor de mercado do produto.

[4]Derivado de madeira, internacionalmente conhecido por MDF (Medium Density Fiberboard)

CAPÍTULO 4

PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA A EXPLORAÇÃO DAS CONSTRUÇÕES

O presente capítulo objetiva-se a apresentar propostas de atividades de exploração de conceitos geométricos a partir das construções geométricas efetuadas com régua não graduada e compasso. As atividades propostas são destinadas a professores de matemática, seja na promoção de estudos de formação continuada, ou mesmo como suporte metodológico para suas aulas.

O foco principal deste capítulo é estimular o desenvolvimento de atividades que enfatizem o raciocínio dedutivo, através do resgate das construções geométricas, associadas aos conceitos da geometria plana desenvolvidos descritivamente nas aulas de matemática. Serão apresentadas quatro propostas de roteiro de atividades. O primeiro roteiro trata-se da apresentação das construções geométricas e dos conceitos iniciais descritos nos *Elementos*. Os demais roteiros apresentam propostas em que serão exploradas as construções geométricas, a partir das proposições apresentadas pelos *Elementos* de Euclides, detalhadamente ilustradas, a fim de que o processo de construção seja facilmente compreendido. Após a descrição da construção em si, serão explorados os elementos que a justificam teoricamente, as propriedades inerentes e as relações que podem ser estabelecidas a partir da construção apresentada. A primeira atividade difere-se das demais por abordar as definições, postulados e noções gerais apresentadas no Livro I dos *Elementos*.

Nas definições, axiomas e postulados apresentados, assim como nas proposições dos roteiros de atividade, será utilizada a tradução brasileira dos *Elementos*, feita pelo Professor Irineu Bicudo, diretamente a partir do texto em grego, publicada pela Fundação Editora da UNESP.

É importante verificar-se que a maior parte das definições apresentadas no Livro I dos *Elementos* são introduzidas desde o primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental, sem tanta formalidade conceitual, mas explorando a percepção visual e o estabelecimento de propriedades por parte das crianças do primeiro ao quarto ano. Ao longo do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, do sexto ao nono ano, o educando aprofunda-se nos conceitos e definições formais. Dessa forma, a partir do sexto ano é possível introduzir as construções geométricas nas aulas de matemática. Para tanto, é essencial a compreensão dos axiomas e postulados apresentados no Livro I, bem como das definições, a fim de que as proposições descritas nos roteiros de atividades tenham seu embasamento nos conceitos iniciais da geometria euclidiana bem definidos, estimulando-se assim a sistematização do método axiomático.

Com o avanço das construções, ao longo das séries do ensino fundamental, e a introdução das proposições presentes nos demais livros dos Elementos, as novas definições, que se façam necessárias ao embasamento das construções, deverão ser introduzidas antes do início da sua exploração.

Os roteiros de atividades apresentados a partir das próximas seções, serão estruturados abordando os seguintes aspectos: **compreensão do processo de construção**, que será efetuada de maneira descritiva e ilustrativa, passo a passo, utilizando a proposição em sua forma tradicionalmente apresentada por Euclides, com a exploração da construção efetuada, através de suas propriedades e relações que possam ser estabelecidas pela observação do desenho; **estruturação do método axiomático**, através da constatação dos conceitos básicos que possibilitam a construção, respaldando-se nos axiomas e postulados definidos por Euclides e nas definições necessárias a cada processo de construção; **representação simplificada da construção**, que será a apresentação da construção com uso de uma linguagem menos elaborada que a do texto de Euclides, utilizando a menor quantidade possível de elementos [traços no desenho] na construção, mas embasada nos mesmos princípios descritos na compreensão do processo de construção e **exploração da atividade**, onde apresentam-se algumas orientaçãoes ao professor acerca da forma como a atividade pode ser abordada a fim de explorar as propriedades identificadas a partir da figura construída.

Partindo dessa exploração, espera-se alcançar o objetivo geral do trabalho através dos roteiros de atividade, que é a exploração conceitual da geometria a partir das construções com régua e compasso, assim como a compreensão e dedução das propriedades que sustentam, teoricamente, a veracidade das construções.

Os roteiros apresentam construções iniciais, como a de um triângulo equilátero a partir de um segmento dado, a bissetriz de um ângulo e a mediatriz de um segmento. A finalidade das atividades propostas é estruturar uma forma de abordagem das construções geométricas na educação básica, através da exploração das propriedades inerentes a cada construção. Como resultado, espera-se possibilitar ao professor de matemática um recurso metodológico para que, no processo de ensino aprendizagem, explorem-se ao máximo as relações que podem ser estabelecidas a partir de uma construção, despertando no educando a curiosidade, o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e o fortalecimento dos seus conhecimentos geométricos.

4.1 Roteiro de atividade 1

4.1.1 Conteúdo abordado

Axiomas e postulados da geometria euclidiana e definições abordadas no Livro I dos *Elementos*.

4.1.2 Objetivos

Compreender os princípios adotados nas construções geométricas com régua e compasso, reconhecendo seu papel na visualização e aplicação de propriedades das figuras e estabelecimento de outras relações possíveis;

Conhecer os conceitos fundamentais a partir dos quais se estrutura a geometria euclidiana através do seu método axiomático e as definições elementares necessárias ao desenvolvimento das construções geométricas com régua e compasso.

4.1.3 Texto orientador

As construções geométricas foram desenvolvidas pelos gregos, a partir do século V a.C.. A matemática grega sustentava-se na representação de qualquer grandeza através de um segmento de reta. Dessa forma, o que atualmente calculamos, aritmeticamente ou algebricamente, para os gregos daquela época era o equivalente a construir.

Por volta de 300 a.C. Euclides de Alexandria organizou o conhecimento da matemática grega até então em um compêndio de 13 livros, intitulado *Elementos*, no qual, a partir de definições iniciais, e um número mínimo possível de axiomas e postulados, definidos para sustentar toda a teoria, 465 proposições matemáticas foram detalhadamente descritas e comprovadas, através de construções geométricas efetuadas com régua e compasso.

As construções geométricas utilizam-se apenas de uma régua não graduada, cuja finalidade é de traçar uma reta que contenha dois pontos determinados, ou prolongar um segmento de reta definido, e do compasso, cuja finalidade é a de descrever um círculo cujo centro seja definido por um ponto dado e seu raio seja definido pela medida de um segmento de reta.

As construções geométricas tem papel de extrema relevância no enriquecimento, estruturação e associação dos conhecimentos geométricos, através da compreensão e justificativa do processo de construção. Além disso envolve princípios elementares, que associados através da estruturação do raciocínio lógico dedutivo permitem a elaboração de conhecimentos mais sólidos e aprofundados, gradativamente ao avanço do estudo de construções mais elaboradas.

Para tanto, faz-se necessário conhecer os princípios básicos que estruturam as construções com régua e compasso. Tal atividade tem por finalidade a exploração das definições, postulados e noções gerais descritas no Livro I dos *Elementos* e que serão imprescindíveis ao desenvolvimento das demais atividades.

4.1.4 Explorando os conceitos básicos do Livro I dos Elementos

As definições que se seguem são trabalhadas ao longo do ensino fundamental, desde os conceitos primitivos da geometria, passando pelo estudo e classificação dos polígonos, definição do círculo e seus elementos, classificação dos triângulos e quadriláteros. Os conceitos aqui apresentados tem a finalidade de permitir ao professor correlacionar definições trabalhadas no ambiente escolar com a linguagem descrita por Euclides.

Definições

1- Ponto é aquilo de que nada é parte.

2- E linha é comprimento sem largura.

3- E extremidades de uma linha são pontos.

4- E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

5- E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

6- E extremidades de uma superfície são retas.

7- Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.

8- E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.

9- E quando as linhas que contem o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.

10- E quando uma reta, tendo sido alterada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alterou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alterou.

11- Ângulo obtuso é o maior que um reto.

12- E agudo, o menor do que um reto.

13- E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.

14- Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.

15- Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.

16- E o ponto é chamado centro do círculo.

17- E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois.

18- E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro dos semicírculos é o mesmo do círculo.

19- Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.

20- E das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.

21- E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.

22- E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que por um lado, é equilátera, e por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tantos os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.

23- Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Postulados

1- Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

2- Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

3- E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

4- E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

5- E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontraremse no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Noções comuns

1- As coisas iguais à mesma coisa são também chamadas iguais entre si.

2- E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

3- E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.

4- E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.

5- E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.

6- E as metades da mesma coisa são iguais entre si.

7- E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

8- E o todo [é] maior do que a parte.

9- E duas retas não contem uma área.

4.1.5 Explorando a atividade

Esta primeira atividade consiste na exploração dos conceitos iniciais abordados por Euclides e que serão utilizados nas atividades de construção, por conta da natureza do método axiomático. Serão destacados alguns comentários sobre as definições 10 e 22 e sobre o quinto postulado de Euclides.

A definição 10 apresenta o conceito de ângulo reto. Vale ressaltar que ainda não eram definidas as medidas dos ângulos, diferindo então da atual definição do ângulo reto em função da sua medida igual a 90º.

Vale ressaltar que na definição 22 há alguns termos que não são atualmente utilizados em sala de aula, mas que pela definição, conseguimos compreender e ilustrar quais quadriláteros são mencionados no texto (Fig. 4.1). Outro aspecto é a definição de trapézio. Nos livros didáticos do ensino fundamental o trapézio é geralmente definido como o quadrilátero que possui um par de lados paralelos. Essa definição difere-se, pois, da apresentada por Euclides.

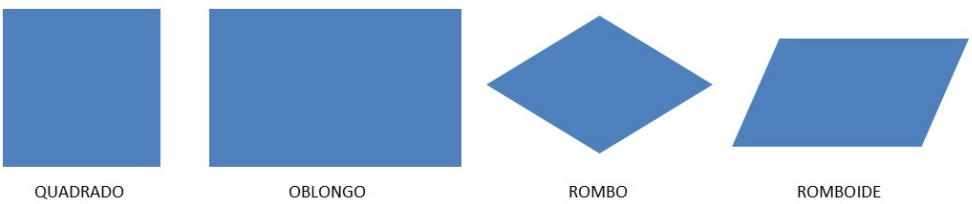


Figura 4.1: *Ilustração dos quadriláteros notáveis definidos por Euclides.*

Faz-se necessário compreender a diferenciação existente entre as definições apresentadas por Euclides e as definições atualmente ensinadas nas escolas. Para Euclides, os quadriláteros notáveis definidos são o quadrado, o oblongo, o rombo [no texto traduzido por Irineu Bicudo como losango] e o romboide, e a diferenciação entre esses quadriláteros está na medida de seus lados [ser equilátero ou não] e na medida de seus ângulos [ser retangular ou não] (Fig. 4.2).

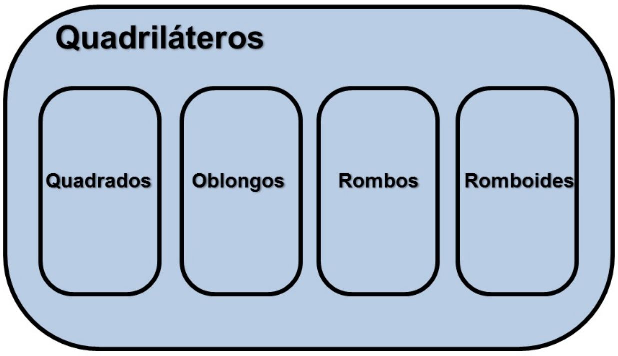


Figura 4.2: *Representação esquemática da classificação dos quadriláteros notáveis segundo Euclides*

Além da influência euclidiana, entre os textos de geometria que serviram de referência para o ensino no Brasil estão os *Elementos de Geometria* de Legendre, datado de 1793, e o tratado *Leçons de Géométrie Élémentaire*, de Jacques Hadamard, datado de 1898.

Observem-se as sutilezas entre as definições para os quadriláteros notáveis apresentadas por Euclides e as apresentadas por Legendre e Hadamard.

Para Legendre, o quadrado tem seus lados iguais e seus ângulos retos; o retângulo tem os ângulos retos sem ter os lados iguais; o losango tem os lados iguais sem que seus ângulos sejam retos; o paralelogramo tem os lados opostos paralelos. Comparando a Euclides, o oblongo passa a ser denominado retângulo e o rombo passa a ser denominado losango. Já a definição de paralelogramo amplia a definição do romboide, permitindo-se, pois, classificar também o quadrado, o retângulo e o losango, agora, como paralelogramos.

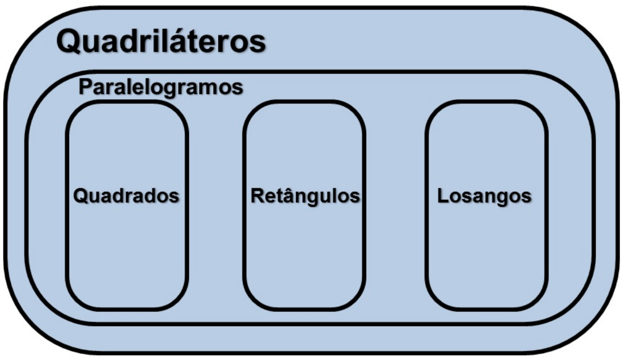


Figura 4.3: *Representação esquemática da classificação dos quadriláteros notáveis segundo Legendre*

Já Hadamard amplia ainda mais as definições dos paralelogramos notáveis: o quadrado tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais; o retângulo tem todos os ângulos iguais e, consequentemente, retos; o losango tem os quatro lados iguais; o paralelogramo tem os quatro lados paralelos dois a dois. Com essa nova definição, o quadrado pode ser considerado, além de paralelogramo, como as definições de Legendre permitiam, agora também losango e retângulo. Tal definição é a que geralmente é abordada nos livros didáticos brasileiros.

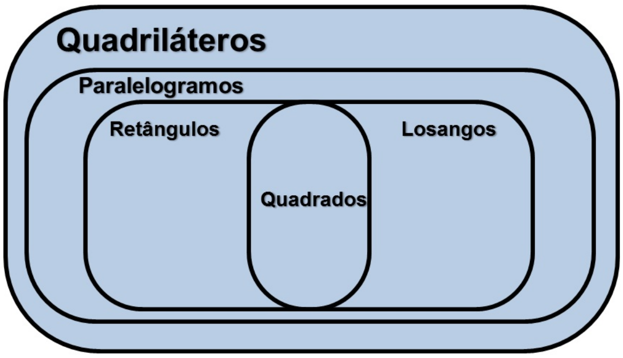


Figura 4.4: *Representação esquemática da classificação dos quadriláteros notáveis segundo Hadamard*

É importante salientar que, conforme o material utilizado, diferentes definições poderão ser apresentadas ao educando. Cabe ao professor adotar uma das definições existentes, deixando claro, através do recurso da história da matemática, que ao longo dos séculos divergências entre conceitos e definições ocorreram, podendo ser encontradas variantes.

Em relação aos trapézios, para Euclides assim seriam classificadas as figuras quadriláteras que não possuíssem as propriedades características dos quadriláteros notáveis. Com o avanço histórico, a definição adotada para trapézios passou a ser mais específica, tratando-se de um quandrilátero que possua um par de lados paralelos, denominados bases. Ainda assim há questões de discussão acerca do fato de os paralelogramos serem considerados trapézios ou não. Em alguns textos encontram-se inclusive as definições para trapézios paralelogramos e trapézios não paralelogramos (Fig. 4.5). Cabe também ao professor adotar uma definição existente, e estar disposto a discutir juntamente aos alunos, em caso de questionamentos ao longo do percurso educativo.

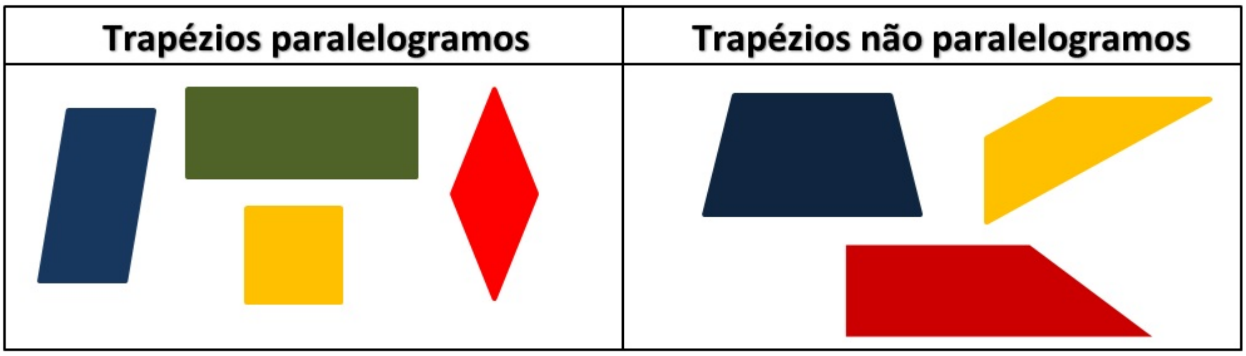


Figura 4.5: *Classificação dos trapézios*

Finalizando a abordagem do roteiro, é importante mencionar-se que o quinto postulado de Euclides foi alvo de estudos ao longo de vários séculos, na busca de sua comprovação a partir de outras definições, por se tratar de um postulado que não é tão evidente quanto os demais. O postulado está relacionado à propriedade que é lecionada nas escolas que, duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos colaterais [nesse caso, internos] suplementares. Caso a soma dos ângulos colaterais internos seja menor que 180º, as retas não serão paralelas e concorrerão em algum ponto do mesmo lado dos ditos ângulos [é o que afirma o quinto postulado de Euclides] (Fig. 4.6).

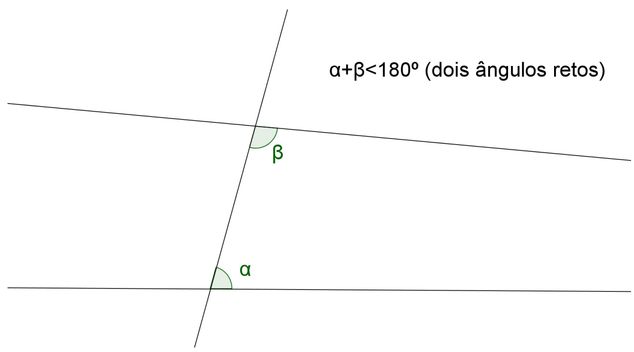


Figura 4.6: *Representação do quinto postulado de Euclides*

Observe-se assim, que a partir das definições iniciais aqui apresentadas, muitos questionamentos, dúvidas e curiosidades puderam ser evidenciados. Cabe, portanto, ao professor, estar disponível a questionar-se e a buscar respostas, fundamentando cada vez mais seu conhecimento.

4.2 Roteiro de atividade 2

4.2.1 Conteúdo abordado

Construção de um triângulo equilátero a partir de um segmento de reta de comprimento determinado.

4.2.2 Objetivo

Construir um triângulo equilátero, cuja medida do lado é determinada, reconhecendo as propriedades inerentes à figura em questão, presentes no processo de construção com régua e compasso.

4.2.3 Texto orientador

A atividade em questão trata da Proposição I do Livro I dos *Elementos* de Euclides.

Por definição, um triângulo equilátero é um polígono que possui os três lados congruentes. Pela proposição apresentada, o comprimento dos lados do triângulo é definido a partir da medida do comprimento de um segmento dado. É necessário, então, garantir através da construção geométrica a mesma medida para os demais lados do triângulo.

4.2.4 Compreensão do processo de construção

Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada

"Seja a reta limitada dada AB (Fig. 4.7a). É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero. Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com distância AB, o círculo BCD (Fig. 4.7b), e, de novo, fique descrito, por um lado, com centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE (Fig.4.7c), e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB (Fig. 4.7d).

E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.

[Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer."

4.2.5 Estruturação do método axiomático

Ao construir os círculos BCD e ACE, faz-se uso do *Postulado 3*.

A construção das retas CA e CB é respaldada no *Postulado 1*.

A partir da *Definição 15*, conclui-se que AC é igual a AB, uma vez que consistem na distância do centro à circunferência do círculo CDB [é o raio do círculo CDB]. Analogamente,

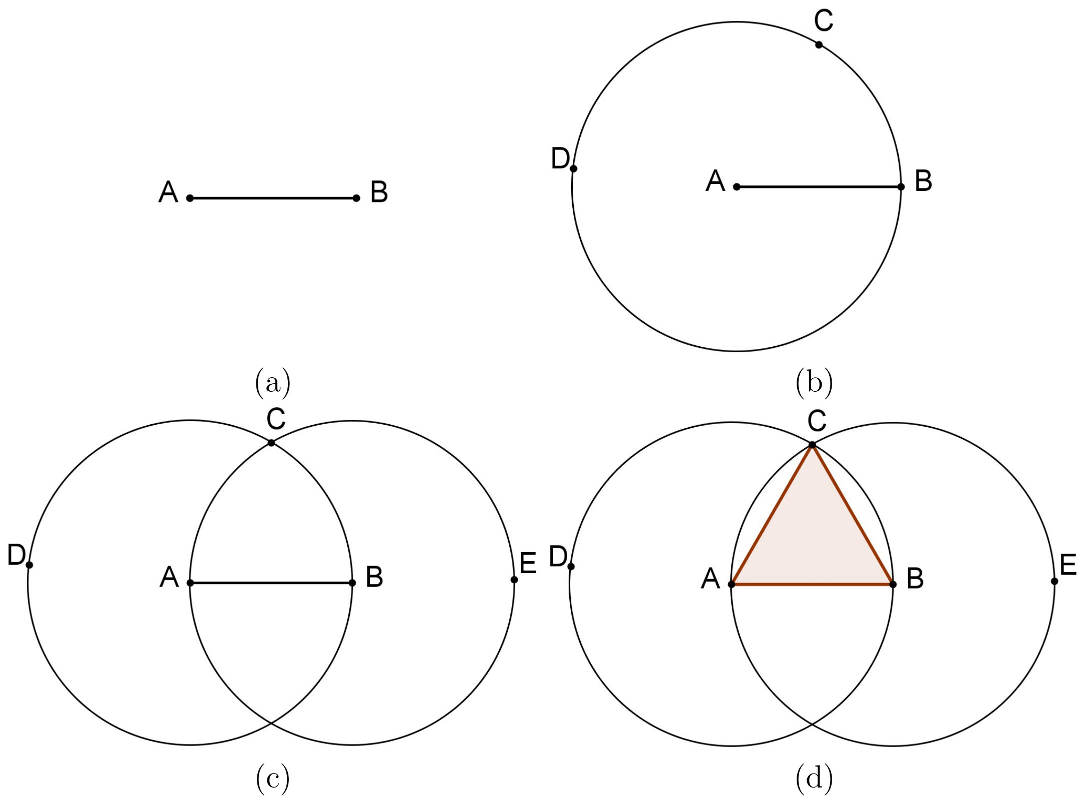


Figura 4.7: *Detalhe do processo de construção da Proposição 1 do Livro I dos Elementos*

pela mesma definição, comprova-se a igualdade de BC e BA [raios do círculo CAE]

A *Noção comum 1* permite-nos assegurar a igualdade entre CA e CB, uma vez que ambas a medidas são iguais a AB [conforme comprovado anteriormente pela *Definição 15*]. A partir dessa conclusão, comprova-se que o triângulo ABC é equilátero.

4.2.6 Representação simplificada da construção

Construção de um triângulo equilátero a partir de um segmento dado:

Para construir-se um triângulo equilátero a partir de um segmento AB dado (Fig. 4.8a) , precisa-se garantir que os lados CA e CB tenham a mesma medida. Esses lados terão em comum o ponto C, terceiro vértice do triângulo em questão.

Com o compasso com centro em A e abertura AB [raio da circunferência], desceve-se um arco (Fig. 4.8b). Com centro em B e mantendo-se a mesma abretura BA, descreve-se um outro arco que intersecte o arco anterior no ponto C (Fig. 4.8c). Traçando-se os segmentos CA e CB, constrói-se o triângulo ABC, equilátero (Fig. 4.8d).

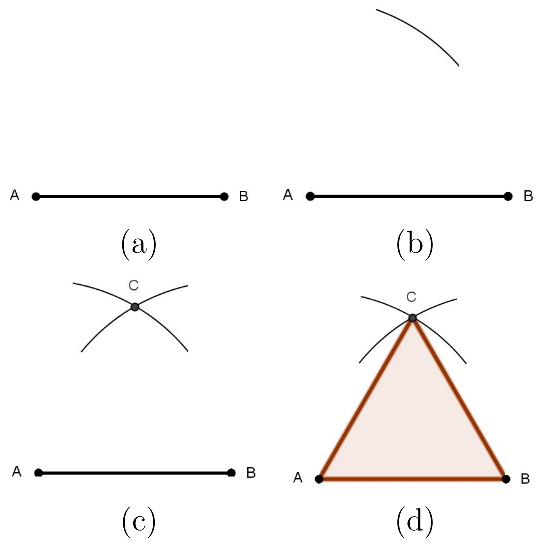


Figura 4.8: *Construção simplificada da Proposição 1 do Livro I dos Elementos*

4.2.7 Explorando a atividade

É importante notar que na construção há dois pontos de interseção entre os círculos BCD e ACE. Descreve-se, na construção, o ponto C, representado no lado acima do segmento AB. É importante constatar-se que a mesma construção poderia ser descrita para o ponto de interseção localizado abaixo do segmento AB valendo, pois, as mesmas propriedades.

A representação simplificada da construção aborda os mesmos conceitos e a mesma justificativa descritos na representação detalhada. Trata-se apenas de uma representação com menor quantidade de linhas de construção. É uma proposta para abordagem da construção em sala de aula, sem a apresentação prévia da demonstração euclidiana, a fim de estimular nos alunos a busca pelas propriedades que assegurem a veracidade da construção. Através dos questionamentos do professor, ao perceber que o arco traçado consiste em uma parte de uma circunferência, que foi omitida do desenho, o aluno poderá constatar que ao traçar o primeiro arco, está delimitando a possível localização do terceiro vértice do triângulo ABC, que será confirmado mediante a construção do segundo arco, através de sua interseção com o primeiro arco traçado.

4.3 Roteiro de atividade 3

4.3.1 Conteúdo abordado

Construção da bissetriz de um ângulo dado.

4.3.2 Objetivo:

Bisseccionar um ângulo dado, por meio da construção geométrica com régua e compasso, estabelecendo as propriedades que justificam o processo de construção.

4.3.3 Texto orientador

Ao bisseccionar um ângulo dado, estamos construindo a bissetriz desse ângulo. Por definição, dado um ângulo $\angle AOB$, a bissetriz de $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos, $\angle AOC$ e $\angle BOC$, de igual medida. Diz-se, pois, que $\overrightarrow{OC}$ bissecta $\angle AOB$ (Fig 4.9).

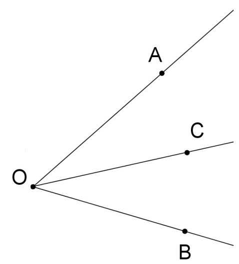


Figura 4.9: *Bissetriz de um ângulo*

Portanto

$$\boxed{\overrightarrow{OC} \text{ bissecta } \angle AOB \Leftrightarrow A\widehat{O}C = B\widehat{O}C}$$

O processo de construção que será descrito a seguir trata-se da Proposição 9 do Livro I dos *Elementos*.

4.3.4 Compreensão do processo de construção

Cortar em dois o ângulo retilíneo dado

Seja o ângulo retilíneo dado o sob BAC (Fig. 4.10a); é preciso, então, cortá-lo em dois.

Fique tomado sobre AB o ponto D, encontrado ao acaso, e fique subtraída de AC a AE igual à AD (Fig. 4.10b), e fique ligada a DE (Fig. 4.10c), e fique construído sobre a DE o triângulo equilátero DEF (Fig. 4.10d, 4.10e e 4.10f), e fique ligada a AF (Fig. 4.10g); digo que o ângulo sob BAC foi cortado em dois pela reta AF. (Fig. 4.10h)

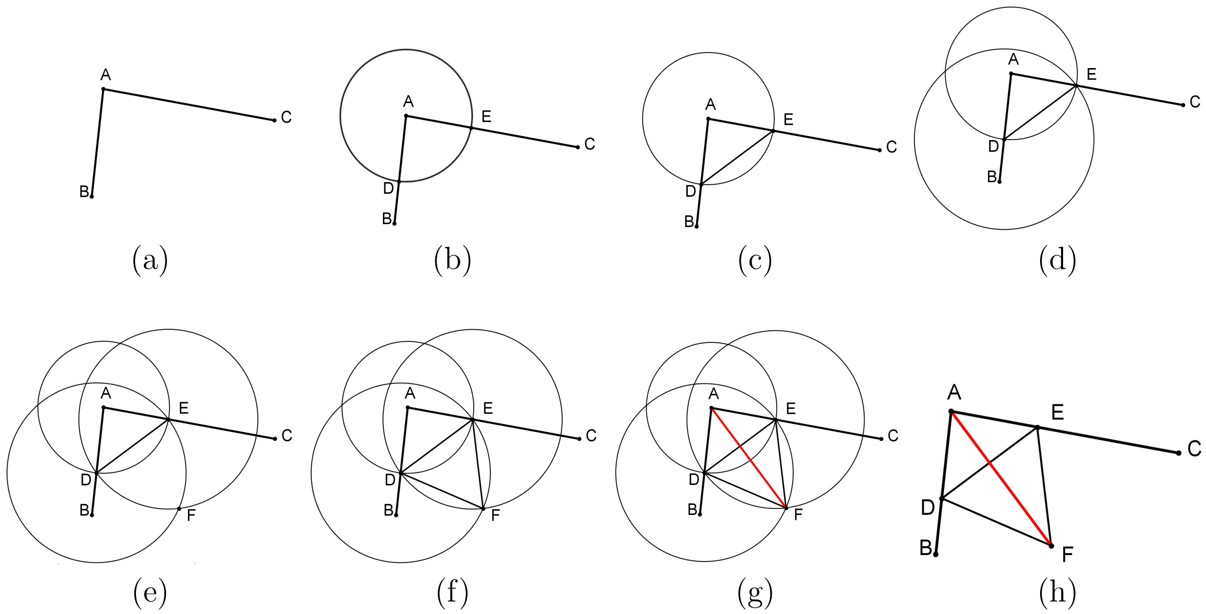


Figura 4.10: *Construção detalhada da Proposição 9 do Livro I dos Elementos*

Pois, como a AD é igual à AE, e a AF é comum, então, as duas DA, AF são iguais às duas EA, AF, cada uma a cada uma. Também a base DF é igual à base EF; portanto, o ângulo DAF é igual ao ângulo sob EAF (Fig. 4.11).

Portanto, o ângulo retilíneo dado, o sob BAC, foi cortado em dois pela reta AF; o que era preciso fazer.

4.3.5 Estruturação do método axiomático

O primeiro passo da construção, a retirada do segmento AE [de mesma medida que o segmento AD] do segmento AC está respaldada na Proposição 3 do Livro I, que justifica

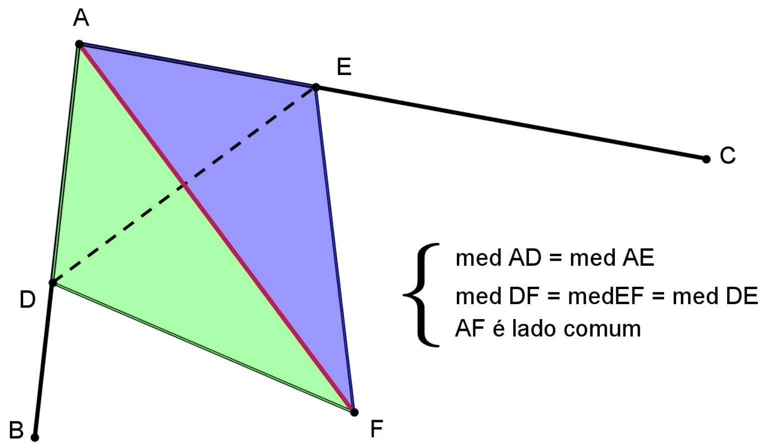


Figura 4.11: *Comprovação da congruência dos triângulos DAF e EAF*

como **de duas retas desiguais dadas, tirar da maior uma reta igual à menor**. Nesse caso, a reta maior é AC, e a menor, AD, que será tirada de AC. Tal procedimento, está comprovado pela construção do círculo da figura 4.10b, que garante AD=AE, pois são raios de uma mesma circunferência.

A construção do triângulo equilátero DEF é explicada e justificada pela Proposição 1 [objeto de estudo do roteiro de atividade 2].

A conclusão que os triângulos DAF e EAF tem as mesmas medidas para seus lados e consequentemente determinam $D\widehat{A}F = E\widehat{A}F$, está respaldada na Proposição 8, que afirma que **caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham também a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais**. Nesse caso, a própria justificativa da proposição conclui que AD é igual a AE e AF é lado comum. Como a base DF é igual à base EF então, pela Proposição 8, o ângulo formado entre AD e AF, o $\angle DAF$ é igual ao ângulo formado entre EA e AF, o $\angle AEF$, comprovando assim, que o $\angle DAE$ foi dividido em dois ângulos de igual medida, sendo AF sua bissetriz.

4.3.6 Representação simplificada da construção

Construir a bissetriz de um ângulo dado

Seja o ângulo $\angle BAC$ dado (Fig.4.12a). Pretende-se construir a bissetriz do referido ângulo, ou seja, a semirreta com origem no vértice A que o divida em dois ângulos de igual medida.

Com o compasso com centro em A e abertura qualquer, traça-se um arco de circunferência que intersecte os lados do ângulo nos pontos D e E (Fig. 4.12b).

Com o compasso com centro em D e abertura DE, descreve-se um arco (ver Fig. 4.12c). Com centro em E e abertura ED, descreve-se outro arco que intersecte o arco anterior no ponto F (ver Fig. 4.12d).

A semirreta DF será a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ (Fig. 4.12e).

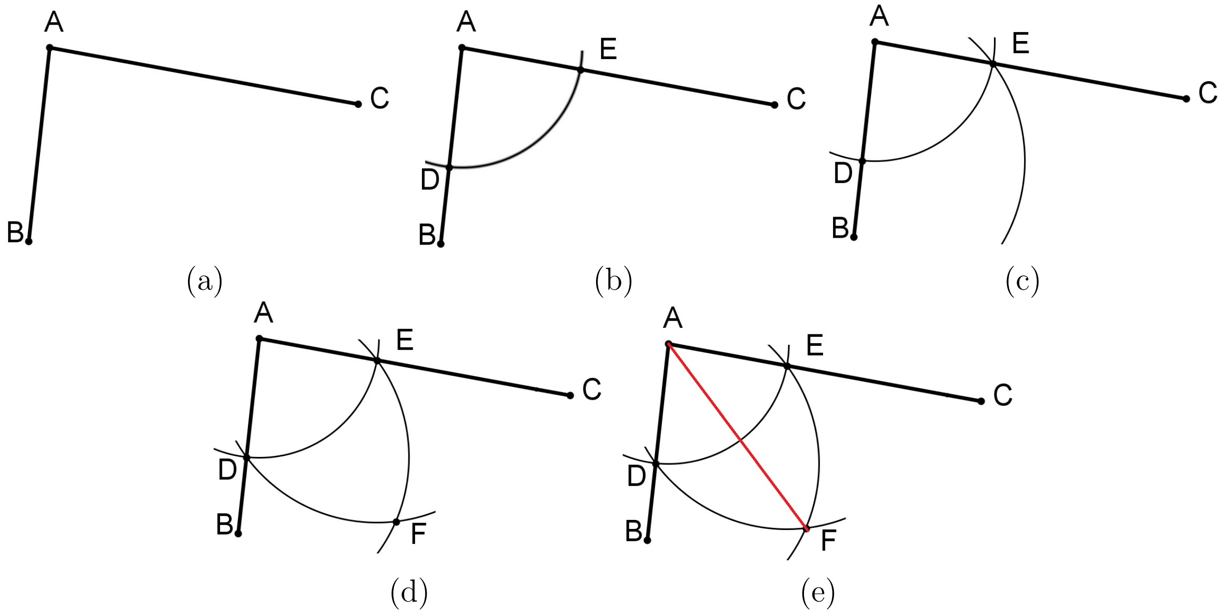


Figura 4.12: *Construção simplificada da Proposição 9 do Livro I dos Elementos*

4.3.7 Explorando a atividade

A demonstração para a representação simplificada é a mesma da representação detalhada, apenas sendo utilizados arcos de circunferência o invés da construção das circunferências.

O uso da construção simplificada é recomendado a ser desenvolvido com os alunos, em sala de aula, para que o professor encaminhe a discussão de modo a instigar os alunos a perceberem que os arcos que pertencem a uma mesma circunferência, ou a circunferências de mesmo raio, determinam lados congruentes nos triângulos, chegando à conclusão da congruência de triângulos, pelo caso LLL, concluindo em consequência a congruência entre os ângulos $\angle DAF$ e $\angle EAF$, caracterizando AF como bissetriz de $\angle BAC$.

No processo de construção descrito na atividade utilizou-se a demonstração apresentada por Euclides, assegurando na construção que o triângulo DEF seja equilátero. É interessante, uma vez que os alunos reconheçam a congruência de triângulos pelo caso LLL, que sejam conduzidos questionamentos em relação ao fato de que necessariamente o triângulo DEF seja equilátero. A intenção é que o aluno possa perceber que não é necessário, na construção, assegurar que DF e EF tenham a mesma medida de DE. Basta que DF e EF sejam congruentes, e que o triângulo DEF seja isósceles. As relações de congruência estabelecidas ainda serão válidas, pois ter-se-ão os seguintes pares de lados congruentes: AD e AE, DF e EF, e ainda o lado AF comum aos triângulos DAF e EAF.

Outro aspecto a ser abordado, é a conclusão quanto à medida do ângulo reto formado entre DE e AF. Essa constatação será válida também para a compreensão da construção da mediatriz de um segmento, bem como para a compreensão de que coincidem a altura, a bissetriz e a mediana em relação a um lado, em um triângulo equilátero, ou em um triângulo isósceles [no caso dessas cevianas em relação à base].

Pode-se explorar ainda a propriedade da bissetriz como lugar geométrico dos pontos no plano equidistantes aos lados do ângulo em questão.

4.4 Roteiro de atividade 4

4.4.1 Conteúdo abordado

Construção da mediatriz de um segmento dado.

4.4.2 Objetivo:

Seccionar um segmento dado ao meio, a partir da construção com régua e compasso de sua mediatriz, estabelecendo as propriedades que justificam o processo de construção.

4.4.3 Texto orientador

A mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e de B. Sendo assim, ao construir-se a mediatriz de um segmento, encontra-se o seu ponto médio, ponto equidistante a A e B pertencente ao próprio segmento. A mediatriz é uma reta perpendicular [provaremos na explicação do processo de construção] ao segmento AB, que o intersecta no seu ponto médio.

O processo de construção que será descrito a seguir trata-se da Proposição 10 do Livro I dos *Elementos*.

4.4.4 Compreensão do processo de construção

Cortar em duas a reta limitada dada

Seja a reta limitada AB (Fig. 4.13a); é preciso, então, cortar a reta limitada AB em duas.

Fique construído sobre ela o triângulo equilátero ABC (Ver Fig. 4.13b, 4.13c, 4.13d), e fique cortado o ângulo sob ACB e, dois pela reta CD (Ver Fig. 4.13e, 4.13f, 4.13g, 4.13h); digo que a reta AB foi cortada em duas no ponto D.

Pois, como a CA é igual à CB, e a CD é comum, então, as duas AC, CD são iguais às duas BC, CD, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ACD é igual ao ângulo sob BCD; portanto, a base AD é igual à base BD.

Portanto, a reta limitada dada AB foi cortada em duas no D; o que era preciso fazer.

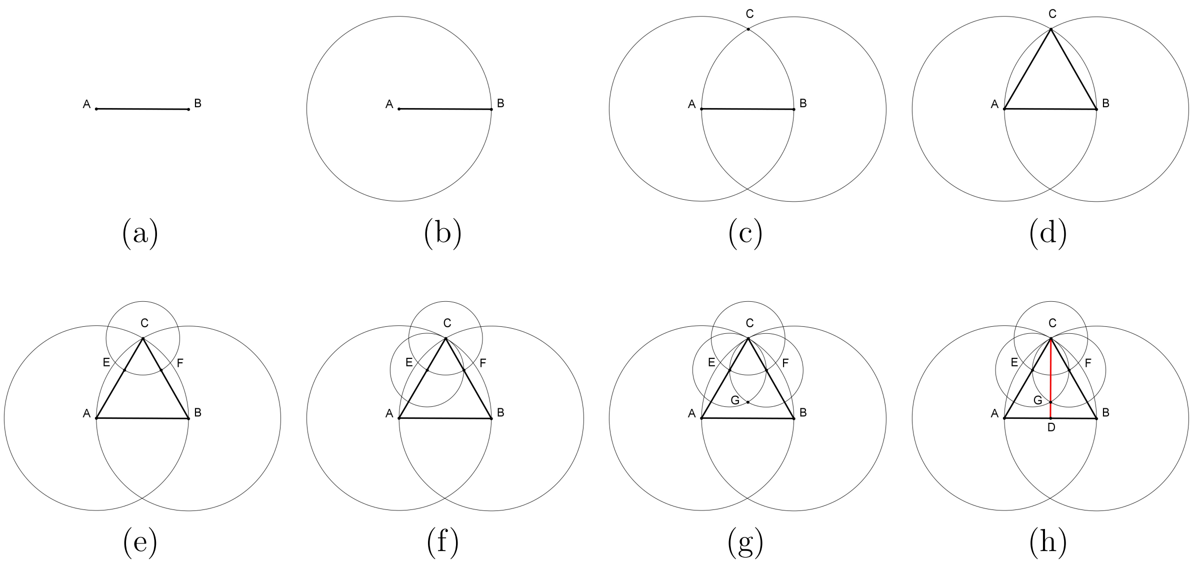


Figura 4.13: *Construção detalhada da Proposição 10 do Livro I dos Elementos*

4.4.5 Estruturação do método axiomático

A construção do triângulo equilátero sobre o segmento AB é demosntrada pela Proposição 1, objeto de estudo do roteiro de atividade 2, presente neste capítulo.

A divisão do ângulo ACB em dois iguais por CD consiste na construção da sua bissetriz, demonstrado pela Proposição 9, explorada no roteiro de atividade 3.

A conclusão de que os segmentos AD e BD são congruntes, é respaldada pela Proposição 4 do Livro I, que afirma que **caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais**. Como tem-se comprovado pela construção AC congruente a CB [lados do triângulo equilátero ABC], CD lado comum aos triângulos ACD e BCD, cujos ângulos $\angle ACD$ e $\angle BCD$ têm a mesma medida, pois resultam da construção da bissetriz CD, comprova-se a congruência dos triângulos ACD e BCD pelo caso LAL. Consequentemente, tem-se AD e BD congruentes, sendo, pois, AB dividido ao meio com D sendo seu ponto médio.

4.4.6 Representação simplificada da construção

A construção da mediatriz pode ser executada com uma menor quantidade de linhas de construções, baseada na Proposição 10 de Euclides, através da utilização de arcos ao invés de circunferências (Fig. 4.14).

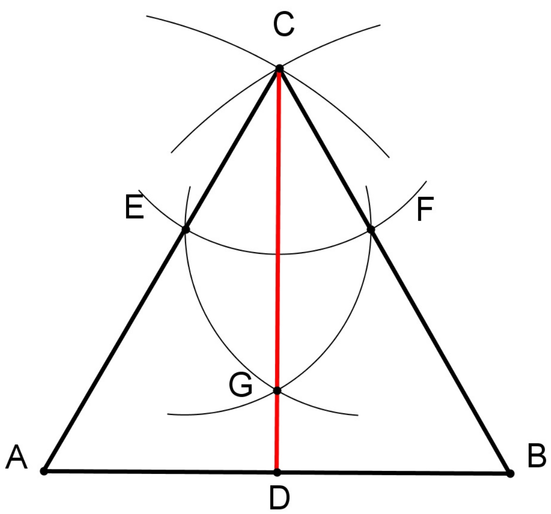


Figura 4.14: *Representação simplificada da Proposição 10*

Outra forma de construção da mediatriz será abordada na proposição descrita a seguir.

Construir a mediatriz do segmento dado

Seja o segmento AB dado (Fig. 4.15a). Pretende-se construir a mediatriz do referido segmento, ou seja, a reta perpendicular a AB, que o intersecte em seu ponto médio.

Com o compasso com centro em A e abertura qualquer, maior que a metade do segmento traça-se o primeiro arco (ver Fig. 4.15b). Com cento em B e mesma abertura do primeiro arco, traça-se o segundo arco, que intersecte o primeiro nos pontos C e D (Fig. 4.15c). A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz do segmento AB (Fig. 4.15d).

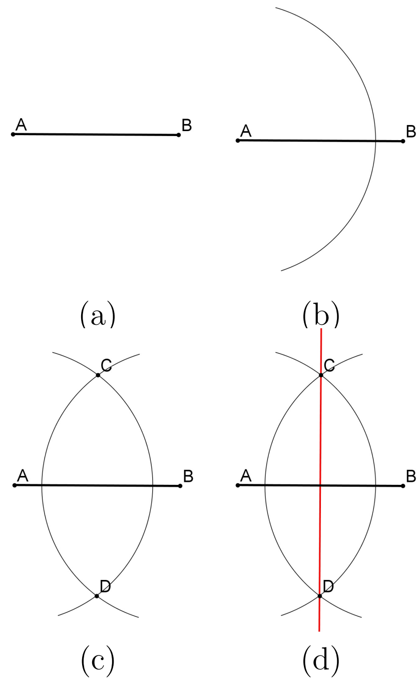


Figura 4.15: *Construção da mediatriz de um segmento*

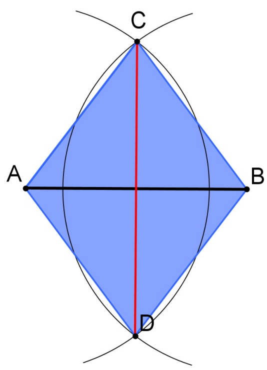
4.4.7 Explorando a atividade

No processo de construção proposto e demonstrado nos *Elementos* percebe-se claramente a forma com que o método axiomático se consolida nas definições estabelecidas e proposições anteriormente demonstradas. Uma vez estabelecidas as Proposições 1, 4 e 9, o seu uso é direto para a dedução da Proposição 10.

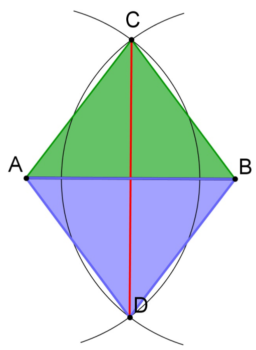
É importante que o educando perceba que outras alternativas de construção podem ser propostas, desde que seja possível a sua demosntração com base nos conhecimentos geométricos existentes. A construção da mediatriz é um exemplo dessa possibilidade.

Observando a própria Proposição 10 do Livro I dos *Elementos*, é interessante que os alunos compreendam que pode-se estabelecer o mesmo processo de construção partindo da construção de um triângulo ABC isósceles, cuja base seja o segmento AB, do qual pretende-se traçar a mediatriz. Como os lados AC e BC serão congruentes, e a construção da bissetriz CD determinará dois triângulos congruentes, o ACD e o BCD, os lados AD e BD possuirão a mesma medida. Pela congruência dos triângulos mencionados, verifica-se que os ângulos $\angle ADC$ e $\angle BDC$ possuem a mesma medida, e como esses ângulos são suplementares, cada um deles será reto, comprovando-se a perpendicularidade da mediatriz em relação ao segmento dado.

A representação simplificada da construção da mediatriz deve ser explorada a fim de se estabelecer as propriedades que a justificam. Através do procedimento de construção, os arcos construídos se intersectaram nos pontos C e D. Tais arcos pertencem a circunferências de mesmo raio, portanto, podem-se construir os segmentos congruentes AC, BC, AD e BD. Dessa forma, o quadrilátero ACBD construído é um losango (Fig.4.16a). O losango tem por propriedade o fato de suas diagonais se intersectarem no ponto médio, além de serem perpendiculares. Caso ainda não tenham sido verificadas as propriedades do losango, pode-se abordar a comprovação mediante a observação dos triângulos isósceles ACB e ADB (Fig. 4.16b), verificando-se, inclusive, sua congruência.



(a)



(b)

Figura 4.16: *Exploração das propriedades da construção da mediatriz*

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de resgate do ensino das construções geométricas apresentada no presente trabalho tem por objetivo básico promover a melhoria do ensino da geometria nas escolas da educação básica, através da provocação do educando, por meio da exploração de construções diversas, instigando-o a relacionar os conhecimentos geométricos que possui, bem como estabelecer novas relações, construindo novos conhecimentos, a partir da compreensão dos conceitos e propriedades empregados nas atividades promovidas no ambiente escolar.

Para atingir tal fim, no entanto, faz-se necessário o desenvolvimento de uma abordagem direcionada ao professor, para que o emprego das construções geométricas nas aulas de matemática seja embasado sempre na análise das propriedades características das figuras construídas, e não encaradas como uma receita que apresenta o passo a passo da construção. O foco da abordagem deve ser sempre o embasamento teórico que respalda o processo de construção e o direcionamento dos questionamentos que provoquem no educando o desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

Nesse sentido, acredita-se que a proposta aqui abordada possa ser introduzida nas aulas de geometria da educação básica, sobretudo ao longo do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental.

É fato que existem professores de matemática que não costumam utilizar as construções com régua e compasso no ensino da geometria, seja por enxerga-las como um simples processo de desenhar figuras, sem reconhecer a importância do seu papel no estabelecimento de relações geométricas ao longo do processo de construção, ou seja por uma carência na sua formação acadêmica no que se trata da exploração das construções.

Pretende-se, com as reflexões aqui abordadas, que seja revisto o papel do ensino das construções geométricas na educação básica e que os professores de matemática possam refletir acerca das possibilidades de sua exploração no ensino da geometria.

Mas este é apenas um ponto de partida, com o intuito de evidenciar que é possível estabelecer um ensino mais consistente da geometria a partir da exploração das construções geométricas. Surgem, a partir daqui, dois projetos futuros de trabalho a serem desenvolvidos.

O primeiro projeto, a médio prazo, trata-se da elaboração de cadernos de estudo que contenham a exploração de construções geométricas com régua e compasso que estejam diretamente relacionadas aos conceitos geométricos trabalhados na educação básica, com uma abordagem bem detalhada e ilustrada do processo de construção, além de relacionar os conceitos e propriedades geométricas que sustentam cada construção abordada. A partir do uso de uma linguagem simples e clara, os cadernos desenvolvidos poderão ser utilizados por professores, tanto para sua formação quanto para o desenvolvimento de atividades junto aos educandos, nas escolas. A partir da busca do estabelecimento de parcerias com secretarias de educação, o material poderá ser utilizado em um programa de formação continuada de professores de Matemática, que objetive-se a implementar o uso das construções geométricas no ensino da geometria na educação básica.

O segundo projeto, mais ousado e que demandará maior dedicação de tempo e de estudos, trata-se da exploração dos livros dos Elementos de Euclides, no intuito de desenvolver as proposições apresentadas no material e as suas respectivas demonstrações, com ilustrações detalhadas, passo a passo, a fim de facilitar sua compreensão a partir da visualização das figuras. Além da elaboração do material escrito, propõe-se também desenvolver material audiovisual com o detalhamento das construções, efetuadas tradicionalmente com régua não graduada e compasso.

Pretende-se com as discussões apresentadas nesse trabalho e com os projetos futuros proporcionar ao professor de matemática uma reflexão sobre a importância do papel das construções geométricas no processo de ensino aprendizagem da geometria.

Espera-se, com o resgate do ensino das construções geométricas na educação básica, que a aprendizagem da geometria seja mais consistente e que a abordagem do método axiomático e o estímulo do raciocínio lógico dedutivo propiciem ao educando o desenvolvimento de estratégias cognitivas que promovam, além da construção de um conhecimento mais fundamentado e significativo da geometria, também a capacidade de pensar acerca de situações cotidianas complexas de maneira logicamente estruturada, ponderando as circunstâncias que lhe sejam apresentadas para a busca das devidas soluções. Mais que uma abordagem acerca de formas e números, os Elementos, e também a exploração das construções geométricas, são uma forma de pensar.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: SBM, 2001, v.45, p.1-9.

ÁVILA, Geraldo. *Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral*. 2. ed. rev. ampl.. São Paulo: Blucher, 2010. 203 p.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q.. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. Tradução Elza F. Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 279 p.

BONGIOVANNI, Vicenzo. As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: SBM, 2004, v.55, p.29-32.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

EUCLIDES. *O primeiro livro dos Elementos de Euclides*. Trad. Irineu Bicudo. Natal: SBHMat, 2001. (Série:Textos de História da Matemática; v.1).

EUCLIDES. *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EUCLIDES. *Elementos de Geometria: dos seis primeiros livros do undécimo e duodécimo da versão latina de Frederico Commandino*. Revistos por Aníbal Faro. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

MAZIERO, Lieth Maria. *Quadriláteros: construções geométricas com o uso de régua e compasso*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

NETTO, Sérgio Lima, *Construções geométricas: exercícios e soluções*, Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. 142p.

PUTNOKI, José Carlos. Que se devolvam a Euclides a régua e compasso. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: SBM, 1988, v.13, p.13-17.

RAYMUNDO, Márcia Fonseca Soutello Moreira. *Construção de conceitos geométricos: investigando a importância do ensino de Desenho Geométrico nos anos finais do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2010.

WAGNER, Eduardo, *Uma introdução às construções geométricas*. São Paulo: OBMEP, 2009.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.