

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRE EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GENI VIANA DO CARMO VENDRAME

ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DE PRISMAS E CILINDROS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MARINGÁ

2014

GENI VIANA DO CARMO VENDRAME

ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DE PRISMAS E CILINDROS

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, UEM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação da Prof^a Dr^a. Luciene Parron Gimenes Arantes.

MARINGÁ

2014

FICHA CATALOGRÁFICA

VENDRAME, Geni Viana do Carmo

Área da Superfície e Volume de Prismas e Cilindros. Maringá, PR:
2014

Orientadora: Dr^a Luciene Parron Gimenes Arantes

Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – Universidade
Estadual de Maringá

GENI VIANA DO CARMO VENDRAME

ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DE PRISMAS E CILINDROS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Me. Márcio Hiran Simões
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Apucarana



Prof. Dr. Rodrigo Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 27 de fevereiro de 2014.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas,
Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Em nome de um sonho e a todos que me incentivaram direta ou indiretamente a realizá-lo, ao meu esposo José Luiz e aos meus filhos, Luís Gabriel e Gabriela.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sua benção, a todas pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida, peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas podem ter certeza que fazem parte da minha gratidão. Agradeço de forma especial a minha orientadora Dr^a Luciene Parron Gimenes Arantes por sua dedicação e, por meio dela me reporto a toda comunidade da Universidade Estadual de Maringá pelo apoio. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro. Agradeço também, o reconhecimento de minha família, ao meu esposo José Luiz Vendrame pelo carinho e apoio e aos meus filhos Luís Gabriel Viana Vendrame e Gabriela Viana Vendrame pelo carinho e compreensão de ambos.

Sempre me pareceu estranho que todos que estudam essa ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta. (GAUSS, Carl Friedrich).

RESUMO

VENDRAME, Geni Viana do Carmo. Área da superfície e volume de prismas e cilindros. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso – Programa de Pós-Graduações para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica. Maringá, 2014.

O presente trabalho tem como objetivo investigar e analisar problemas de otimização ligados à área da superfície e volume de prismas e cilindros. Pretendemos, desenvolver atividades diferenciadas na busca de alternativas para encontrar o volume máximo de um sólido com área mínima. Este trabalho permite que os alunos ampliem os seus conhecimentos e fornece elementos para que eles possam se tornar independentes na forma de interpretar, de representar, de economizar e resolver problemas geométricos. O uso de materiais manipuláveis e da tecnologia computacional no ensino de geometria é uma abordagem motivadora e significativa à aprendizagem. Assim, como ocorre com o conhecimento da geometria ao longo da história, estudos como esse nos impulsionam a percorrer vários caminhos em busca de aperfeiçoar o conhecimento de alunos e professores, pois buscam novas metodologias que levam a transformação do meio em que vivemos sem desprezar metodologias anteriores.

Palavras-chave: Áreas. Volumes. Otimização. Softwares.

ABSTRACT

VENDRAME, Geni Viana do Carmo. The surface area and volume of prisms and cylinders. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso – Programa de Pós-Graduações para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica. Maringá, 2014.

The present study aims to investigate and analyze optimization problems related to the surface area and volume of prisms and cylinders. Intend to develop differentiated activities in search of alternatives to find the maximum volume of a solid with minimum area. This work allows students to broaden their knowledge and provides elements so that they can become independent in order to interpret, represent, to save and solve geometric problems. The use of manipulatives and computer technology in the teaching of geometry is a motivating and meaningful approach to learning. Thus, as with the knowledge of geometry throughout history, such studies in the drive to go in search of various ways to improve the knowledge of students and teachers, since they seek new methodologies that lead to transformation of the environment we live without neglecting methodologies above.

Keywords: Areas. Volumes. Optimization. Software.

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|----|
| Tabela 1 - | 50 |
| Tabela 2 - | 52 |
| Tabela 3 - Dados do pré-teste 2º ano A – 2013..... | 56 |
| Tabela 4 - Dados do pré-teste 2º ano B – 2013..... | 56 |
| Tabela 5: Medidas no paralelepípedo reto retângulo..... | 80 |
| Tabela 6: Medidas no cilindro..... | 81 |
| Tabela 7: Dados da Avaliação Final 2º ano A..... | 85 |
| Tabela 8: Dados da Avaliação Final 2º ano B..... | 85 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 - Poliedro convexo..... | 23 |
| Figura 2 - Poliedro não convexo..... | 23 |
| Figura 3 - Poliedro convexo..... | 23 |
| Figura 4 - Prisma triangular, paralelepípedo e prisma heptagonal..... | 24 |
| Figura 5 - Pirâmide quadrangular, pirâmide triangular e pirâmide heptagonal..... | 25 |
| Figura 6 - Antiprismas..... | 26 |
| Figura 7 - Poliedros regulares ou poliedros de Platão..... | 28 |
| Figura 8 - Poliedros semirregulares..... | 28 |
| Figura 9 - Poliedros semirregulares..... | 28 |
| Figura 10 - Poliedros Kepler-Poisot..... | 29 |
| Figura 11 - Cinco dos 92 poliedros de Johnson..... | 29 |
| Figura 12 - Corpos redondos..... | 30 |
| Figura 13 - Cilindro..... | 30 |
| Figura 14 - Cone..... | 31 |
| Figura 15 - Esfera..... | 31 |
| Figura 16 - Cálculo do volume do paralelepípedo pela decomposição e contagem de cubinhos..... | 34 |
| Figura 17 - (A, B, C) Representação do Princípio de Cavalieri..... | 37 |
| Figura 18 - (A, B) Representação do Princípio de Cavalieri..... | 37 |
| Figura 19 - Prismas construídos no Geogebra..... | 38 |
| Figura 20 - Área da superfície do prisma..... | 38 |
| Figura 21 - Prisma e cilindro construídos no Geogebra..... | 39 |
| Figura 22 - Área da superfície do cilindro..... | 39 |
| Figura 23 - Pirâmides construídas no Geogebra..... | 40 |
| Figura 24 - Prisma e pirâmides construídos no Geogebra..... | 41 |
| Figura 25 - Área da superfície da pirâmide..... | 41 |
| Figura 26 - Pirâmide e cone construídos no Geogebra..... | 42 |
| Figura 27 - Área da superfície do cone..... | 42 |
| Figura 28 - Cilindro equilátero e sólido C..... | 43 |

| | |
|--|----|
| Figura 29 - Secção na esfera e no sólido C..... | 43 |
| Figura 30 - Superfície da esfera..... | 44 |
| Figura 31 - Ponto de máximo e de mínimo | 45 |
| Figura 32 - Triângulo do exemplo 1..... | 46 |
| Figura 33 - Paralelepípedo do exemplo 6..... | 50 |
| Figura 34 - Paralelepípedo do exemplo 8..... | 53 |
| Figura 35 - Cilindro do exemplo 8 | 53 |
| Figura 36 - Exposição grupo I..... | 60 |
| Figura 37 - Exposição grupo II..... | 60 |
| Figura 38 - Exposição Grupo III..... | 61 |
| Figura 39 - Exposição grupo IV..... | 61 |
| Figura 40 - Exposição Grupo V..... | 61 |
| Figura 41 - Exposição Professora..... | 61 |
| Figura 42 - Poliedros..... | 62 |
| Figura 43 - Poliedros..... | 62 |
| Figura 44 - Corpos Redondos..... | 62 |
| Figura 45 - Corpos Redondos..... | 62 |
| Figura 46 - Prismas..... | 63 |
| Figura 47 - Pirâmides..... | 63 |
| Figura 48 - Poliedros (desconsiderar as tampas)..... | 63 |
| Figura 49 - Representam esferas..... | 63 |
| Figura 50 - Representam cilindros..... | 63 |
| Figura 51 - Representam cones..... | 63 |
| Figura 52 - Poliedros construídos com canudos..... | 64 |
| Figura 53 - Poliedros construídos com canudos..... | 64 |
| Figura 54 - Poliedros construídos com canudos..... | 64 |
| Figura 55 - Poliedros construídos com canudos..... | 64 |
| Figura 56 - Planificação do icosaedro..... | 66 |
| Figura 57 - Planificação do prisma triangular..... | 66 |
| Figura 58 - Prisma hexagonal..... | 66 |

| | |
|--|----|
| Figura 59 - Planificando o octaedro..... | 66 |
| Figura 60 - Dipirâmide octogonal..... | 66 |
| Figura 61- Frequência 4 - Esfera geodésica octaedral..... | 67 |
| Figura 62 - Frequência 6 - Esfera geodésica icosaédrica..... | 67 |
| Figura 63 - Retângulo..... | 68 |
| Figura 64 - Quadrado..... | 68 |
| Figura 65 - Paralelogramo..... | 68 |
| Figura 66 - Triângulo..... | 69 |
| Figura 67 - Trapézio..... | 69 |
| Figura 68 - Losango..... | 69 |
| Figura 69 - Pentágono e sua decomposição..... | 70 |
| Figura 70 - Hexágono e sua decomposição..... | 70 |
| Figura 71 - Círculo e sua decomposição..... | 71 |
| Figura 72 - Setor Circular BOC..... | 71 |
| Figura 73 - Segmento Circular..... | 71 |
| Figura 74 - Coroa Circular..... | 72 |
| Figura 75 - Recipientes com formatos diferente..... | 72 |
| Figura 76 - Recipiente com escala..... | 73 |
| Figura 77 - Recipientes com mesmo volume..... | 73 |
| Figura 78 - Cubo como unidade de volume..... | 74 |
| Figura 79 - Recipiente com cubos..... | 74 |
| Figura 80 - (A, B, C) Representação do Princípio de Cavalieri..... | 75 |
| Figura 81 - (A, B) Representação do Princípio de Cavalieri..... | 75 |
| Figura 82 - Paralelepípedo..... | 77 |
| Figura 83 - Prisma pentagonal..... | 77 |
| Figura 84 - Cilindro..... | 77 |
| Figura 85 - Percurso realizado pela mosca..... | 78 |
| Figura 86 - Percurso realizado pela formiga..... | 78 |
| Figura 87 - Embalagem de leite..... | 79 |
| Figura 88 - Embalagem de óleo..... | 80 |

| | |
|---|----|
| Figura 89 - Resolução da situação a)..... | 82 |
| Figura 90 - Resolução da situação b)..... | 83 |
| Figura 91 - Resolução da situação c)..... | 83 |
| Figura 92 - Resolução da situação d)..... | 84 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| 1 INTRODUÇÃO..... | 15 |
| 2 UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA..... | 18 |
| 3 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS..... | 22 |
| 3.1 POLIEDROS..... | 22 |
| 3.1.1 Prismas..... | 24 |
| 3.1.2 Pirâmides..... | 25 |
| 3.1.3 Antiprismas..... | 25 |
| 3.1.4 Outros Poliédros..... | 26 |
| 3.2 NÃO POLIEDROS..... | 30 |
| 3.2.1 Cilindros..... | 30 |
| 3.2.2 Cones..... | 31 |
| 3.2.3 Esferas..... | 31 |
| 4 ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME..... | 32 |
| 4.1 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DOS PRISMAS..... | 37 |
| 4.2 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO..... | 38 |
| 4.3 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE..... | 40 |
| 4.4 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DO CONE..... | 42 |
| 4.5 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DA ESFERA..... | 43 |
| 5 OTIMIZAÇÃO DA ÁREA DE SUPERFÍCIE E VOLUME DO PRISMAS E CILINDROS..... | 45 |
| 6 O ESTUDO DA ÁREA DE SUPERFÍCIE E VOLUME DO PRISMAS E CILINDROS..... | 54 |
| 6.1 DADOS DO PRÉ-TESTE..... | 56 |
| 6.2 SEQUÊNCIA DAS ATIVIDADES..... | 58 |
| 6.2.1 Exposição de Materiais..... | 60 |
| 6.2.2 Montagem e Poliedros com Canudos..... | 63 |
| 6.2.3 Utilizando o Software Poly..... | 65 |
| 6.2.4 Recordando Áreas de Figuras Planas..... | 67 |
| 6.2.5 Volume..... | 72 |

| | |
|--|-----------|
| 6.2.6 Utilizando o Software Wingeom..... | 76 |
| 6.2.7 Resolução de Situações-problema..... | 78 |
| 6.2.8 Dados da Avaliação Final..... | 84 |
| 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 87 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 88 |
| APÊNDICE 1..... | 90 |
| APÊNDICE 2..... | 93 |

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho pretende mostrar que, com o avanço tecnológico, o estudo da geometria espacial pode ser mais atraente e interativo. O aluno, em contato com o estudo de área da superfície e volume de figuras geométricas espaciais, faz indagações e estabelece relações com a realidade. Logo, o estudo de geometria espacial deve ser de forma dinâmica, através da utilização de materiais manipuláveis e de alguns softwares educativos tais como Poly, Wingeom, entre outros, fazendo com que a aquisição do conhecimento seja mais significativa e ultrapasse os limites da memorização.

Com a evolução de novas tecnologias torna-se cada vez mais importante o uso da computação para auxiliar o conhecimento nas diversas áreas das atividades humana.

Segundo [21], a possibilidade que o computador, oferece como ferramenta para ajudar o aprendiz a construir conhecimento e a compreender o que faz, constitui uma verdadeira revolução do processo de aprendizagem e uma chance para transformar a escola.

Nesse contexto, utilizamos materiais manipuláveis e softwares educativos, a fim de nos auxiliar na transformação da abordagem do ensino aprendizagem e não apenas para informatizar o ensino. Promover a aprendizagem através de softwares com interação do currículo e das atividades em sala de aula é um dos objetivos desse trabalho. Elaborar atividades para serem desenvolvidas com o auxílio de materiais manipuláveis e softwares, em especial, o Poly e o Wingeom, visando colaborar de forma interativa e dinâmica na diminuição da distância entre professores e alunos criadas pelas novas tecnologias e possibilitar ao aluno fazer conexões entre os conceitos matemáticos estudados e situações problemas do seu cotidiano. Em particular, o estudo de área da superfície e volume de figuras geométricas espaciais é outro objetivo desse trabalho.

No meio em que vivemos, podemos observar formas espaciais na natureza tais como os planetas, as montanhas, as rochas, os favos de mel, e nas construções humanas, como nos edifícios, nas pirâmides do Egito, na bola de futebol, nos diversos modelos de embalagens entre tantos outros exemplos.

Dentro da matemática, a geometria perpassa por vários conteúdos, porém uma das dificuldades mais elencadas para o estudo da geometria espacial é a representação, portanto, a necessidade de desenvolver atividades que leve o aluno a interpretar figuras tridimensionais representadas no plano.

Neste sentido, a montagem de modelos de sólidos geométricos através de canudos e a visualização dos mesmos, através de softwares educativos, auxiliam na interpretação das construções reais proporcionando entendimentos de vários conceitos geométricos e de noção espacial, pois um ambiente rico em imagens e animações contribui para um estudo mais dinâmico em que o aluno pode interagir com os modelos e construir seu próprio conhecimento através das diferentes representações de uma mesma figura e, comparando com outras figuras, descobrindo propriedades das figuras geométricas espaciais estudadas.

Sabemos que alguns conceitos da geometria espacial são conhecidos, pois foram estudados no ensino fundamental, tais como a nomenclatura, o número de faces, de vértices, de arestas, a classificação em poliedros e não poliedros (corpos redondos), além de algumas características próprias dos prismas.

Pretendemos consolidar e ampliar o conhecimento na medida em que avançarmos nos estudos de outros sólidos.

Ao diversificar a transmissão de um determinado conceito, devemos estar atentos na melhor maneira de conduzir o estudo para que possamos abranger com maior êxito a capacidade de cada um dos alunos envolvidos.

Diversificar sem estar atento às reações dos alunos não é produtivo em relação à aprendizagem. O fazer é um acontecimento de grande relevância dentro da aprendizagem matemática. A visualização e a aprendizagem, muitas vezes, podem estar desconectadas, ou seja, ao mudarmos a maneira de apresentar um determinado conteúdo devemos estar atentos ao que está sendo acrescentado no conhecimento adquirido anteriormente. Mas, para isso, o aluno deve compreender e depois colocar o aprendido em prática.

Segundo Borba e Villarreal (2005), citado por [1], as tecnologias de informação não são estáticas, mas elas são atrizes no processo de produção do conhecimento. Atrizes, no sentido de que elas influenciam o processo de raciocínio dos alunos de acordo com o tipo de informação que proporcionam a eles.

Conforme [8], eles defendem que o aluno aprende problemas resolvendo problemas [...] a matemática torna-se mais significativa para o aluno que está

constantemente em contato com uma ampla variedade de problemas. Ele estará mais capacitado a se adaptar a novas situações, e a abordar novos problemas com segurança.

Pretendemos com o desenvolvimento desse trabalho solucionar problemas que obtenham o menor custo gasto com material para fabricação de embalagens de um determinado produto e elevar o nível de conhecimento dos alunos em relação a área da superfície e volume de prismas e cilindros.

Segundo [2], o valor da embalagem incide no valor final do produto. Uma preocupação é criar uma embalagem com a quantidade mínima possível de material, sem perder a sua funcionalidade e aparência.

Com o desenvolvimento das atividades, os alunos vão construindo seus conhecimentos por meio da exploração, da interação entre colegas e professor, da organização de ideias e reorganização das mesmas, da ousadia de criar e recriar o próprio conhecimento. O professor atua, ao mesmo tempo, como mediador, incentivador e desafiador do conhecimento da própria prática e da aprendizagem de seus alunos.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA

A geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.

Jacques Bernoulli

A humanidade desde os primórdios de sua existência busca aperfeiçoamento nas diversas áreas do conhecimento para compreender melhor o espaço onde vivemos.

O conhecimento da geometria parece ter-se originado de observações constantes dos elementos da natureza, da busca de relações entres os mesmos e das inúmeras necessidades circunstanciais da vida.

No antigo Egito, os escribas lidavam com medições de terra, cálculo de impostos, volume de celeiros para depósitos e projetos de arquitetura. Os celeiros apresentavam forma de cilindro, então, tornava-se necessário encontrar um método para calcular área do círculo. No Papiro de Rhind (sec. XVIII a.C.) encontram-se problemas relativos ao cálculo de área do círculo.

O conhecimento da civilização egípcia era grande. Os egípcios construíram grandes obras arquitetônicas, como as pirâmides, além de construírem barcos, barragens e canais. Também a geometria está presente nas construções de suas estátuas, pórticos, templos, muralhas e lagos.

Na antiga Índia, suas cidades possuíam bom planejamento e nas decorações das cerâmicas apareciam círculos que se interceptam, quadrados, triângulos entre outros. Em manuais referentes às construções de altares religiosos aparecem formas diferentes nas quais utilizavam formas geométricas como triângulos, quadrados, retângulos, círculos, semicírculos e trapézios.

Os indianos, por volta de 200 a.C., utilizavam o método da construção de um retângulo de área equivalente ao do trapézio dado, já que o trapézio era utilizado em algumas construções e presume-se que eles já sabiam calcular a área do mesmo.

Ainda com relação ao trapézio, o trabalho mais antigo é o Jyotiskarandaka, por volta do século IV ou VI, sobre o cálculo dos diâmetros de uma montanha, de altura qualquer, na forma de um tronco de cone. Como as seções verticais desse sólido são trapézios isósceles, para encontrar os diâmetros bastava calcular a base qualquer de uma das seções. Para mais detalhes, veja [3].

Os babilônios já conheciam o Teorema de Pitágoras cerca de mil anos antes de Pitágoras.

Além do teorema ser conhecido por indianos e chineses, os babilônios conheciam as regras gerais para o cálculo das áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios retângulos.

No registro matemático mais antigo da China, encontram-se cálculos de construções e volumes de sólidos, entre eles, os de pirâmides.

A necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples tais como retângulos, quadrados e triângulos. A ideia de volume surge imediatamente ao se considerarem recipientes para conter líquidos e outras mercadorias.

O desenvolvimento da agricultura, a fabricação de alguns instrumentos para caça e pesca e a domesticação de animais, levaram as civilizações a depender menos da natureza. Várias são as conjecturas que tentam justificar a origem das representações geométricas encontradas em pinturas, nas cerâmicas e, posteriormente, na tecelagem.

O interesse pelas formas, configurações geométricas, bem como, pela harmonia entre elas não é privilégio dos povos antigos ou das civilizações modernas que tem ao seu alcance a geometria sistematizada em milhares de anos. Os povos indígenas, as tribos primitivas de muitos países ou as populações, que não têm nenhum domínio da geometria produzida pela humanidade e não têm acesso a ela, também revelam em seus trabalhos o conhecimento das formas geométricas, o interesse pela beleza, pela simetria etc., confirmando que as noções geométricas elementares ou não, surgem da relação e interação do homem com o ambiente, com a natureza.

Embora a geometria, inicialmente, estivesse ligada ao meio físico, aos poucos foi evoluindo, juntamente com a evolução da humanidade e, até chegar na geometria estudada hoje, se passaram muitos séculos. A inteligência humana tornou-se capaz

de relatar formas, tamanhos, relações espaciais de objetos físicos específicos e extrair certas propriedades gerais e relações através da observação.

Arquimedes (287-212 a.C.), em um de seus trabalhos dedicados à geometria plana inaugurou um método para calcular π , e provou que π está situado entre $223/71$ e $22/7$, ou seja, que π com duas casas decimais é dado por 3,14. As fórmulas corretas para as áreas da superfície esférica e calota esférica, e para os volumes da esfera e do segmento esférico de uma base são encontrados, pela primeira vez, em um de seus trabalhos sobre geometria sólida.

Descartes já conhecia, em 1640, a relação $V - A + F = 2$ em que a soma do número de faces de um poliedro mais o número de vértices menos o número de arestas resulta em duas unidades. Esta fórmula só foi demonstrada pela primeira vez por Euler, em 1751.

Por volta de 1865, Möbius escreveu um artigo em que um poliedro era considerado, simplesmente, como uma coleção de polígonos ligados entre si.

A natureza é rica em representações de sólidos geométricos, desde o micro ao macro, por exemplo, os planetas, as rochas, os frutos, o favo de mel, os cristais, o formato característicos dos vulcões. Nas construções humanas, o maior sólido construído foi a Grande Pirâmide do Egito.

Os gregos acreditavam que alguns sólidos correspondiam a elementos do Universo – o tetraedro representava o fogo; o cubo, a terra; o octaedro o ar; o icosaedro, a água e o decaedro o Universo.

Pouco depois dos pitagóricos, Platão e seus seguidores estudaram esses sólidos com tal intensidade, que eles se tornaram conhecidos como poliedros de Platão. Platão foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares.

Os poliedros regulares estão presentes na natureza: os três primeiros sob a forma de cristais e os outros dois como esqueleto de animais marinhos microscópicos. Todavia, sua beleza e simetria é que mantiveram o interesse do ser humano por eles através dos séculos.

Kepler (1571-1630), utilizou os poliedros regulares para tentar resolver o mistério do Universo. Ele tinha a intenção de demonstrar a relação de harmonia cósmica com a harmonia dos sólidos regulares. O que acabou sendo um ponto de partida para se chegar à definição de órbitas elípticas dos planetas, de grande utilidade no desenvolvimento de astronomia. Em seu trabalho, *The Mystery*

cosmográfico, ele demonstrou que as distâncias dos planetas em relação ao Sol foram determinadas pelos cinco poliedros regulares. Ele conseguiu traçar a órbita da Terra, e mostrou também, que os planetas não se moviam em órbitas circulares, mas sim, em órbitas elípticas.

A geometria vai além da representação visual e aparece em diversas áreas do conhecimento humano. Ao apresentar um determinado conceito, sua compreensão, muitas vezes, será mais rápida se for apresentado através do ponto de vista geométrico.

São muitos os ramos da geometria nos dias atuais tais como geometria plana, espacial, analítica, molecular, descritiva, euclidiana, fractal, trigonométrica, projetiva, entre outras. É difícil imaginar que o estudo não seja valorizado na escola básica.

3 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo, é de todos os corpos, o mais perfeito.

Aristóteles

Os objetos que nos rodeiam apresentam-se nas mais variadas formas e tamanhos, e ocupam um lugar no espaço.

Os sólidos geométricos, também chamados de figura geométrica espacial ou figuras tridimensionais, têm três dimensões: comprimento, largura e altura; alguns sólidos são denominados segundo a forma de sua superfície, como o cubo, o cilindro, o cone e a esfera.

Enquanto alguns sólidos são limitados somente por superfícies planas, os chamados poliedros, outros são delimitados por superfícies curvas ou não planas, os corpos redondos, e outros são delimitados irregularmente por superfícies planas e curvas.

3.1 POLIEDROS

Muitas vezes, os poliedros são definidos como sendo sólidos geométricos delimitados somente por faces planas com contornos retos, ou seja, suas faces são polígonos: triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc. Mas, definições como essa deixam dúvidas, como por exemplo, pode uma face do poliedro estar ligada somente por um vértice do mesmo?

Para que discussões desse tipo não sejam uma dificuldade a mais nos estudos, consideraremos a seguinte definição.

Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

- a) cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono;
- b) a interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia; cada lado de um polígono, comum a exatamente duas

faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro;

- c) é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice, ou seja, cruzando apenas arestas.

Existem poliedros convexos e não convexos. Podemos dizer que um poliedro é convexo quando uma reta qualquer e não paralela a nenhuma das faces, intersecta suas faces, no máximo, em dois pontos.

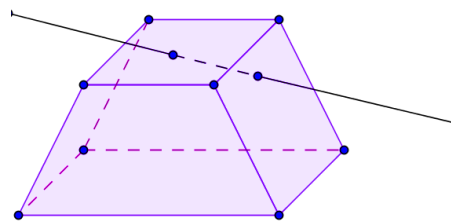


Figura 1 - Poliedro convexo

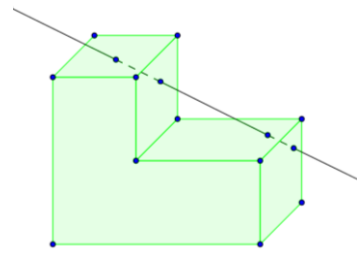


Figura 2 - Poliedro não convexo

No poliedro da Figura 3 o ponto E é um de seus vértices, a região triangular BCE é uma de suas faces e o segmento AB é uma de suas arestas.

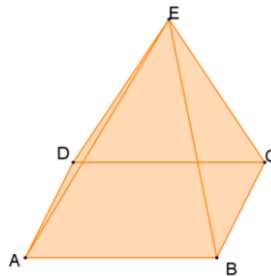


Figura 3 - Poliedro convexo

Euler, em 1750, conjecturou a validade da relação $V + F - A = 2$, relacionando o número de vértices (V), o número de faces (F) e o número de arestas (A) de um poliedro, cuja demonstração, para todos tipos de poliedros, só ocorreu anos depois. Euler, provavelmente, não considerou todos os tipos de poliedros, pois alguns matemáticos mostraram exemplos para os quais seu teorema não seria válido. Para poliedros convexos, vale a relação de Euler. Como no exemplo a seguir.

Consideremos o prisma de base pentagonal, ele tem dez vértices, sete face e quinze arestas. Agora substituiremos esses valores na relação de Euler.

$$V + F - A = 10 + 7 - 15 = 17 - 15 = 2$$

Portanto, o exemplo acima mostra que a relação $V + F - A = 2$ é válida para o prisma de base pentagonal e o mesmo é um poliedro convexo. Também, para o poliedro da Figura 3, temos:

$$V + F - A = 5 + 5 - 8 = 10 - 8 = 2$$

3.1.1 Prismas

Os prismas são poliedros convexos que apresentam duas de suas faces congruentes e contidas em planos paralelos distintos. Essas faces são conhecidas como bases do prisma e as demais faces são paralelogramos e conhecidas como faces laterais. Podemos classificá-los em prisma reto, se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases; prisma oblíquo, se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases e prisma regular, se suas bases são polígonos regulares.

Os prismas recebem nomes de acordo com o polígono que aparece em suas bases. Se a base for um triângulo temos um prisma triangular, se for quadrado é um prisma quadrangular, se for pentágono é um prisma pentagonal, e assim por diante.

Os paralelepípedos são prismas retos que aparecem, com maior frequência, onde todas as suas faces são retangulares. Se suas faces forem todas quadradas, então, recebe o nome de cubo.

A diagonal de um prisma é um segmento que tem extremidades em dois vértices que não pertencem a uma mesma face do prisma.

Na Figura 4 são apresentados exemplos de prismas.

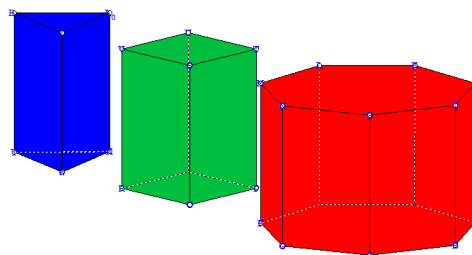


Figura 4 – Prisma triangular, paralelepípedo e prisma heptagonal

3.1.2 Pirâmides

As pirâmides são poliedros convexos que apresentam, num determinado plano, uma face e apenas um de seus vértices se situa fora desse plano conhecido como vértice da pirâmide. As demais faces são determinadas por triângulos e são chamadas de faces laterais.

Podemos classificá-las em pirâmide reta, se as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base; pirâmide oblíqua, se as arestas laterais são oblíquas ao plano da base e pirâmide regular, se a base for um polígono regular, e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

As pirâmides recebem nomes de acordo com o polígono que aparece em sua base, se for triângulo, será pirâmide triangular; se for quadrado, será pirâmide quadrangular; se for pentágono, será pirâmide pentagonal, e assim por diante.

Na Figura 5 são apresentados exemplos de pirâmides.

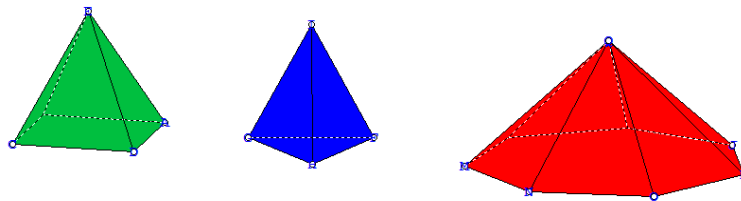


Figura 5 - Pirâmide quadrangular, pirâmide triangular e pirâmide heptagonal

3.1.3 Antiprismas

Um antiprismo é um poliedro convexo com duas faces poligonais congruentes e paralelas chamadas diretrizes e cujas faces laterais são triângulos. O número de lados das faces diretrizes definem o nome do antiprisma, como por exemplo: com cinco lados (pentágono) é um antiprisma pentagonal; se for oito lados (octógono) é um antiprisma octogonal. Na Figura 6 estão os antiprismas supracitados e eles foram construídos com o auxílio do software Poly.

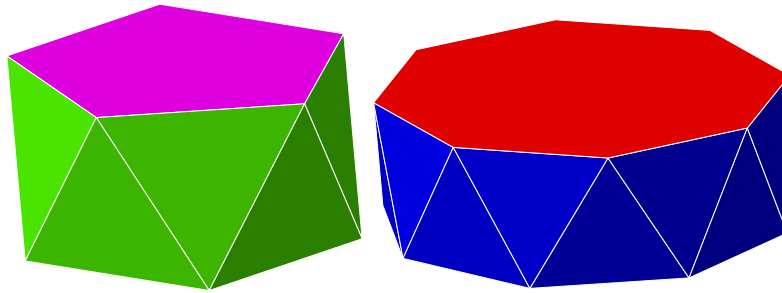


Figura 6 – Antiprismas

3.1.4 Outros Poliedros

Um poliedro convexo é chamado de poliedro regular, se todas as suas faces forem polígonos regulares e congruentes, e seus ângulos poliédricos forem congruentes. Os poliedros regulares, também, são conhecidos com os sólidos de Platão. Os sólidos de Platão, satisfazem as seguintes condições:

- a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas;
- b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas;
- c) vale a relação de Euler ($V + F - A = 2$).

Teorema: Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Demonstração:

Usando as condições para um poliedro de Platão, temos:

- a) Cada uma das F faces tem n arestas ($n \geq 3$), e como cada aresta está em duas faces:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n}. \quad (1)$$

- b) Cada um dos V ângulos poliédricos tem m arestas ($m \geq 3$), e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m}. \quad (2)$$

- c) $V + F - A = 2. \quad (3)$

Substituindo (1) e (2) em (3) e depois dividindo por $2A$, obtemos:

$$\frac{2A}{m} + \frac{2A}{n} - A = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}. \quad (4)$$

Sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. Mas, se n e m ambos fossem maiores que 3, teríamos:

$$\left. \begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \leq 0, \text{ o que contraria a}$$

igualdade (4), pois A é um número positivo.

Logo, nos poliedros de Platão, $m = 3$ ou $n = 3$. O que significa que um poliedro de Platão possui triedro ou triângulo:

I) Para $m = 3$ (supondo que o poliedro tem triedro). Em (4) vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6.$$

Então, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$, o que significa que n representa faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais, respectivamente.

II) Para $n = 3$ (supondo que o poliedro tem triângulo). Em (4) vem:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6.$$

Então, $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$, o que significa que m representa ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos, respectivamente.

Dos resultados encontrados em I e II, verificamos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (m, n) , ou seja, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ e $(5, 3)$. Sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

Teorema: Existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros regulares.

Demonstração:

As condições devem valer em um poliedro regular:

- a) suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas;
- b) seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas.

Partindo das conclusões acima, temos que, os poliedros regulares são poliedros de Platão, e portanto, existem cinco, e somente cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular. Os poliedros citados estão apresentados na Figura 7 e foram construídos com o auxílio do software Poly.

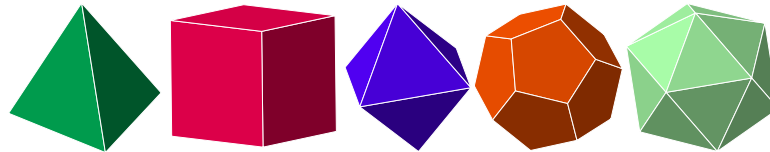


Figura 7 - Poliedros regulares ou poliedros de Platão

Um poliedro convexo é chamado de poliedro semirregular ou sólidos de Arquimedes se suas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, suas arestas são congruentes e seus ângulos poliédricos possuem o mesmo arranjo. São apenas treze os poliedros semirregulares: tetraedro truncado, cuboctaedro, cubo truncado, octaedro truncado, rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado, cuboctaedro achatado, icosidodecaedro, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, rombicosidodecaedro, icosidodecaedro truncado e icosidodecaedro achatado. Para maiores informações acesse o site [http://pt.wikipedia.org/wiki/Sólido de Arquimedes](http://pt.wikipedia.org/wiki/Sólido_de_Arquimedes).

Os poliedros semirregulares estão representados nas Figuras 8 e 9, e foram construídas através do software Poly.

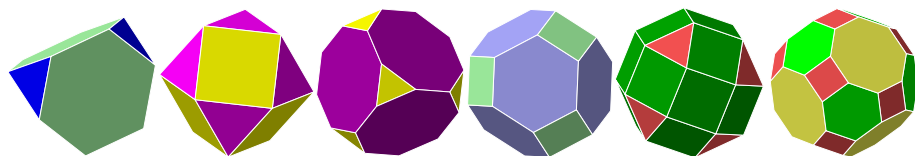


Figura 8 - Poliedros semirregulares

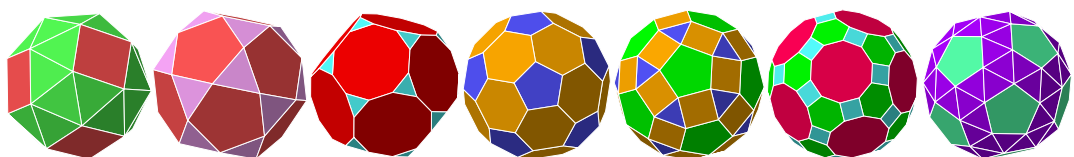


Figura 9 - Poliedros semirregulares

Os poliedros conhecidos como poliedros de Kepler-Poisot, são regulares não convexos, ou seja, todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes. Em seus vértices, concorrem o mesmo número de faces. São quatro os poliedros de Kepler-Poisot: grande dodecaedro, grande icosaedro ou icosaedro estrelado, grande dodecaedro estrelado, pequeno dodecaedro estrelado. Eles estão apresentados na Figura 10, e foram construídos com o auxílio do software Wingeom.

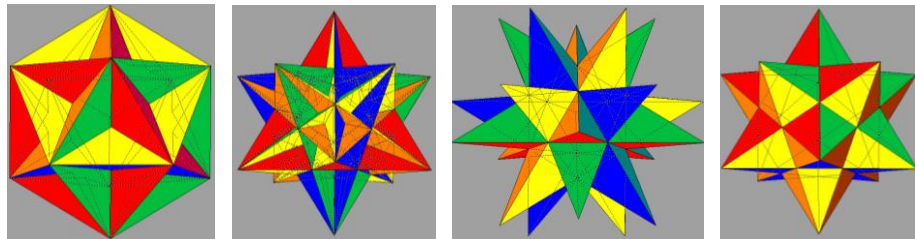


Figura 10 - Poliedros Kepler-Poisot

Em 1966, Norman Johnson elaborou, nomeou e numerou 92 poliedros convexos constituídos por faces que são polígonos regulares, mas não são sólidos de Platão e nem de Arquimedes, não são prismas e nem antiprismas. Em 1969, Victor Zalgaller provou que são apenas 92 os sólidos de Johnson. Para maiores informações acesse o site <http://www.geometriadinamica.com.br/poly.pdf>.

Na Figura 11, são apresentados alguns desses sólidos construídos com o auxílio do software Poly. Prisma hexagonal parabiaumentado (J 55), ortobicúpula quadrada (J 28), bipirâmide triangular alongada (J 14), cubo truncado biaumentado (J 67) e birotunde bilunaire (J 91).

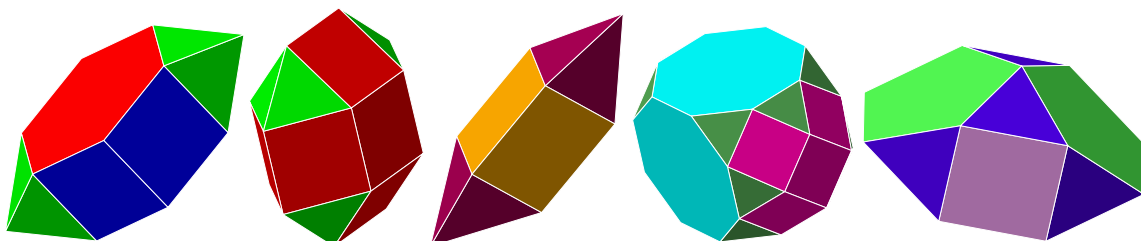


Figura 11 - Cinco dos 92 poliedros de Johnson

3.2 Não poliedros

Os sólidos não poliédricos (corpos redondos) são limitados no todo, ou em partes, por superfícies curvas e são conhecidos como corpos redondos. Essa forma geométrica é muito utilizada na fabricação de embalagens. Latas de refrigerantes, casquinha (cone) de sorvete, frascos de perfumes, entre outras embalagens, lembram corpos redondos. A cúpula esférica, a esfera, o tronco de cone, o cone e o cilindro representados na Figura 12 são sólidos geométricos conhecidos como corpos redondos.

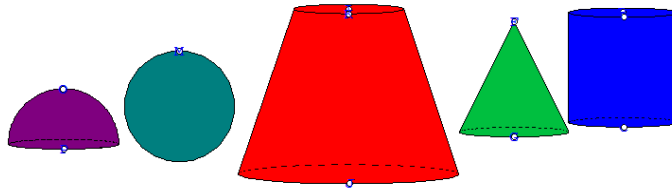


Figura 12 - Corpos redondos

3.2.1 Cilindros

Os cilindros são sólidos geométricos que apresentam duas faces circulares planas, contidas em planos distintos e paralelos, e uma superfície não plana conhecida como superfície lateral, as faces planas são círculos congruentes e são denominadas bases do cilindro. O eixo do cilindro é a reta que passa pelos centros das bases. Os cilindros podem ser classificados em cilindro reto, se o eixo é perpendicular aos planos das bases, e cilindro oblíquo, se o eixo não é perpendicular aos planos das bases.

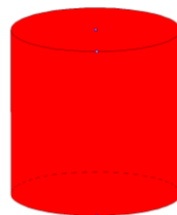


Figura 13 - Cilindro

3.2.2 Cones

Os cones circulares são sólidos geométricos formados pela reunião de todos segmentos que ligam cada ponto de uma região circular, contida em um determinado plano, a um ponto (P) fora desse plano; esse ponto (P) é o vértice do cone. O eixo é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base. Podemos classificá-los em cone reto, se o eixo é perpendicular ao plano da base, e cone oblíquo, se o eixo não é perpendicular ao plano da base.

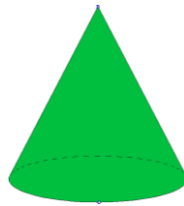


Figura 14 - Cone

3.2.3 Esferas

Esfera de centro C e raio R é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R do ponto C. O raio de uma esfera é o segmento que liga o centro a um ponto qualquer da superfície esférica.

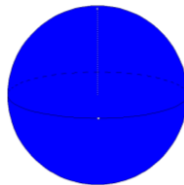


Figura 15 – Esfera

4 ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME

A geometria surgiu da sensatez Divina que a utilizou para desenhar um universo perfeito, e é a forma mais prática que os homens encontraram de mantê-lo livre do caos.

Calvino Júnior

A noção de cálculo de área, no antigo Egito está ligada aos agricultores que trabalhavam nas terras nos arredores do Rio Nilo, pois tinham que pagar impostos proporcionais à área (superfície) utilizada.

Os babilônios do período 2000-1600 a.C. conheciam as regras para o cálculo de áreas de retângulos, áreas de triângulos retângulos e isósceles (talvez de um triângulo qualquer), a área do trapézio retângulo, o volume do paralelepípedo retângulo e, mais geralmente, o volume do prisma reto com base trapezoidal. A circunferência de um círculo era tomada como sendo o triplo do diâmetro e a área do círculo como um doze avos da área do quadrado construído sobre um lado de comprimento igual à circunferência do círculo (ambas corretas para $\pi = 3$): então o volume do cilindro circular reto era obtido fazendo-se o produto da base pela altura. O volume do tronco de cone ou de pirâmide quadrangular aparece incorretamente como o produto da altura pela semissomas das bases. Para maiores informações, consulte [5].

Área é a quantidade de espaço bidimensional, assim, área é sempre medida em um plano horizontal. A unidade de área é o metro quadrado, também sendo os seus múltiplos e submúltiplos. Portanto, a superfície poderá ser inclinada, mas sua área será medida pela sua projeção num plano horizontal. Muitas das fórmulas para o cálculo de área de uma superfície, podem ser obtidas cortando e arrumando a superfície, ou seja, planificando-as. Planificar uma superfície consiste em cortar essa superfície abrindo e tornando-a plana. Por exemplo, para calcular a área da superfície de um poliedro, podemos planificá-lo e encontrarmos a área de cada polígono que compõe suas faces. A soma das áreas de todas as faces juntas é a área de sua superfície; a área de um cilindro pode ser obtida planificando-o e formando um retângulo e dois círculos, a de um cone formando um setor circular e um círculo.

No caso da esfera, o cálculo da área de sua superfície é mais complexa, pois a curvatura dificulta a sua projeção sobre o plano.

Eudoxo (408-355 a.C.), desenvolveu o método do cálculo de áreas “quadratura” e de volumes “cubatura”, conhecido como método da exaustão. Esse método é uma técnica de aproximação da área de uma região com um número crescente de polígonos, com aproximações melhorando a cada etapa, e a área exata, é obtida depois de um número infinito destas etapas. Essa técnica foi modificada para se calcular volume.

Euclides (325-265 a.C.), em sua obra “Os Elementos” forneceu contribuições valiosas para o estudo da geometria, por apresentar, de forma sistematizada e lógica, os conhecimentos geométricos que outros povos haviam adquiridos através dos tempos. Estudou com rigor as propriedades das figuras geométricas, áreas e volumes.

Na sua obra “Os Elementos”, Euclides trata da geometria elementar plana, tais como: igualdades de áreas, construção de um quadrado de área igual a de um retângulo e também introduz o Teorema de Pitágoras e a secção de ouro como propriedades de áreas.

Euclides provou que o quadrado é a figura retangular que dado um perímetro tem maior área. Ele também estudou volumes dos paralelepípedos, da pirâmide e da esfera e foi responsável pelo desenvolvimento da matemática no cálculo de áreas.

Arquimedes (287-212 a.C.) aperfeiçoou um método de integração que permitia calcular áreas de figuras planas, volumes e áreas de superfícies de sólidos. Foi o primeiro a encontrar uma maneira para calcular a área da superfície da esfera mostrando em seu livro “a esfera e o cilindro” que a superfície de uma esfera é quatro vezes a do grande círculo, como também a área de qualquer segmento da esfera. Ele também provou, que o volume da esfera é dois terços do volume do cilindro circunscrito, e que a superfície da esfera é dois terços da superfície do cilindro circunscrito, incluindo as bases. Em um outro livro sobre espirais, ele demonstrou como calcular a área a partir de partes da espiral.

Volume é a medida do espaço ocupado por um sólido. Medida essa, representada através de um número, que devemos comparar com uma unidade. O resultado dessa comparação é o que chamamos de volume. A unidade de volume é o metro cúbico, volume de um cubo cuja aresta mede um metro de comprimento. Além do metro cúbico, os seus múltiplos e submúltiplos também são unidades de volume. Para calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo (por simplicidade, vamos chamar somente de paralelepípedo), devemos determinar quantos cubinhos de aresta medindo uma unidade de volume cabem no mesmo.

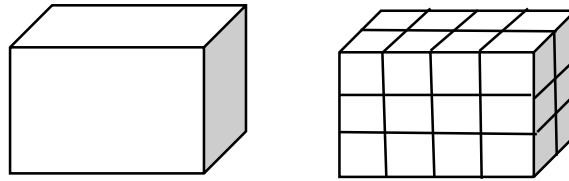


Figura 16 - Cálculo do volume do paralelepípedo pela decomposição e contagem de cubinhos

A quantidade de cubinhos que cabem no paralelepípedo é igual ao produto da área da base, que corresponde à quantidade de cubinhos apoiados sobre a mesma pela altura, que corresponde à quantidade de cubinhos que preenchem o sólido. Portanto, o volume do paralelepípedo é o produto da área da base pela altura.

Percebemos, então, que calcular o volume de um paralelepípedo é mais simples do que calcular o volume de um sólido geométrico com formato diferente.

A busca pelo cálculo do volume de um sólido qualquer levou matemáticos, como Bonaventura Cavalieri (1598-1647), a imaginar sólidos formados por camadas planas tão finas que não pudessem ser divididas (os indivisíveis). Tudo indica que Cavalieri entendia por um “indivisível” de uma porção plana dada, uma corda dessa porção; e, um “indivisível” de um sólido dado, é uma secção desse sólido, pois estabeleceu uma forma simples de cálculo, baseando-se na concepção de indivisível, o ponto gerando a reta e a reta gerando o plano através de movimento. Assim, adicionou segmentos da reta para obter uma área e segmentos de plano para obter um volume.

O Princípio de Cavalieri, normalmente adotado como axioma, é na verdade, um teorema.

Consideremos duas versões desse princípio, uma para áreas e outra para volumes.

Princípio de Cavalieri para áreas: Sejam R e S , regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta do plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r , as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então, a razão entre as áreas de R e S , é essa mesma constante.

Princípio de Cavalieri para volumes: Sejam P e Q sólidos limitados, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α , as interseções de P e Q com

β sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então, a razão entre os volumes de P e Q é essa mesma constante.

Como essas versões do Princípio de Cavalieri são teoremas, é possível demonstrá-los desde que as regiões ou os sólidos não sejam muito complicados. Em particular, vale para discos e regiões elípticas e para sólidos como poliedros, esferas e elipsoides.

A ideia inicial da demonstração do princípio para áreas é simples: estamos “fatiando” as duas regiões. Se a quantidade de fatias for finita e se cada fatia de uma região tiver área, sempre na mesma razão, que a fatia correspondente da outra região, então, somamos as áreas das fatias de cada região e obtemos o resultado. A dificuldade é que, no Princípio de Cavalieri para áreas, as “fatias” são segmentos. Portanto, não tem área, mas comprimento, e sua quantidade é infinita. Assim, para demonstração, precisamos de uma técnica que permita obter a área de uma região através da soma dos comprimentos de infinitos segmentos. Essa técnica é fornecida pela teoria de integração de funções reais, estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Para demonstração do Princípio de Cavalieri para volumes, são feitas considerações semelhantes, e novamente, a teoria de integração de funções reais fornece a técnica necessária, para obter o volume de um sólido, através da soma das áreas de infinitas regiões.

Portanto, as demonstrações dos dois princípios de Cavalieri constituem uma aplicação direta da teoria de integração de funções reais. Observamos que os enunciados desses princípios, não se preocupam em definir condições sobre as fronteiras das regiões e dos sólidos, mas sabemos que é necessário impor condições de integrabilidade.

Vejamos, então como podemos enunciar os princípios de Cavalieri na forma de teoremas.

Teorema: Seja R uma região do plano, indicaremos sua área por $a(R)$.

Princípio de Cavalieri para áreas: Consideremos em um plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy , e seja R a região delimitada por $y = 0, y = b > 0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = f_1(y)$ e $x = f_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $f_1(y) \leq f_2(y)$, para todo y . Seja S a região delimitada por $y = 0, y = b > 0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $g_1(y) \leq g_2(y)$

para todo y . Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $f_2(y) - f_1(y) = k[g_2(y) - g_1(y)]$ para todo y . Então $a(R) = ka(S)$.

Demonstração: Da teoria de integração de funções reais temos:

$$\begin{aligned} a(R) &= \iint_R dx dy = \int_0^b \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} dx \right] dy = \int_0^b [f_2(y) - f_1(y)] dy = \\ &= \int_0^b k[g_2(y) - g_1(y)] dy = k \int_0^b [g_2(y) - g_1(y)] dy = \dots = ka(S) \end{aligned}$$

o que demonstra a afirmação.

Teorema: Seja P um sólido, indicaremos seu volume por $v(P)$.

Princípio de Cavalieri para volumes: Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja P um sólido delimitado por $z = 0, z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja P_t a interseção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0, z = c > 0$ e por uma quantidade de gráficos de funções contínuas do tipo $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $g_1(y) \leq g_2(y)$ para todo y . Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $f_2(y) - f_1(y) = k[g_2(y) - g_1(y)]$, para todo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja Q_t a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(P_t) = ka(Q_t)$ para todo t . Então $v(P) = kv(Q)$.

Demonstração: Da teoria de integração de funções reais temos:

$$\begin{aligned} v(P) &= \iiint_P dx dy dz = \int_0^c \left[\iint_{P_z} dx dy \right] dz = \int_0^c a(P_z) dz = \\ &= \int_0^c ka(Q_z) dz = k \int_0^c a(Q_z) dz = \dots = kv(Q), \end{aligned}$$

o que demonstra a afirmação.

O estudo de volumes no ensino médio tem como base o Princípio de Cavalieri. Neste nível de estudo, o Princípio de Cavalieri é adotado sem demonstração para evitar as dificuldades de se apresentar, precocemente, essa teoria.

Para ilustrar o Princípio de Cavalieri, podemos colocar em cima de uma mesa vários quadradinhos, todos de mesma área e de mesma espessura, dispostos como na Figura 17(A). O sólido final é um paralelepípedo construído pela sobreposição dos quadrados. Deslizando os quadrados uns sobre os outros, veja Figura 17(B), obtemos um paralelepípedo oblíquo. Modificando mais um pouco, temos um sólido geométrico bem diferente, conforme ilustra a Figura 17(C). No entanto, sabemos que os três sólidos representados na figura 17(A, B e C) têm o mesmo volume.

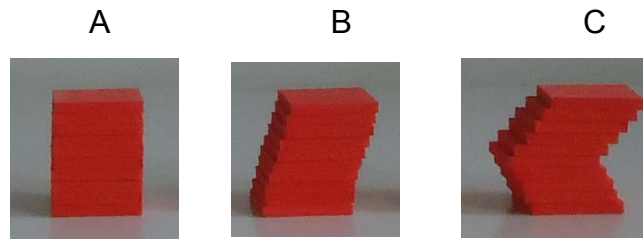


Figura 17 - (A, B, C) Representação do Princípio de Cavalieri

O Princípio de Cavalieri também pode ser ilustrado colocando em cima de uma mesa vários CDs, todos de mesma área e de mesma espessura, dispostos como na Figura A. O sólido final é um cilindro reto formado pela sobreposição ou empilhamento, em uma mesma direção, de círculos iguais uns sobre os outros. Deslizando os CDs uns sobre os outros, veja Figura 18 (B), obtemos um cilindro oblíquo. No entanto, sabemos que os dois sólidos representados na Figura 18 (A e B) têm o mesmo volume.

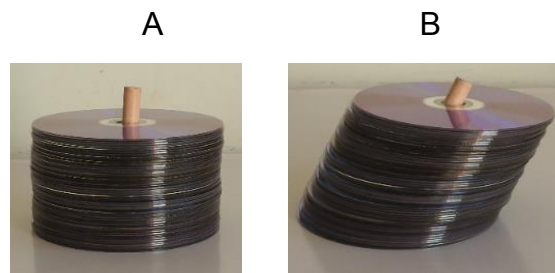


Figura 18 - (A, B) Representação do Princípio de Cavalieri

4.1 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DOS PRISMAS

Através do Princípio de Cavalieri, podemos calcular o volume de qualquer prisma sem dificuldades. Consideremos um prisma apoiado num plano α cuja área da base é um polígono de área A e altura H . Apoiado nesse plano α construímos um paralelepípedo retângulo, com altura H e cuja base tem área A . Suponhamos que os dois sólidos sejam cortados por um plano horizontal β qualquer, paralelo ao plano α produzindo as seções de áreas A_1 e A_2 congruentes a área da base no paralelepípedo e no prisma, respectivamente, ou seja, $A_1 = A = A_2$. Então, pelo Princípio de Cavalieri, o paralelepípedo e o prisma têm o mesmo volume.

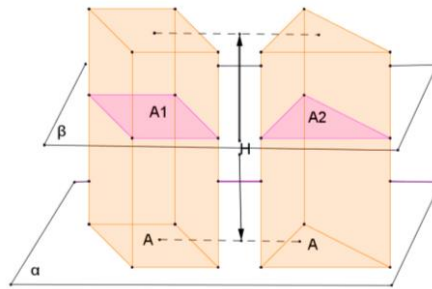


Figura 19 - Prismas construídos no Geogebra

Como o volume do paralelepípedo é o produto da área da base (A_b) pela altura (h), assim, o volume do prisma também é calculado fazendo o produto da área da base pela altura, ou seja, $V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$.

A superfície total de um prisma corresponde a reunião das bases com a superfície lateral, assim, a área dessa superfície é chamada área total (A_t) do prisma. Logo, a área total de um prisma é dada pela soma da área lateral mais o dobro da área da base, ou seja, $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$.

Nesse caso, temos um prisma reto e sua respectiva planificação. As bases são quadrados congruentes e a superfície lateral corresponde a quatro vezes a área de uma face retangular.

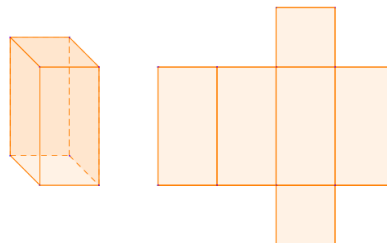


Figura 20 - Área da superfície do prisma

4.2 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO

Considerando um cilindro reto e um paralelepípedo retângulo com bases de mesma área, apoiados sobre um mesmo plano α , suponhamos que os dois sólidos sejam cortados por um plano horizontal β qualquer, paralelo ao plano α , produzindo as seções de áreas congruentes com a área da base no cilindro e no paralelepípedo. Então, pelo Princípio de Cavalieri, o paralelepípedo e o cilindro têm o mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é o produto da área da base (A_b) pela altura (h),

assim, o volume do cilindro também é calculado fazendo produto da área da base (πr^2) pela altura (h), ou seja, $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$.

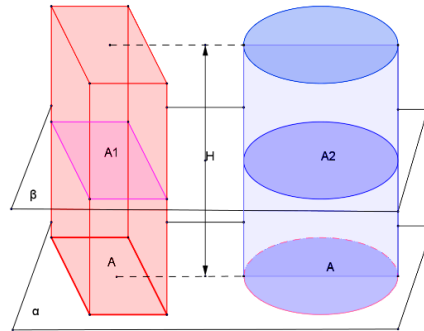


Figura 21 – Prisma e cilindro construídos no Geogebra

A superfície total de um cilindro corresponde à reunião das bases com a superfície lateral. Assim a área dessa superfície é chamada área total (A_t) do cilindro. Logo, a área total de um cilindro é dada pela soma da área lateral mais o dobro da área da base, assim, $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$, ou seja, $A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$.

Observando um cilindro reto e sua respectiva planificação podemos notar que as bases são círculos congruentes de raio r e a superfície lateral corresponde a um retângulo de base $2\pi r$ e altura h .

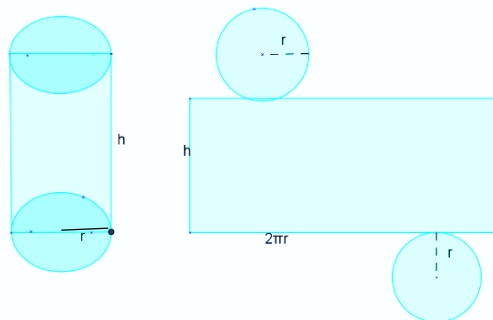


Figura 22 - Área da superfície do cilindro.

4.3 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE

Consideremos duas pirâmides apoiadas em um plano α horizontal, ambas de altura H e bases com áreas iguais a A . Suponhamos que os dois sólidos sejam cortados por um plano horizontal β qualquer, paralelo ao plano α produzindo as seções de áreas A_1 e A_2 semelhantes a área A . Como $\frac{\text{área de } A_1}{A_1} = \frac{\text{área de } A_2}{A_2}$, a área de A_1 é igual a área de A_2 , para qualquer plano β paralelo a α . Então, pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm o mesmo volume.

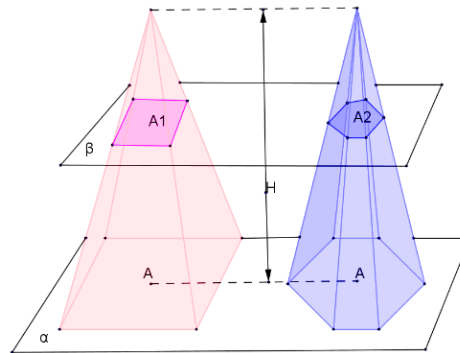


Figura 23 - Pirâmides construídas no Geogebra

Consideremos um prisma triangular. Vamos decompô-lo em três pirâmides triangulares (tetraedros). Sabemos que em um tetraedro qualquer, a face pode ser considerada uma base.

Podemos notar na Figura 24, que as pirâmides I e III têm altura correspondente à altura do prisma ABCDEF e possuem bases congruentes, ou seja, o triângulo ABC é equivalente ao triângulo DEF. Assim, as pirâmides I e III têm o mesmo volume.

Podemos notar também, que as pirâmides II e III têm mesma altura, que corresponde à distância do vértice D ao paralelogramo BCFE. Assim, as pirâmides II e III têm o mesmo volume. Logo, as pirâmides I, II e III têm o mesmo volume.

Como o prisma ABCDEF é composto por pirâmides congruentes, (pirâmides I, II e III), então o volume da pirâmide corresponde a um terço do volume do prisma, assim, o volume da pirâmide é igual ao volume do prisma dividido por três, ou seja,

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \times h}{3}.$$

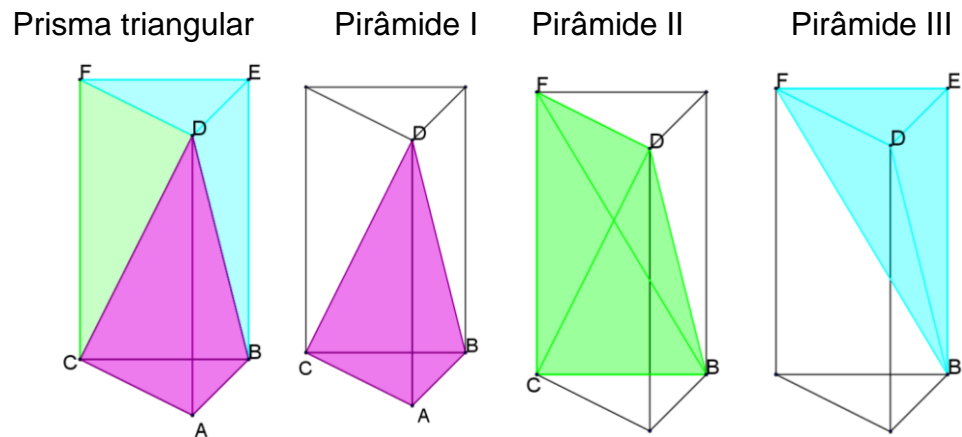


Figura 24 - Prisma e pirâmides construídos no Geogebra

Pelo Princípio de Cavalieri, é possível calcular o volume de uma pirâmide qualquer, visto que, pirâmides de mesma altura e com áreas das bases iguais têm volumes iguais.

A superfície total de uma pirâmide corresponde à reunião da base com a superfície lateral, assim, a área dessa superfície é chamada área total (A_t) da pirâmide. Logo, a área total de uma pirâmide é dada pela soma da área lateral mais a área da base, ou seja, $A_t = A_l + A_b$.

Nesse caso, a área total é dada pela área da base (quadrado) mais 4 vezes a área de uma face triangular (triângulo isósceles).

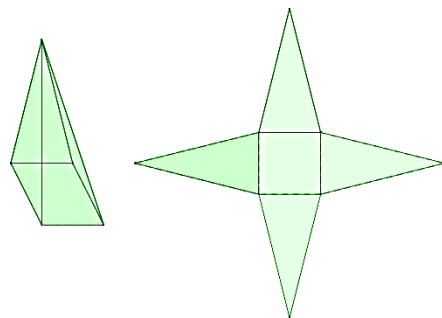


Figura 25 - Área da superfície da pirâmide

4.4 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DO CONE

Considerando um cone e uma pirâmide de mesma altura e bases de mesma área A , apoiados sobre um mesmo plano α , suponhamos que os dois sólidos sejam cortados por um plano horizontal β qualquer, paralelo ao plano α , determinando seções de áreas congruentes com a área da base do cone e da pirâmide.

Pelo Princípio de Cavalieri, o cone e a pirâmide têm o mesmo volume.

Como o volume da pirâmide é dado pelo produto da área da base (A_b) pela altura (h) dividido por três, $V_{pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$. O volume do cone também é calculado fazendo produto da área da base (πr^2) pela altura (h) dividido por três, ou seja, $V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

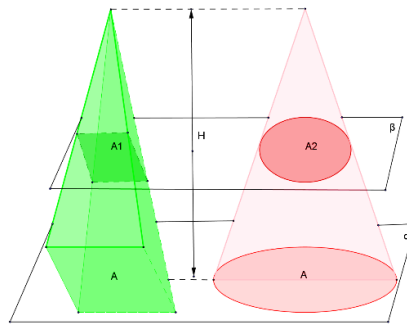


Figura 26 - Pirâmide e cone construídos no Geogebra

A superfície total de um cone corresponde a reunião da base com a superfície lateral. A área dessa superfície é chamada área total (A_t) do cone e é dada pela soma da área lateral mais a área da base, assim, $A_t = A_l + A_b$, ou seja, $A_t = \pi r g + \pi r^2$.

Notamos, através da planificação de um cone reto, que sua superfície lateral corresponde a um setor de raio g e comprimento $2\pi r$ e a base é um círculo de raio r .

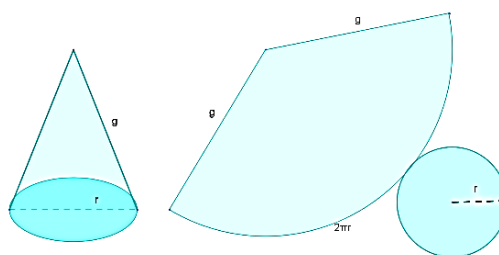


Figura 27 - Área da superfície do cone

4.5 VOLUME E ÁREA DA SUPERFÍCIE DA ESFERA

Consideremos um sólido C, obtido de um cilindro equilátero de raio r e altura $2r$, retirando dois cones de raio r e altura r e vértice comum, conforme figura a seguir.

O volume do sólido C é dado pela diferença entre o volume do cilindro equilátero e dos dois cones de raio e altura r . Logo, $V_C = \pi r^2 2r - \frac{\pi r^2 2r}{3}$, ou seja, $V_C = \frac{4\pi r^3}{3}$.

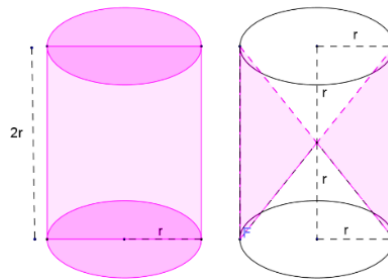


Figura 28 - Cilindro equilátero e sólido C

Consideremos, agora, uma esfera de raio r e o sólido C. Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α e que a base do cilindro, que originou o sólido C, esteja apoiada em α . Qualquer plano horizontal β , paralelo ao plano α , secciona a esfera distando d do seu centro, também secciona o sólido C, a área da secção (círculo) na esfera é $\pi S^2 = \pi(r^2 - d^2)$ e a área da secção (coroa circular) no sólido é $C = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$.

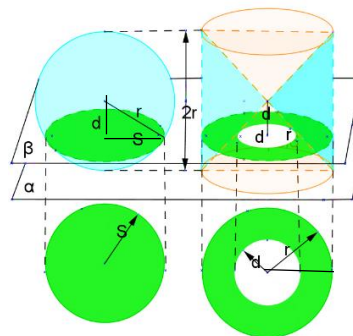


Figura 29 - Secção na esfera e no sólido C

Como as secções obtidas na esfera e no sólido C têm mesma área, pelo Princípio de Cavalieri, o volume da esfera é igual ao volume do sólido C. Assim, o volume da esfera é dado por $V_{esfera} = \pi r^2 2r - \frac{\pi r^2 2r}{3}$, ou seja, $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Imaginemos que a superfície da esfera seja decomposta em n pequenas regiões, aproximadamente planas, e que cada uma dessas regiões seja a base (S) de uma pirâmide com vértice no seu centro da esfera e altura igual ao seu raio. Logo, a área da superfície da esfera será igual à soma total das superfícies dessas bases:
 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_3 + S_4 + \dots$

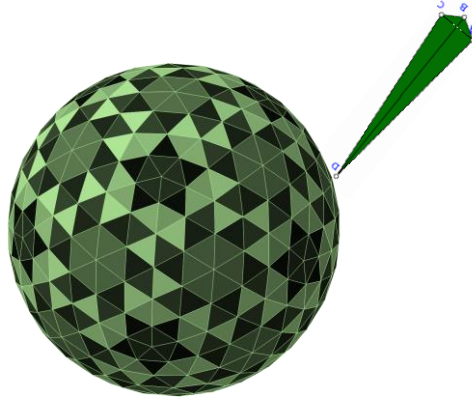


Figura 30 - Superfície da esfera

A soma dos volumes das n pirâmides compõem o volume esfera. Podemos representar o volume da esfera por $V = \frac{1}{3}S_1 \cdot r + \frac{1}{3}S_2 \cdot r + \frac{1}{3}S_3 \cdot r + \frac{1}{3}S_4 \cdot r + \dots$, ou seja, $V = \frac{1}{3}r \cdot (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots)$. Mas, sabemos que o volume da esfera é dada por $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$ e que $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots$. Logo, $\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}rS$ que resulta em $S = 4\pi r^2$.

5 OTIMIZAÇÃO DA ÁREA DE SUPERFÍCIE E VOLUME DE PRISMAS E CILINDROS

Problemas matemáticos vinculados à maximização ou minimização de funções são conhecidos como problemas de otimização ou de máximos e mínimos. Um problema de otimização é aquele em que se busca determinar os valores extremos de uma função, isto é, o valor de máximo ou de mínimo que uma função pode assumir em um dado intervalo.

Problemas de otimização são de grande relevância devido à enorme aplicabilidade desse modelo matemático em situações do dia a dia. Um empresário quer minimizar os custos e maximizar os lucros; um viajante quer minimizar o tempo de transporte. Se apresentam também, na física aplicada, na mecânica, na química molecular, na economia, na indústria, etc. Essas aplicações são beneficiadas pelos desenvolvimentos algorítmicos e teóricos. Nesses problemas práticos, o maior desafio está em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada.

Muitos dos problemas de otimização, requerem conhecimento de cálculo diferencial, no entanto, no ensino médio são apresentados problemas de otimização que possam ser modelados por uma função quadrática, ou pela desigualdades das médias. Toda função quadrática definida no conjunto dos números reais tem um valor extremo. Que ocorre no vértice de seu gráfico. Na Figura 31 o gráfico da esquerda exemplifica o caso em que o vértice da parábola é um ponto de máximo e o da direita, o caso em que o vértice é um ponto de mínimo.

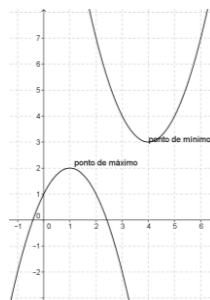


Figura 31 – Ponto de máximo e de mínimo de uma parábola

Atualmente, diversos setores da atividade humana, motivados pela sustentabilidade e otimização de recursos, vêm concentrando esforços para reduzir materiais utilizados em embalagens, no sentido de adequar as embalagens, garantindo uma resistência e durabilidade sem desperdício de recursos, gerando maior economia no custo de produção, armazenamento e transporte e visando respeitar o meio ambiente. Com um mercado altamente concorrido, com opções de produtos com ampla faixa de preços, economizar em itens, como embalagens, tem sido relevante. Assim, saber economizar através de um melhor dimensionamento das embalagens, que não é uma das tarefas mais difíceis, é importante para o sucesso de uma empresa. Logo, uma preocupação é criar uma embalagem que utilize a mínima quantidade de material, sem perder sua funcionalidade e aparência e seu aproveitamento seja máximo.

Para calcular a quantidade de material de uma embalagem, de qualquer forma, basta abrir e planificar a mesma, ou supor aberta e planificada, fazendo um esboço com as respectivas dimensões. Depois, calcular a área da superfície a partir da composição das figuras planas.

A seguir listamos alguns exemplos de problemas de otimização e suas possíveis soluções.

Exemplo 1 - Dentre todos os triângulos de perímetro constante, qual possui área máxima?

Solução: Sejam a, b e c os lados do triângulo ABC . Então, $a + b + c = 2p$ (*constante*), onde p denota semiperímetro conforme, mostra a Figura 32 :

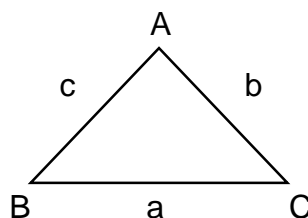


Figura 32 – Triângulo do exemplo 1

Pela desigualdade triangular, temos: $a < b + c$. Donde $2a < a + b + c = 2p$, o que implica que $p - a > 0$.

Analogamente, $p - b > 0$ e $p - c > 0$, de modo que podemos aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica desses termos. Aplicando a fórmula de Heron para o cálculo da área do triângulo, em função de seus lados, temos:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) \quad (I)$$

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos:

$$MG \leq MA$$

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), segue que:

$$\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}} \leq \frac{3p - 2p}{3}$$

$$\frac{S^2}{p} \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$S^2 \leq \frac{p^4}{27} \Rightarrow S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Por outro lado, num triângulo equilátero de lado ℓ , temos $2p = 3\ell$ de modo que sua área S_e é dada por:

$$S_e = \sqrt{p(p-\ell)^3} = \sqrt{p\left(p - \frac{2p}{3}\right)^3} = p\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\text{Logo, } S_e = \frac{p^4}{27} \Rightarrow S_e = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Portanto, entre todos os triângulos de perímetro constante, sua área é menor ou igual a área do triângulo equilátero, ou seja, $S \leq S_e$, donde segue que o triângulo equilátero é o que possui área máxima.

No próximo exemplo, apresentamos o mesmo resultado, mas com uma demonstração, mais breve.

Exemplo 2 - Prove que entre todos os triângulos de perímetro constante, o equilátero é o de maior área.

Solução: Pela fórmula de Heron, a área de um triângulo de lados a, b e c é $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Para triângulos de perímetro constante, a área é máxima quando o produto $(p-a)(p-b)(p-c)$ é máximo. Mas, a soma $(p-a) + (p-b) + (p-c)$ é igual $3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$, portanto constante. Logo, para que $(p-a)(p-b)(p-c)$, seja, máximo deve-se ter $(p-a) = (p-b) = (p-c)$, ou seja, $a = b = c$. Logo, dentre os triângulos de perímetro constante, o equilátero é o de maior área.

Exemplo 3 - Mostre que, entre todos os retângulos de perímetro $2p$, o quadrado é o de maior área.

Solução: Se os lados do retângulo são x e y , temos $x + y = p$, isto é, a média aritmética de x e y é igual a $\frac{p}{2}$. A área do retângulo é $A = xy$. Temos

$$\sqrt{A} = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}.$$

$$\text{Portanto, } A \leq \frac{p^2}{4}$$

A igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado de área $\frac{p^2}{4}$.

Exemplo 4 - Demonstre que de todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é aquele que possui maior área.

Solução: Sejam x e y , os lados e $2p$ (constante) o perímetro do retângulo, temos:

$$x + y + x + y = 2p$$

$$2x + 2y = 2p$$

$$p = x + y$$

$$y = p - x.$$

A área do retângulo será dada por: $A = xy$

Substituindo, $y = p - x$ em $A = xy$, temos:

$$A = x(p - x)$$

$$A = -x^2 + px$$

A área máxima será dada para o x do vértice da função, $A = -x^2 + px$. Daí,

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-p}{2(-1)} = \frac{p}{2}.$$

Logo, o valor de x que define a área máxima é $x = \frac{p}{2}$.

Substituindo, $x = \frac{p}{2}$ em $y = p - \frac{p}{2}$, obtemos $y = \frac{p}{2}$.

Dessa forma, temos $x = y$, ou seja, os lados do retângulo são iguais. Portanto, o retângulo procurado é um quadrado.

Exemplo 5 - Determine o paralelepípedo retângulo de volume constante, cuja área superficial seja mínima.

Solução: Temos, que o volume V constante e $V = xyz \Rightarrow z = \frac{V}{xy}$. A área total do paralelepípedo retângulo é dada por $S = 2xy + 2xz + 2yz$. Substituindo z , nesta expressão, temos

$$S = 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow 2xy + \frac{2xV}{xy} + \frac{2yV}{xy} \Rightarrow 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right).$$

Usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos:

$$\frac{2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)}{6} \geq \sqrt[3]{2xy \cdot 2\frac{V}{y} \cdot 2\frac{V}{x}}.$$

Além disso, $\frac{2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)}{6} = \sqrt[3]{2xy \cdot 2\frac{V}{y} \cdot 2\frac{V}{x}}$, se e somente se $2xy = 2\frac{V}{y} = 2\frac{V}{x}$.

$$\frac{2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)}{6} \geq \sqrt[3]{8V^2} \Rightarrow \frac{\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)}{3} \geq 2\sqrt[3]{V^2} \Rightarrow xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x} \geq 6\sqrt[3]{V^2}.$$

Assim, a área mínima é atingida se $xy = \frac{V}{y} = \frac{V}{x} \Rightarrow x = y$ e $xy^2 = V$,

Portanto, segue que: $y^3 = V \Rightarrow y = \sqrt[3]{V} \Rightarrow x = \sqrt[3]{V}$ e $z = \frac{V}{\sqrt[3]{V}^2} = \sqrt[3]{V}$, ou seja, o paralelepípedo procurado é um cubo de aresta $\sqrt[3]{V}$.

Exemplo 6 - De todos os paralelepípedos retângulos, cuja soma das arestas é constante e igual a a ($a > 0$), qual é o que tem volume máximo?

Solução: Sejam x, y e z as arestas do paralelepípedo tal que $x + y + z = a$.

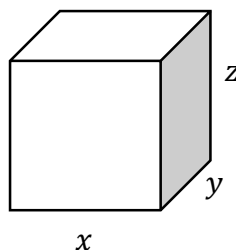


Figura 33 – Paralelepípedo do exemplo 1

Seu volume é dado por $V = xyz$ e $z = a - x - y$. Substituindo,
 $z = a - x - y$ em $V = xyz$, temos que, a função a maximizar é:
 $V_{(x,y)} = xy(a - x - y)$.

O domínio de V é $(0, +\infty)$. Além disso, V é contínua em seu domínio.

Precisamos determinar os pontos críticos, ou seja, encontrar os valores de x e y , tais que

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = -y(-a + 2x + y) = 0 \\ \frac{dV}{dy} = -x(x - a + 2y) = 0 \end{cases}$$

Aqui $\frac{dV}{dx}$ e $\frac{dV}{dy}$ demonstram a derivada de V com relação, a x e a y , respectivamente.

Como x e y são arestas $x > 0$ e $y > 0$; o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} -a + 2x + y = 0 \\ x - a + 2y = 0 \end{cases}$$

a única solução possível é:

$$x = \frac{a}{3} \text{ e } y = \frac{a}{3}, \text{ ou seja, } x = y = \frac{a}{3}$$

Observe que $V'_{(x,y)}$ existe para todos valores de $x = y$ em $(0, +\infty)$ e $V'_{(x,y)} = 0$, quando $x = y = \frac{a}{3}$, assim o único número crítico de $V_{(x,y)}$ no intervalo $(0, +\infty)$ é $\frac{a}{3}$.

O teste da derivada primeira, quando aplicado, a fim de determinar se $V_{(x,y)}$ tem extremo relativo em $\frac{a}{3}$, e os resultados são resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

| | $V_{(x,y)}$ | $V'_{(x,y)}$ | Conclusão |
|-----------------------------|------------------|--------------|-------------------------------------|
| $0 < x < \frac{a}{3}$ | | + | V é crescente |
| $x = \frac{a}{3}$ | $\frac{a^3}{27}$ | 0 | V tem um valor de máximo relativo |
| $\frac{a}{3} < x < +\infty$ | | - | V é decrescente |

Como V tem valor máximo relativo em $\frac{a}{3}$ e V é crescente no intervalo $(0, \frac{a}{3})$ e decrescente no intervalo $(\frac{a}{3}, +\infty)$, então em $(0, +\infty)$, V tem um valor de máximo absoluto em $\frac{a}{3}$, sendo $V_{(x,y)} = \frac{a^3}{27}$.
Logo $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ é ponto de máximo. Portanto, os valores procurados são $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$ e $z = \frac{a}{3}$.

Consequentemente, o volume é $V = \frac{a^3}{27}$ e o paralelepípedo procurado é um cubo.

Exemplo 7 - Se uma lata fechada com um volume fixo deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a razão entre a altura e o raio da base se a quantidade de material usado na fabricação for mínima.

Solução: Queremos encontrar uma relação entre a altura e o raio da base de um cilindro circular reto, a fim de que a área total da superfície seja um mínimo absoluto para um volume fixo. Logo, iremos considerar o volume do cilindro como uma constante.

Seja V unidades cúbicas de volume de um cilindro.

Vamos definir agora as variáveis.

Seja r unidades o raio da base do cilindro, $r > 0$ e h unidades a altura do cilindro, $h > 0$. Seja S unidades de área a superfície total do cilindro.

Temos as seguintes equações:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V = \pi r^2 h.$$

Derivando S e V em relação a r e levando em conta que h é uma função de r , temos:

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r \frac{dh}{dr}$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi r h + \pi r^2 \frac{dh}{dr}.$$

Como V é uma constante, $\frac{dV}{dr} = 0$; logo, da fórmula, acima, temos

$$2\pi r h + \pi r^2 \frac{dh}{dr} = 0, \text{ com } r \neq 0.$$

Dividindo por r e resolvendo $\frac{dh}{dr}$, temos $\frac{dh}{dr} = \frac{-2h}{r}$.

Substituindo $\frac{dh}{dr} = \frac{-2h}{r}$ em $\frac{dS}{dr} = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r \frac{dh}{dr}$, obtemos:

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi \left[2r + h + r \frac{-2h}{r} \right]$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi(2r - h).$$

Para encontrar a situação em que S tem um valor de mínimo relativo, resolvemos a equação $\frac{dS}{dr} = 0$, obtendo $2r - h = 0$, o que resulta $r = \frac{h}{2}$.

Para determinar se essa relação entre r e h que torna S um mínimo relativo, aplicamos o teste da derivada segunda. Então, de $\frac{dS}{dr} = 2\pi(2r - h)$, temos,

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi \left(2 - \frac{dh}{dr} \right).$$

Substituindo $\frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r}$ nessa relação, obtemos

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi \left[2 - \left(-\frac{2h}{r} \right) \right] = 2\pi \left(2 + \frac{2h}{r} \right).$$

Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2

| | $\frac{dS}{dr}$ | $\frac{d^2S}{dr^2}$ | Conclusão |
|--------------------|-----------------|---------------------|-------------------------------------|
| $r = \frac{1}{2}h$ | 0 | + | S tem um valor de mínimo relativo |

S é uma função contínua de r em $(0, +\infty)$. Como o único extremo relativo de S em $(0, +\infty)$ está em $r = \frac{1}{2}h$, logo S tem um valor de mínimo absoluto em $r = \frac{1}{2}h$.

Portanto, a área total da superfície da lata será mínima para um volume específico quando a razão entre a altura e o raio da base for 2.

Exemplo 8 - Qual é a forma ideal para uma embalagem?

Solução: Para responder esse questionamento, consideremos uma embalagem de leite do tipo longa vida, e uma embalagem de óleo comestível, ambas com capacidade para 1 litro. As embalagens possuem a forma de um paralelepípedo reto retângulo e de um cilindro reto, respectivamente. Supondo que as embalagens tem o mesmo volume (V) e mesma altura (h), vamos calcular a área da superfície de cada uma delas. Nesse caso não incluiremos as junções ou dobras.

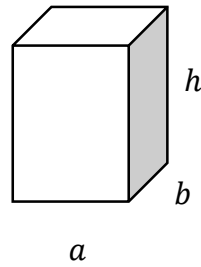


Figura 34 – Paralelepípedo do exemplo 8

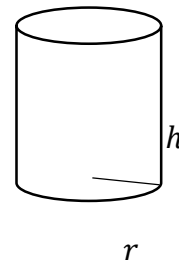


Figura 35 – Cilindro do exemplo 8

Inicialmente, temos as seguintes fórmulas:

Área da superfície do paralelepípedo, $2(ab) + 2(bh) + 2(ah) = 2(ab + bh + ah) = 2[ab + h(a + b)]$.

Volume do paralelepípedo, $V_1 = (ab)h$.

Área da superfície do cilindro, $2\pi r^2 + 2\pi r^2\pi rh = 2\pi r(r + h)$.

Volume do cilindro, $V_2 = (\pi r^2)h$.

Onde a e b são as respectivas medidas dos lados do paralelepípedo, (largura e comprimento), r o raio do cilindro e h a altura do paralelepípedo e do cilindro.

Por hipótese, temos que:

$$V_1 = V_2, \text{ ou seja,}$$

$$a \cdot b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Dividindo ambos os lados por h , obtemos

$$a \cdot b = \pi \cdot r^2 \quad (I)$$

Comparando as duas áreas, $2(ab + ah + bh)$ e $2\pi r(r + h)$ e, de (I), temos que

$$a \cdot b = \pi \cdot r^2, \text{ logo } a = \frac{\pi r^2}{b} \text{ e } b = \frac{\pi r^2}{a}.$$

Substituindo, $a = \frac{\pi r^2}{b}$ e $b = \frac{\pi r^2}{a}$ na expressão que representa, a área da superfície do paralelepípedo, obtemos:

$$2 \left[\pi r^2 + h \left(\frac{\pi r^2}{b} + \frac{\pi r^2}{a} \right) \right] = 2\pi r^2 + 2\pi r h \left(\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \right)$$

$$2\pi r^2 + 2\pi r h \left(\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \right) > 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Como, $2\pi r \left(\frac{r}{b} + \frac{r}{a} \right) > 2\pi r^2 + 2\pi r h$, portanto, a embalagem que possui a forma ideal, ou seja, a menor área é a embalagem na forma de cilindro.

6 ATIVIDADES DE ÁREA DE SUPERFÍCIE E VOLUME DE PRISMAS E CILINDROS

O trabalho foi realizado com alunos do 2º ano do ensino médio das turmas A e B do período da manhã da Escola Estadual “Salvador Moreno Munhoz” localizada em Teodoro Sampaio-SP.

Realizamos esse trabalho no 4º bimestre do ano letivo de 2013 com 26 alunos do 2º ano A e 25 alunos do 2º ano B.

A idealizadora desse trabalho foi a própria professora das turmas que procurou ser imparcial em relação às observações realizadas e aos resultados obtidos. A falta de disponibilidade de tempo levou a professora escolher os seus próprios alunos para a realização deste trabalho.

Os sujeitos envolvidos passaram por duas avaliações estaduais conhecidas como avaliação em processo ou avaliação diagnóstica de matemática, sendo uma no 1º semestre e a outra no 2º semestre. Os resultados foram desanimadores. No 1º semestre a turma A atingiu 26% de aproveitamento e a turma B, 23%. No 2º semestre, a turma A atingiu 38% e a turma B, 34%.

Nessas avaliações em processo, o aluno é submetido à avaliação de conteúdos da série anterior. Após a primeira avaliação, o professor deve trabalhar as habilidades não adquiridas pelos alunos e na medida do possível incluí-las no desenvolvimento do plano anual para a série. Na maioria das vezes, isso se reduz à correção da própria avaliação, juntamente com os alunos, pois não há como dizer que os conteúdos serão todos retomados e trabalhados de forma diferenciada, já que o plano para o ano letivo deve ser desenvolvido. Lamentável, pois através dessa avaliação, observa-se onde está ocorrendo a falha na aprendizagem, porém, não há tempo suficiente para que possamos desenvolver um trabalho que garanta um melhor desempenho dos alunos em relação à aprendizagem de determinadas habilidades. Estes fatos podem ser observados através dos resultados obtidos no segundo momento de aplicação da avaliação em processo.

Observações durante os bimestres anteriores permitiram verificar que menos de 20% desses alunos realizaram as atividades propostas para casa. Alguns trabalhavam meio período e outros frequentavam um curso técnico na escola Centro

Paula Souza, na própria cidade. Na maioria das vezes, contamos somente com a participação das atividades realizadas em sala de aula.

A ideia do projeto foi exposta à direção da escola que autorizou sua realização. Utilizamos uma câmera digital para gravar os comentários e fotografar atividades realizadas com alunos e tomamos o devido cuidado de não expor os mesmos.

Por outro lado, foi divulgada a ideia do projeto aos alunos e questionados se concordariam em participar do mesmo. Seria a primeira vez que a professora faria um trabalho como esse com os alunos. Os alunos demonstraram entusiasmo por se tratar de uma abordagem nova, e felizmente, aceitaram.

Durante três aulas (cada aula de 50 minutos) fomos nos familiarizando com os assuntos propostos. Os alunos tomaram ciência de que o trabalho respeitaria o conteúdo do Plano de Ensino, pois o mesmo seria desenvolvido no horário normal das aulas de matemática, respeitando o estabelecido no currículo da disciplina.

O ideal seria explorar um tema escolhido pelos próprios alunos, o que com certeza seria mais interessante. Mas, seria desenvolvido com a utilização de metodologias diferenciadas de forma dinâmica através da utilização de materiais manipuláveis e uso da sala de informática. Informamos aos alunos que, para o projeto ter validade, eles deveriam ser avaliados durante sua realização.

Partindo do princípio de que os sujeitos indispensáveis à realização do projeto estavam de acordo, deu-se início à execução do mesmo.

Foi realizado um pré-teste com ambas as turmas (2º ano A e B), com duração de 50 minutos, composto por cinco questões envolvendo áreas de figuras planas, elementos de sólidos geométricos, nomenclatura das figuras planas e dos sólidos, volume de prisma. Incluímos também os volumes do cilindro, do cone e da esfera no pré-teste, embora tais conteúdos não tivessem sido ministrados ainda. O pré-teste foi aplicado visando facilitar o reconhecimento do perfil dos alunos e visualizar seus conhecimentos prévios sobre áreas e volumes dos sólidos geométricos. As questões desse pré-teste estão incluídas no Apêndice I desse trabalho.

6.1 DADOS DO PRÉ-TESTE

Como as questões possuíam vários itens, elas foram divididas em cinco etapas de modo que a etapa I ficou entre 0 e 20% de acerto da questão, a II de 21 a 40%, a III de 41 a 60%, a IV de 61 a 80% e a V de 81 a 100% de acerto na questão.

Os resultados estão resumidos nas tabelas 3 e 4, a seguir:

Tabela 3 - Dados do pré-teste 2º ano A - 2013

| Porcentagem de acerto no pré-teste – 2º A | | | | | |
|--|----|----|-----|----|----|
| Etapas | I | II | III | IV | V |
| Cálculo de áreas | 31 | 46 | 23 | - | - |
| Nomenclatura de figuras planas | 19 | 23 | 12 | 31 | 15 |
| Nomenclatura de sólido geométrico | 23 | 27 | 19 | 27 | 04 |
| Nº de faces, arestas e vértices | 12 | 19 | 15 | 12 | 42 |
| Cálculo de volume | 50 | 35 | 15 | - | - |

Tabela 4 - Dados do pré-teste 2º ano B - 2013

| Porcentagem de acerto no pré-teste – 2º B | | | | | |
|--|----|----|-----|----|----|
| Etapas | I | II | III | IV | V |
| Cálculo de áreas | 20 | 52 | 24 | 04 | - |
| Nomenclatura de figuras planas | 12 | 20 | 16 | 40 | 12 |
| Nomenclatura de sólido geométrico | 20 | 16 | 12 | 40 | 12 |
| Nº de faces, arestas e vértices | 32 | 16 | 08 | 04 | 40 |
| Cálculo de volume | 60 | 24 | 16 | - | - |

Sabendo que o cálculo de áreas das figuras planas é um pré-requisito para o desenvolvimento do trabalho, podemos observar, através dos resultados acima, que qualquer uma das duas turmas seria ideal para a realização do nosso trabalho.

A turma do 2º ano B foi escolhida para o desenvolvimento do trabalho (com materiais manipuláveis e uso da sala de informática) e a turma do 2º ano A para controle (aula expositiva).

Abaixo descrevemos algumas observações consideradas relevantes.

Referindo-se ao cálculo de áreas de figuras planas observamos:

- Tentativas de demonstrações quadriculando as figuras;
- Considerações generalizadas, todas as áreas seriam calculadas como base vezes altura;
- Uso de complemento das figuras para formar retângulos;
- Decomposição em triângulos e trapézios no caso do pentágono e do hexágono.

A maioria apresentou argumentos insuficientes para a realização dos cálculos. Nos casos do círculo, do pentágono e do hexágono nenhum aluno descreveu uma maneira correta do cálculo de área.

Nas nomenclaturas ocorreram muitas trocas. Algumas figuras espaciais receberam o nome do polígono que compõem alguma de suas faces, por exemplo, pentágono para prisma de base pentagonal, retângulo para paralelepípedo. Confusões desse tipo ocorreram também nas figuras planas em que paralelogramo recebeu o nome de paralelepípedo e o círculo, de esfera.

Quanto ao reconhecimento do número de faces, arestas e vértices ocorreram falhas na distinção entre um e outro na representação dos sólidos no plano. Um fato que chamou a atenção foi o caso do paralelepípedo que ocultava alguns desses elementos. Muitos consideraram somente os visíveis. Notamos como os alunos tem dificuldades na representação de objetos da geometria espacial quando representadas no plano.

No caso do cálculo de volumes dos sólidos, já era de se esperar que não soubessem o volume do cilindro, do cone e da esfera, inclusive da pirâmide que não foi citada no pré-teste. Porém, o cálculo do volume do prisma, assunto estudado em séries anteriores, poucos alunos acertaram. Ocorreram casos como cálculo de base vezes altura por considerar que o paralelepípedo fosse um retângulo.

Antes da realização do pré-teste surgiu uma preocupação, por parte da professora, em relação ao nível das questões. Suspeitava-se que estariam muito

fáceis, mas diante do baixo desempenho, a professora confirmou que não havia a necessidade da realização de um outro teste.

6.2 SEQUÊNCIA DAS ATIVIDADES

A seguir, faremos um comentário do debate com os alunos em busca da justificativa de estudar áreas e volumes dos sólidos geométricos e a relação existente com o dia a dia das pessoas.

No decorrer do debate sentimos o entusiasmo dos alunos e o quanto estavam motivados em participar, cada um querendo expressar a sua opinião. Muitos foram os exemplos apontados pelos alunos. Registramos alguns deles:

- Um pedreiro necessita do conhecimento do cálculo de área para saber quantas lajotas precisa para ladrilhar o piso ou a parede, e também saber o cálculo de volume para ter ideia de quanto necessita de tinta para pintar a construção;
- Uma costureira precisa saber a quantidade de tecido;
- O agricultor para saber a área a ser plantada e ter noção do volume produzido para armazenar a silagem, por exemplo;
- Ao comprar um terreno devemos conhecer qual é a sua área;
- Ao adquirir um móvel para sua casa, a pessoa deve ter noção do espaço disponível;
- O comerciante deve se preocupar com a quantidade de produtos que deve adquirir com a garantia de que caberá no estoque;
- O empresário, para saber qual o tipo de embalagem mais econômica, deve entender de área e volume;

Foram tantos exemplos que não faltaram motivos para entender a necessidade de estudar áreas e volumes dos sólidos geométricos.

No calor das discussões a professora lança o seguinte desafio: Se vocês fossem empresários que desejassem embalar, por exemplo, sabonete líquido, qual seria a forma da embalagem que escolheriam e por quê?

Algumas sugestões dadas foram:

- Com um belo design para chamar a atenção e aquecer as vendas;

- Em forma de paralelepípedo, pois facilita o transporte e o armazenamento;

- Em forma de cilindro, pois facilita pegar no momento do uso.

Foram questionados a respeito da economia de matéria-prima na fabricação da embalagem do produto citado: Qual forma seria a mais vantajosa?

Sugestões foram dadas, porém cheias de incertezas. Diante das incertezas foram instigados novamente: Quais são as formas de embalagens mais observadas no comércio, em geral?

De maneira geral, as embalagens são em forma de paralelepípedo para produtos secos e de cilindro para os líquidos.

Podemos perceber que temos problemas a serem resolvidos partindo do princípio de que um produto deve ser embalado para comercialização. Logo, são partes do estudo incentivado a pesquisar e aprofundar os conteúdos na busca por soluções das situações-problema simuladas os problemas propostos a seguir.

Considerando que seriam confeccionados com o mesmo tipo de material, algumas questões surgiram, por exemplo:

- 1) Será possível uma embalagem ser mais econômica que outra se as duas possuem forma de um paralelepípedo?
- 2) Será possível uma embalagem ser mais econômica que outra se as duas possuem forma de um cilindro?
- 3) Qual embalagem será mais econômica? A que tem a forma de paralelepípedo ou de cilindro?

Nas atividades desenvolvidas nas aulas, buscamos esclarecer as dúvidas levantadas nas situações-problema citado acima.

Para composição dos grupos foram propostas algumas maneiras e optamos por distribuir um aluno para cada grupo e depois se repetiriam em sequência na ordem do número da chamada, e assim, foram formados cinco grupos.

Em seguida, foram orientados a obterem os materiais necessários à realização e que os trouxessem para a próxima aula, podendo ser real ou imagem:

Grupo I: Elementos produzidos na natureza que tenham formas em três dimensões;

Grupo II: Elementos que façam parte da construção humana e tenham formas em três dimensões;

Grupo III: Objetos de uso doméstico em formas em três dimensões;

Grupo IV: Embalagens em geral;

Grupo V: Objetos ornamentais e brinquedos;

Cada grupo deveria fazer um pequeno comentário dos materiais tentando relacioná-los com os sólidos geométricos, com acréscimos pela professora.

6.2.1 Exposição de Materiais

Esta atividade teve duração de duas aulas de 50 minutos cada. Os grupos trouxeram:

I- Laranja, ovo, tomate, beterraba, kiwi, batata, ervilhas, coquinhos, dente de leão, vagem, imagens da internet.

II- Imagens de construções obtidas através da internet;

III- Copo, taça, tigela, caixinha, carretel, imagem de santa.

IV- Embalagem de perfume, de achocolatado, de lenços, de geleia, entre outras.

V- Relógio, pulseira, imagens, brincos e brinquedos.

Além dos materiais dos grupos, a professora trouxe, de seu acervo particular, sólidos geométricos confeccionados com material plástico.

Os materiais foram expostos por membros do grupo na sala de aula. Alguns alunos não trouxeram os materiais propostos, o que já era esperado, por não terem o costume de realizar as atividades propostas para casa.



Figura 36 - Exposição grupo I

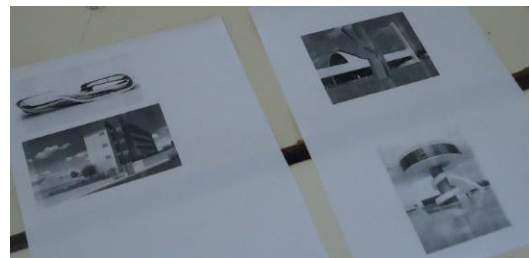


Figura 37 - Exposição grupo II

Os materiais apresentados lembravam a esfera e as imagens de construção civil lembravam os prismas.



Figura 38 - Exposição Grupo III



Figura 39 - Exposição grupo IV

Os utensílios domésticos apresentavam diferentes formas de sólidos geométricos, já as embalagens, em sua grande parte, eram paralelepípedos e cilindros.



Figura 40 - Exposição Grupo V



Figura 41 - Exposição Professora

Durante alguns minutos, cada grupo visitou a exposição dos demais e foram realizados alguns comentários entre os membros dos grupos. A pergunta que predominou foi qual sólido geométrico o objeto representava.

A professora questionou: Como poderíamos separar os sólidos geométricos em dois grupos? Quais características poderíamos considerar ao separá-los?

A professora esclareceu, neste momento, que os que possuem várias faces eram polígonos chamados de poliedros e os arredondados eram chamados de corpos redondos.



Figura 42 - Poliedros



Figura 43 - Poliedros

A maioria das embalagens apresentadas possuía forma de poliedro, em especial, o paralelepípedo reto retângulo. Já as frutas e os legumes apresentavam formas arredondadas ou irregulares.



Figura 44- Corpos Redondos

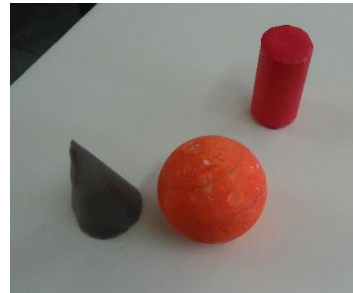


Figura 45 - Corpos Redondos

Nosso próximo passo foi subdividir esses dois grupos, cada um deles em outros três, observando semelhanças e diferenças entre eles.

Foi proposto investigar quais tipos de polígonos mais aparecem nas faces dos poliedros. Os alunos lembraram que são triângulos e quadriláteros. Nas faces laterais dos poliedros apareceram triângulos ou quadriláteros, já nas bases, além desses, apareceram outros tipos de polígonos.

Os poliedros com quadriláteros nas faces laterais possuem duas bases e elas são paralelas, estes poliedros são chamados de prismas. Os que possuem triângulos nas faces laterais têm uma única base inferior, e na parte superior, as faces laterais se unem em um único vértice, estes poliedros são chamados de pirâmides. Mas, existem poliedros que não se encaixavam no grupo dos prismas e nem das pirâmides, por exemplo, os antiprismas, que chamamos apenas de poliedros.



Figura 46 - Prismas

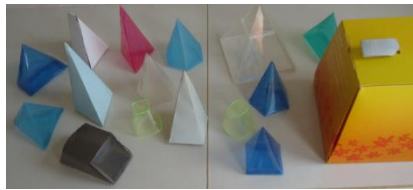


Figura 47 - Pirâmides

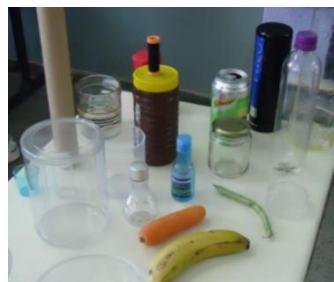


**Figura 48 - Poliedros
(desconsiderar as tampas)**

Investigamos também os corpos redondos. Destacamos que alguns possuíam duas bases circulares que são os cilindros; outros, somente uma base na parte inferior e se afunilava na parte superior, que são chamados de cone e também têm aqueles que não possuíam base, as esferas.



**Figura 49 - Representam
esferas**



**Figura 50 - Representam
cilindros**



**Figura 51 - Representam
cones**

6.2.2 Montagem de Poliedros com Canudos

Esta atividade teve duração de duas aulas. Os materiais para realização das atividades foram fornecidos pela professora. Formamos três grupos organizados pelos próprios alunos. Os grupos tiveram liberdade para criar os poliedros, ou simplesmente, montar poliedros que já conheciam. Na Figura 53, aparece um sólido diferente em forma de taça, porém, foram informados que esse tipo de sólido, de acordo com a definição, não era um poliedro.

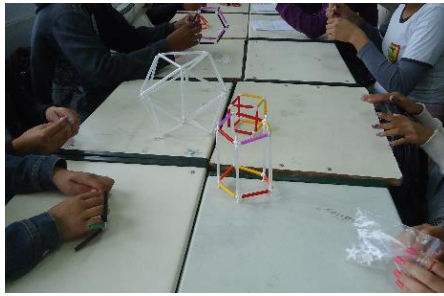


Figura 52 - Poliedros construídos com canudos

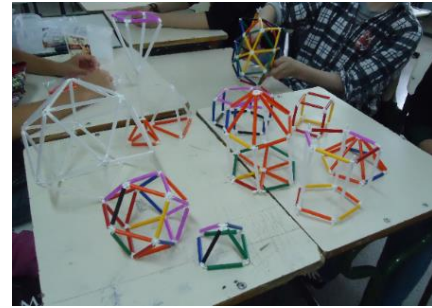


Figura 53 - Poliedros construídos com canudos

Foram montados vários poliedros diferentes dos que estavam acostumados a ver, mas algo interessante e curioso para todos, aconteceu quando um aluno montou um em formato de taça. Os alunos não haviam percebido qual era a diferença entre os demais construídos. Diferença essa, que a professora esclareceu de forma que percebessem que a base da suposta taça estava ligada à sua parte superior por um segmento que não é lado de nenhum polígono. Portanto, a figura representada pela suposta taça não era um poliedro.

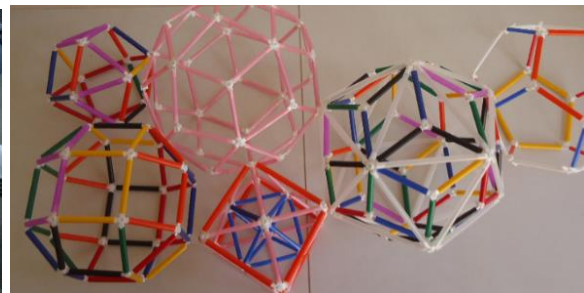
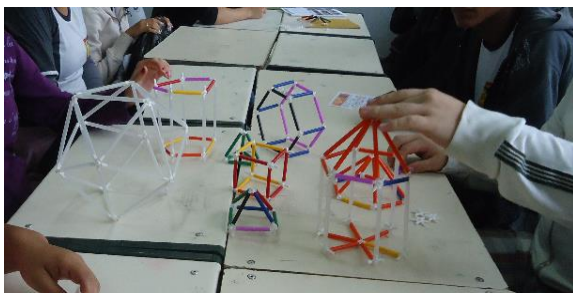


Figura 54- Poliedros construídos com canudos **Figura 55- Poliedros construídos com canudos**

Durante, e após as montagens, foram questionados quanto ao número de faces, arestas e vértices. Procuramos sanar as dúvidas em relação a esses elementos dos poliedros. Por falta da disponibilidade de tempo, a relação de Euler foi relembrada de forma rápida e na lousa.

Apesar do cuidado que devemos ter com atividades que permitem aos alunos criar e ao mesmo tempo interagir com os colegas, são nesses momentos que ocorrem as grandes interações entre os alunos. Os mesmos ficaram tão entusiasmados ao ajudar esclarecer alguma dúvida do colega que acreditamos que isso ajudou a aumentar a autoestima e a motivar a busca pelo conhecimento. Essa interação aluno-aluno foi observada por muito deles e a professora fez questão de comentar.

A atividade, além de ajudar no aprendizado sobre poliedros, foi valiosa para a interação entre os participantes, pois foi possível observar que alunos com dificuldades de se expressarem durante as aulas, se sentiram mais a vontade para se comunicarem no decorrer da realização da atividade.

6.2.3 Utilizando o Software Poly

Em princípio tínhamos como objetivo levar os alunos à sala de informática para que os mesmos tivessem contato com o software Poly, mas não foi possível devido à concorrência da utilização da sala de informática. Já que temos 17 turmas (classes) no período da manhã.

O software Poly 1.11 é gratuito por um tempo e muitos alunos possuem acesso à internet e obtiveram o download do mesmo através do endereço eletrônico <http://www.peda.com/poly/> ou <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/software/soft-geometria.php>. O mesmo não possui uma versão em português, mas a versão em inglês é de fácil entendimento.

No decorrer de 50 minutos (uma aula), o software Poly foi apresentado através de um projetor multimídia (data show).

Poly 1.11 é um programa que permite investigar os sólidos poliédricos. Não é possível o desenvolvimento da criatividade, mas a visualização em movimento dos entes geométricos facilita a exploração e a compreensão da planificação e da montagem dos poliedros. Sua planificação pode ser observada através de movimentos gradativos durante a sua montagem. Também facilita a exploração do número de faces, arestas e vértices.

Este software apresenta muitas novidades. Por exemplo, os antiprismas que são poliedros que apresentam bases paralelas e suas faces laterais são triangulares, podem ser visualizados.

A Figura 56, mostra a tela do software Poly com o icosaedro sendo planificado aos poucos. Da mesma forma, podemos obter o efeito contrário, ou seja, a montagem do poliedro.

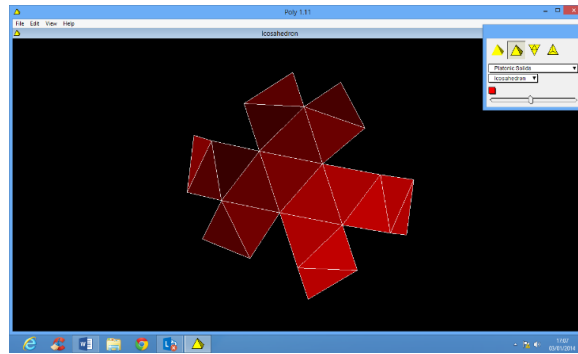


Figura 56 - Planificação do icosaedro

Com software Poly reconhecemos, facilmente, os polígonos que compõem as faces de um sólido geométrico através da visualização e movimentação dos mesmos ou de suas planificações.

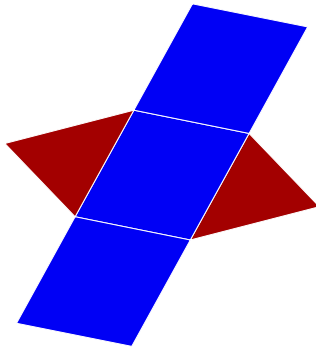


Figura 57 - Planificação do prisma triangular

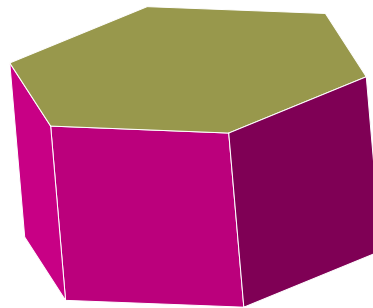


Figura 58 - Prisma hexagonal

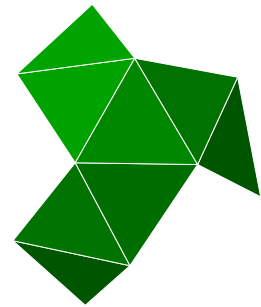


Figura 59 - Planificando o octaedro

Um poliedro como o dipirâmide (bipirâmide) octogonal é construído a partir de duas pirâmides iguais, unindo base com base.



Figura 60 - Dipirâmide octogonal

Imagens lindas de figuras construídas através desse software despertam, de forma motivadora, um gosto pelo estudo dos sólidos geométricos. A seguir, apresentamos dois exemplares de esferas geodésicas.

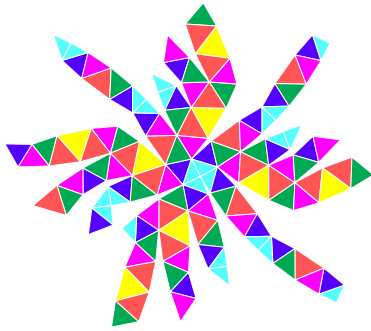


Figura 61 - Frequência 4 - Esfera geodésica octaedral

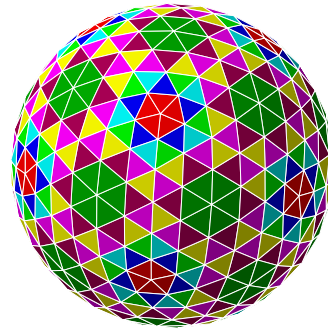


Figura 62 - Frequência 6 - Esfera geodésica icosaédrica

6.2.4 Recordando Áreas de Figuras Planas

O estudo de áreas de figuras planas ocorreu com duração de duas aulas sendo uma em um dia, e outra, no dia seguinte.

As áreas foram estudadas buscando a transformação de uma figura plana em outra equivalente, ou seja, de mesma área através da composição e decomposição. Buscamos transformações que facilitassem o cálculo de áreas; a cada figura, a professora direcionava os alunos para que os mesmos conseguissem encontrar a fórmula.

Questionamos qual seria a unidade de medida para o cálculo de áreas. Se considerarmos o retângulo cujas dimensões são $5u$ e $3u$, qual seria a sua área? E se não tiver quadriculado? Para alguns alunos pareceu estranho que estivesse sendo feito tais questionamentos, pois sabiam que a unidade era o metro quadrado (m^2), seus múltiplos e submúltiplos, mas outros não poderiam dizer o mesmo.

Em nossos estudos, estamos acostumados a considerar uma de suas dimensões como base (o comprimento) e a outra como altura (a largura). O mesmo ocorre com o quadrado, já que é um retângulo especial, pois base e altura tem mesma medida. Quanto ao paralelogramo, imaginamos um corte e um deslocamento para transformá-lo em um retângulo.

As Figuras de 63 a 74, foram construídas através do software Geogebra 4.4, disponível no endereço eletrônico <http://www.geogebra.org/cms/pt BR/>.

A seguir, listamos as fórmulas de áreas de figuras planas.

Área do retângulo é dada pelo produto da medida da base (b) pela medida da altura (h), ou seja, $\text{Área} = b \times h$.



Figura 63 - Retângulo

Área do quadrado é dada pelo produto da medida da base (b) pela medida da altura (h). Porém, o quadrado possui suas dimensões de mesma medida (ℓ), assim, a área do quadrado é dada por lado vezes lado, ou seja, $\text{Área} = \ell \times \ell$.

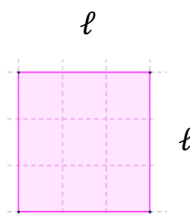


Figura 64 - Quadrado

Observamos na Figura 65, que a partir de um paralelogramo podemos obter um retângulo. Assim, a área do paralelogramo é dada pelo produto da medida da base (b) pela medida da altura (h), ou seja, $\text{Área} = b \times h$.

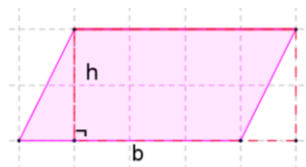


Figura 65 - Paralelogramo

Uma maneira para calcularmos a área do triângulo, do trapézio e do losango é observando que, com dois exemplares congruentes de cada, é possível compor um paralelogramo, assim, suas áreas serão dadas pela área do paralelogramo formado dividido por dois.

A área do triângulo é dada pela medida da base (b) pela medida da altura (h) dividido por 2, ou seja, $\text{Área} = \frac{b \times h}{2}$.

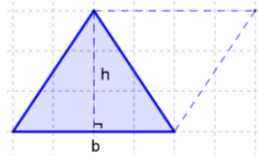


Figura 66 - Triângulo

A área do trapézio é dada pelo produto da medida da base (b) pela medida da altura (h) dividido por 2. Porém, a base é dada pela base maior (B) mais a base menor (b) do trapézio, ou seja, $\text{Área} = \frac{(B+b) \times h}{2}$.

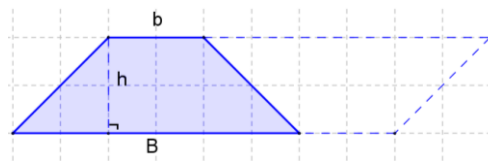


Figura 67 - Trapézio

A área do losango é dada pelo produto da medida da base (b) pela medida da altura (h) dividida por 2. Porém, a base é da mesma medida da diagonal maior (D) do losango e a altura tem a mesma medida da diagonal menor (d) do losango, ou seja, $\text{Área} = \frac{D \times d}{2}$.

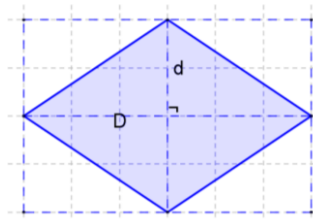


Figura 68 - Losango

No caso do polígono regular é possível transformar qualquer um em um quadrilátero equivalente, ou seja, de mesma área.

O pentágono regular pode ser decomposto em cinco triângulos equivalentes e com eles compor um trapézio. Observemos que a soma das bases do trapézio é

igual ao perímetro (p) do pentágono e a altura igual ao apótema (a). Logo, a área do pentágono é dada pelo produto da medida do perímetro (p) pela medida do apótema (a) dividido por dois. Área = $\frac{p \cdot a}{2}$.

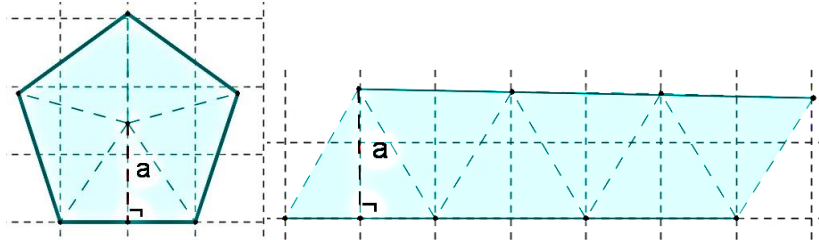


Figura 69 - Pentágono e sua decomposição

O hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equivalentes e com eles compor um paralelogramo. Observemos que a base do paralelogramo formado é a metade do perímetro (p) do hexágono e a altura igual ao apótema (a). Assim a área do hexágono é dada pelo produto da medida do perímetro (p) pela medida do apótema (a) dividido por dois. Área = $\frac{p \cdot a}{2}$.

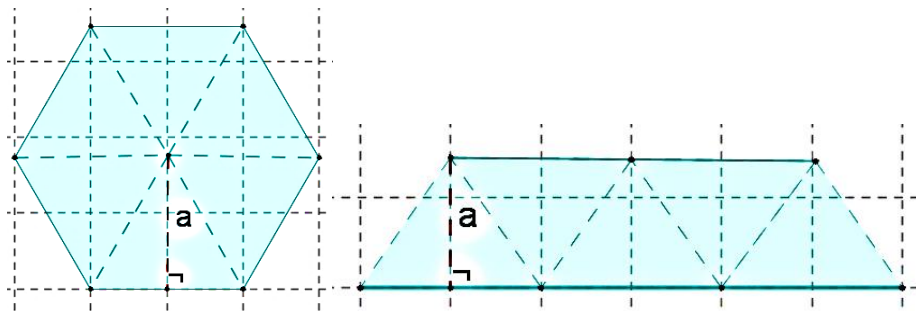


Figura 70 - Hexágono e sua decomposição

Para o cálculo da área do círculo podemos decompô-lo em setores circulares e assim compor um paralelogramo. Quanto maior for o número de setores em que o círculo for dividido, mais o setor circular se aproximará de um triângulo isósceles. A base será cada vez menor, e os lados do triângulo se aproximarão da medida do raio r do círculo. Assim, no limite, para um número finito de setores circulares, a área da figura será igual a área do retângulo de base igual à metade do perímetro da circunferência ($\pi \cdot r$) e altura igual a r .

Área do círculo é dada pelo produto do valor de π , pela medida do raio ao quadrado.

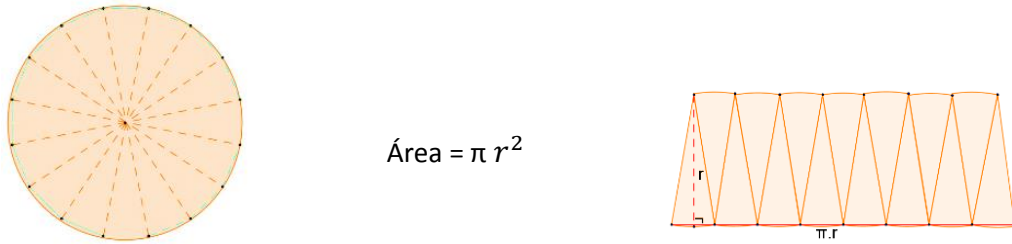


Figura 71 - Círculo e sua decomposição

A área do setor circular é uma parte da área do círculo, ou seja, é uma fração da área do círculo e como uma volta completa do círculo corresponde a 360° , a área do setor circular (BOC) é proporcional ao valor de θ (ângulo central). $\text{Área} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360}$.

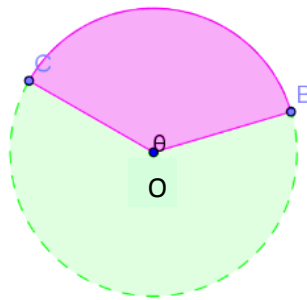


Figura 72 – Setor Circular BOC

A área do segmento circular é dada pela área do setor circular ABD menos a área do triângulo ABD. $\text{Área} = \text{área do setor ABD} - \text{área do triângulo ABD}$.

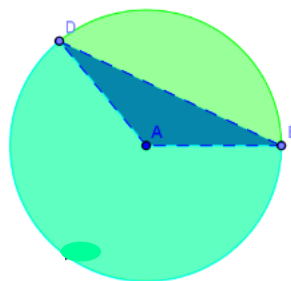


Figura 73 – Segmento Circular

A área da coroa circular é dada pela área do círculo de raio (R) menos a área do círculo de raio (r). $A = \pi R^2 - \pi r^2$.

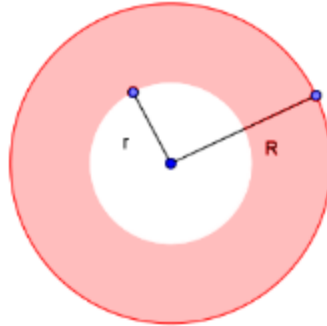


Figura 74 – Coroa Circular

6.2.5 Volume

O conceito de volume foi introduzido com a apresentação de alguns recipientes como os da Figura 75.



Figura 75 - Recipientes com formatos diferentes

Foram feitas também, algumas provocações através da observação de que esses recipientes são de formatos diferentes. Mas, o que podemos dizer em relação ao volume e à capacidade dos mesmos? Se as capacidades forem iguais, o que podemos dizer sobre o volume?

Essas provocações geraram muitas dúvidas. A professora esclareceu que volume de um recipiente é a quantidade de espaço ocupado pelo mesmo e que sua capacidade é o volume da parte interior vazia do recipiente.

Para medirmos o volume, devemos compará-lo com uma unidade. A unidade de volume é o cubo de aresta medindo uma unidade de comprimento. Para medir uma unidade de comprimento utilizamos o metro (m), seus múltiplos e submúltiplos; assim, para medir uma unidade de volume utilizamos o metro cúbico (m^3), seus múltiplos e submúltiplos.

Para respondermos os questionamentos referentes à capacidade e volume dos recipientes apresentados, lembramos que a unidade utilizada para medir volume líquido é o litro, seus múltiplos e submúltiplos, e que 1 milímetro (*ml*) corresponde ao volume de um cubo de 1cm de aresta, ou seja, 1cm^3 .

Para verificarmos a capacidade utilizamos um recipiente com escalas e água misturada com groselha. Para cada recipiente, medimos cuidadosamente 300 *ml* da mistura e despejamos dentro dos mesmos. Verificamos que todos os recipientes possuíam a mesma capacidade. Isso só foi possível porque antes de serem apresentados para os alunos os recipientes em forma de um tronco de cone e de um prisma foram cortados de forma que todos ficassem com a mesma capacidade.



Figura 76 - Recipiente com escala



Figura 77 - Recipientes com mesmo volume

Observamos que o volume dos recipientes eram diferentes, pois a base para sustentação dos recipientes eram de espessuras diferentes, mas a medida do volume interior (capacidade) eram iguais.

Para simplificar nossos estudos, consideramos que as espessuras da base e de toda a superfície do recipiente eram iguais e que, de forma geral, finas o suficiente para que capacidade e volume tenham medidas iguais.

Para medirmos o volume de um sólido, determinamos quantos cubos de aresta medindo uma unidade cabem no mesmo, como representado na caixa em forma de paralelepípedo.



Figura 78 - Cubo como unidade de volume

Observando a caixa, foi possível concluir que a quantidade de cubos que cabem no paralelepípedo que ela representa, é igual ao produto da área da base (que corresponde a quantidade de cubos apoiados sobre a mesma) pela altura (que corresponde a quantidades de camadas que preenchem o paralelepípedo). Assim, o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base (A_b) pela altura (h), ou seja, $V = A_b \cdot h$.

Foram questionados sobre o que ocorre se o sólido não possui dimensões que comportem somente cubos inteiros? Será que continua valendo a regra: Volume é o produto da área da base pela altura? Por quê? E se as dimensões forem muito grandes ou inacessíveis?



Figura 79 - Recipiente com cubos

Para auxiliar na resposta a esses questionamentos utilizamos os textos: “O volume do prisma e o Princípio de Cavalieri”, “Princípio de Cavalieri” e “O volume do

cilindro”. Textos do caderno do aluno do 2º ano do ensino médio; volume 4; p.7, p.10 e p.13, respectivamente. Durante os comentários, a professora procurou mostrar através da composição de sólidos, com ajuda de pequenos quadrados confeccionados com EVA e de alguns CDs, como interpretar de forma simples o Princípio de Cavalieri.

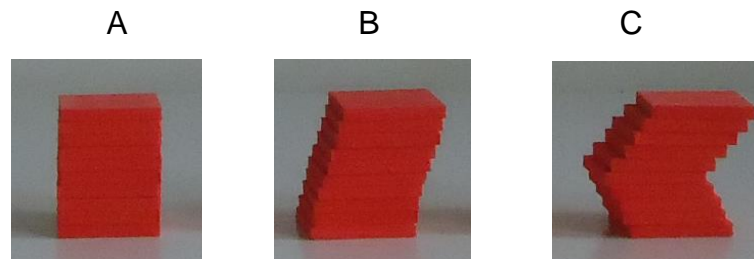


Figura 80 - (A, B, C) Representação do Princípio de Cavalieri

A Figura 80 (A) representa um prisma composto pela sobreposição de quadrados; na Figura 80 (B) encontra-se representado, com a mesma quantidade de quadrados, um prisma oblíquo e na Figura 80 (C), um prisma irregular representado pela mesma quantidade de quadrados. Os três prismas possuem a mesma área da base e mesma altura. Portanto, os mesmos possuem o mesmo volume.

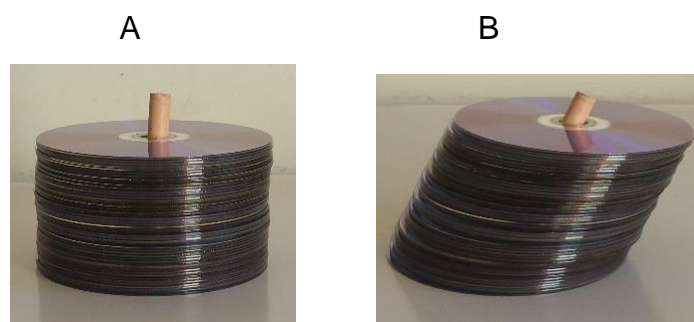


Figura 81 - (A, B) Representação do Princípio de Cavalieri

A Figura 81 (A) representa um cilindro composto pela sobreposição de CDs e na Figura 81 (B), encontra-se representado com a mesma quantidade de CDs um cilindro oblíquo. Os dois cilindros possuem a mesma área da base e mesma altura. Portanto, os mesmos possuem o mesmo volume.

Assim, podemos concluir que, de forma geral, tomados dois sólidos com bases de mesma área e sobre o mesmo plano, se todas as seções paralelas à base dos dois sólidos têm a mesma área, então, os dois sólidos têm mesmo volume.

Dessa forma para calcular o volume de sólidos com dimensões muito grandes ou inacessíveis, e até mesmo, muito pequenas, utilizamos a regra: produto da área da base pela altura.

6.2.6 Utilizando o Software Wingeom

Essa atividade foi realizada na sala de informática, no decorrer de duas aulas. Mesmo sem ter conhecimento do software Wingeom, os alunos exploraram rapidamente, e logo mostraram a facilidade que possuíam ao desenvolverem atividades utilizando o computador como recurso facilitador da aprendizagem. Porém, ficou mais difícil observar as possíveis dificuldades individuais dos alunos, pois cada computador era utilizado por três alunos.

Realizamos quatro exercícios, os quais estão relatados abaixo. Também apresentamos uma solução de cada atividade realizada por alunos através do software Wingeom.

- 1) Desenhe um paralelepípedo reto retângulo com $3u$ de comprimento, $2u$ de largura e $6u$ de altura. Calcule a área da superfície e o volume.

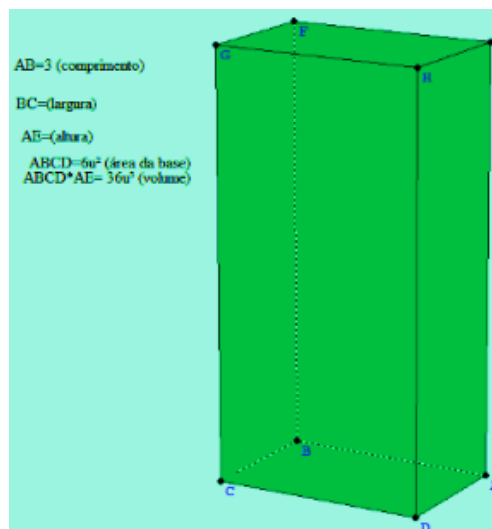


Figura 82 - Paralelepípedo

- 2) Desenhe um prisma de base pentagonal de lado medindo $2u$ e altura $4u$. Calcule a área da superfície e o volume.

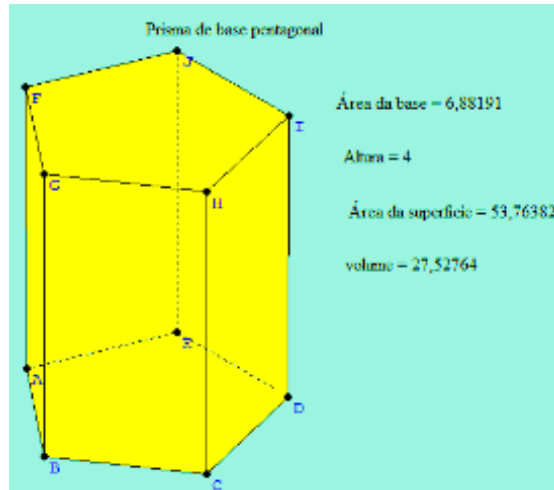


Figura 83 - Prisma pentagonal

- 3) Desenhe um cilindro de raio $2u$ e altura $3u$. Calcule a área da superfície e o volume.

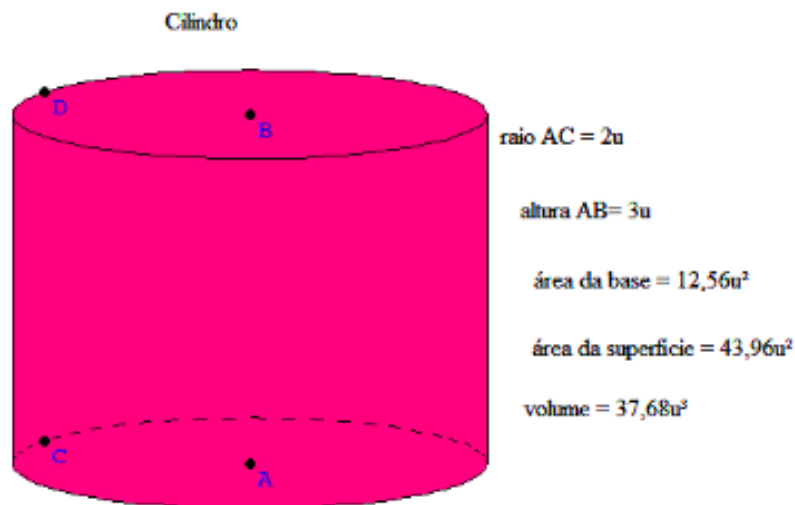


Figura 84 - Cilindro

- 4) (Adaptado – caderno do aluno); Uma mosca e uma formiga estão sobre o vértice H de um cubo. No vértice oposto da outra base, está uma gota de mel, que interessa a ambos insetos. A mosca tem a vantagem de poder voar. A formiga só pode andar pela superfície. Desenhe dois cubos equivalentes para representar o menor percurso que a mosca deve fazer

para alcançar a gota de mel e no outro o da formiga. Sabendo que aresta a do cubo mede $3u$, calcule o tamanho do percurso de cada inseto.

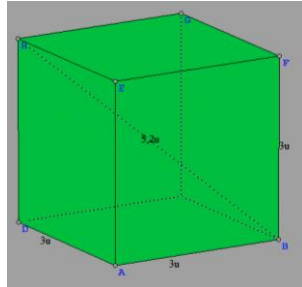


Figura 85 - Percurso realizado pela mosca

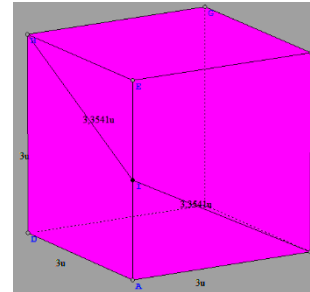


Figura 86 - Percurso realizado pela formiga

Durante a realização dos exercícios podemos notar como os alunos ficaram empolgados e curiosos; bastaram algumas orientações sobre a utilização das ferramentas do software, como buscar informações no arquivo ajuda de cada menu e como abrir uma nova janela.

Winggeom é um software livre e usado como recurso didático para o ensino de matemática. Essa ferramenta permite desenvolver diversas atividades para todos níveis da educação básica. Também possui janelas que nos permitem trabalhar com geometria plana, espacial, analítica, hiperbólica e esférica, divisões, transformações e preenchimento no plano. Além disso, permite a construção do conhecimento através de alguns modelos prontos e também a criação de seus próprios modelos, descobrindo relações e testando suas próprias conjecturas. É possível visualizar as construções em três dimensões, em diferentes perspectivas, calcular área de superfície, medida de ângulo, perímetro, volume e movimentar as figuras, entre tantas outras funções. Acreditamos que este software é um rico instrumento, capaz de motivar os alunos a aprenderem cada vez mais sobre geometria.

6.2.7 Resolução de Situações-problema

Para realização das situações 1 e 2, a seguir utilizamos embalagens de leite do tipo longa vida e de óleo de soja e as fórmulas dos volumes de prisma e de cilindro. Ao medirmos as dimensões das embalagens, possivelmente, ocorreu alguma diferença das verdadeiras dimensões, pois nossas medições não eram tão precisas.

Mas, com as medidas obtidas, calculamos a área de sua superfície e buscamos alternativas para se gastar menos material na fabricação das mesmas, com objetivo de torná-las mais econômicas.

Na embalagem do óleo, observamos que o material das bases e da lateral do cilindro não eram iguais e, portanto podem variar o custo dos mesmos. Então, para facilitar, consideramos que toda superfície era confeccionada com o mesmo material.

1) Foram realizadas medições na embalagem de 1 litro de leite de uma das marcas disponíveis nos mercados da cidade. As dimensões encontradas foram 16,6 cm, 6,3 cm, 9,6 cm. Para fabricação dessa embalagem, sem contar com as abas, são necessários $658,8 \text{ cm}^2$, podendo armazenar até $972,6 \text{ cm}^3$. Por um momento ficamos preocupados, pois faltavam $27,4 \text{ cm}^3$ para completar 1 litro, mas como nossas medidas não eram precisas deixamos de lado esse problema e realizamos cálculos para verificar a possibilidade de se utilizar menos material para fabricar a embalagem, procurando garantir um volume de no mínimo 1000 cm^3 . Encontramos algumas dimensões em que a área da superfície é menor e volume, mínimo 1000 cm^3 . Com uma embalagem com dimensões 15,1 cm, 8,2 cm e 8,1 cm são necessários $625,1 \text{ cm}^2$ de material gerando, assim, uma economia de $33,7 \text{ cm}^2$ de material e com volume de $1002,9 \text{ cm}^3$. Outro exemplo, uma embalagem com dimensões 16,4 cm, 6,1 cm e 10 cm são necessários $650,08 \text{ cm}^2$, gerando uma economia de $8,72 \text{ cm}^2$ de material e com volume de $1000,4 \text{ cm}^3$.



Figura 87 - Embalagem de leite

2) No caso da embalagem de óleo de soja, ela é para 900 cm^3 , ou seja, 900 ml . As medidas realizadas foram 8,3 cm de diâmetro e 18 cm de altura e são necessários $577,32 \text{ cm}^2$ para fabricá-la e volume $973,42 \text{ cm}^3$. Na busca de economizar o custo gasto com o material para confeccioná-la, encontramos, por exemplo, uma

embalagem com diâmetro 9 cm e altura 15 cm, obtendo $551,07 \text{ cm}^2$ de área o que geraria uma economia de $26,25 \text{ cm}^2$ do material, com volume de $953,78 \text{ cm}^3$. Um outro exemplo, foi uma embalagem com diâmetro 10 cm e altura 12 cm, cuja área é $533,8 \text{ cm}^2$ gerando uma economia de $43,52 \text{ cm}^2$ com volume de 942 cm^3 .



Figura 88 - Embalagem de óleo

3) Para observarmos variações na medida da área da superfície de um sólido tomamos como exemplo o paralelepípedo reto retângulo com medida do volume fixo em 1000 cm^3 e variamos suas dimensões. Alguns dos resultados obtidos estão dispostos na tabela a seguir.

Tabela 5 - Medidas no paralelepípedo reto retângulo

| Algumas medidas no paralelepípedo reto retângulo | | |
|--|--------------------------------------|--------------------------|
| Dimensões (cm) | Área da superfície (cm^2) | Volume (cm^3) |
| 2,10,50 | 1240 | 1000 |
| 4,5,50 | 940 | 1000 |
| 5,5,40 | 850 | 1000 |
| 4,10,25 | 780 | 1000 |
| 5,8,25 | 730 | 1000 |
| 2,20,25 | 680 | 1000 |
| 5,10,20 | 640 | 1000 |
| 10,10,10 | 600 | 1000 |

4) Nesse outro caso, tomamos o cilindro reto como exemplo, mas tivemos dificuldades para fixarmos a medida do volume em 1000 cm^3 . Deixamos esta medida

variar entre 1000 cm^3 e 1005 cm^3 e variamos a medida do raio da base (consequentemente o diâmetro) e da altura. Assim, foi observado o que ocorreu com a área da superfície:

Tabela 6 - Medidas no cilindro

| Algumas medidas no cilindro reto | | | |
|----------------------------------|-------------|-------------------------------------|--------------------------|
| Diâmetro (cm) | Altura (cm) | Área da superfície(cm^2) | Volume (cm^3) |
| 4,6 | 60,4 | 905,64 | 1003,28 |
| 20 | 3,19 | 828,33 | 1001,66 |
| 18,4 | 3,77 | 749,36 | 1001,95 |
| 9,2 | 15,1 | 569,09 | 1003,28 |
| 12 | 8,85 | 559,5 | 1000,4 |
| 10 | 12,75 | 557,35 | 1000,87 |
| 11 | 10,53 | 553,68 | 1000,19 |

Buscamos com a realização dessas situações-problema, e com as atividades realizadas anteriormente, responder os questionamentos feitos no início dos estudos de nosso projeto.

I) Será possível uma embalagem ser mais econômica que outra se as duas possuem forma de um paralelepípedo?

Considerando que ambas são confeccionadas com o mesmo material, concluímos que é possível que essa embalagem seja mais econômica. Basta considerar suas faces quadradas, ou seja, é um hexaedro regular conhecido como cubo.

II) Será possível uma embalagem ser mais econômica que outra se as duas possuem forma de um cilindro?

Considerando que ambas são confeccionadas com o mesmo material, concluímos que é possível. Essa embalagem deve possuir o diâmetro e a altura de mesma medida, ou seja, a embalagem é um cilindro equilátero.

III) Qual embalagem será mais econômica a que tem a forma de paralelepípedo ou de cilindro?

Considerando que ambas são confeccionadas com o mesmo material e observando os resultados dispostos nas tabelas das situações 3 e 4, concluímos que a embalagem mais econômica é a que possui a forma de cilindro.

Após tais conclusões, apresentamos algumas das situações-problema que constam no caderno do aluno, volume 4 do 2º ano do ensino médio. Em cada uma delas, destacamos uma solução dada pelos alunos.

a) Para o empacotamento de presentes, uma loja dispõe de dois tipos de embalagens de papelão: uma no formato de paralelepípedo oblíquo (Figura A), outra no formato de um paralelepípedo reto-retângulo (Figura B). Considerando os valores indicados nas figuras a seguir, calcule qual das duas formas geométricas exigirá menos papelão para ser confeccionada.

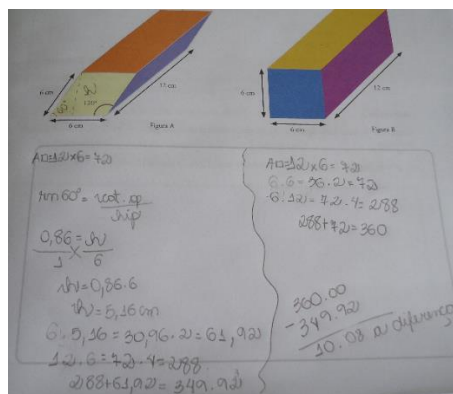


Figura 89 - Resolução da situação a)

b) Dois vasos, de mesma altura H , têm formatos diferentes e estão apoiados sobre uma mesa. Colocando-se água em ambos os vasos, até a altura h ,

constata-se que, para qualquer valor de h , sendo, $0 \leq h \leq H$, as superfícies da água nos dois vasos têm áreas iguais. Que relação você acredita que existe entre os volumes dos dois vasos?

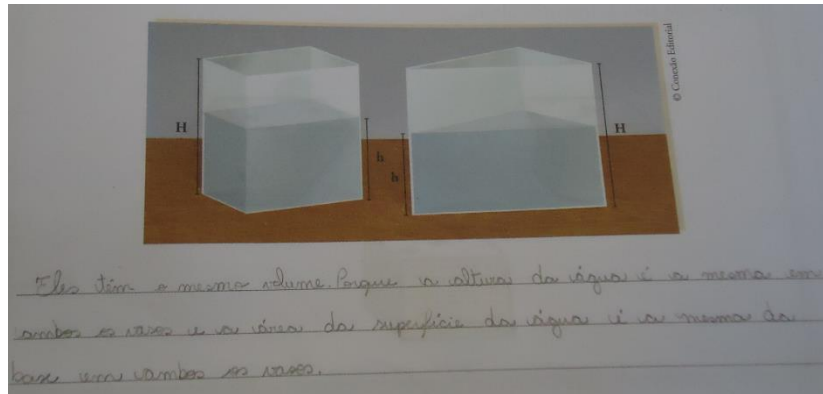


Figura 90 - Resolução da situação b)

c) Latas de molho de tomate têm, geralmente, forma cilíndrica. Um consumidor encontrou duas marcas de seu interesse e observou os seguintes fatos:

- a embalagem da marca A possuía o dobro da altura da embalagem B;
- a embalagem da marca B possuía o dobro do diâmetro da embalagem da marca A.

da marca A.

Sabendo que a primeira custa R\$ 2,30 e a segunda, R\$ 3,40, qual será a compra mais econômica?

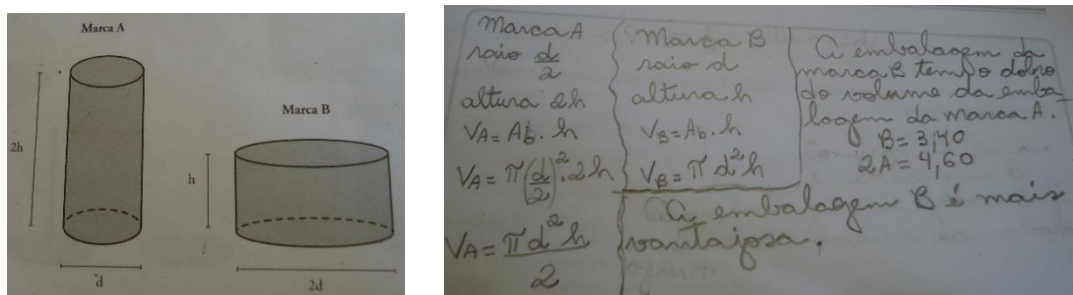


Figura 91 - Resolução da situação c)

d) Os reservatórios de gasolina dos postos geralmente são tanques no formato de um cilindro reto. Para avaliar o volume de combustível que ainda resta no cilindro enterrado no solo, o funcionário do posto utiliza uma régua, colocada verticalmente na boca do tanque até atingir o nível do combustível consumido.

Admitindo que o raio da base $R = 1$ m e altura $H = 2$ m, qual é o volume de combustível do tanque quando a régua registra altura $d = 40$ cm?

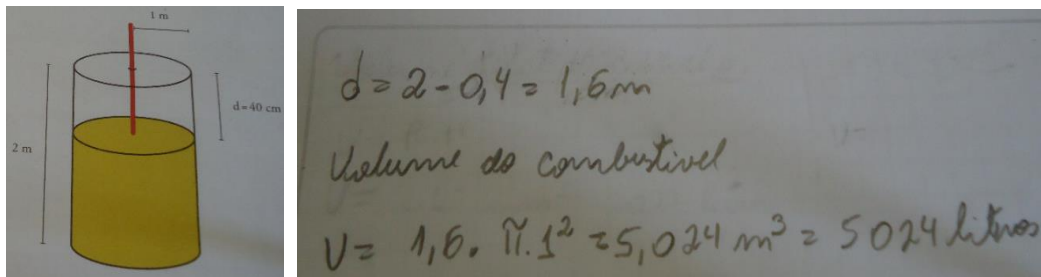


Figura 92 - Resolução da situação d)

6.2.8 Dados da Avaliação Final

A avaliação final foi realizada com o objetivo de apontarmos possíveis mudanças significativas no desempenho da aprendizagem dos alunos em relação ao estudo de áreas da superfície e volumes de prismas e cilindros. A mesma também foi utilizada como uma das avaliações do 4º bimestre.

As questões dessa avaliação encontram-se no apêndice II desse trabalho.

A segunda e terceira questões, referem-se a nomenclatura e elementos de um sólido, respectivamente. Na questão oito o questionamento é sobre área da coroa circular. As demais questões tratam de áreas da superfície e volumes de prismas e cilindros.

Podemos perceber através dos resultados, avanços significativos na aprendizagem dos alunos da turma do 2º ano A e da turma do 2º ano B. Porém, os alunos da turma do 2º ano B apresentaram um desempenho mais relevante, durante a realização de atividades relacionadas com o estudo de geometria espacial e também nos resultados obtidos através das avaliações, durante o bimestre, e inclusive, obtiveram melhor desempenho no simulado aplicado pela coordenação da escola.

Os resultados obtidos na avaliação final estão registrados nas tabelas a seguir.

Tabela 7: Dados da Avaliação Final

| 2º ano A | |
|---|------------|
| Porcentagem do número de alunos do 2º ano A que acertaram a questão | |
| Questões | Alunos (%) |
| 1 | 54 |
| 2 | 73 |
| 3 | 69 |
| 4 | 48 |
| 5 | 42 |
| 6 | 58 |
| 7 | 69 |
| 8 | 54 |
| 9 | 65 |
| 10 | 54 |

Tabela 8: Dados da Avaliação Final

| 2º ano B | |
|---|-------------|
| Porcentagem do número de alunos do 2º ano B que acertaram a questão | |
| Questões | Acertos (%) |
| 1 | 76 |
| 2 | 92 |
| 3 | 88 |
| 4 | 64 |
| 5 | 76 |
| 6 | 80 |
| 7 | 88 |
| 8 | 76 |
| 9 | 88 |
| 10 | 76 |

A primeira questão foi desenvolvida pelos alunos em sala de aula, de forma similar através de uma questão do caderno. Essa questão desempenhou um papel importante para compreensão do cálculo do volume de prismas e cilindros.

Nas questões quatro e cinco, os alunos apresentaram dificuldades no reconhecimento da relação entre a medida do diâmetro e do raio, pois muitos consideraram a medida do diâmetro como se fosse a medida do raio.

Nas questões referentes à área da superfície, os alunos apresentaram dificuldades no reconhecimento da quantidade de faces equivalentes (de mesma área) e no cálculo da área lateral do cilindro.

Os alunos que fizeram o esboço do sólido citado nas questões acertaram mais do que aqueles que não o fizeram. Isto reforça a ideia de que a visualização dos sólidos é importante no estudo de geometria espacial.

Lembremos que os alunos do 2º ano A fizeram, apenas, o uso do caderno do aluno, de algumas situações do livro didático e da explicação da professora com

registro na lousa, enquanto os do 2º ano B estudaram de forma diferenciada, com manipulação de alguns materiais e utilização de softwares. Podemos dizer, mediante aos resultados obtidos, que desenvolver os conteúdos através de atividades como as que foram propostas para o 2º ano B, contribuem de forma significativa para melhorar o desempenho da aprendizagem dos alunos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como meta, desenvolver atividades com a utilização de materiais manipuláveis e utilização de softwares, esperando motivar os alunos na busca de alcançar um desempenho melhor na aprendizagem dos conceitos de áreas de superfície e volumes de sólidos geométricos.

São muitos os softwares educativos que podem auxiliar o estudo da geometria métrica espacial, em especial, destacamos os softwares Poly, Wingeom e o Geogebra. Não podemos deixar que as dificuldades da apropriação de novos conhecimentos e de poucos equipamentos, impeçam de utilizarmos esses softwares como recurso didático, pois os mesmos favorecem o desenvolvimento da aprendizagem e ajudam, de forma relevante, o reconhecimento dos elementos que compõem os sólidos geométricos, devido ao aspecto visual que auxilia a exploração dos mesmos e da criação do próprio conhecimento.

A utilização de materiais manipuláveis como alternativa para introduzir os conceitos da geometria espacial mostrou que esse tipo de atividade favorece o aluno no desenvolvimento de habilidades de visualização, de reconhecimento e análise de propriedades geométricas, de aprimoramento das relações pessoais, entre outras.

Com certeza temos muito que aprender, mas a experiência de atuar com atividades diferenciadas, acrescentaram valiosas contribuições para prática em sala de aula, motivaram e despertaram esperanças na busca por inovações tecnológicas e metodologias diferenciadas.

O desafio de trabalhar com esse tipo de atividades mostrou que é possível minimizar as dificuldades no processo ensino-aprendizagem.

Neste contexto, os materiais manipuláveis e as novas tecnologias demonstraram que são instrumentos que ajudam a aprendizagem tanto de alunos como de professores. Esperamos que esse trabalho possa ser útil para professores, futuros professores e, até mesmo, para admiradores desse ramo maravilhoso da ciência que é a matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALMEIDA, L. M. W., ARAÚJO, J. L., BISOGNIN, E. (Coord.). **Práticas de modelagem matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. – Londrina: Eduael, 2011.
- [2] BIEMBENGUT, M. S., HEIN, N.. **Modelagem matemática no ensino**. 5.ed. São Paulo: Contextos, 2011.
- [3] CALABRIA, A.R. **A geometria fora da Grécia**. Histórias & Histórias. Revista brasileira de matemática nº 81. SBM, p.4-9. 2º quadrimestre de 2013.
- [4] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**. Geometria espacial, posição e métrica.5.ed. São Paulo: Atual, 1993. v.10.
- [5] EVES, Howard. **História da Geometria**. Trad. DOMINGUES, Hygino H. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da geometria para uso em sala de aula; v.3). FIORENTINI, Dario. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos/ Dario Fiorentini, Sérgio Lorenzato. – 3.ed.rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. – (Coleção formação de professores) tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria**: Comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).
- [7] LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do ensino médio**. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.2. (Coleção do Professor de Matemática).
- [8] LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.
- [9] RIBEIRO JUNIOR. Elson Heraldo; PENTEADO, Rosangela de Fatima Stankowitz. **Modelo para formatação de trabalhos acadêmicos da UTFPR**. Ponta Grossa, 2011. (Apostila).
- [10] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação; GRANJA, Carlos Eduardo S.C., et al. **Caderno do Aluno**: Matemática, ensino médio – 2ª série. 1.ed. São Paulo: SEE, 2013.v.4

- [11] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação; GRANJA, Carlos Eduardo S.C., et al. **Caderno do Professor: Matemática**, ensino médio – 2ª série. 1.ed. São Paulo: SEE, 2013.v.4
- [12] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Matemática: o currículo e a compreensão da realidade**. São Paulo: SE/CENP, 1991.
- [13] VENDRAME, Geni Viana do Carmo. **BELEZA NA MATEMÁTICA ATRAVÉS DAS ISOMETRIAS E ORNAMENTOS**. Campinas, 2011.
- [14] SITE, <<http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/definicoes-br.html>>. Acesso em: 15 de out. 2013.
- [15] SITE, <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm46/um_pouco_de_hist%C3%B3ria.htm>. Acesso em: 22 de dez. 2013.
- [16] SITE, <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm205/historia.htm>>. Acesso em: 28 de dez. 2013.
- [17] SITE, < http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/ > Acesso em: 03 de dez. 2013.
- [18] SITE, < <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/history/democrito/democrito.html>>. Acesso em: 2 de jan. 2014.
- [19] SITE, <http://www.notapositiva.com/pt/trbestbs/matematica/10_euclides.htm>. Acesso em: 6 de jan. 2014.
- [20] SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática**. 1.ed. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção novo olhar; v.3)
- [21] VALENTE, José Armando, (Org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas, SP/NIED, 1999. Disponível em <http://www.nied.unicamp.br/oea/pub/livro1/>. Acesso em: nov. 2013.

APÊNDICE 1**PRÉ-TESTE – 2º ANO DO ENSINO MÉDIO**

1) Descreva como calcular área das figuras planas abaixo:

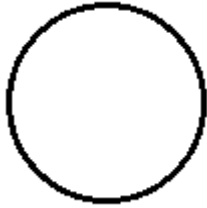
a)



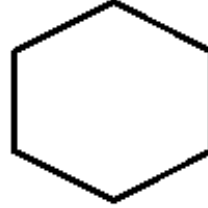
b)



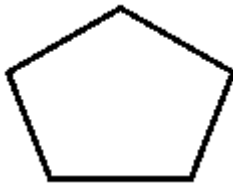
c)



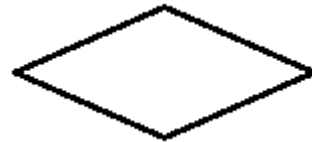
d)



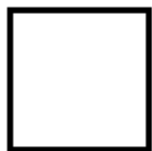
e)



f)



g)



h)



i)



2) Escreva o nome de cada figura plana do exercício anterior.

- a).....
- b).....
- c).....
- d).....
- e).....
- f).....
- g).....
- h).....
- i).....

3) Escreva o nome dos sólidos geométricos que representam as imagens abaixo:



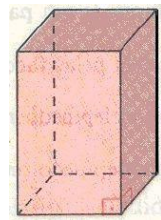
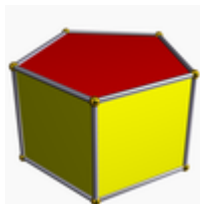
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

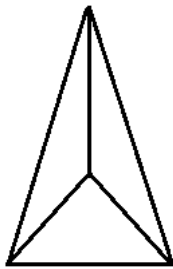
4) Em cada sólido geométrico abaixo indique o número de faces (F), o número de arestas (A) e o número de vértices (V).

a)

F=

A=

V=

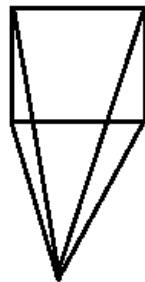


b)

F=

A=

V=

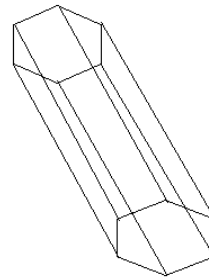


c)

F=

A=

V=

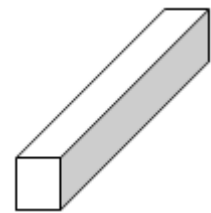


d)

F=

A=

V=



5) Como se calcula o volume dos sólidos geométricos abaixo?

a)



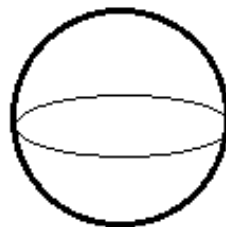
b)



c)



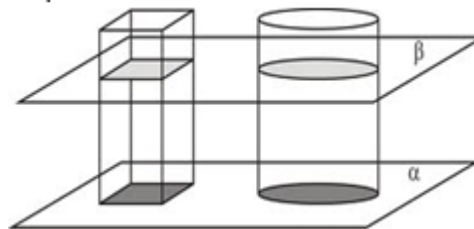
d)



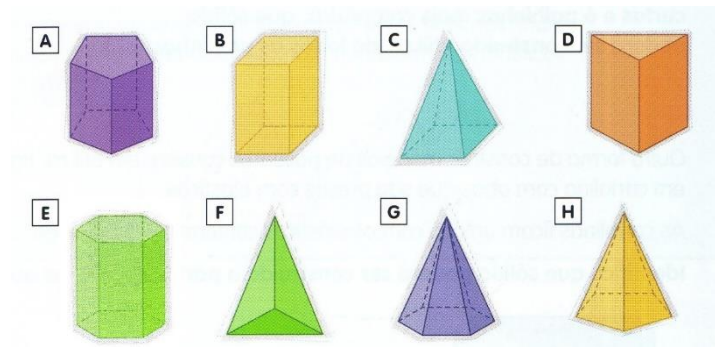
APÊNDICE 2

AVALIAÇÃO FINAL – 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

1) Qual a relação existente entre os dois recipientes de formatos diferentes e que estão apoiados no mesmo plano? O que essa relação garante quanto ao volume dos mesmos?



2) Classifique os sólidos abaixo em prisma ou pirâmide.



3) Quantos vértices, quantas arestas e quantas faces possuem as seguintes figuras do exercício anterior?

Figura A

Figura C

4) O diâmetro da base de um cilindro reto tem 10cm. Sabendo que a altura do cilindro é 12cm, qual é o seu volume?

5) Quantos metros cúbicos de terra foram escavados para a construção de um poço que tem 10m de diâmetro e 15m de profundidade?

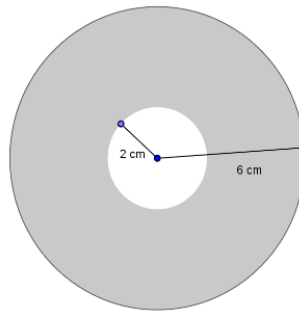
6) Num paralelepípedo retângulo de dimensões 3 cm, 4 cm e 5 cm, calcular:

a) a área total AT;

b) o volume V.

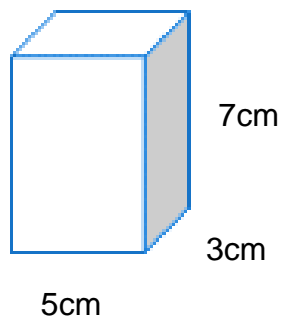
7) Calcule o volume de uma piscina com 10 m de comprimento, 6m de largura e 3m de profundidade.

8) Calcule a área pintada da figura plana abaixo, sabendo que o raio do círculo maior é 6cm e do menor 2cm.

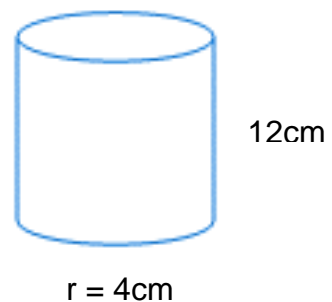


9) Calcule o volume dos sólidos abaixo.

a)



b)



10) Calcule a área da superfície dos sólidos do exercício anterior.