UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NASCIONAL

PATRÍCIA ROSE GOMES DE MELO VIOL MARTINS

Matemática sem Números: uma proposta de atividades para o estudo da Lógica

Maringá

2014

PATRÍCIA ROSE GOMES DE MELO VIOL MARTINS

Matemática sem Números: uma proposta de atividades para o estudo da Lógica

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof.° Dr.° Josiney Alves de Souza.

Maringá

2014

Martins, Patrícia Rose Gomes de Melo Viol, 1984-
Matemática sem números: uma proposta de atividade para o ensino da Lógica / Patrícia Rose Gomes de Melo Viol Martins. – Maringá, 2014.
82 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Maringá. Departamento de Matemática, Maringá, 2014
Orientador: Prof.° Dr.° Josiney Alves de Souza

1. Raciocínio Lógico. 2. Argumentação. 3. Diversas Linguagens. 4. Aprendizagem Significativa. I. Universidade Estadual de Maringá. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

PATRÍCIA ROSE GOMES DE MELO VIOL MARTINS

MATEMÁTICA SEM NÚMEROS: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO DA LÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk
Universidade Estadual do Paraná – União da Vitória - PR

Prof. Dr. Carlos José Braga Barros
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2014.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico à minha família que contribuiu para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Nesta página muito especial deste trabalho, gostaria de agradecer a algumas pessoas, dentre as muitas que me ajudaram a realiza-lo.

Agradeço a Deus, pela oportunidade e determinação em realizar este trabalho.

Em especial aos meus pais, Valdir e Solange, que sempre me incentivaram, ajudaram e estavam presentes na minha vida.

Ao meu esposo Gilson e aos meus filhos, a Maria Eduarda e o Rubens, meus grandes amores e companheiros de todos os momentos.

A Giovanna e o Flávio pela amizade e pelo "cantinho" cedido durante todo o mestrado. A minha irmã Laura pela companhia em algumas viagens. A minha irmã Natália por todo carinho com minha filha. A minha sogra Jairce por todo zelo e cuidado com meu filho.

Ao Prof.° Josiney Alves de Souza, pela orientação neste trabalho.

A minha amiga de profissão Denise Baptista Mazzini pela ideia do tema e pelas valiosas sugestões.

Aos professores e colegas que me acompanharam nesses dois anos de mestrado.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática – SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

“A missão do professor não é dar
resposta prontas. As respostas estão nos
livros, na internet.
A missão dos professores é
provocar a inteligência, é provocar o
espanto, a curiosidade.”.

Rubem Alves

Matemática sem Números: uma proposta de atividade para o ensino da Lógica

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta para o ensino de Lógica para o primeiro ano do ensino médio. Considerando as diversidades dos alunos, este trabalho foi elaborado por meio de uma sequência de atividades que buscam suprir as deficiências de interpretação, argumentação e raciocínio lógico provenientes de uma falsa ideia de que a Matemática só trabalha com números e contas. A proposta das atividades é tornar a aprendizagem mais significativa e ampla para alunos, na qual o papel do professor é o de mediador e o do aluno de construtor do conhecimento. Os alunos são convidados a agir, buscar e expressar suas opiniões dando sentido a sua aprendizagem e aos professores é sugerido uma reflexão sobre a sua vivência em sala de aula, incentivando e estimulando a busca por atividades diversificadas. Concluímos o trabalho apresentando quais as habilidades e competências que serão desenvolvidas e como elas poderão auxiliar no desenvolvimento de novos conteúdos matemáticos.

Palavras-chaves: Raciocínio Lógico. Argumentação. Diversas Linguagens. Aprendizagem Significativa.

Matemática sem Números: uma proposta de atividade para o ensino da Lógica

ABSTRACT

This paper presents a proposal for teaching Logic for the first year of high school . Considering the diversity of students , this study was developed through a sequence of activities to address the weaknesses of interpretation, reasoning and logical reasoning from a false idea that mathematics works only with numbers and accounts . The proposal is to make the activities more meaningful and comprehensive learning for students in which the teacher's role is that of a facilitator and the student constructor of knowledge. Students are invited to take action, seek and express their opinion by giving meaning to their learning, and teachers are suggested to reflect on their experience in the classroom, encouraging and stimulating the search for diversified activities. We conclude by presenting what skills and competencies that will be developed and how they can assist in the development of new mathematical content.

Keywords: Logical Reasoning. Argument. Several languages. Meaningful Learning.

SUMÁRIO

Introdução

No cotidiano dos professores do Ensino Médio da rede pública é natural deparar-se com problemas de raciocínio lógico e com a fragilidade da argumentação e da interpretação dos alunos. Assim também é natural ouvirmos os alunos se referindo à Matemática como sendo uma matéria sem utilização prática, que é difícil, que basta decorar, e o senso comum confere-lhe este aval.

É fato que os alunos apresentam um déficit grande em relação à Matemática, e a comunidade escolar aceita sem contestações. Isso nos faz refletir sobre a importância da disciplina e a que se deve o fracasso desses alunos.

Pensando sobre isto é que se deu a escolha deste tema, acreditando que o estudo da Lógica por meio de atividades diversas pode auxiliar o desenvolvimento dos alunos na compreensão da Matemática e da realidade que os cerca sempre visando despertar o interesse pela disciplina, de forma que ele se envolva com o seu estudo de maneira agradável.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais algumas das características da Matemática são resolver situações-problema; desenvolver formas de raciocínio, como dedução, indução, intuição; saber argumentar sobre suas conjecturas que são importantes para que o estudante ao término do Ensino Médio possa dar continuidade aos seus estudos ou entrar no mercado de trabalho.

Segundo SILVEIRA [9], o professor de matemática quer ensinar os conteúdos, avaliar e promover o aluno à série seguinte mas elaboram provas difíceis, há reprovações e os alunos se tornam inimigos da Matemática. O caráter ideal da Matemática aparece claramente com Platão que supõe a existência do mundo das ideias, ou seja, a Matemática não descobre seus objetos por observação ou experimentação, ela utiliza o pensamento.

Assim, nosso trabalho tem por finalidade desenvolver nesses estudantes uma reflexão sobre o seu pensar, levando-os ao hábito de argumentar, interpretar e socializar seus pensares. Para isso, contextualizamos os conteúdos explorando o contexto pessoal e social vivenciado pelo alunado. Por meio de um processo de reflexão, conduzido pelo professor, o aluno vai perceber que o conhecimento desenvolvido pode ser aplicado em muitas situações de seu cotidiano. Progressivamente, esse aluno vai transformando suas respostas, conclusões e saberes.

Inicialmente relatamos alguns fatos importantes da histórica da Lógica que inicia-se com Platão. Aristóteles dá continuidade sendo o responsável por escrever os primeiros grandes trabalhos de lógica, Gottfried Wilhelm Leibniz propõe o uso de símbolos para mecanizar o processo de raciocínio dedutivo, e, por fim, George Boole e Augustus De Morgan propõem as bases da lógica simbólica moderna usando as ideias de Leibniz.

No segundo capítulo apresentamos as definições e teoremas sobre lógica proposicional, que é conhecida por sua formalidade, apesar de utilizar uma linguagem simples e, tem como base o princípio do terceiro excluído, que considera que cada sentença pode receber apenas um desses valores: verdade ou falsidade.

A fim de relacionar a Lógica com situações da realidade do aluno do ensino médio, no terceiro capitulo, propomos algumas atividade em grupos, utilizando uma metodologia onde a postura do aluno é de construtor do conhecimento e do professor como mediador.

E, por fim, perante uma proposta tão desafiadora, finalizamos o trabalho explanando algumas habilidades e competências que serão desenvolvidas e que poderão auxiliar enormemente no desenvolvimento de novos conteúdos matemáticos. Portanto, acreditamos que este pode ser mais um recurso a ser explorado por professores e alunos, visando um melhor desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem.

Capítulo 1

Um pouco da história

Seria possível aprender a pensar corretamente? O que torna o raciocínio certo ou errado? Para responder tais inquietações é que surge a Lógica, também chamada arte do raciocínio ou arte de pensar.

O surgimento da lógica se deu no ocidente como método de pensamento verdadeiro e sem contradição por meio da dialética platônica. Do grego *logos* significa linguagem-discurso e pensamento-conhecimento. O ponto inicial de seu desenvolvimento foi com os questionamento dos filósofos gregos Parménides (530-460 a.C.) e Heráclito (535-475 a.C), sobre as suas regras e seus critérios de uso e funcionamento.

Heráclito afirmava que a lógica e a verdade encontra-se na mudança das coisas que se realiza sob a forma de contradição, ou seja, todas as coisas mudam para seus contrários. A luta é a harmonia dos contrários e é responsável pela ordem racional do universo. Assim, o ponto central de seu pensamento consiste na idéias da unidade profunda que constitui a multiplicidade.

Já, Parmênides opunha-se e em sua doutrina a razão deve ser guiada de acordo com os princípios de não-contradição e de identidade com a finalidade de conhecer a Verdade. O Ser tem de ser idêntico a si mesmo para existir, ou seja, ele é imutável, não pode se transformar. É nesse momento que o princípio de não-contradição e de identidade surge na história da filosofia ocidental pois, a partir de Parmênides, pensamento e linguagem exigem identidade.

Pensando em escapar destes problemas de contradição — mudança — e identidade — permanência dos seres — Platão e Aristóteles (384-322 a.C.) oferecem duas soluções diferentes. Este trabalho tem por objetivo discorrer sobre a lógica que foi proposta por Aristóteles.

A dialética platônica é o exercício direto do pensamento e da linguagem. Nela ocorre a divisão — diaeresis — do conceito em lados opostos com a finalidade de se chegar a algo indivisível, onde a última divisão manifesta a essência do que se investiga. Aristóteles critica seu mestre, Platão, pois não acredita que essa dialética é um processo realmente lógico. Para ele a lógica é como um instrumento que antecede o exercício do pensamento e do discurso, ou seja, a lógica oferece os meios para que pensamento e discurso se realizem.

Utilizando estes pensares Aristóteles inicia um estudo para obter mais segurança na constituição da ciência e reduz a dialética a um exercício mental que gera uma probabilidade; não conseguindo atingir a verdade propriamente. Ele estava convencido que se estabelecesse princípios gerais adequadamente formulados, com as suas consequências corretamente deduzidas, as explicações só poderiam ser verdadeiras. Então estabelece normas de pensamento que permitam demostrações corretas e com isto se torna o criador da lógica formal.

A lógica de Aristóteles tinha um objetivo eminentemente metodológico. Tratava-se de mostrar o caminho correto para a investigação, o conhecimento e a demonstração científica. Suas constribuições para o surgimento e desenvolvimento da lógica foram inúmeras. Podemos ressaltar a separação da validade formal do pensamento e do discurso da sua verdade material; a identificação dos conceitos básicos da lógica; a introdução de letras mudas para denotar os termos; a criação de termos fundamentais para analisar a lógica do discurso: Válido, Não Válido, Contraditório, Universal, Particular.

Uma de suas principais obras sobre lógica o **Órganon** (Instrumento da Ciência) está dividido em: **Categorias**, escritos sobre uma teoria onde os objetos são classificados de acordo com o que se pode dizer significativamente acerca deles; **Da Interpretação** que são escritos sobre os juízos; **Primeiros Analíticos** que são escritos sobre o raciocínio (silogismo em geral); **Segundos Analíticos** que são escritos sobre a demonstração; **Tópicos** são escritos para orientar todos aqueles que tomam parte em competições públicas de dialética ou discussão; e **Refutações dos Sofistas** que é um manual para perceber erros argumentativos.

Durante a Idade Média, em especial durante o florescimento da escolástica (séculos XIII a XV) foram realizados notáveis progressos na lógica aristotélica e nesta mesma época ela era entendida como a ciência de todas as ciências. A lógica tornou-se mais sistemática e progressiva.

Nomes como de Duns Escoto, Guilherme de Occam, Alberto da Saxónia e Raimundo Lúlio, se destacaram neste período. R. Lúlio concebeu o projeto de mecanização da lógica dedutiva, ideia mais tarde desenvolvida por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). E é, também, neste período que o português Pedro Hispano escreve a *Summulae Logicals*, o tratado de lógica mais difundido em toda a Europa até ao século XVI.

Competia-lhe validar os atos da razão humana na procura da verdade. De acordo com o pensamento corrente no tempo, o saber científico tinha que obedecer à lógica formal. A partir de um conjunto de princípios universais admitidos como verdadeiros, por um processo dedutivo procurava-se encontrar a explicação para todos os fenomenos particulares. Embora este método fosse igualmente preconizado por Aristóteles, na Idade Média deu-se uma enorme importância à dedução, desvalorizando-se por completo a indução na descoberta científica. E a partir do século XVI a lógica aristotélica começa a ser questionada. Seus métodos dedutivos começam a ser postos em causa, com o chamado da ciência experimental. A partir do particular os cientistas procuram agora atingir o universal, e não o contrário, como preconizava a lógica aristotélica. Rompeu-se assim com os estudos seculares da lógica dedutiva e procurou-se fundamentar as regras do raciocínio indutivo.

A lógica formal entra num período de descrédito, devido às criticas de filósofos como Francis Bacon (1561-1626) e René Descartes (1596-1650). A principal obra de F. Bacon **Novo Organon**, indica desde logo a sua intenção de substituir o Organon aristotélico. Tratava-se de criar um novo método de investigação científica — o método indutivo-experimental. A principal contribuição está no fato de ter valorizado o papel da indução. A investigação científica devidamente conduzida era uma ascensão gradual indutiva, desde as correlações de baixo grau de generalidade até às de maior nível de generalidade.

Leibniz ocupa um lugar especial na história da lógica. Este filósofo procurou aplicar à lógica o modelo de calculo algébrico da sua época. Esta é concebida como um conjunto de operações dedutivas de natureza mecânica onde são utilizados símbolos técnicos. Era sua intenção submeter a estes cálculos algébricos a totalidade do conhecimento científico. Na sua obra Dissertação da Arte Combinatória, apresenta os princípios desta nova lógica:

1. Criação de uma nova língua, com notação universal e artificial;

2. Fazer o inventário das ideias simples e simbolizá-las de modo a obter um "alfabeto dos pensamentos"simples expressos em caracteres elementares;

3. Produzir ideias compostas combinando estes caracteres elementares;

4. Estabelecer técnicas de raciocínio automatizáveis, de modo a substituir o pensamento e a intuição, por um cálculo de simbolos.

O raciocínio torna-se, neste projeto de Leibniz, um cálculo susceptível de ser efectuado por uma máquina organizada para o efeito. Esta ideia irá inspirar até aos nossos dias não apenas o desenvolvimento da lógica, mas a criação de máquinas inteligentes.

Em meados do século XIX, opera-se na lógica uma verdadeira revolução. Diversos investigadores de formação matemática, irão conceber, não apenas uma nova linguagem simbólica, mas também uma forma de transformar a lógica numa álgebra. A lógica passou a ser vista como um cálculo, tal como a álgebra, visto que elas se fundam nas leis do pensamento humano. Os enunciados seriam atemporais, à semelhança das proposições matemáticas.

É atribuido a George Boole (1815-1864) a criação da lógica Matemática. Na sua obra *Mathematical Analysis of Logic*, publicada em 1847, a lógica foi pela primeira vez de uma forma consistente tratada como um cálculo de signos algébricos. Esta álgebra booleana será fundamental para o desenho dos circuitos nos computadores eletrônicos modernos. É ainda a base da teoria dos conjuntos. Outras das suas contribuições decisivas foi ter acabado com as restrições impostas à lógica desde Aristóteles, afirmando que existia uma infinidade de raciocínios válidos e uma infinidade de raciocínios não válidos. Ernest Schroder (1890-1895), nas suas **Lições sobre a álgebra lógica** deu a forma acabada à logica de Boole.

No final do século XIX os estudos da lógica matemática deram passos gigantescos, no sentido da formalização dos conceitos e processos demonstrativos. Entre os matemáticos e filósofos que mais contribuíram para os avanços destacam-se Gottlob Frege, Giuseppe Peano (1858-1932), Bertrand Russell (1872-1970), Alfred N. Witehead e David Hilbert. É nesta fase que são criados os seguintes sistemas lógicos: o calculo proposicional e o cálculo de predicados.

Gottlob Frege, cujas obras principais datam de 1879 e 1893, foi o primeiro a apresentar o cálculo proposicional na sua forma moderna. Introduziu a função proposicional, o uso de quantificadores e a formação de regras de inferência primitivas. Procurou em sintese criar todo um sistema capaz de transformar em raciocínios dedutivos todas as demonstrações matemáticas. Para isso todas as demonstrações foram traduzidas num vocabulário fixo - um certo conjunto de modos de tradução. Nesta notação, a construção de cada frase, o seu significado, e o modo como no raciocínio se deduziam os novos passos a partir dos anteriores, tudo devia ser devidamente explicitado. Com Frege passa-se da álgebra da lógica (matematização do pensamento) à logística (logicização das matemáticas) e mesmo ao logicismo (redução das matemáticas à lógica).

A lógica matemática caracteriza-se por ter construído uma linguagem artificial, simbólica, para representar o pensamento de uma forma unívoca. Cada simbolo possui apenas com um único significado. Esta linguagem possui as seguintes propriedades:

1. Não exige qualquer tradução numa linguagem natural;

2. A escrita é ideográfica (não fonética). As ideias são representadas por sinais;

3. A forma gramatical é substituída pela forma lógica .

Peano desenvolveu o sistema de notação empregado pelos lógicos e matemáticos e, demonstrou igualmente que os enunciados matemáticos não são obtidos por intuição, mas sim deduzidos a partir de premissas.

Russel procura desenvolver o projeto do logicismo, isto é, a redução das matemáticas à lógica. Na sua volumosa obra *Principia Mathematica*, escrita em colaboração com Whitehead, tornou-se a obra de referência da lógica matemática.

Após estas contribuições decisivas, os lógicos acabaram por se dividir quanto às relações entre a lógica e a matemática, tendo surgido três escolas:

1. Os logiscistas, que defendiam que a lógica era um ramo da matemática;

2. Os formalistas, que defendiam que ambas as ciências eram independentes, mas formalizadas ao mesmo tempo;

3. Os intuicionistas, para os quais a lógica era um derivado da matemática porque era axiomatizada.

Ao longo do século XX assistiu-se por um lado à generalização e diversificação dos estudos da lógica matemática, atingindo um elevado grau de formalização. A lógica possui atualmente um sistema completo de símbolos e regras de combinação de símbolos para obter conclusões válidas. Este fato tornou-a particularmente adaptada a ser aplicada à concepção de máquinas inteligentes.

A ideia de criar máquinas inteligentes não era nova. Desde o Renascimento que se tem procurado de forma sistemática conceber máquinas capazes de substituir o homem em certas tarefas.

Foi no século XVII que começou uma sucessão de notáveis investigações e invenções que iriam conduzir à inteligência artificial. As ideias filosóficas do tempo estimulavam estas descobertas. René Descartes, por exemplo, criou uma nova visão mecânica do Universo, inspirada no modelo de um relógio. As plantas como os animais eram simples máquinas criadas para executarem funções muito precisas. Se o corpo humano era uma máquina, a razão fazia operações que as máquinas não conseguiam, como a elaboração de cálculos matemáticos. Apesar disso, neste século apareceram as primeiras máquinas de calcular. Blaise Pascal, em 1642, inventa a primeira máquina de somar. Leibniz, em 1694, inventa uma calculadora que para além de somar, subtrair, podia multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas.

No século XVIII a visão mecânica do universo é acompanhada por uma verdadeira paixão pelas máquinas, sobretudo aquelas que fossem capazes de substituir o homem na realização de múltiplas tarefas físicas, mas também em operações mentais. Esta visão mecanicista é particularmente notória na obra de Julien Offray de La Mettrie (1709-1751), médico e filósofo. Após ter estudado as relações entre as faculdades mentais e os fenomenos corporais defendia que o pensamento era um produto da matéria cerebral.

As mesmas leis que regiam a matéria regiam o pensamento. O mecanicismo predominava na filosofia. Não é por acaso que esse tenha sido também o século da Revolução Industrial.

No século XIX, as ligações entre a lógica e a matemática vieram a demonstrar a possibilidade de conceber as operações mentais como simples cálculos, susceptíveis de serem executados por máquinas. A ideia vinha sendo explorada, como vimos, no domínio da tecnologia. Charles Babbage, em meados do século concebeu uma máquina analítica, cujas características antecipam os atuais computadores. No censo da população da Grã-Bretenha, em 1890, Herman Hollerith, concebe uma máquina que utiliza cartões perfurados (utilizados desde 1801, em teares mecânicos, por Joseph-Marie Jacquard). Esta máquina era capaz de separar, contar e catalogar os dados recolhidos.

Charles Babbage (1792 - 1871), concebeu, em 1834, uma máquina analítica que podia ser programada, utilizando cartões prefurados. Ela seria capaz de solucionar problemas matemáticos complexos, envolvendo uma série de cálculos independentes. Esta máquina tinha cinco características comuns aos atuais computadores:

1. Um mecanismo de entrada de dados (*input*), para fornecer à maquina a informação necessária para equacionar e resolver os problemas.
2. Uma memória para armazenar a informação.
3. Uma unidade de matemática para efetuar cálculos.
4. Uma unidade de controle para indicar à máquina quando devia utilizar a informação armazenada.
5. Uma unidade de saída de dados (*output*), para fornecer a resposta impressa.

Apesar dos notáveis avanços teóricos, a maquina de Babbage nunca passou de um projeto. A ideia contudo, inspirou muitos dos inventos posteriores.

É interessante constatar que em 1991, o Museu da Ciência de Londres, tenha construído, segundo os planos originais, uma calculadora projetada por Babbage entre 1847 e 1848. A máquina não funcionou de forma perfeita.

No século XX, os inventores de máquinas inteligentes tinham ao seu dispor uma ferramenta fundamental: uma lógica amplamente formalizada. As operações lógicas elementares foram rapidamente aplicadas nas novas máquinas. O primeiro computador totalmente automático, o IBM-Havard Mark 1, só se concretizou em 1944.

Dois anos depois, Eckert e Mauchly apresentam o ENIAC, um computador totalmente eletrônico. Em 1950, entra em funcionamento o EDVAC, concebido entre outros, por Von Neumann. Este computador tinha duas caracteristicas que se tornaram comuns aos futuros computadores: os programas memorizados e o sistema numérico binário (criado pelo matemático e lógico Boole). Os primeiros circuitos integrados práticos datam de 1959. Os microprocessadores foram inventados em 1969, no ano em que surgia a Internet. Começava então a revolução dos computadores.

A cibernética tem a sua origem nos anos trinta do século XX. A comunidade científica e filosófica debatia então com grande entusiasmo a questão das novas máquinas. Norbert Wiener teve então a ideia de criar uma ciência interdisciplinar para o estudo dos sistemas de controle e comunicação nos animais e nas máquinas (como se organizam, regulam, reproduzem, evoluem e aprendem). Um dos ramos mais importantes desta ciência tem sido a robótica- estudo e construção de máquinas inteligentes.

O desenvolvimento dos computadores acabou por conduzir à criação de uma nova ciência aplicada, a informática. Esta ciência dedica-se ao estudo do tratamento automático da informação que é fornecida a uma máquina a partir do meio exterior.

O desenvolvimento dos computadores acabou por impulsionar o aparecimento de uma nova ciência nos anos cinquenta, a inteligência artificial. Esta ciência aplicada dedica-se ao estudo da construção de máquinas capazes de simularem atividades mentais, tais como a aprendizagem por experiência, resolução de problemas, tomada de decisões, reconhecimento de formas e compreensão da linguagem. As linhas de investigação são essencialmente três: simulação das funções superiores da inteligência; modelização das funções cerebrais, explorando dados da anatomia, fisiologia ou até da biologia molecular; reprodução da arquitetura neuronal de um cérebro humano, de forma a produzir numa máquina condutas inteligentes.

Perante a enorme capacidade destas máquinas para armazenar e tratar a informação, desde os anos quarenta se coloca a questão das suas consequências para a sociedade, notadamente pelo poder que conferem aos grupos de individuos que controlam esta informação.

Apesar dos enorme avanços que produziu, a lógica aristotélica, tinha enormes limitações pois, assentava no uso da linguagem natural, e portanto, estava muitas vezes enredada nas confusões sobre o sentido das palavras e atribuia uma enorme importância ao estudo do silogismo e à consideração de enunciados que continham exatamente dois termos. Isto, mais tarde, se tornou um verdadeiro obstáculo para o avanço da ciência e por isso seus continuadores acabaram por reduzir a lógica ao silogismo.

Este capitulo é norteado pelas anotação de aulas de História da Matemática e nas interpretaçãoes de "Os Pensadores"[10], [11].

Capítulo 2

Introdução à Lógica

O estudo sobre lógica pode abranger vários contextos, o propósito deste trabalho é enfocar a Lógica Proposicional que é conhecida como a lógica formal. Sua base é o princípio do terceiro excluído, que considera que cada sentença pode receber apenas um desses valores: verdade ou falsidade. E utiliza-se de um linguagem simples, formada basicamente pelas formulas atômicas e conectivos (e, ou, não, se ... então, etc) e sem possuir os quantificadores (para todo e existe) .

Conhecida como a ciência que estuda as leis do raciocínio e as condições de verdade em vários dominíos do conhecimento. A lógica surge com dois propósito, segundo Rogério Fajardo [5] , o de formalizar as leis do pensamento que utilizamos constantemente para argumentar e chegar em conclusões corretas a partir de premissas dadas, e o de estabelecer uma linguagem mais apropriada para a matemática e a filosofia, para evitar armadilhas dos paradoxos.

E para alcançar estes propósitos, a formação de palavras e frases na lógica deve seguir regras claras e precisas, para que possamos limitar a linguagem e ter controle sobre ela.

O desenvolvimento da fundamentação teórica se baseou em ABAR [1], ALENCAR [2], DAGLIAN [4], NOLT e ROHATYN [8].

2.1 Sintaxe da Lógica Proposicional

A sintaxe da lógica são as regras que regem a composição dos textos em uma linguagem formal. A lógica adota como regras fundamentais do pensamento os seguintes axiomas:

Axiom 1. *(Princípio da Identidade) A é A. Uma coisa é o que é. O que é, é; e o que não é, não é. Esta formulação remonta a Parménides de Eleia.*

Axiom 2. *(Princípio da Não Contradição) Uma coisa não pode ser e não ser ao mesmo tempo, segundo uma mesma perspectiva. Ou seja, não posso dizer, por exemplo, que "A Carolina é e não é baiana". Em termos de proposições: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; uma proposição e sua negação não podem ser simultaneamente verdadeiras; e duas proposições contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras.*

Axiom 3. *(Princípio do Terceiro Excluído) Uma coisa deve ser, ou então não ser; não há uma terceira possibilidade (o terceiro é excluído). Em termos de proposições, temos os enunciados: uma proposição é verdadeira, ou então é falsa, não há outra possibilidade; se encararmos uma proposição e sua negação, uma é verdadeira e a outra é falsa, não há meio termo; e se duas proposições são contraditórias, se uma é verdadeira, a outra é falsa, se uma é falsa, a outra é verdadeira, não há meio termo.*

Desta forma, o conjunto dos símbolos que compõem a linguagem da lógica proposicional é chamado de **alfabeto** e é formado por:

1. **Proposições:** é todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. Ou seja, proposições são estruturas lingüísticas passíveis de serem julgadas verdadeiras ou falsas. Também chamadas de **fórmulas atômicas**, são representados por letras minúsculas, geralmente a partir da letra p: $p, q, r, s, \ldots$.

   Quando há muitas formulas atômicas e as letras são insuficientes, costuma-se usar a letra p indexada por um número natural: $p_0, p_1, p_{2,\ldots}$.

   Não são consideradas proposições as estruturas lingüísticas interrogativas ou imperativas, pois elas não são passíveis de serem julgadas verdadeiras ou falsas. Elas transmitem pensamentos, isto é, afirmam fatos ou expressam juízos que formamos a respeito de determinados entes.

2. **Conectivos lógicos**: São símbolos que permitem construir novas fórmulas a partir de outras. Mas devemos tomar cuidado pois o cálculo proposicional segue uma seguinte ordem de prioridade:

$\sim$	negação	(não)	**maior precedência**
$\wedge$	conjunção	(e)	**precedência intermediária**
$\vee$	disjunção	(ou)	**precedência intermediária**
$\rightarrow$	implicação	(se ... então)	**menor precedência**
$\longleftrightarrow$	equivalência	(se, e somente se)	**menor precedência**

   Esta ordem de precedência entre os conectivos tem a finalidade de permitir a identificação da forma da proposição composta. Assim,

$p \leftrightarrow q \rightarrow r$ é da forma bicondicional; a proposição $p \vee \sim q \rightarrow q \wedge r$ é da forma condicional, ao passo que, $p \vee (\sim q \rightarrow q \wedge r)$ é composta por disjunção. Portanto, a correta colocação dos parênteses, quando for necessário, é de extrema importância.

3. **Delimitadores:** São os parênteses, que servem para evitar ambiguidades na linguagem: (parêntese esquerdo e) parêntese direito.

Para dispor de forma correta o alfabeto da linguagem da lógica proposicional precisamos conhecer as regras que determinam quando uma sequência de símbolos do alfabeto formam expressões com significados.

As sequências formadas de acordo com essas regras são chamadas **fórmulas** e costuma-se designar por letras maiúsculas, quando necessário é indexado com números naturais e em alguns casos por letras gregas.

Regras de formação das fórmulas:

(i) Toda proposição é uma formula;

(ii) Se A é uma fórmula, $(\sim A)$ é uma formula;

(iii) Se A e B são fórmulas, (A∧B), (A∨B), (A→B) e (A⟷B) também são formulas;

(iv) Não há formulas além das obtidas pelo uso das regras 1, 2 e 3.

Quando dizemos que uma frase faz sentido, não queremos dizer que ela seja verdadeira. Uma frase bem estruturada na língua portuguesa, não deixa dúvida sobre o sentido. Porém, julgar se ela é verdadeira, possível ou um total absurdo, é outra questão que envolve a semântica da língua.

Na Lógica usa-se as regras 1, 2 e 3 para criar fórmulas tão complexas quanto precisarmos e a regra número 4 assegura que não existem mais fórmulas além daquelas que podemos construir com as regras anteriores.

Indução na complexidade da fórmula: Suponha que uma propriedade vale para toda fórmula atômica e que, toda vez que ela vale para fórmulas A e B, também vale para $(\sim A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \longleftrightarrow B)$. Então essa propriedade vale para todas as fórmulas da linguagem da lógica proposicional.

Subfórmulas: As fórmulas intermediárias, usadas no processo de construção de uma formula através das regras 1, 2 e 3, são chamadas de subfórmulas da fórmula em questão.

A cada fórmula é associado um número natural que chamaremos de **grau de complexidade da fórmula** que é determinado por um número natural conforme as seguintes regras:

(i) Uma fórmula atômica tem grau de complexidade 0;

(ii) Se A tem grau de complexidade n, a fórmula $(\sim A)$ tem grau de complexidade $n+1$;

(iii) Se A e B têm grau de complexidade n e m, respectivamente, então $(\sim A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \longleftrightarrow B)$ têm grau de complexidade $max\{n, m\} + 1$, onde $max\{n, m\}$ é o maior valor entre n e m.

Omissão de parênteses: o uso de parênteses evita ambiguidade na linguagem e é essencial para que o teorema da Unicidade de Representação das Fórmulas seja verdadeiro. Mas as vezes é omitido sem perder a clareza e sem ocasionar problemas na leitura. Para efeitos formais e onde exigir resultados matemáticos mais rigorosos, não se deve omitir os parênteses.

O significado dos elementos sintáticos da linguagem da lógica proposicional é determinado por uma função, denominada interpretação. Esta função associa a cada fórmula um valor verdade (verdadeiro ou falso), que pode ser representado por $\{0, 1\}$.

2.2 Sêmantica

A semântica associa um significado a cada objeto sintático, ou seja, quando se escreve uma fórmula, dependendo dos valores das suas proposições, esta fórmula pode ser verdadeira ou falsa.

2.2.1 Valoração

A valoração da lógica proposicional representa a semântica da língua portuguesa. É ela que atribui, a cada fórmula, um valor de verdadeiro ou falso. Mas, a verdade é um assunto difícil, sempre aberto e em constate debate, por isso inúmeras perspectivas:

1. Verdade como correspondêcia: esta é a posição clássica, formulada por Aristóteles; a verdade é o acordo, ou correspondência, do pensamento com a realidade.

2. Verdade como coerência: na medida em que as nossas opniões, conforme revelado na nossa comunicação com os outros, se revelam coerentes, podemos admitir que o mesmo é em geral verdadeiro.

3. Verdade como processo: é um processo contínuo, em que os diversos aspectos da verdade, por vezes contraditórios mas sempre necessariamente ligado entre si, se vão manisfestando. É uma visão dinâmica da verdade.

Definição 2.1. *Seja $\mathcal{L}$ a linguagem da lógica proposicional. Uma valoração é uma função V de $\mathcal{L}$ em $\{0,1\}$ (sendo que 0 significa falso e 1 significa verdadeiro) que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $V(\tilde{}A) = 1$ *se, e somente se,* $V(A) = 0$.

(ii) $V(A \wedge B) = 1$ *se, e somente se,* $V(A) = 1$ *e* $V(B) = 1$.

(iii) $V(A \vee B) = 1$ *se, e somente se,* $V(A) = 1$ *ou* $V(B) = 1$.

(iv) $V(A \rightarrow B) = 0$ *se, e somente se,* $V(A) = 1$ *e* $V(B) = 0$.

(vi) $V(A \longleftrightarrow B) = 1$ *se, e somente se,* $V(A) = V(B)$.

Para se compreender melhor a valoração das proposiões utilizamos os seguintes teoremas:

Teorema 2.2. *Seja v uma função cujo domínio é o conjunto das proposições, e cujo contradomínio é $\{0,1\}$. Então existe uma única valoração V tal que $V(p) = v(p)$, para qualquer proposição p.*

Demonstração: Definiremos V recursivamente sobre o grau de complexidade das fórmulas. Se A é uma fórmula de grau 0, então A é uma fórmula atômica, e definimos $V(A) = v(A)$. Seja $n > 0$ e suponha que temos definido $V(A)$ para toda fórmula A de grau menor que n. Seja C uma fórmula de grau n e vamos definir $V(C)$. Se C é da forma $\tilde{}A$, então A tem grau menor que n e, portanto, $V(A)$ está definida. Definimos, então, $V(C) = 1 - V(A)$. Se C é da forma $A \wedge B$, temos que A e B têm grau menor que n, e definimos $V(C) = 1$ se $V(A)$ e $V(B)$ são ambos iguais a 1, e 0 caso contrário. Assim, analogamente, definimos $V(C)$ de acordo com as condições da valoração, para os casos de C ser da forma $A \vee B$, $A \rightarrow B$ ou $A \longleftrightarrow B$. Sabemos que C tem uma e apenas uma dessas formas, o que faz com que essa definição seja boa. Provamos facilmente, por indução em n, que V é uma valoração e está bem definida em todas as fórmulas.■ □

2.2.2 Tabela-verdade

Para determinar os valores das proposições compostas precisamos conhecer os valores das proposições simples componentes isso se faz com base no seguinte princípio:

O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Assim, para aplicar esse princípio temos que recorrer a um dispositivo denominado tabela-verdade, onde colocaremos todos os possíveis valores lógicos da proposição composta correspondente a todas as possíveis atribuições de valores lógicos às proposições simples componentes.

Por exemplo, se uma proposição composta P é formada por duas proposições simples p e q então

Tabela 1: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p e q

	p	q
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Observa-se que os valores lógicos 1 e 0 se alteram de dois em dois para a primeira proposição p e de um em um para a segunda proposição q, e que, além disso, 00, 01, 10, 11 são os arranjos binários com repetição dos dois elementos 1 e 0.

Analogamente, observa-se que os valores lógicos 1 e 0 se alteram de quatro em quatro para a primeira proposição p, de dois em dois para a segunda proposição q e de um em um para a terceira proposição r, e que, além disso, 000, 001, $010, 011, 100, 101, 110$, 111 são os arranjos ternários com repetição dos dois elementos 1 e 0.

É a tabela-verdade que mostrará exatamente os casos em que a proposição composta será verdade (1) ou falsidade (0), conhecendo os valores lógicos das proposições simples.

Para se construir a tabela-verdade de uma proposição composta dada, procede-se da seguinte maneira:

1. Determina-se o número de linhas da tabela-verdade que se quer construir;

2. Observa-se a precedência entre os conectivos, isto é, determina-se a forma das proposições que ocorrem no problema;

3. Aplicam-se as definições das operações lógicas fundamentais que o problema exigir.

Número de linhas:

O número de linhas de uma tabela-verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a integram, sendo dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.3. *A tabela-verdade de uma proposição composta com* **n** *proposições simples componentes contém* 2^n *linhas.*

Demonstração: Com efeito, toda proposição simples tem dois valores lógicos: verdade (1) ou falsidade (0), que se excluem. Portanto, um proposição composta $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ por n proposições simples componentes $p_1, p_2, ..., p_n$ há tantas possibilidades de atribuição de valores lógicos verdade (1) ou falsidade (0) a tais componentes quanto são os arranjos com repetição de n a n dos dois elementos (1) e (0), isto é, $A_{2,n} = 2^n$, segundo ensina a Análise Combinatória. □

Valore lógicos das proposições simples:

Seja uma proposição composta $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ por n proposições simples componentes $p_1, p_2, ..., p_n$, sua tabela-verdade terá 2^n linhas. Posto isto, à primeira proposição simples p_1 atribuem-se $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ valores lógicos verdade (1), seguidos de 2^{n-1} valores lógicos falsidade (0); à segunda proposição simples p_2 atribuem-se $\frac{2^n}{4} = 2^{n-2}$ valores lógicos verdade (1), seguidos de 2^{n-2} valores lógicos falsidade (0), seguidos de 2^{n-2} valores lógicos verdade (1), seguidos de 2^{n-2} valores lógicos falsidade (0); assim por diante. De modo genérico, a k-ésima proposição simples $p_k (k \preceq n)$ atribuem-se alternadamente $\frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k}$ valores lógicos verdade (1) seguidos de igual número de valores lógicos falsidade (0).

No caso, por exemplo, de uma proposição composta por cinco (5) proposiçãos simples componentes, a tabela-verdade contém $2^5 = 32$ linhas, e os grupos de valores verdade (1) e falsidade (0) se alternam de 16 em 16 para a primeira proposição simples p_1, de 8 em 8 para a segunda proposição simples p_2, de 4 em 4 para a terceira proposição simples p_3, de 2 em 2 para a quarta proposição simples p_4 e de 1 em 1 para a quinta proposição simples p_5.

Dada várias proposições simples p, q, r, ... podemos combiná-las pelos conectivos lógicos $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ e construir proposições compostas. Então, vejamos as tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$ e $p \leftrightarrow q$ que permitem a construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta dada.

2.2.3 Semântica dos Conectivos Proposicionais

Os conectivos isoladamente não possuem significado. Abaixo, é descrito a intepretação de cada conectivo proposicional.

Negação ($\sim$):

É quando denota-se a proposição composta pelo modificador NÃO, representada por $\sim p$ e cuja leitura é não p. Nela sua valoração é $V(\sim p) = 0$ (falsidade) quando $V(p) = 1$ (verdade) e $V(\sim p) = 1$ (verdade) quando $V(p) = 0$ (falsidade). Assim, pode-se defini-la como:

Definição 2.4. *Chama-se **negação** de uma proposição p a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é a verdade* (1) *se p é falsidade* (0) *ou é falsidade* (0)*se p é verdade* (1).

O valor lógico da negação de uma proposição p é definido pela tabela-verdade:

Tabela 2: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p e $\sim p$.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

ou seja, pelas igualdades $\sim 1 = 0$ e $\sim 0 = 1$ e $V(\sim p) = \sim V(p)$.

Na linguagem comum a negação efetua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio "não"ao verbo da proposição dada. Ou ainda, antepor à proposição dada expressões tais como "não é verdade", "é falso que".

Conjunção ($\wedge$):

É quando ligamos duas proposições, representada simbolicamente por $p \wedge q$ e lê-se p e q. Pode-se defini-la como:

Definição 2.5. *Chama-se* ***conjunção*** *de duas proposições p e q a proposição representada por* ***"p e q"****, cujo valor lógico é a verdade* (1) *quando as duas proposições forem verdadeiras e é a falsidade* (0) *nos demais casos.*

O valor lógico da conjunção de duas proposições é definido pela tabela-verdade:

Tabela 3: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p, q e $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Assim, pelas igualdades: $0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$ e $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$.

Disjunção Inclusiva ($\vee$):

Também chamado de *disjunção inclusiva* ou *soma lógica*, este conectivo é denotado por $p \vee q$ e lê-se p ou q.

Definição 2.6. *A* ***disjunção inclusiva*** *de duas proposicões p e q é uma proposição falsa* (0) *quando as duas proposições são ambas falsas* (0) *e é verdadeira* (1) *nos demais casos, ou seja, quando pelo menos uma das duas proposições for verdadeira* (1)*.*

O valor lógico da disjunção é definido pela tabela-verdade:

Tabela 4: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p, q e $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Assim, pelas igualdades: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$, $1 \vee 1 = 1$ e $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$.

Disjunção Exclusiva ($\veebar$):

Na linguagem comum a palavra **ou** tem dois sentidos. Por exemplo, consideremos as duas proposições compostas:

P: Carlos é médico ou professor.
Q: Mario é baiano ou paulista.

Na proposição P indica-se que pelo menos uma das proposições "Carlos é médico", "Carlos é professor" é verdadeira, podendo ser ambas verdadeiras "Carlos é médico e professor". Mas na proposição Q somente uma das proposições "Mario é baiano", "Mario é paulista"é verdadeira, pois não é possível ocorrer "Mario é baiano e paulista".

Definição 2.7. *A **disjunção exclusiva** de duas proposições p e q é uma proposição falsa* (0) *somente quando as proposições p e q são ambas falsas* (0) *ou ambas verdadeiras* (1) *e nos demais casos é verdadeira* (1)*. O denotaremos por "$p \veebar q$"e lê-se "p ou q, mas não ambas".*

O valor lógico da disjunção exclusiva é definido pela tabela- verdade:
Tabela 5: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p, q e $p \veebar q$

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Assim, pelas igualdades: $0 \veebar 0 = 0$, $0 \veebar 1 = 1$, $1 \veebar 0 = 1$, $1 \veebar 1 = 0$ e $V(p \veebar q) = V(p) \veebar V(q)$.

Condicional ($\rightarrow$):

Este conectivo denota o conceito de necessidade. Indica o que é necessário para que o antecedente ocorra, ou seja, é um pré-requisito para que aconteça mas não é suficiente para garantir a veracidade do fato. Assim, podemos defini-lo como:

Definição 2.8. *Chama-se **proposição condicional** ou condicional uma proposição representada por "se p então q", cujo valor lógico é a falsidade* (0) *quando p é verdadeira* (1) *e q é falsa* (0)*, sendo verdadeira* (1) *nos demais casos.*

A proposição p é chamada *antecedente* e a proposição q é o *consequente* da condicional e o simbolo $\rightarrow$ é chamado de *símbolo de implicação.* Logo, representamos o condicional por $p \rightarrow q$ e lê-se "se p então q".

O valor lógico do condicional de duas proposições é definido pela tabela-verdade:

Tabela 6: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p, q e $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Assim, pelas igualdades $0 \rightarrow 0 = 1$, $0 \rightarrow 1 = 1$, $1 \rightarrow 0 = 0$ e $1 \rightarrow 1 = 1$ e $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$.

Portanto, uma condicional é verdadeira todas as vezes que o seu antecedente é uma proposição falsa.

Uma condicional $p \rightarrow q$ **não afirma** que o consequente q se **deduz** ou é **conseqüência** do antecedente p. Por exemplo:

$$7 \text{ é um número ímpar} \rightarrow \text{Brasília é uma cidade}$$
$$3 + 5 = 9 \rightarrow \text{SANTOS DUMONT nasceu na Amazônia}$$

As condicionais não estão afirmando, de modo nenhum, que o fato de "*Brasília ser uma cidade*" se **deduz** do fato de "*7 ser um número ímpar*" ou que a proposição "*SANTOS DUMONT nasceu na Amazônia*"é **conseqüência** do fato de que "$3 + 5 = 9$". O que uma condicional afirma é unicamente uma relação entre valores lógicos do antecedente e do consequente de acordo com a tabela-verdade.

Bicondicional ($\leftrightarrow$):

Este conectivo denota o conceito de suficiência. O seu conseqüente indica o que é suficiente para que o antecedente ocorra, ou seja, tudo que é necessário e assim consegue garantir a veracidade do fato. Podemos definí-lo como:

Definição 2.9. *Chama-se **proposição bicondicional** ou bicondicional uma proposição representada por "**p** se e somente se **q**", cujo valor lógico é a verdade* (1) *quando p e q forem ambas verdadeiras* (1) *ou ambas falsas* (0) *e é a falsidade* (0) *nos demais casos.*

Representamos simbolicamente por "$p \leftrightarrow q$" e lê-se de duas maneiras:

(i) p é condição necessária e suficiente para q

(ii) q é condição necessária e suficiente para p

O valor lógico da bicondicional de duas proposições é definido pela tabela-verdade:

Tabela 6: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p, q e $p \longleftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Assim, pelas igualdades $0 \leftrightarrow 0 = 1$, $0 \leftrightarrow 1 = 0$, $1 \leftrightarrow 0 = 0$ e $1 \leftrightarrow 1 = 1$ e $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$.

Portanto, a bicondicional é verdadeira somente quando as duas condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são ambas verdadeiras.

Há vários métodos de construção da tabela-verdade, vejamos alguns:

Exemplo 2.1. *Construir a tabela-verdade da proposição: $P(p, q) = \tilde{}(p \wedge \tilde{}q)$. Uma das formas de se resolver é formar, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes as duas proposições simples componentes **p** e **q**. Em seguida, formar a coluna do $\tilde{}q$, em seguida a coluna do $p \wedge \tilde{}q$. Por fim, formar a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta dada.*

p	q	$\tilde{}q$	$p \wedge \tilde{}q$	$\tilde{}(p \wedge \tilde{}q)$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Considerando que cada elemento de V corresponde um e somente um dos valores de $\{1, 0\}$, diremos que:

$$P(p, q) : V \rightarrow \{0, 1\}$$

ou seja, a tabela-verdade de $P(p, q)$ é uma aplicação de V em $\{0, 1\}$. O mesmo se dá com proposições compostas por um número maior de proposições componentes.

Exemplo 2.2. *Construir a tabela-verdade da proposição:*

$$P(p,q) = \tilde{}(p \wedge q) \vee \tilde{}(q \leftrightarrow p).$$

Procedendo de maneira analoga ao exemplo anterior, teremos:

p	q	$p \wedge q$	$\tilde{}(p \wedge q)$	$q \leftrightarrow p$	$\tilde{}(q \leftrightarrow p)$	$\tilde{}(p \wedge q) \vee \tilde{}(q \leftrightarrow p)$
0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

Exemplo 2.3. *Construir a tabela-verdade da proposição:*

$$P(p,q,r) = (p \vee \tilde{}r) \rightarrow (q \wedge \tilde{}r).$$

Teremos:

p	q	r	$\tilde{}r$	$p \vee \tilde{}r$	$q \wedge \tilde{}r$	$(p \vee \tilde{}q) \rightarrow (q \wedge \tilde{}r)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

No caso das três proposições componentes, temos:

$$\begin{array}{llll} P(000) = 0 & P(001) = 1 & P(010) = 1 & P(011) = 1 \\ P(100) = 0 & P(101) = 0 & P(110) = 1 & P(111) = 0 \end{array}$$

Fazendo $V = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$, *ou seja,* V *é um conjunto de todos os valores possíveis de serem assumidos pelas proposições componentes de* $P(p,q,r)$, *mediante raciocínio análogo ao caso de* $P(p,q)$, *temos:*

$$P(p,q,r) : V \rightarrow \{0,1\}$$

Então, a tabela-verdade de $P(p,q,r)$ *é um aplicação de* V *em* $\{0,1\}$.

Exemplo 2.4. *Construir a tabela-verdade da proposição:*

$$P(p,q,r) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r).$$

Teremos:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$(p \to r)$	$P(p, q, r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Neste caso, temos:

$$\begin{array}{llll} P(000) = 1 & P(001) = 1 & P(010) = 1 & P(011) = 1 \\ P(100) = 1 & P(101) = 1 & P(110) = 1 & P(111) = 1. \end{array}$$

Valor Lógico de uma Proposição Composta:

Dada uma proposição composta $P(p, q, r, ...)$, pode-se sempre determinar o seu valor lógico 1 ou 0 quando são dados ou conhecidos os valores lógicos respectivos das proposições componentes $p, q, r, ...$

Exemplo 2.5. *Sabendo que $V(p) = 1$, $V(q) = 0$ e $V(r) = 0$, determinar o valor lógico (1 ou 0) da proposição*

$$P(p, q, r) = (q \leftrightarrow (r \to \tilde{}p)) \vee ((\tilde{}q \to p) \leftrightarrow r).$$

Temos,

$$\begin{aligned} V(P(p, q, r)) &= (0 \leftrightarrow (0 \to \tilde{}1)) \vee ((\tilde{}0 \to 1) \leftrightarrow 0) \\ &= (0 \leftrightarrow (0 \to 0)) \vee ((1 \to 1) \leftrightarrow 0) \\ &= (0 \leftrightarrow 1) \vee (1 \leftrightarrow 0) \\ &= 0 \vee 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 2.6. *Sabendo que $V(r) = 1$, determinar o valor lógico (1 ou 0) da proposição $p \to \tilde{}q \vee r$.*

Como r é verdadeira (1), a disjunção $\tilde{}q \vee r$ é verdadeira (1). Logo, a condicional dada é verdadeira (1), pois, o seu consequente é verdadeiro (1).

Exemplo 2.7. *Sabendo que as proposições "$x = 0$" e "$x = y$" são verdadeiras (1) e que a proposição "$y = z$" é falsa (0), determinar o valor lógico (1 ou 0) da proposição $x \neq 0 \vee x \neq y \to y \neq z$.*

Temos, sucessivamente: $\tilde{}(1) \vee \tilde{}(1) \to 1 = 0 \vee 0 \to 1 = 0 \to 1 = 1$

2.3 Propriedades Semânticas

Aqui veremos quais são as relações obtidas no mundo semântico a partir das fórmulas da sintaxe. Seu estudo pode ser denominado **teoria dos modelos**.

2.3.1 Tautologia:

Na tautologia, percebe-se que a validade é muito mais que a veracidade, pois uma fórmula pode ser verdadeira em uma interpretação, mas não ser válida.

Definição 2.10. *Chama-se tautologia toda proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente com verdade, ou seja, com valor lógico* 1.

Em outras palavras, é toda proposição composta $P(p, q, r, ...)$cujo valor lógico é sempre a verdade 1 quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples $(p, q, r, ...)$. Pode ser chamadas de proposições logicamente verdadeiras.

De acordo com o **Princípio de Identidade** das proposições verifica-se que as proposições $p \rightarrow p$ e $p \leftrightarrow p$ são tautológicas. Já a proposição $\sim (p \wedge \sim p)$ é tautológica pelo **Princípio da Não Contradição** e a tabela verdade,

Tabela 7: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p e $\sim (p \wedge \sim p)$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
0	1	0	1
1	0	0	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Então, pode-se dizer que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa, simultaneamente, é sempre verdadeiro.

E a proposição $p \vee \sim p$ é tautológica pelo **Princípio do Terceiro Excluído** e segundo a tabela verdade,

Tabela 8: Tabela-Verdade com as valorações das proposições p e $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
0	1	1
1	0	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Podemos dizer que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.

Percebe-se, ainda, que toda implicação lógica corresponde a uma condicional tautológica e toda condicional tautológica corresponde a uma implicação lógica.

Princípio da Substituição para Tautologia:

Seja $P(p, q, r, ...)$ uma tautologia e $P_0(p, q, r, ...)$, $Q_0(p, q, r, ...)$, $R_0(p, q, r, ...)$, ... proposições quaisquer.

Como o valor lógico de $P(p, q, r, ...)$ é sempre verdade (1), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes $p, q, r, ...$, é óbvio que, substituindo p por P_0, q por Q_0, r por R_0, ..., na tautologia $P(p, q, r, ...)$, a nova proposição $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ também é uma tautologia. Segue que, para as tautologias existe o chamado **Princípio da Substituição**:

Se $P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia, então $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ também é uma tautologia quaisquer que sejam as proposições $P_0, Q_0, R_0, ...$.

2.3.2 Contradição:

Quando toda a proposição composta $P(p, q, r, ...)$ tem valor lógico igual a 0 quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples $(p, q, r, ...)$, denominamos como **contradição** ou **proposições logicamente falsas**. Portanto, podemos defini-la como:

Definição 2.11. *Chama-se contradição toda proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente com falsidade, ou seja, com valor lógico* 0.

Como toda tautologia é sempre verdadeira (1), a negação de uma tautologia é sempre falsa (0), ou seja, é uma contradição e como toda contradição é sempre falsa (0), a negação de uma contradição é sempre verdadeira (1), ou seja, é uma tautologia.

Portanto, se $P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia então $\tilde{}P(p, q, r, ...)$ é uma contradição, e se $P(p, q, r, ...)$ é uma contradição então $\tilde{}P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia.

Para as contradições vale uma "*Princípio da Substituição*" análogo ao que foi dado para as tautologias:

Se $P(p, q, r, ...)$ é uma contradição, então $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ também é uma contradição quaisquer que sejam as proposições $P_0, Q_0, R_0, ...$.

2.3.3 Contingência:

É toda proposição composta que não é nem uma tautologia e nem uma contradição. Pode ser chamadas de **proposições indeterminadas.**

Definição 2.12. *Chama-se contingência toda proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade figuram verdade* (1) *e falsidade* (0) *cada uma pelo menos uma vez.*

2.3.4 Relação de Implicação

Uma relação de implicação é determinada quando nas respectivas tabela-verdade de duas proposições $P(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...)$ não aparecer verdade (1) para $P(p,q,r,...)$ e falsidade (0) para $Q(p,q,r,...)$, ou seja, $P(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...)$ com valores lógicos simultâneos 1 e 0. Pode-se definí-la como:

Definição 2.13. *Diz-se que uma proposição* $P(p,q,r,...)$ ***implica logicamente*** *ou apenas implica uma proposição* $Q(p,q,r,...)$, *se* $Q(p,q,r,...)$ *é verdade* (1) *toda vez que* $P(p,q,r,...)$ *é verdadeira* (1).

Simbolicamente, representamos que a proposição $P(p,q,r,...)$ implica a proposição $Q(p,q,r,...)$ da seguinte forma:

$$P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...).$$

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

Devemos tomar muito cuidado para não confundir os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$, pois, enquanto, o primeiro representa uma operação entre proposições dando origem a uma nova proposição, o segundo indica apenas uma relação entre duas proposições dadas.

Propriedades: A relação de implicação lógica entre proposições goza das proporiedade **reflexiva (R)** e **transitiva (T)**, isto é, simbolicamente:

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{R}) & P(p,q,r,...) \Rightarrow P(p,q,r,...) \\
(\mathrm{T}) & \text{Se } P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...) \text{ e} \\
 & Q(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...), \text{ então} \\
 & P(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)
\end{array}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.8. *As tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$, $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$ são:*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

A proposição $p \wedge q$ é verdadeira (1) *somente na última linha e, nesta linha, as proposições $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$ também são verdadeiras* (1). *Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, isto é,*

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q \text{ e } p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

As mesmas tabelas-verdade também demonstram as importantes ***Regras de Inferência****:*
(i) $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ (Adição)
(ii) $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$ (Simplificação)

Exemplo 2.9. *A tabela-verdade da proposição $(p \vee q) \wedge \sim p$ é:*

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

Esta proposição é verdadeira (1) *somente na seguda linha e, nesta linha, a proposição q também é verdadeira* (1). *Logo, a implicação lógica denomina-se* ***Regras Modus Ponens*** *e é representada simbolicamente por:*

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q.$$

Exemplo 2.10. *As tabelas-verdade das proposições $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e $\sim p$ são:*

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

A proposição $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ é verdadeira (1) *somente na primeira e na última linha e, nestas linhas, a proposição $\sim p$ também é verdadeiras* (1). *Logo,* *a implicação lógica denomina-se **Regras Modus Tollens** e é representada simbolicamente por:*

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p.$$

As mesmas tabelas-verdade mostram que $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$.

Exemplo 2.11. *A condicional* $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ *é tautológica, pois, a última coluna da tabela-verdade encerra somente com verdade* (1)*, conforme vimos no Exemplo 2.4. Logo, a implicação lógica denomina-se **Regras do Silogismo Hipotético** e é representada simbolicamente por:*

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r).$$

Exemplo 2.12. *A condicional* $p \wedge \sim p \rightarrow q$ *é tautológica, pois, a última coluna da tabela-verdade encerra somente com verdade* (1)*:*

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

Logo, subiste a implicação lógica

$$p \wedge \sim p \Rightarrow q.$$

Assim, de uma contradição $p \wedge \sim p$ *se deduz qualquer proposição* q*, este é o chamado **Princípio da Inconsistência.***

Notoriamente, como toda implicação lógica corresponde a uma condicional tautológica e toda condicional tautológica corresponde a uma implicação lógica. Provemos:

Teorema 2.14. *A proposição* $P(p, q, r, ...)$ *implica a proposição* $Q(p, q, r, ...)$*, isto é,* $P(p, q, r, ...) \Rightarrow Q(p, q, r, ...)$ *se e somente se a condicional* $P(p, q, r, ...) \rightarrow Q(p, q, r, ...)$ *é tautológica.*

Demonstração: ***(i)*** *Se* $P(p, q, r, ...)$ *implica* $Q(p, q, r, ...)$*, então, não ocorre que os valores lógicos simultâneos destas duas proposições sejam respectivamente verdade* (1) *e falsidade* (0)*. E, por conseguinte, a última coluna da tabela-verdade da condicional* $P(p, q, r, ...) \rightarrow Q(p, q, r, ...)$ *encerra somente com verdade* (1)*, isto é, esta condicional é tautológica.*

(ii) *Reciprocamente, se a condicional* $P(p, q, r, ...) \rightarrow Q(p, q, r, ...)$ *é tautológica, isto é, se a ultima coluna da sua tabela-verdade encerra somente com verdade* (1)*, então, não ocorre que os valores lógicos simultâneos das* *proposições $P(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...)$ sejam respectivamente verdade (1) e falsidade (0). E, por conseguinte, a primeira proposição implica a segunda.*

Portanto, toda implicação lógica corresponde a uma condicional tautológica, e vice-versa. □

2.3.5 Relação de Equivalência

É a correspondencia entre duas proposições que possuem o mesmo valor de verdade, ou seja, se uma é verdadeira, a outra também será. Assim, se define como:

Definição 2.15. *Diz-se que uma proposição $P(p,q,r,...)$ é **logicamente equivalente** ou apenas equivalênte a uma proposição $Q(p,q,r,...)$, se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.*

Simbolicamente, representa que a proposição $P(p,q,r,...)$ é equivalente a proposição $Q(p,q,r,...)$ da seguinte forma:

$$P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$$

Em particular, se as proposições $P(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...)$ são ambas tautologias ou ambas contradição, então são equivalêntes.

Deve-se tomar muito cuidado para não confundir os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$, pois, enquanto, o primeiro representa uma operação entre proposições dando origem a uma nova proposição, o segundo indica apenas uma relação entre duas proposições dadas.

Propriedades:

A relação de equivalência lógica entre proposições goza das proporiedade **reflexiva (R)**, **simétrica (S)** e **transitiva (T)**, isto é, simbolicamente:

(R) $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(p,q,r,...)$
(S) Se $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$ então
$Q(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(p,q,r,...)$
(T) Se $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$ e
$Q(p,q,r,...) \Leftrightarrow R(p,q,r,...)$, então
$P(p,q,r,...) \Leftrightarrow R(p,q,r,...)$

Equivalências Notáveis:

Dupla Negação: As proposições$\sim\sim p$ e p são equivalentes, isto é, simbolicamente$\sim\sim p \Leftrightarrow p$.

Tabela 9: Tabela-Verdade com as valorações da relação de Dupla Negação.

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
0	1	0
1	0	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Regra de CLAVIUS: As proposições $\sim p \rightarrow p$ e p são equivalentes, isto é, simbolicamente $(\sim p \rightarrow p) \Leftrightarrow p$.

Tabela 10: Tabela-Verdade com as valorações da Regra de Clavius.

p	$\sim p$	$\sim p \rightarrow p$
0	1	0
1	0	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Regra de Absorção: As proposições $p \rightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$ são equivalentes, isto é, simbolicamente $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$.

Tabela 11: Tabela-Verdade com as valorações da Regra de Absorção..

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Leis Idempotentes: As proposições $p \vee p$ e $p \wedge p$ são equivalêntes a proposição p, isto é, simbolicamente $p \vee p \Leftrightarrow p$ e $p \wedge p \Leftrightarrow p$.

Tabela 12: Tabela-Verdade com as valorações das Leis Idempotentes.

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
0	0	0
1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Leis Comutativas: As proposições $p \vee q$ e $p \wedge q$ são equivalentes, respectivamente, as proposições $q \vee p$ e $q \wedge p$, isto é, simbolicamente $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ e $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

Tabela 13: Tabela-Verdade com as valorações das Leis Comutativas.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Leis Associativas: A proposição $p \vee (q \vee r)$ é equivalente a proposição $(p \vee q) \vee r$, isto é, simbolicamente $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$.

Tabela 14: Tabela-Verdade com as valorações das Leis Associativas.

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee q$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Analogamente, é possível verificar que a proposição $p \wedge (q \wedge r)$ é equivalente a proposição $(p \wedge q) \wedge r$, isto é, simbolicamente $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$.

Lei de De Morgan: A proposição $\sim (p \vee q)$ é equivalentes a proposição $\sim p \wedge \sim q$, isto é, simbolicamente $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
.

Tabela 15: Tabela-Verdade com as valorações da Lei de De Morgan.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Analogamente, é possível verificar que a proposição $\sim (p \wedge q)$ é equivalente a proposição $\sim p \vee \sim q$, isto é, simbolicamente $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

Leis Distributivas: A proposição $p \wedge (q \vee r)$ é equivalente a proposição $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, isto é, simbolicamente $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Tabela 16: Tabela-Verdade com as valorações das Leis Distributivas.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Analogamente, é possível verificar que a proposição $p \vee (q \wedge r)$ é equivalente a proposição $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$, isto é, simbolicamente $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Bicondicional: A proposição $p \leftrightarrow q$ é equivalente a proposição $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, isto é, simbolicamente $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Tabela 17: Tabela-Verdade com as valorações da Bicondicional.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Condicionais: As proposição $p \rightarrow q$ (condicional) e $q \rightarrow p$ (recíproca do condicional) são equivalêntes, respectivamente, as proposições $\sim q \rightarrow \sim p$ e $\sim p \rightarrow \sim q$, isto é, simbolicamente $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ e $q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$.

Tabela 18: Tabela-Verdade com as valorações da equivalência Condicional.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Fonte: Algebra de Boole [4], 1995.

Assim, pode-se concluir que toda equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica, e que toda bicondicional tautológica corresponde a uma equivalência lógica. Segundo o teorema:

Teorema 2.16. *A proposição $P(p,q,r,...)$ é equivalênte a proposição $Q(p,q,r,...)$, isto é, $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$ se e somente se a bicondicional $P(p,q,r,...) \leftrightarrow Q(p,q,r,...)$ é tautológica.*

Demonstração: ***(i)*** *Se as proposições $P(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...)$ são equivalentes, então, têm a tabelas-verdades idênticas. E, por conseguinte, o valor lógico da bicondicional $P(p,q,r,...) \leftrightarrow Q(p,q,r,...)$ é sempre verdade (1), isto é, esta bicondicional é tautológica.*

(ii) *Reciprocamente, se a bicondicional $P(p,q,r,...) \leftrightarrow Q(p,q,r,...)$ é tautológica, então, a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente com verdade (1). E, por conseguinte, os valores lógicos das proposições $P(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...)$ são ambos verdade (1) ou ambos falsidade (0), isto é, essas duas proposições são equivalêntes.*

Portanto, toda equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica, e vice-versa. □

Corolário 2.17. *Se $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$, então, também se têm $P(P_0,Q_0,R_0,...) \Leftrightarrow Q(P_0,Q_0,R_0,...)$ quaisquer que sejam as proposições $P_0,Q_0,R_0,...$.*

Exemplificando:

Exemplo 2.13. *A bicondicional* $(p\wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$, *onde* c *é uma proposição cujo valor lógico é sempre a falsidade* (0), *é tautológica, pois, a última coluna da tabela-verdade encerra somente com verdade* (1)*:*

p	q	c	$\sim q$	$p\wedge \sim q$	$p\wedge \sim q \rightarrow c$	$p \rightarrow q$	$(p\wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1

Portanto, as proposições $(p\wedge \sim q \rightarrow c)$ *e* $(p \rightarrow q)$ *são equivalente,isto é, simbolicamente* $(p\wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$*. Nesta equivalência consiste o* ***Método de demonstração por absurdo.***

Exemplo 2.14. *A bicondicional* $P(p,q,r) = (p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ *é tautológica, pois, a última coluna da tabela-verdade encerra somente com verdade* (1)*:*

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$P(p,q,r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Portanto as condicionais $(p \wedge q \rightarrow r)$ *e* $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ *são equivalêntes, isto é, simbolicamente* $(p \wedge q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$*.*

Esta importante equivalência lógica é denominada ***Regra de Exportação-Importação****.*

2.4 Argumento Válido

Sejam $P_1, P_2, ..., P_n$ $(n \geq 1)$ e Q proposições quaisquer, simples ou composta. Que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore p_{n+1} \end{array} \quad \text{ou } p_1, p_2, p_3, ..., , p_n, p_{n+1}$$

Definição 2.18. *Chama-se* ***argumento*** *a afirmação de que uma dada sequência finita $P_1, P_2, ..., P_n$ $(n \geq 1)$ de proposições tem como consequência uma proposição final Q.*

Designa-se as proposições $P_1, P_2, ..., P_n$ de **premissas** do argumento, e a proposição Q de **conclusão** do argumento. Um argumento de premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ e de conclusão Q indica-se por:

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$$

Pode-se ler das seguintes maneiras: $P_1, P_2, ..., P_n$ acarretam Q; Q decorre de $P_1, P_2, ..., P_n$; Q se deduz de $P_1, P_2, ..., P_n$; Q se infere de $P_1, P_2, ..., P_n$.

Um argumento que consiste de duas premissas e uma conclusão chamamos de **silogismo**.

Definição 2.19. *Um argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ diz-se válido se e somente se a conclusão Q é verdadeira* (1) *todas as vezes que as premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ são verdadeiras* (1)*.*

Portanto, todo argumento válido goza da seguinte propriedade característica:

A verdade das premissas é incompátivel com a falsidade da conclusão.

Denomina-se como **sofisma** um argumento não-válido. Assim, todo argumento que é válido (correto, legítimo) tem valor lógico verdadeiro (1) e todo argumento sofisma (incorreto, ilegítimo) tem valor lógico falsidade (0).

Exemplo 2.15. *Verifique se o argumento $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$ é válido:*

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Portanto, na primeira linha da tabela-verdade verifica-se que no caso em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Logo o argumento $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$ é válido.

Exemplo 2.16. *Verifique se o argumento $p \rightarrow q, \sim p \vdash \sim q$ é válido:*

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

Portanto, na terceira linha da tabela-verdade há um caso em que as premissas são falsas e a conclusão é verdadeira, logo o argumento $p \rightarrow q, \sim p \vdash \sim q$ é um sofismo.

A validade de um argumento depende exclusivamente da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto, podemos afirmar que um dado argumento é válido significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas são verdadeiras.

As tabelas-verdade podem ser usadas para demonstrar, verificar ou testar a **validade** de qualquer argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$. Para isso, deve-se construir a tabela com uma coluna para cada premissa e uma para a conclusão, e nela identificar as linhas em que os valores lógicos das premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ são todos verdadeiros (1) e o valor lógico da conclusão Q, também, é verdadeiro (1). A **não-validade** de um dado argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ consiste em encontrar uma atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes do argumento que tornem todas as premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ verdadeiras (1) e a conclusão Q falsa (0).

Teorema 2.20. *Um argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é tautológica.*
Demonstração: *Com efeito, as premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ são todas verdadeiras se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n$ é verdadeira. Logo, o argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ é válido se somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n$ é verdadeira, ou seja, se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n$ implica logicamente a conclusão Q: $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow Q$ ou, o que é equivalente, se a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é tautológica.* □

Portanto, a validade ou não-validade de um argumento depende apenas da sua forma e não de seu conteúdo ou da verdade e falsidade das proposições que o integram. Argumentos diversos podem ter a mesma forma, e como é a forma que determina a validade, é lícito falar da validade de uma dada forma ao invés de falar da validade de um dado argumento. E afirmar que uma dada forma é válida equivale a assegurar que não existe argumento algum dessa forma com premissas verdadeiras e uma conclusão falsa, isto é, todo argumento de forma válida é um argumento válido. Vice-versa, dizer que um argumento é válido equivale a dizer que tem forma válida.

Para verificar a validade de um argumento, procede-se da seguinte maneira:

1. Constrói-se a tabela-verdade de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n$;

2. Constrói-se a tabela-verdade de p_{n+1}.

3. Compara-se as tabelas: se na mesma linha ocorrer uma verdade (1) e uma falsidade (0), nesta ordem, não há implicação ($\nRightarrow$) e o argumento é **falho**; se na mesma linha não ocorrer uma verdade (1) e uma falsidade (0), nesta ordem, haverá implicação ($\Longrightarrow$) e o argumento é **válido**.

Definição 2.21. *Denomina-se **condicional associada** a um argumento quando dado qualquer argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ a este argumento corresponde a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ cujo antecedente é a conjunção das premissas e cujo consequênte é a conclusão.*

Reciprocamente, toda condicional corresponde um argumento onde as premissas são diferentes proposições e sua conjunção forma o antecedente e a conclusão é o consequente.

2.5 Regras de Inferência

Sabe-se que utilizar a tabela-verdade para verificar a **validade** ou a **não-validade** de qualquer argumento, é muito trabalhoso a medida que aumenta o número de proposições simples componentes dos argumentos. Um método mais eficiente é utilizar as *Regras de Inferência.*

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline Q \end{array}$$

As regras de inferências são os argumentos básicos usados para executar os passos de uma dedução ou demonstração. É habitual escrevê-las colocando as premissas sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão sob o mesmo traço.

Existem alguns argumentos válidos fundamentais, são eles:

1. **Adição (AD):** Dada uma proposição p, dela se pode deduzir a sua disjução com qualquer proposição (q). Simbolicamente $\dfrac{p}{p \vee q}$, cuja implicação é $p \Rightarrow p \vee q$.

2. **Simplificação (SIMP):** Da conjunção $p \wedge q$ de duas proposições se pode deduzir cada uma das proposições, p ou q. Simbolicamente $\dfrac{p \wedge q}{p}$, cuja implicação é $p \wedge q \Rightarrow p$.

3. **Conjunção (CONJ):** Permite deduzir de duas proposições dadas, p e q (premissas), a conjunção $p \wedge q$ ou $q \wedge p$ (conclusão). Simbolicamente $\dfrac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{p \wedge q}$, cuja implicação é $p, q \Rightarrow p \wedge q$.

4. **Regra da Absorção (RA):** Dada uma condicional $p \rightarrow q$ como premissa, dela deduzir como conclusão outra condicional com o mesmo antecedente p e cujo consequente é a conjunção $p \wedge q$ das duas proposições que integram a premissa. Simbolicamente $\dfrac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$, cuja implicação é $(p \rightarrow q) \Rightarrow p \rightarrow (p \wedge q)$.

5. **Modus Ponens (MP):** Também chamada de **Regra da Separação**, permite deduzir q (conclusão) a partir das premissas $p \rightarrow q$ e p. Simbolicamente $\dfrac{\begin{matrix} p \rightarrow q \\ p \end{matrix}}{q}$, cuja implicação é $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

6. **Modus Tollens (MT):** A partir das premissas $p \rightarrow q$ e $\sim q$ é possível deduzir como conclusão $\sim p$. Simbolicamente $\dfrac{\begin{matrix} p \rightarrow q \\ \sim q \end{matrix}}{\sim p}$, cuja implicação é $(p \rightarrow q) \wedge (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$.

7. **Silogismo Hipotético (SH):** Dada duas premissas $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$, condicionais onde o consequente da primeira coincide com o antecedente

da segunda, podemos deduzir outra condicional $p \rightarrow r$ (conclusão) cujo antecedente é o mesmo da primeira condicional e o consequente é o mesmo da segunda condicional. Simbolicamente $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$, cuja implicação é $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$.

8. **Silogismo Disjuntivo (SD):** A partir da disjunção $p \vee q$ e da negação $\sim p$ de uma delas é possível deduzir a outra proposição q. Simbolicamente $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q}$, cuja implicação é $(p \vee q) \wedge (\sim p) \Rightarrow q$.

9. **Dilema Construtivo (DC):** Nesta regra, as premissas são duas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes, e a conclusão é a disjunção dos consequentes das condicionais. Simbolicamente $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \end{array}}{q \vee s}$, cuja implicação é: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$.

10. **Dilema Destrutivo (DD):** Nesta regra, as premissas são duas condicionais e a disjunção da negação dos seus consequentes, e a conclusão é a disjunção da negação dos antecedentes das condicionais. Simbolicamente $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \sim q \vee \sim s \end{array}}{\sim p \vee \sim r}$, cuja implicação é $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p \vee \sim r$.

11. **Regras do Bicondicional (BIC):**

    (a) $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \end{array}}{p \leftrightarrow q}$. É a implicação $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Rightarrow p \leftrightarrow q$.

    (b) $\dfrac{p \leftrightarrow q}{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$. É a implicação $p \leftrightarrow q \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

12. **Dupla Negação (DN):** $\dfrac{\sim (\sim p)}{p}$ ou $\dfrac{p}{\sim (\sim p)}$. É a implicação $\sim (\sim p) \Rightarrow p$ ou $p \Rightarrow \sim (\sim p)$.

13. **Simplificação Disjuntiva (SD):** $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee r \\ p \vee \sim r \end{array}}{p}$. É a implicação $(p \vee r) \wedge (p \vee \sim r) \Rightarrow p$.

Capítulo 3

Roteiro das Atividades

3.1 Introdução

Atualmente quando se fala da Matemática com alunos é perceptível a dificuldade e o medo do fracasso pois, a própria sociedade já criou um preconceito e um distanciamento denominando-a de complexa e para poucos. Isso gera uma resistência nos alunos que não se preocupam em compreender a disciplina; eles perdem o interesse, a curiosidade e a confiança que são os pontos chaves para um bom desempenho.

Frente a essas dificuldades é necessário uma atitude, uma mudança de postura, tanto de professor como de aluno, para que o aprendizado se dê de forma significativa.

Aos professores competem o desenvolvimento de atividades coerentes com_a capacidade dos alunos, metodologias diversificadas que despertem o interesse e a curiosidade possibilitando assim, a construção de uma ponte entre o aluno e a Matemática que os façam sentirem-se capazes de enfrentar situações problema.

Para PIAGET [9] existem três tipos de conhecimento: o físico, o social e o lógico-matemático. Para o desenvolvimento lógico-matemático o aluno utiliza-se da abstração reflexiva, que é a construção de relações entre os objetos que ocorre a nível mental.

Percebe-se, então, que não basta passar o conteúdo: é preciso criar discussões, esclarecer dúvidas, provocar reflexões, mostrar as facilidades, levá-los a persistência nas resoluções, transformar as aulas em uma viagem ao conhecimento motivada pela busca do saber.

Segundo o PCNEM [3], aprender Matemática deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.

As atividades aqui propostas tem o intuito de desenvolver nos alunos esta busca pelo aprendizado por acreditar que o desenvolvimento da argumentação e do raciocínio lógico são fundamentais para que o aluno seja construtor do seu saber e reaprenda a pensar.

3.2 Objetivos

Devido a globalização e informatização do mundo os objetivos de aprendizagem passaram por mudanças significativas. O cidadão deve ser capaz de interpretar, analisar criticamente, tomar decisões, resolver problemas, desenvolver conhecimentos e valores.

Segundo PCNEM [3], no mundo atual as exigências mudaram, é possível perceber que qualquer área requer alguma competência em Matemática e que para se tornar um cidadão critico, atuante e prudente é preciso compreender conceitos e procedimentos matemáticos.

A Matemática tem duas finalidades: formativa, pois auxilia no desenvolvimento de pensamento e aquisição de atitudes; e instrumental, pois é composta por um conjunto de técnicas e estratégias que podem auxiliar outras áreas do conhecimento.

Desta forma, os objetivos a serem atingidos com esta proposta de atividade, de acordo com os PCNEM [3], são:

- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da Ciência na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidades;

- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espirito crítico e criativo;

- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;

- Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia.

Assim, essa proposta tem como objetivos específicos:

- Aprimoramento do educando como ser humano;
- Utilizar as formas de pensamento lógico nos diferentes âmbitos da atividade humana;
- Aplicar com desenvoltura e adequadamente as ferramentas matemáticas adquiridas em situações da vida diária;
- Resolver problemas matemáticos utilizando diferentes estratégias, procedimentos e recursos, desde a intuição até os algoritmos;
- A promoção da realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação;
- A aquisição de uma formação científica geral que permita o prosseguimento de estudos posteriores;
- Adotar metodologia de ensino e avaliação que estimulem a iniciativa dos alunos;
- Desenvolver a capacidade de questionar processos, apresentando interpretações e prevendo evoluções;
- Organizar os conteúdos, metodologias e formas de avaliação de maneira que ao final do Ensino Médio, o aluno demonstre o domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna e o conhecimento das formas contemporâneas de linguagem.

3.3 Ensino por Competências

O ensino por competência, ainda é algo novo e passa por estudos mas, é um modelo de ensino que combina conhecimentos, habilidades e atitudes. Nele o aluno se torna ativo, enfrenta os problemas e aprende a superá-los. Pode-se dizer que competência não é o que se ensina e sim o que se aprende, e esta aprendizagem é continua.

O trabalho por competência se dá em projetos didáticos, situações reais que envolvam várias disciplinas, trabalhar as diversas linguagens, compreender os fenômenos, tomar decisões, construir argumentos, intervir na realidade.

Para que sejam desenvolvidas as competências é preciso considerar diversos fatores ligados ao planejamento, entre eles a escolha de temas relativos ao conteúdo específico da disciplina, a análise dos recursos de ensino e os métodos de abordagem e o cuidado com os tempos de ensino e aprendizagem.

De acordo com os PCNEM[3] há três conjuntos de competências: comunicar e representar; investigar e compreender; e contextualizar social ou historicamente. De forma semelhante, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) [11] aponta cinco competências gerais: dominar diferentes linguagens, desde idiomas até representações matemáticas e artísticas; compreender processos, sejam eles sociais, naturais, culturais ou tecnológicos; diagnosticar e enfrentar problemas reais; construir argumentações; e elaborar proposições solidárias.

Desta forma, esta proposta foi desenvolvida no modelo de ensino por competências, trabalhando-se com as diversas linguagens, tomadas de decisões e construção de argumentos.

3.3.1 Conhecimentos

Conhecimento do latim *cognoscere* que significa ato de conhecer, é a informação ou noção adquirida pelo estudo ou experiência. Nele dois elementos são importantes: o sujeito que é o indivíduo capaz de adquirir conhecimento ou que possui a capacidade de conhecer; e o objeto é o que se pode conhecer.

Pode-se dizer que o conhecimento inclui, mas não está limitado a, descrições, hipóteses, conceitos, teorias, princípios e procedimentos que são úteis ou verdadeiros.

Ele pode ser aprendido como um processo, quando se refere a uma acumulação de teorias, ideias e conceitos onde surge como resultado dessa aprendizagem; ou como um produto, que é uma atividade intelectual através da qual é feita a apreensão de algo exterior à pessoa.

A definição clássica de conhecimento, originada de Platão, diz que ele consiste de crença verdadeira e justificada. Aristóteles divide o conhecimento em três áreas: cientifica, pratica e técnica. Geralmente consideramos o conhecimento como um ato da razão, pela qual encadeamos ideias e juízos, para chegar a uma conclusão, essa etapas compõe nosso raciocínio.

Neste trabalho visamos desenvolver alguns conhecimentos, são eles: argumentação, proposição, análise de imagem, implicação, equivalência, axioma e demonstração, silogismo, dedução e indução.

3.3.2 Habilidades

Habilidade é o grau de competência de um sujeito concreto frente a um determinado objetivo, seria um indicativo de capacidade, particularmente na produção de soluções para um problema especifico.

Na área da educação, habilidade é saber fazer; é a capacidade que o indivíduo tem de realizar algo como classificar, montar, calcular, ler, observar e interpretar.

Desta forma, as habilidades que devem ser desenvolvidas por esta proposta, de acordo com os PCNEM [3], são:

- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais;
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos;
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas e qualitativas;
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos;
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano;
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

Ainda, há algumas habilidades especificas de cada atividade que são:

- Compreender e utilizar variáveis;

- Inter-relacionar linguagens, arte e literatura;
- Compreender a diversidade da vida;
- Compreender os diferentes pontos de vista.

3.3.3 Atitudes

Atitude é uma norma de procedimentos que leva a um determinado comportamento, é a concretização de uma intenção ou propósito. Pode-se entender como o comportamento habitual que se verifica em circunstâncias diferentes.

3.4 Metodologia

A proposta é a construção do conhecimento com base em diferentes estratégias, tais como situações-problema, intepretação de gravuras, análises de textos e exercícios contextualizados.

Sendo assim, pretende-se que os alunos expressem suas idéias por meio da escrita ou do diálogo, desenvolva a organização do seu raciocínio com professor e colegas.

Optou-se pelo trabalho em pequenos grupos pois, a interação com os colegas desenvolve atitudes essenciais para a formação do indivíduo e favorece uma maior participação.

O professor deve dialogar com os alunos sobre o que é trabalhar em grupo; como ele espera que eles trabalhem, como podem ser as escolhas dos grupos, quais serão as normas para que o trabalho em grupo aconteça, durante as atividades como os grupos devem se portar. Deve permitir que eles questionem os pontos que os preocupam e manter uma postura confiante na capacidade dos alunos.

É importante que se planeje cada atividade e auxilie os alunos quando necessário, orientando-os a registrarem as conclusões a que chegarem e que se trabalhe com contextos práticos e com situações que não ofereçam apenas uma solução.

Tudo isso deve contribuir para que os alunos deixem de serem espectadores e tornem-se agentes no processo de aprendizagem. E o professor passa a ser um mediador e uma avaliador deste processo.

Sendo assim, o professor deve assumir os seguintes papeis:

- Provedor: fornecendo as informações necessárias que os alunos não tem maturidade para desenvolver sozinhos;

- Orientador: conduz e orienta os trabalhos em sala buscando a autonomia dos alunos;
- Incentivador: estimulando, motivando-os a refletir, investigar, trocar ideias.

Diante desta nova perspectiva é importante que o professor conheça o contexto social dos alunos, para poder selecionar situações-problema do cotidiano da turma.

Por fim, o professor deve se preocupar com a formação do aluno como cidadão.

3.5 Contrato didático

O contrato didático é um acordo entre aluno e professor de maneira que ambos tenham direitos e deveres, deve estar pautada por um conjunto de regras explicitas e clara onde é possível verificar as responsabilidades de cada um.

Se há a quebra das regras é necessário que haja mudanças na relação e novas configurações que surgem da ação e da reflexão do professor.

Pode-se entender, o contrato didático, como um instrumento de análise da relação professor, aluno e saber onde o saber se desenvolve se o professor estiver disposto a ensinar e o aluno a aprender.

Esta comunicação didática busca descobrir o que favorece ou impede o aluno de se desenvolver no processo de aprendizagem.

3.6 Descrevendo a atividade

Essas atividades são voltadas para os alunos do 1° ano do Ensino Médio: é proposto como primeiro conteúdo a ser ministrado pois, é preciso desmistificar que a Matemática só trabalha com números e contas. Os alunos precisam entender que a Matemática está além disso, e essas atividades vão "quebrar o gelo".

São nove atividades que da forma como foram organizadas levam o aluno, progressivamente, a construir/desenvolver os conceitos lógicos e a argumentação.

Cada atividade tem um cabeçalho com o conteúdo a ser desenvolvido, as competências, habilidades que se pretende desenvolver e o desenvolvimento de cada uma delas.

Nas duas primeiras aulas propõe-se que seja estabelecido com os alunos um contrato de convivência. O contrato deve conter as normas de desenvolvimento dos trabalhos, as saídas dos alunos da sala, as formas de avaliação, as horas de descanso, entre outros itens. A participação dos alunos na construção do contrato de convivência é importante para que eles realmente cumpram as normas.

É proposto a construção de um portfólio de cada grupo, para que ao final eles possam analisar o seu próprio desenvolvimento ao longo das atividades e possam socializar suas aprendizagens.

Atividade 1: ARGUMENTAÇÃO

A proposta desta atividade é familiarizar os alunos com a lógica e mostrar que ela está presente no nosso dia-a-dia. Seu tempo de duração estimado é de 150 minutos (3 aulas).

Inicialmente é proposto que o professor simule com os alunos algumas situações em que eles utilizam a expressão "É lógico!". Por exemplo: "Se chover, não precisamos regar a horta."; "Se o filme não fosse chato, eu não teria dormido no cinema"; "Se coloca primeiro a meia e depois o sapato".

Em seguida divide-se a sala em grupos de dois a três integrantes e distribua a cada grupo a atividade "A Lógica do Cotidiano e a Lógica Matemática" (apêndice).

Ao término da atividade, proponha que cada grupo apresente para a sala as suas respostas e explique a eles que:

- A argumentação na letra da música é **lógica**, pois relaciona de modo coerente as causas e as consequências;
- Argumentar é criar uma sequência de proposições que pretende levar a uma determinada conclusão;
- Podemos usar a lógica para verificar se uma argumentação é válida, coerente ou não;
- Mostre a eles que a lógica faz parte do seu cotidiano;
- A Lógica trata das formas de argumentação, da maneiras de encadear nosso raciocínio para justificar a partir de fatos básicos, nossas conclusões;
- A Lógica se preocupa com o que se pode ou não concluir a partir de certas informações.

Para finalizar, entregue para cada grupo uma cópia da problemática "Onde está a lógica? '(apêndice).

Desta forma, os alunos perceberão que entre a lógica da linguagem natural (dia-a-dia) e a lógica matemática existe uma forte relação. Na Matemática afirmações das mais simples às mais complexas são provadas com afirmações verdadeiras e que os símbolos matemáticos podem ser substituídos por palavras.

O professor pode utilizar como referência o primeiro capitulo deste trabalho que irá explanar de forma rápido como se deu o desenvolvimento da lógica até os dias atuais.

Pode-se propor como tarefa que os alunos pesquisem e montem um cartaz sobre "A Lógica de Aristóteles", focando em quem foi Aristóteles e quais foram suas contribuições para a Lógica.

Atividade 2: PROPOSIÇÕES

Na atividade anterior é sugerido a confecção de cartazes, se foram elaborados devem ser mostrados a sala explicando um pouco sobre a pesquisa que cada grupo fez e, se possível, fazer uma exposição na escola.

A proposta desta atividade é apresentar ou complementar a pesquisa sobre quem foi Aristóteles, quais foram as suas contribuições para a Lógica Matemática. Nela explica-se o que é uma proposição trabalhando a questão de verdade e falsidade, possibilitando o esclarecimento/desenvolvimento da integridade e do senso crítico.

Ao início da atividade, entregue a cada grupo a atividade "A lógica de Aristóteles" (apêndice), ela faz um breve relato sobre a história de Aristóteles além de explicar o conceito de proposição.

O tempo estimado é 200 minutos (4 aulas) e orienta-se que o professor entregue a primeira parte e dialogue com os alunos sobre o tema. Posteriormente, entregue a segunda parte para que resolvam.

Uma boa metodologia de correção é a oralidade onde os alunos podem participar assiduamente e o professor media o diálogo, conduzindo-os as respostas corretas.

Na seção 2.2 Semântica deste trabalho o professor encontrará a fundamentação teórica para auxiliá-lo no desenvolvimento desta atividade.

Para complementar esta atividade pode-se trabalhar com uma notícia e pedir aos alunos que verifiquem quais são os pontos questionáveis, criando um debate e até uma releitura da notícia. Ou ainda, sugerir a leitura do romance "As aventuras de Huckleberry Finn" do escritor norte-americano Mark Twain (pseudônimo de Samuel Langhorne Clemens), nele o protagonista, amigo de Tom Sawyer, vive inúmeras aventuras pelo rio Mississippi em uma balsa, é um livro que pode entreter os alunos além de contribuir para o hábito da leitura.

Atividade 3: IMAGEM LÓGICA

Diferente das outras, a atividade **Imagem Lógica** tem por objetivo chamar a atenção do aluno para a construção da imagem e sensibilizá-lo para analisar os vários aspectos da figura.

Cada uma das questões propostas leva a uma outra questão, exigindo do aluno atenção e concentração.

Alguns dos questionamentos que podem ser acrescentados em cada item são:

- Sabe-se onde é piso onde é parede?
- Os seres que estão de ponta cabeça não caem?
- As pessoas descem pelo mesmo lado da escada?
- É possível utilizar a mesma para descer em sentidos diferentes?
- O que são campos gravitacionais?
- É possível visualizar todos os campos gravitacionais propostos?
- O que diz a Teoria da relatividade?
- Como pode-se lidar com a indiferença? Há indiferença na sala?
- As regras são diferentes no mundo digital?

O intuito é permitir que eles pesquisem na biblioteca, no computador, enfim que eles busquem as respostas das perguntas e dos questionamentos que eles próprios possam vir a ter. Novamente, o professor tem um papel muito importante de mediador do saber, ele deve conduzir os alunos no caminho correto sem responder as questões. O tempo estimado desta atividade pode variar de acordo com o interesse dos alunos.

Para auxiliar o professor nesta atividade a seção 2.1 Sintaxe da Lógica Proposicional descreve a importância de se escrever de forma clara, tomando cuidado com as ambiguidades.

Atividade 4: IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA

Nesta atividade trabalha-se com a relação de implicação e equivalência, utilizando frases rotineiras mostra-se ao aluno o que é uma implicação e em seguida questiona-o sobre a equivalência. Estima-se um tempo de duração de 150 minutos (3 aulas).

A proposta é fazer uma divisão da atividade "São Equivalentes?" (Apêndice) em três partes: na primeira, o professor deve questioná-los se toda vez que a primeira afirmação for verdadeira, a segunda também será; na segunda mostrar que existem várias maneiras de se dizer a mesma informação, formalizando o conceito de equivalência; na terceira conduzir a resolução dos alunos por tentativa e erro.

Para auxiliar o professor nesta atividade a seção 2.2.3 Semântica dos Conectivos Proposicionais explica, por meio da tabela-verdade, cada um dos conectivos lógicos.

Como complementação é possível fazer uma brincadeira: escolhe-se um tema geral e cada grupo escreve uma frase a respeito do tema, essas frases são colocadas em uma urna em seguida cada grupo retira uma frase e desenvolve um desafio de implicação ou equivalência para os outros grupos. Desta forma os alunos se tornam professores e desafiadores dos próprios colegas, trabalhando o respeito mútuo.

Atividade 5: AXIOMA

Nesta atividade o tempo estimado é de 100 minutos (2 aulas) e seu objetivo é mostrar para os alunos os axiomas e algumas demonstrações matemáticas são simples.

A proposta é desafiar os alunos a demonstrar algumas propriedade operacionais que eles já conhecem, peça que eles expliquem para a sala, questione se há outras maneiras de se demonstrar. As demonstrações ajudam os alunos a entenderem os processos operatórios e, consequentemente, diminuem o número de erros.

O professor deve propor aos alunos um desafio: explicarem de maneira clara para a sala qual é o significado das palavras demonstração, teorema e axioma. Em seguida, citar alguns axiomas que são utilizados por eles e demonstrar um teorema de maneira simples e gradativamente ir exigindo deles demonstrações bem elaboradas. Este tipo de atividade auxilia muito no desenvolvimento da argumentação e do raciocínio lógico.

Um modelo desta atividade se encontra no apêndice: "Axiomas e Demonstrações".

Atividade 6: SILOGISMOS

Na atividade “Premissa e Conclusão” (apêndice), o tempo estimado é de 250 minutos (5 aula) e espera-se que o aluno desenvolva o senso crítico e a já utilize uma argumentação bem elaborada.

Inicialmente o professor deve mostrar aos alunos que a Lógica não se preocupa com a verdade ou a falsidade de uma proposição isolada, ela se preocupa com as formas de apresentar uma proposição como consequência de outras.

Num primeiro momento trabalha-se o conceito de premissa e conclusão além de mostrar sua classificação. Nessa etapa os alunos são convidados a identificar em algumas frases quais são as premissas e as conclusões, já utilizando os símbolos matemáticos.

A segunda etapa, utiliza-se de um poema onde os alunos identificam quais as premissas e as conclusõe, pode-se fazer um jogral onde as meninas falam as premissas e os meninos as conclusões. Em seguida é proposto o filme A lista de Schindler, direção de Steven Spielberg, que mostra o paradoxo de ter sido rodado em preto e branco e tendo como mote "Quem salva um vida, salva o mundo inteiro".

Na seção 2.4 Argumento Válido o professor encontrará uma explanação sobre premissas e conclusões. É importante entender que dialética é uma discussão entre opniões, onde a conclusão é obtida pelo argumento mais persuasivo. Ou seja, o silogismo dialético é aquele que se refere a coisas prováveis ou possíveis, que podem acontecer ou não acontecer, onde as premissas são prováveis se a conclusão também for.

Como complementação desta atividade pode-se propor um projeto interdisciplinar com a disciplina de História e Geografia com enfoque na Segunda Guerra e os campos de concentração.

Atividade 7: ARGUMENTOS VÁLIDOS

Na atividade “Questões do nosso cotidiano” (apêndice) é retomado o conceito de argumento explicando sua veracidade e falsidade. O tempo estimado é de 200 minutos (4 aulas).

Inicialmente propõe-se que os alunos analisem textos de jornais e afirmações matemáticas. Pode-se fazer uma pesquisa sobre fatos atuais instigá-los a pesquisarem sobre a veracidade dos fatos.

Em seguida é sugerido que eles usem a imaginação e coloquem-se na posição de um advogado. Neste momento seria interessante que assistissem ou simulassem um júri ou um debate. Deixe a cargo dos alunos a escolha do tema, quem é o advogado de defesa, promotor. O cargo do professor é de juiz intermediando os questionamento.

É interessante complementar a proposta explicando o conceito de tabela-verdade, dando alguns exemplos e a utilizando para verificar se a conclusão é verdadeira.

Para auxiliar o professor nesta atividade a seção 2.2.1 Valoração explica as inúmeras perspectivas a respeito da verdade, além de explicar a construção da tabela-verdade.

Atividade 8: DEDUÇÃO

A atividade "Detetive Sherlock Holmes" (apêndice) necessita ser planejada com antecedência pois, exige a leitura do romance policial Um estudo em Vermelho escrito por Arthur ConanDayle que relata a primeira história de Sherlock Holmes.

Inicialmente o professor dialoga com os alunos sobre dedução e propõe as atividades. Neste momento é preciso deixar que os alunos, por si só, percebam a importância de uma boa argumentação bem respaldada. Quando algum dos grupos não justificarem suas respostas, trabalhe individualmente de modo que eles compreendam a importância de uma boa argumentação. O tempo estimado desta atividade é de 100 minutos (2 aulas).

A seção 2.3 Propriedades Semânticas explana algumas relações que podemos utilizar para deduzir se um argumento é válido ou não.

Opcionalmente, o professor pode passar o filme de Sherlock Holmer e pedir que os alunos verifiquem quais as deduções apresentada.

Atividade 9: INDUÇÃO

As noções básicas da prova por indução são introduzidas por meio da atividade "A matemática e o cotidiano" (apêndice), partindo de questões do cotidiano e generalizando com o objetivo de dar significado a esse conteúdo. O objetivo é fazer com que os alunos percebam que podemos provar conceitos matemáticos de forma simples.

É estimado um tempo de 150 minutos (3 aulas). Inicialmente, o professor deve entregar a cada grupo a primeira folha desta atividade e dialogar com eles sobre o tema.

As demonstrações propostas trabalham com conceitos matemáticos de potenciação e soma de números racionais, se os alunos apresentarem dúvidas a respeito desses temas uma pausa nas atividades deve ser feita e o conteúdo retomado para que eles não fiquem desmotivados.

Na segunda parte, mostra-se como provar uma expressão matemática utilizando a redução ao absurdo. Propõe-se que os alunos trabalhem este conceito por meio do poema Dificuldade de Governar escrito por Bertolt Brecht, identificando os absurdos do texto e posteriormente são convidados a traduzirem o que o filósofo Nietzsche, crítico notório da idéia de ciência, faz em sua alegoria irônica “A gaia ciência” da forma como a contradição é tratada no reino do conhecimento. Isso proporciona ao aluno uma reflexão, uma construção de argumento e uma conclusão a respeito do assunto.

Fica a critério do professor propor aos alunos a prova de conceitos matemáticos por absurdo.

Conclusão

Os modelos de atividades desenvolvidas nesse trabalho constituem um material de ensino sob uma nova metodologia que não é comum no Ensino Médio, nível de ensino a que foram destinadas.

Tais atividades mostraram-se bastante eficazes em vários aspectos:

- Desenvolvimento da autonomia do aluno e melhoria da capacidade de tomar decisões;
- Sequências didáticas desenvolvidas permitem um crescimento gradual do aluno, indo do mais elementar para o mais difícil, sem saltos;
- Desenvolvimento da autoconfiança;
- Aluno se tornando agente no processo de aprendizagem;
- O ensino da lógica que não é proposto nos livros didáticos e pelo MEC;
- Permite ao professor uma compreensão e reflexão da sua atuação, tendo ampla visão dos pontos de maior dificuldade do aluno;
- Tornar as aulas mais dinâmicas;
- Promover a sociabilidade e o respeito mútuo.

A metodologia utilizada permitirá um melhor planejamento das aulas, possibilitando o remanejamento das atividades de acordo com as dificuldades apresentadas pelos alunos ou, mesmo, pelo interesse deles no assunto.

O cabeçalho presente nas atividades é um eficiente método para esclarecer ao aluno o que está sendo ensinado, o que se espera que ele desenvolva e quais são os critérios de avaliação.

Os objetivos, competência, habilidades e atitudes proposto devem ser atingidos ao final da aplicação das atividades, tornando o aluno próprio construtor do seu saber, além de um cidadão crítico e prudente.

Apêndice A
Modelo das Atividade

.

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática
Professor (a) Conteúdo: **Argumentação**			
Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos. **Habilidades**: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. **Critérios:** Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas			

Instrumento: A Lógica do Cotidiano e a Lógica Matemática ______ de _____________ de 20____

MÚSICA:

"Trem das Onze"

ANDONIRAN BARBOSA

Não posso ficar
Nem mais um minutos com você
Sinto muito, amor,
Mas não pode ser
Moro em Jaçanã
Se eu perder esse trem
Que sai agora, às 11 horas,
Só amanhã de manhã
E além disso, mulher,
Tem outra coisa:
Minha mãe não dorme
Enquanto eu não chegar!
Sou filho único,
Tenho minha casa para olhar.
Não posso ficar!

QUESTIONAMENTOS:

- Você conhece essa música?
- Sabe quem foi Andoniran Barbosa?
- Quais são os motivos que justificam a afirmação: "Não posso ficar!" ?

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Argumentação**

Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: ONDE ESTÁ A LÓGICA? ______ de _____________ de 20____

(ENEM/98). Leia e responda os testes abaixo observando o que já concluímos sobre argumentação.

A minha propriedade foi conseguida com muito sacrifício pelos meus antepassados. Não admito invasão. Essa gente não sabe de nada. Estão sendo manipulados pelos comunistas. Minha resposta será à bala. Esse povo tem de saber que a Constituição do Brasil garante a propriedade privada. Além disso, se esse governo quiser as minhas terras para a Reforma Agrária, terá de pagar, em dinheiro, o valor que eu quero. (Proprietário de uma Fazenda no Mato Grosso do Sul).

Sempre lutei muito. Minha família veio para a cidade porque fui despedido quando as máquinas chegaram lá na usina. Seu moço, acontece que eu sou um homem da terra. Olho pro céu, sei quando é tempo de plantar e colher. Na cidade não fico mais. Eu quero um pedaço de terra, custe o que custar. Hoje eu sei que não estou sozinho. Aprendi que a terra tem um valor social. Ela é feita para produzir alimento. O que o homem come vem da terra. O que é duro é ver que aqueles que possuem muita terra e não depende dela para sobreviver pouco se preocupam em produzir nela. (Integrante do Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem-Terra, de Corumbá – MS)

1. A partir da leitura do Depoimento 1, os argumentos utilizados para defender a posição do proprietário de terras são:
   I – A constituição do país garante o direito à propriedade privada; portanto, invadir terras é crime.
   II – O MST é um movimento político controlado por partidos políticos.
   III – As terras são o fruto do árduo trabalho das famílias que as possuem.
   IV – Este é um problema político e depende unicamente da decisão da Justiça.
   Estão corretas as proposições:
   (a) I, apenas.
   (b) I e IV, apenas.
   (c) II e IV, apenas.
   (d) I, II e III, apenas.
   (e) I, III e IV, apenas

2. A partir da leitura do Depoimento 2, quais os argumentos utilizados para defender a posição de um trabalhador rural sem-terra?
   I – A distribuição mais justa da terra no país está sendo resolvida, apesar de muitos ainda não terem acesso a ela.
   II – A terra é para quem trabalha nela e não para quem acumula como bem material.
   III – É necessário que se suprima o valor social da terra.
   IV – A mecanização do campo acarreta a dispensa de mão-de-obra rural.
   Estão corretas as proposições:
   (a) I, apenas.
   (b) II, apenas.
   (c) II e IV, apenas.
   (d) I, II e III, apenas.
   (e) I, III e IV, apenas

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Proposição**
Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: A LÓGICA DE ARISTÓTELES ______ de _____________ de 20____

Aristóteles, que viveu no século IV antes de Cristo, foi um pensador. Esse filósofo pode ser considerado o primeiro a se preocupar com o estabelecimento de regras para a argumentação. Ele fez um estudo minucioso de certos tipos básicos de argumentos, estabelecendo regras para distinguir os que são válidos daqueles que não o são. Estes últimos são chamados de falácias ou sofismas. Atualmente, quando fazemos declarações como "tal argumento é falacioso" ou "isto é um sofisma", queremos dizer que o argumento está mal construído, que a conclusão não é uma consequência das razões apresentadas.

Além dos argumentos falaciosos, existe ainda o problema das frases ambíguas, ou seja, frases que podem ser entendidas de mais de uma maneira.

Em seus estudos sobre a Lógica, Aristóteles procurou eliminar as frases ambíguas, trabalhando apenas com as que não deixassem dúvida quanto ao seu significado. Assim, em vez de dizer, por exemplo "Pássaros comem insetos" Aristóteles diria, mais especificamente "Todos os pássaros comem insetos", ou então, "Alguns pássaros comem insetos.

As sentenças assim formuladas foram chamadas de proposições categóricas e, segundo a classificação de Aristóteles, elas podem ser de quatro tipos:

Afirmação Universal: Todos os atletas são saudáveis
Afirmação Particular: Alguns atletas são saudáveis ou Existem atletas saudáveis
Negação Universal: Nenhum atleta é saudável
Negação Particular: Alguns atletas não são saudáveis ou Existem atletas não-saudáveis

Para julgar a validade ou não de um argumento é necessário que as sentenças que o constituem não tenham mais de um sentido. De acordo com Aristóteles, isto é possível se enunciarmos as sentenças na forma categórica.

DISSEMOS QUE ARGUMENTAR É CRIAR UMA SEQUENCIA DE PROPOSIÇÕES QUE PRETENDE LEVAR A UMA DETERMINADA CONCLUSÃO, OU SEJA:

Chamamos de ***proposição*** uma afirmação que possa ser classificada como verdadeira ou falsa. Ou seja, estamos atribuindo a elas um valor lógico **V** ou **F**.

Afirmações do tipo: Silêncio! Ou $3 \cdot 8 + 1$, não são proposições porque não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas.

Agora observe a expressão: $x + 3 = 8$

Seu valor lógico (V ou F) **depende** do valor de x	Se $x = 5$, $x + 3 = 8$ fica $5 + 3 = 8$, ou seja, a proposição é ***verdadeira.***
	Se $x = 2$, $x + 3 = 8$ fica $2 + 3 = 8$, ou seja, a proposição é ***falsa.***

A sentença "Flores têm espinhos" não permite que a classifiquemos como verdadeira (V) ou falsa (F). No entanto, se escrevermos:

- "*Todas* as flores têm espinhos" teremos uma proposição **falsa**;
- "*Algumas* flores têm espinhos" teremos uma proposição **verdadeira**.

É isso que faremos na matemática. Em vez de escrever apenas ?? $+ 3 = 8$, escreveremos: *Existe ?? tal que* ?? $+ 3 = 8$, o que torna a proposição verdadeira pois, existe ?? e seu valor é 5.

A matemática possui símbolos para substituir palavras, vejamos alguns:

Existe: $\exists$
Não existe: $\nexists$
Existe um único: $\exists!$
Todo ou qualquer: $\forall$

Esses símbolos são chamados de ***quantificadores*** e, como vimos, permitem classificar a proposição como falsa ou verdadeira.

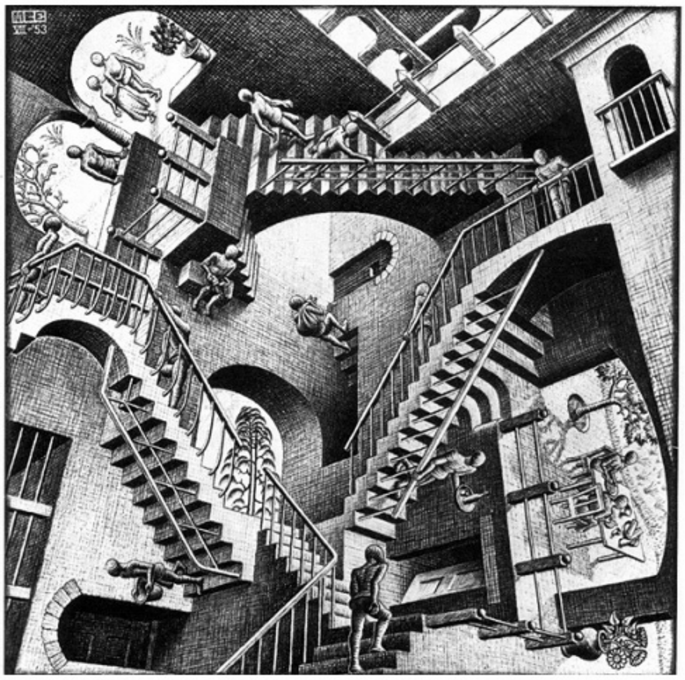
1. Verifique se as proposições são verdadeiras (V) ou falsas (F):
   (____) Salvador é a capital da Bahia.
   (____) $8 + 7 = 15$
   (____) $3 \cdot 5 = 12$
   (____) $3 + 1 > 2 + 1$
2. Leia as afirmações a seguir e assinale as que são proposições:
   (a) El salvador vota para escolher
   (b) $2 < 3 < 4$
   (c) O som das trilhas sonoras no palco.
   (d) $\frac{1}{5} + 3$
   (e) Atenção, atenção.
   (f) Ruth Rocha lança três livros na Bienal.
3. Acrescente um quantificador a cada expressão, de forma a torna-la uma proposição verdadeira:
   (a) $x + 1 = 7$ ______________________________
   (b) $3x + 8 = -1$ ______________________________
   (c) Cães são ferozes ______________________________
   (d) $x^2 < 0$ ______________________________
   (e) $x + 1 > 3$ ______________________________
4. Atribua um valor lógico a cada proposição:
   (_____) $\forall x, x^2 \geq 0$
   (_____) $\exists!\, x \mid x + 8 = 9$
   (_____) $\forall x, x < 2$
   (_____) $\exists!\, x | x^2 = 9$
   (_____) $\exists x | x + 5 > -1$
5. O trecho a seguir foi extraído do livro *As aventuras de Huckleberry Finn*, de Mark Twain. Nele, o personagem Huck Finn afirma:
   "Jim disse que as abelhas não picariam idiotas; mas eu não acreditei nisso, porque eu mesmo já tentei muitas vezes e elas não me picaram."
   Trata-se de um argumento. Qual é a conclusão dele? Quais são as sentenças?
   Note que o texto representa uma brincadeira do autor. Há uma sentença sobre Huck Finn que é mantida implícita, ou seja, que é admitida mas não está escrita. Qual é?

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Lógica em Imagem**
Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: A GRAVURA DE ESCHER ______ de ______________ de 20____

OBSERVE A GRAVURA DE ESCHER E REFLITA SOBRE AS QUESTÕES ABAIXO:



RELATIVIDADE, *LITOGRAFIA DE* M. C. ESCHER, *1953.*

1. A imagem tridimensional contraria nossas expectativas e nos intriga, desafiando nossas concepções das relações espaciais. À primeira vista, que relações espaciais não obecedem a princípios lógicos?
2. Escher propõe ao espectador uma espécie de jogo em que as leis da gravidade não se aplicam. Observe atentamente a gravura e tente visualizar:
   (a) Os dois persanagens na escada que fica no alto da gravura estão quase lado a lado. Que movimento fazem, em que direção e como utilizam a escada?
   (b) O que acontece nas escadas laterais? Como as pessoas se movimentam?
3. No mundo representado nessa gravura, coexistem três campos gravitacionais, perpendiculares entre si. Você saberia identifica-los?
4. Como são as pessoas que habitam esse mundo criado por Escher? Como elas se relacionam?
5. Há espaços abertos para o exterior nessa construção arquitetônica? A que planos eles pertencem?
6. Reflita sobre o nome da gravura (*Relatividade*). Por que o artista teria escolhido esse nome?
7. O que se vê na figura parece impossível na realidade. No entanto, você imagina essa realidade possível no mundo digital? Quando essa obra foi criada, em 1953, já existiam ambientes virtuais?

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Implicação e Equivalência**

Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: SÃO EQUIVALENTES? ______ de _____________ de 20____

LEIA COM ATENÇÃO AS FRASES:

- SE LUÍZ É MÉDICO, ENTÃO ELE PODE RECEITAR UM REMÉDIO CONTRA GRIPE.
- SE HOUVER RECESSÃO, ENTÃO TEREMOS DESEMPREGO.
- SE $a = b$, ENTÃO $a + 1 = b + 1$.

OBSERVE QUE EM TODAS ESSAS FRASES TEMOS AS PALAVRAS **SE** E **ENTÃO** COLOCADAS DE FORMA QUE:

SE...	**ENTÃO...**
a primeira afirmação for verdadeira,	a segunda afirmação também será.

A SEGUNDA AFIRMAÇÃO É UMA *CONSEQUÊNCIA* DA PRIMEIRA.

A PRIMEIRA AFIRMAÇÃO *IMPLICA* A SEGUNDA, OU AINDA, A PRIMEIRA AFIRMAÇÃO É UMA *CONDIÇÃO* PARA A SEGUNDA.

VEJA ALGUMAS PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS:

Se $x = 7$, então $x^2 = 49$ (V)
$x = 7 \Rightarrow x^2 = 49$ (V)

O símbolo $\Rightarrow$ indica a IMPLICAÇÃO

Qualquer a e b, se $a > b$, então $a + 1 > b + 1$ (V)
$\forall\, a, b, \quad a > b \;\Rightarrow\; a + 1 > b + 1$ (V)

EQUIVALÊNCIA ENTRE PROPOSIÇÕES:

Você acha que: $a = b$ e $b = a$ são proposições equivalentes? E as proposições: “Ana é filha de Paulo” e “Paulo é pai de Ana”, são equivalentes?

O símbolo de equivalência é $\Leftrightarrow$ e lê-se “se e somente se”. A equivalência $A \Leftrightarrow B$ só é verdadeira se forem verdadeiras as duas implicações: $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$.

Por exemplo:

A: O polígono ABCD é um quadrado
B : O polígono ABCD é uma quadrilátero

são equivalentes? Verifique.

VERIFIQUE SE SÃO VERDADEIRAS AS EQUIVALÊNCIAS:

- $\forall a, b \quad a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$
- $\forall x \quad x > 0 \Leftrightarrow x > 5$
- $\forall x \quad 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Axioma**

Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: AXIOMAS E DEMONSTRAÇÕES ______ de ____________ de 20____

IZEMOS QUE, NA MATEMÁTICA, PROPOSIÇÕES SÃO LOGICAMENTE DEMONSTRADAS A PARTIR DE ALGUMAS AFIRMAÇÕES INICIAIS CONSIDERADAS VERDADEIRAS, QUE SERÃO O PONTO DE PARTIDA PARA A CONSTRUÇÃO DE UMA TEORIA.

ESSAS AFIRMAÇÕES SÃO CHAMADAS AXIOMAS OU POSTULADOS. PARA QUE VOCÊ POSSA VER COMO ISSO FUNCIONA, VAMOS ENUNCIAR ALGUNS AXIOMAS RELATIVO AOS NÚMEROS INTEIROS E, A PARTIR DELES, DEMONSTRAR OUTRAS PROPOSIÇÕES.

CONSIDERE QUE $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ E $\boldsymbol{c}$ SÃO NÚMEROS INTEIROS.

1. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DA ADIÇÃO: $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. ELEMENTO NEUTRO DA ADIÇÃO: $a + 0 = a$
3. EXISTÊNCIA DO ELEMENTO OPOSTO: $a + (-a) = 0$
4. PRPRIEDADE COMUTATIVA DA ADIÇÃO: $a + b = b + a$

A PARTIR DESSES QUATRO AXIOMAS, ACEITAMOS COMO VERDADEIROS SEM DEMONSTRAÇÃO, PODEMOS DEMOSTRAR OUTRAS PROPRIEDADES. VEJA UMA DELAS:

SE $a + b = a + c$, ENTÃO $b = c$.

Podemos somar $(-a)$ a ambos os membros da igualdade $a + b = a + c$.

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$$

Usanso o axioma I,

$$[(-a) + a] + b = [(-a) + a] + c$$

mas $(-a) + a = a + (-a) = 0$, de acordo com os axiomas 2 e 3.

Então $0 + b = 0 + c$, o que pelo axioma 2 resulta em $b = c$.

DEPOIS QUE UMA PROPRIEDADE É DEMONSTRADA, ELA PODE SER UTILIZADA PARA DEMONSTRAR OUTRAS PROPRIEDADES.

VOCÊ PODE ESTAR PENSANDO: *"PARA QUE DEMONSTRAR O ÓBVIO?"*. PORQUE ESTRUTURANDO CORRETAMENTE AS BASES, TODA A MATEMÁTICA PODERÁ SER CONSTRUÍDA SOBRE ELA!

- DEMONSTRE USANDO OS AXIOMAS DADOS QUE SE $a + b = 0$, ENTÃO $a = -b$.
- PESQUISE SOBRE GUISEPPE PEANOS E COMO FOI A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS.

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Silogismo**

Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: PREMISSAS E CONCLUSÃO ______ de _____________ de 20____

ARISTÓTELES TENTOU SISTEMATIZAR AS REGRAS LÓGICAS E DEDICOU ATENÇÃO ESPECIAL A UM TIPO DE ARGUMENTO, COM DUAS PROPOSIÇÕES INICIAIS E UMA CONCLUSÃO. VEJA:

Premissas:	• Alguns alemães são loiros. • Todos os alemães são europeus.	• Alguns médicos são poliglotas. • Alguns professores são poliglotas.
Conclusão:	○ Alguns europeus são loiros.	○ Alguns médicos são professores.

AS PROPOSIÇÕES INICIAIS SÃO CHAMADAS DE PREMISSAS. ELAS SERVEM DE BASE PARA CHEGAR À TERCEIRA PROPOSIÇÃO, QUE É A CONCLUSÃO DO ARGUMENTO. UM ARGUMENTO ASSIM FORMADO É UM EXEMPLO DE SILOGISMO.

Todo A é B e Todo B é C $\Rightarrow$ Todo A é C

CERTOS SILOGISMOS CONSTITUEM ARGUMENTOS BEM CONSTRUPIDOS, ENQUANTO OUTROS SÃO SOFISMAS OU FALÁCIAS. ARISTÓTELES CLASSIFICOU OS SILOGISMOS, ESTABELECENDO REGRAS PARA DISTINGUIR OS QUE SÃO VÁLIDOS DOS QUE NÃO O SÃO. UMA DESSAS REGRAS DIZIA, POR EXEMPLO, QUE "DE DUAS PREMISSAS AFIRMATIVAS NÃO SE PODE OBTER UMA CONCLUSÃO NEGATIVA".

UM ARGUMENTO É FORMADO POR DUAS OU MAIS PROPOSIÇÕES, MAS NEM TODA REUNIÃO DE PROPOSIÇÃO É UM ARGUMENTO. PARA HAVER UM ARGUMENTO, É NECESSÁRIO QUE UMA DAS PROPOSIÇÕES, QUE É A CONCLUSÃO, SEJA APRESENTADA COMO CONSEQUÊNCIA NECESSÁRIA DA OUTRA OU DAS OUTRAS, QUE SÃO CONSIDERADAS AS PREMISSAS.

Examine os textos a seguir, indicando quais constituem argumentos. Em caso de afirmativo, indique qual das frases é a conclusão.

(A) Xixa gosta das crianças e os pais das crianças gostam de Xixa.
(B) Ontem choveu, hoje choveu; logo, amanhã choverá.
(C) Joaquim é português; sua mulher é brasileira e seu filho estuda engenharia.
(D) Joaquim certamente fez curso superior, pois ele é médicos e médico são formados em faculdades de medicina.
(E) Algum desconhecido chegou ao meu portão, pois meu cachorro está latindo e ele só late diante de desconhecidos.
(F) Amanhã deverá fazer sol, porque o serviço de meterologia previu muita chuva e ele sempre erra as previsões.
(G) Amanhã vai chover e eu irei ao trabalho.
(H) Penso muito na vida.
(I) Penso, logo existo.
(J) Todos os patos nadam, mas apenas alguns gorilas sabem nadar

Identifique as premissas e a conclusão no poema de Manuel Bandeira (1886-1968)

Vou-me embora pra Pasárgada

Vou-me embora para Pasárgada
Lá sou amigo do rei
Lá tenho a mulher que eu quero
Na cama que escolherei
Vou-me embora para Pasárgada
Vou-me embora para Pasárgada
Aqui eu não sou feliz
Lá a existência é uma aventura
De tal modo inconseqüente
Que Joana, a Louca da Espanha
Rainha e falsa demente
Vem ser contraparente
Da nora que nunca tive

E como farei ginástica
Andarei de bicicleta
Montarei em burro brabo
Subirei no pau-de-sebo
Tomarei banhos de mar!
E quando estiver cansado
Deito na beira do rio
Mando chamar a mãe d`água
Para me contar as histórias
Que no tempo de eu menino
Rosa vinha me contar
Vou-me embora para Pasárgada

Em Pasárgada tem tudo
É outra civilização
Tem um processo seguro
De impedir a concepção
Tem teledone automático
Tem alcalóide à vontade
Tem prostitutas bonitas
Para a gente namorar

E quando eu estiver mais triste
Mas triste de não ter jeito
Quando de noite me der
Vontade de me matar
– Lá sou amigo do rei –
Terrei a mulher que eu quero
Na cama que escolherei
Vou-me embora para Pasárgada

BANDEIRA, Manuel. *Estrela da vida inteira.* Rio de

- Grosso modo, todo filme é um silogismo dialético, no sentido que se trata de um discurso por meio de diálogos, imagens, trilha sonora e efeitos de luz que busca persuadir o espectador, trocar suas emoções e paixões.
  Assista ao filme *A lista de Schindler* (EUA, 1993), direção de Steven Spielberg, leva ao paroxismo esses aspectos. Rodado em preto e branco e tendo como mote a frase do Talmud, "Quem salva uma vida, salva o mundo inteiro", retrata o episódio em que o ex-militar polonês Oskar Schindler, um homem de negócios bem-sucedido na Polônia das décadas de 1930 e 1940, salva a vida de mais de mil judeus poloneses, seus empregados, do campo de concentração durante a Segunda Guerra.
  Faça uma relação de premissas e conclusão dos fatos do filme.

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Argumento Válido**

Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: QUESTÕES DO NOSSO COTIDIANO ______ de _____________ de 20____

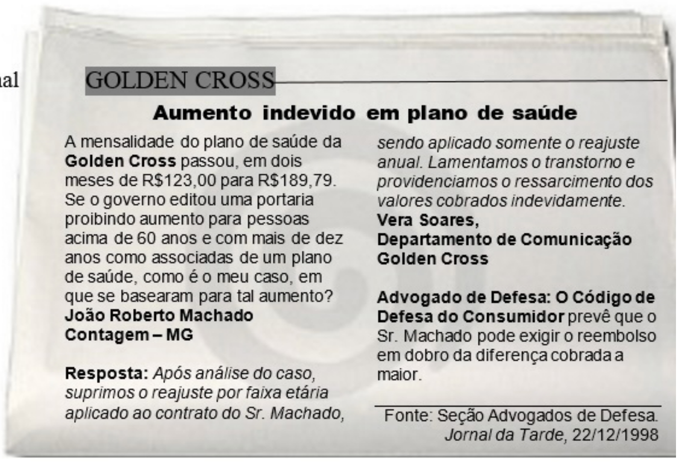
VAMOS ANALISAR ALGUNS ARGUMENTOS?

Toda criança tem direito à educação.
Ana é criança, portanto tem direito à educação.
PREMISSAS:
Toda criança tem direito à educação.
Ana é criança.
CONCLUSÃO:
Ana tem direito à educação.

AS PREMISSAS, SENDO VERDADEIRAS, LEVAM A UMA CONCLUSÃO VERDADEIRA: O ARGUMENTO É VÁLIDO.

Todas as pessoas que sofreram de úlcera de estômago dormiam.
Logo, dormir causa úlcera de estômago.
PREMISSAS:
Todas pessoas que sofreram de úlcera de estômago dormiam.
Pessoas dormem.
CONCLUSÃO:
Dormir causa úlcera de estômago.
ESSE É UM ARGUMENTO INVÁLIDO, POIS AS PREMISSAS NÃO CONDUZEM NECESSARIAMENTE A ESSA CONCLUSÃO.

1. Verifique se a argumentação deste leitor de jornal é ou não válida. Identifique as premissas e a conclusão no texto.


GOLDEN CROSS

Aumento indevido em plano de saúde

A mensalidade do plano de saúde da **Golden Cross** passou, em dois meses de R$123,00 para R$189,79. Se o governo editou uma portaria proibindo aumento para pessoas acima de 60 anos e com mais de dez anos como associadas de um plano de saúde, como é o meu caso, em que se basearam para tal aumento?
João Roberto Machado
Contagem – MG

Resposta: *Após análise do caso, suprimos o reajuste por faixa etária aplicado ao contrato do Sr. Machado, sendo aplicado somente o reajuste anual. Lamentamos o transtorno e providenciamos o ressarcimento dos valores cobrados indevidamente.*
Vera Soares,
Departamento de Comunicação Golden Cross

Advogado de Defesa: O Código de Defesa do Consumidor prevê que o Sr. Machado pode exigir o reembolso em dobro da diferença cobrada a maior.

Fonte: Seção Advogados de Defesa. *Jornal da Tarde*, 22/12/1998

2. Verifique a validade dos argumentos:

(A) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$
(B) $x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$
(C) Todos os mamíferos são vertebrados. Todos os gatos são mamíferos. Então, todos os gatos são vertebrados.
(D) Alguns vinhos são importados. Alguns produtos importados vêm da Coréia. Então, alguns vinhos são coreanos.
(E) Todo triângulo equilátero possui três Lados congruentes. Todo triângulos isóceles possui dois lados congruentes. Logo, todo triângulo equilátero é isóceles.
(F) $a + b > 0 \Rightarrow a > 0 \; e \; b > 0$

3. E a lógica nas profissões? Os advogados, vendedores e vários outros profissionais utilizam a lógica em seu trabalho.

(A) Imagine-se um vendedor. Pense em um produto e crie uma argumentação para convencer o consumidor a comprá-lo.
(B) Imagine-se agora um advogado defendendo uma importante causa. Qual seria ela? Que argumentação você utilizaria para convencer o juiz ou o juri de sua conclusão?

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática
Professor (a) Conteúdo: **Dedução**			
Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos. **Habilidades**: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. **Critérios:** Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas			

Instrumento: DETETIVE *SHERLOCK HOLMES* ______ de _____________ de 20____

Você gosta de história de detetive? Já ouviu falar em Sherlock Holmes?

O detetive Sherlock Holmes é uma criação do escritor inglês Arthur Conan Dayle (1859-1930). Consagrado na literatura de ficção policial como o "mestre da dedução", Sherlock Holmes usava a lógica para desvendar crimes e tinha o hábito de expor suas argumentações ao companheiro Watson.

DEDUÇÃO:

As deduções são argumentos em que se parte de premissas gerais para uma conclusão particular. Por exemplo:

TODOS OS HOMENS SÃO MORTAIS.
JOÃO É HOMEM.
LOGO, JOÃO É MORTAL.

Premissas: Todos os homens são mortais.
João é homem.
Conclusão: João é mortal.

1. Leia o livro *Um estudo em vermelho* de Conan Dayle e identifique passagens em que Sherlock Holmes utilizou a dedução – do geral para o particular – para desvendar o crime. Observe que na fala, Holmes diz que " a coisa toda é uma verdadeira sucessão de fatos lógicos, sem uma ruptura sequer", evidenciando sua característica de pensar logicamente.

2. O paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos e congruentes. O losango é o paralelogramo que possui 4 lados congruentes, e o retângulo, o paralelogramo que possui 4 ângulos congruentes. Baseando-se nessas afirmações, podemos deduzir que:
   - O quadrado é um paralelogramo?
   - O quadrado é um losango?
   - O quadrado é um retângulo?

3. Num triângulo, um ângulo interno mede 70° e um outro mede 40°. Qual a medida do terceiro ângulo? Que propriedade geral dos triângulos permitiu que você deduzisse essa medida?

4. Sabendo que para todo $x \neq 0$, temos $x^0 = 1$. Então, $1889^0 = 1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$, etc. Partimos de uma propriedade geral, para casos particulares. Utilizamos a dedução? Explique.

5. Escreva a dedução abaixo em linguagem matemática:

Todo número natural é um número inteiro.
8 é um número natural.
Logo, 8 é um número inteiro.

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Indução**

Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: A MATEMÁTICA E O COTIDIANO ______ de ____________ de 20____

INDUÇÃO:

Na indução usamos o caminho inverso da dedução. Partimos de fatos particulares para conclusões gerais.

A indução é muito utilizada pelos cientistas para obter conclusões ou leis a respeito de determinado fenômeno.

Um cientista estuda repetidas vezes um fenômeno: anota dados, faz observações, etc. Depois, a partir dos fatos observados, ele tenta tirar conclusões gerais que possam ser aplicadas a fenômenos semelhantes ao estudado. *Isso é indução.*

Muitas vezes em nosso cotidiano, raciocinamos de modo indutivo. Veja:

Na feira, você experimenta uma uva: ela está azeda. Experimenta outra, de outro cacho, e também está azeda.
O que esperar?
Que você **generalize** e conclua que as uvas estão azedas e é melhor não compra-las!

De fatos particulares você chegou a uma conclusão geral. Na matemática também utilizamos a indução para provar a validade de proposições. No entanto é preciso tomar um pouco de cuidado com as generalizações. ***Verificar a validade de uma afirmação para um grande número de casos não garante que ela sempre seja verdadeira.***

Veja um exemplo:

A expressão $n^2 - n + 41$ fornece números primos para qualquer n natural?
À primeira vista, parece que sim, pois para:
$n = 0$ e $n = 1$, obtemos o valor 41 que é primo.
$n = 2$, obtemos o valor 43 que é primo.
$n = 3$, obtemos o valor 47 que é primo e continuaremos a encontrar números primos até $n = 40$.
Para $n = 41$, a expressão resulta 1681, que *não é primo!*
Poderiamos ser levados a generalizar e tomar como verdadeira uma afirmação que nem sempre é válida.

Então, como generalizar uma afirmação em matemática, se é impossível verificar sua validade para todos os casos particulares?

Vamos mostrar como se faz isso por meio de um exemplo. Tentaremos torna-lo o mais simples possível, evitando muitos rigores matemáticos. Acompanhe:

Queremos provar que a soma dos n primeiros números naturais é igual à metade do produto de n pelo seu sucessor.

Matemáticamente, vamos mostrar que:
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, onde n é um número natural qualquer diferente de zero, ou seja, $n = \{1, 2, 3, \cdots\}$

Primeiro verificamos se a igualdade $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ é válida para $n = 1$.

De fato, substituindo n por 1 temos: $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ (V)

Então assumimos que a igualdade também é verdadeira para um número genérico k.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}.$$

Consideramos essa igualdade verdadeira e a denominamos ***hipótese de indução***.

Mostraremos agora que se ela vale para um número genérico k também vale para o seu sucessor, o número $k + 1$.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k + 1).$$
$$= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + \frac{2\cdot(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

Como k é um número natural qualquer, generalizamos a conclusão para todo número natural. Usamos a indução: do particular para o geral.

DEMONSTRE POR INDUÇÃO:

(A) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

(B) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Nome:	Numero	Série	Componente Curricular Matemática

Professor (a)
Conteúdo: **Indução**

Competências: Interpretação das diversas linguagens e códigos.
Habilidades: Fazer e Validar conjecturas experimentando, reconhecendo modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
Critérios: Clareza, coesão, argumentação (verbal ou com cálculos) e respostas corretas

Instrumento: A MATEMÁTICA E O COTIDIANO ______ de _____________ de 20____

Redução ao absurdo:

O nome já diz muito sobre esse processo lógico. Queremos provar, por exemplo, que:

Se A, então B

Admitimos a proposição B como falsa e, a partir daí, deduzimos que essa proposição nos leva a uma constradição ou a um absurdo. Logo, B é verdadeira.

A matemática também utiliza a redução ao absurdo para demonstrar proposições. Acompanhe um exemplo:

Provar que a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Denotaremos por: r número racional, i número irracional. Queremos provar que $r + i$ também é um número irracional.

Vamos negar a conclusão, ou seja, supor que a soma $r + i$ seja um número racional x: $r + i = x$

Podemos subtrair r de ambos os membros da igualdade: $(-r) + (r + i) = (-r) + x$

$$i = x - r$$

Mas acontece que a diferença de dois números racionais $(x - r)$ é sempre um número racional. Então temos

(irracional) $i = x - r$ (racional)

Essa igualdade é absurda! Não existe número irracional que seja igual a uma número racional.

Logo, x é irracional, conforme queríamos demonstrar.

QUESTÕES

1. Identifique trechos do texto em que se evidencia a redução ao absurdo.

Dificuldade de Governar

Todos os dias os ministros dizem ao povo
Como é difícil governar. Sem os ministros
O trigo cresceria para baixo em vez de crescer para cima.
Nem um pedaço de carvão sairia das minas
Se o ministro não fosse tão inteligente. Sem o Ministro da Saúde
Mais nenhuma mulher poderia ficar grávida. Sem o Ministro da Guerra
Nunca mais haveria guerra. E atraver-se-ia a nascer o sol
Sem a autorização do Ditador?
Não é nada provável e se o fosse
Ele nasceria por certo em outro lugar.
É também difícil, ao que nos é dito,
Dirigir uma fábrica. Sem o patrão
As paredes cairiam e as máquinas encher-se-iam de ferrugem.
Se algures fizessem um arrado

Ele nunca chegaria ao campo sem
As palavras avisadas do industrial aos camponeses: quem
De outro modo, poderia falar-lhes na inexistência de arado? E que
Seria da propriedade rural sem o proprietário rural?
Não há dúvida nenhuma que se semearia centeio onde já havia batatas.
Se governar fosse fácil
Não haveria necessidade de alguns tão inteligentes.
Ou será que
Governar só é assim tão difícil porque a exploração e a mentira
São coisas que custam a aprender?

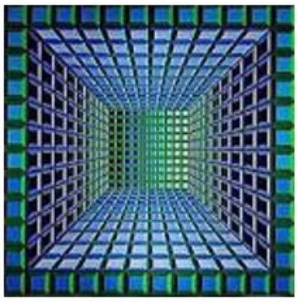
Bertolt Brecht

In: BARBOSA, Severino A. M. e AMARAL, Emília
Escrever e desvendar o mundo. Campinas: Papirus, 1998

2. No trecho abaixo, o filósofo Nietzsche, crítico notório da idéia de ciência (tal como a Modernidade a define, com base na lógica aristotélica), faz uma alegoria irônica da forma como a contradição é tratada no reino do conhecimento.
Leia o trecho e procure decifrar a alegoria por trás da irônia de Nietzsche. Em outras palavras, traduza o que o filósofo quis dizer principalmente com os termos grifados em negrito, nos quais a alegoria se pronuncia de modo mais acentuado.

"Na ciência as contradições **não têm direito de cidadania**, é o que se diz com boas razões: apenas quando elas decidem **rebaixar-se à modéstia de uma hipótese**, de um ponto de vista experimental e provisório, de **uma ficção reguladora**, pode lhes ser concedida a entrada e até mesmo um certo valor no **reino do conhecimento** – embora ainda com a restrição de que permaneçam sob **vigilância policial, a vigilância da suspeita.**"

NIETZSCHE, Friedrich. *A gaia ciência*. Trad. Paulo César de Souza. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.



Tukoer-Ter-Ur (1989), acrílico sobre tela do pintor e escultor húngaro Victor de Vasarely (1908-1997).

Referências Bibliográficas

[1] ABAR, C. **Noções de Lógica Matemática**. PUC/SP, 2008. Disponível em: www4.pucsp.br/ ~logica/ . Acesso em: 06 de janeiro de 2014.

[2] ALENCAR Filho, Edgar de. **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

[3] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nascionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e sua tecnologias**. Brasilia, 2000.

[(11)] _________. **Orientações curriculares para o ensino médio.** Brasilia, 2006.

[(12)] _________. **Matriz de referência para o ENEM 2009**. Disponível em: www.inep.gov.br/download/enem2009/enem2009_matriz.pdf. Acesso em: 12 de janeiro de 2014.

[4] DAGHLIAN, Jacob. **Algebra e Lógica de Boole**. São Paulo: Atlas, 1995.

[5] FAJARDO, Rogério A. dos S. **Notas de aulas.** Disponível em: http://www.ime.usp.br/~fajardo. Acesso em: 04 de fevereiro de 2014.

[6] FONTES, Carlos. **Navegando na Filosofia.** Disponível em : http://afilosofia.no.sapo.pt/Hist.htm. Acesso em: 25 de novembro de 2013.

[7] FREIRE, Paulo. **Política e educação**. São Paulo: Cortez, 2003.

[8] NOLT, J. e ROHATYN, D.. **Lógica**. Makron Books do Brasil Editora Ltda., São Paulo, p. 304-329, 1991.

[9] SILVEIRA, Marisa R. S. da. *"Matemática é difícil": um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos*. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf. Acesso em: 07 de fevereiro de 2014.

[(10)] ______. **Os Pensadores - Histórias das Grandes Idéias do Mundo Ocidental**. Abril S. A. Cultural e Industrial, São Paulo, vol 34, p. 79-252,1974.

[(11)] ______. **Os Pensadores**. Abril S. A. Cultural e Industrial, São Paulo, vol 4, 1973.