

Estudo de Funções Logarítmicas no Ensino Médio

Romulo Mussel

2 de março de 2014

Sumário

1	Introdução	4
2	Objetivos	6
3	Funções	8
3.1	O que é uma função?	8
3.2	Nomenclatura	9
4	Logaritmos	11
4.1	Definições de logaritmo	12
4.1.1	Consequência 1	14
4.1.2	Consequência 2	15
4.1.3	Consequência 3	15
4.1.4	Consequência 4	15
4.1.5	Consequência 5	16
4.1.6	Consequência 6	17
4.1.7	Teorema 1	18
4.1.8	Teorema 2	20
4.1.9	Consequência 7	24
4.1.10	Consequência 8	24
4.2	Logaritmo natural	26
4.2.1	Algumas definições	26
4.2.2	O $\ln(a)$	29
4.2.3	Cálculo do $\ln(a)$	29

<i>SUMÁRIO</i>	2
4.2.4	Consequência da aproximação para $\ln(a)$ 30
4.2.5	A definição para $\ln(a)$ é boa? 31
4.3	O número e 32
4.3.1	De onde vem o número e ? 32
4.3.2	De onde vem a expressão que dá o valor de e ? 33
4.4	O gráfico da função $L(x)$ 37
5	Funções exponenciais 40
5.1	Caracterização da função do tipo exponencial 40
5.2	A função exponencial 41
5.2.1	Caracterização da função exponencial 41
5.3	A função exponencial é a inversa da função logarítmica 42
5.4	Conveniência 44
5.4.1	Resolvendo uma equação exponencial 44
5.4.2	Transformação de progressões geométricas em progressões aritméticas 45
5.5	Aplicação 49
5.5.1	O problema do santo sudário de Turim 49
5.5.2	A boca e os germes 52
5.5.3	A mesada que triplica 53
5.5.4	O jogo de xadrez 55
6	Exercícios 57
7	Orientações ao leitor 59
8	Considerações finais 60

Capítulo 1

Introdução

O **Estudo de Funções Logarítmicas no Ensino Médio** é muito importante para a solução de alguns problemas práticos em nossas vidas. É imprescindível entender problemas que envolvam juros compostos e conseguir fazer cálculos quando temos alterações de prazos ou calculamos prazos conforme alterações nos pagamentos.

Devemos ser suficientemente objetivos quando introduzimos uma nova matéria para o aluno a fim de não gerarmos a pergunta:

"Para que serve isso?"

Podemos refletir um pouco mais sobre isso observando o pensamento de Georges Gusdorf¹ sobre esta questão:

"Um professor vai começar sua aula. Evidentemente, isto não é nada de especial, não é um acontecimento. Passa-se a mesma coisa cem vezes no mesmo edifício. Mas pensar assim não chega para dissipar uma inquietação que pode ir até a angústia. Que venho eu aqui fazer? E que vêm fazer eles, eles todos e cada um por seu lado?" (pág. 56).

¹Professores para quê? Lisboa:1967

O pensamento de Gusddorf e de outros educadores é tornar a aula mais dinâmica.

Atualmente, são utilizadas ferramentas ultrapassadas e lentas com estudantes modernos e rápidos, porém sabemos que uma abordagem diferenciada é fundamental para a solução dos diversos problemas que possam aparecer.

É preciso entendermos que o aluno de hoje busca aprender sobre os seus interesses. Nos dias de hoje, as informações estão expostas em lugares como jornais, diversas emissoras de televisão e, principalmente, na internet. É necessário que o professor se atualize, não só em relação aos conteúdos, mas no modo de transmiti-los e abordá-los.

Capítulo 2

Objetivos

O objetivo deste trabalho é dar ao aluno mais um meio de pensar sobre as funções logarítmicas. A grande motivação para isto é fazer com que o ensino da Matemática seja menos formal e mais construtivo a partir de características axiomáticas.

Temos o dever de melhorar o nível do ensino de Matemática no Brasil e investir em cidadãos mais conscientes, para que sejam capazes de raciocinar a partir de problemas e de buscar soluções para os mesmos, através da lógica dedutiva e das ferramentas que tenham a sua disposição.

Infelizmente, as funções logarítmicas são muito mal explicadas dentro das salas de aula brasileiras, o que ocasiona o não entendimento dos alunos. Os discentes, por sua vez, acabam se desinteressando pelo assunto, uma vez que não encontram algo concreto nos estudos, não veem aplicação para o tema e não conseguem, sequer, diferenciar os conceitos básicos que caracterizam as funções logarítmicas.

A discussão proposta neste trabalho visa três pontos fundamentais para o aluno.

O primeiro é a conceituação. O aluno deve ter o domínio dos conceitos básicos que envolvem tal conteúdo. A aceitação e o entendimento desses

conceitos desenvolvem todo o trabalho que segue.

O segundo ponto é a manipulação. O aluno deve ser capaz de manipular tais conceitos a fim de obter resultados de forma rápida e não perder muito tempo com tais dificuldades que, embora possam parecer singelas e, talvez, até menos cobradas, não são menos importantes.

O terceiro ponto é a aplicação. O aluno, ao reconhecer os conceitos estudados em um problema, deve ser capaz de resolvê-lo sem grandes dificuldades, uma vez que isso depende diretamente do reconhecimento dos conceitos envolvidos na questão e, na maioria dos casos, de saber manipulá-los¹.

Como ferramenta complementar, pretendo abordar ideias simples no uso de softwares matemáticos que possam auxiliar o aluno. Dar ao aluno uma forma visual para calcular os logaritmos e caracterizá-los de forma concreta é mais um diferencial deste trabalho. Com isso pretendo aumentar o interesse do estudante e atentá-lo para o pensamento prático das questões.

Meu intuito aqui não é a discussão em si sobre as ferramentas externas, se essas podem ou não fazer diferença no aprendizado do aluno (embora eu acredite que sim), mas dar mais uma opção ao aluno para que o mesmo se integre às tecnologias que estão sendo utilizadas em todo o mundo.

Quero deixar bem claro que a tecnologia não é necessária para que o trabalho possa ser entendido, porém não deixa de ser um ponto de apoio que servirá, principalmente, no cálculo dos logaritmos através das áreas e na plotagem de gráficos.

O trabalho pode ser utilizado nas salas de aula mesmo sem o uso do software. Os cálculos e os gráficos podem ser feitos manualmente, porém o tempo que se perde para fazer algo extremamente mecânico poderá ser melhor aproveitado na solução de problemas e nas caracterizações das funções que podem aparecer em problemas reais.

Ao final da leitura e da aplicação deste trabalho, pretendo que o aluno tenha o suporte para entender e caracterizar, de forma conceitual, as funções logarítmicas e que reflita sobre as soluções dos problemas.

¹Este parágrafo e os três parágrafos anteriores são baseados no pensamento do autor Elon Lages Lima. O texto pode ser lido em sua íntegra na RPM nº 41 (Revista do Professor de Matemática).

Capítulo 3

Funções

Para que possamos entender as funções logarítmicas é necessário conhecer o conceito de função.

Pensar em funções apenas como pares ordenados é algo que não nos interessa muito. Uma função deve ser vista de forma dinâmica. Aplicar uma função em um conjunto é transformá-lo em outro conjunto através de uma regra (ou conjunto de instruções).

Espera-se que o aluno já tenha algum conhecimento sobre funções, porém este capítulo tratará de alguns conceitos necessários para a compreensão do trabalho. A ideia não é esgotar o tema função, mas dar uma base teórica para que o leitor possa induzir seus pensamentos de forma que os conteúdos subsequentes fiquem bem claros.

3.1 O que é uma função?

Definição: Dados os conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ (lê-se "uma função de A em B ") é uma regra (ou conjunto de instruções) que nos diz como associar a cada elemento x , pertencente ao conjunto A , a um e apenas um elemento $y = f(x)$ pertencente ao conjunto B .

Veja, a seguir, como podemos denotar uma função:

$$\begin{array}{l} f : A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

3.2 Nomenclatura

Para facilitar a compreensão do texto, utilizaremos uma nomenclatura padrão. Diremos, por questões de nomenclatura, que o conjunto A é dito o domínio da função f e o conjunto B o seu contra-domínio. Temos de considerar ainda que a imagem da função é o conjunto formado por todos os elementos do conjunto B que foram associados a algum elemento do conjunto A .

Algumas funções possuem características importantes, daí a necessidade de lembrarmos de cada um dos nomes que serão apresentados a seguir.

Definição: Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é *injetiva* quando elementos diferentes em A são transformados por f em elementos diferentes em B . Desta forma temos que f é injetiva quando

$$x_1 \neq x_2 \text{ em } A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definição: Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é *sobrejetiva* quando, para qualquer elemento y pertencente a B , pode-se encontrar pelo menos um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

Definição: Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é *bijetiva* quando essa função é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Uma função nem sempre é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva. Certamente as funções mais interessantes são as bijetivas pois permitem que os elementos do conjunto A sejam associados a elementos do conjunto B e vice-versa.

Veamos um exemplo que pode ser mais esclarecedor:

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ e $B = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$.

Existe uma função que associa os dois conjuntos. Veja:

$$\begin{array}{l} f : A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) = 2^x \end{array}$$

Podemos notar que esta função está bem definida e é bijetiva, logo, existe uma regra inversa à regra apresentada anteriormente de modo que consigamos uma função $g : B \rightarrow A$ bem definida. Diremos ainda que as funções $g : B \rightarrow A$ e $f : A \rightarrow B$ são inversas uma da outra.

Capítulo 4

Logaritmos

Para que possamos entender melhor os logaritmos, podemos estudá-los começando pela sua história. Michael Stifel, o maior algebrista alemão do século XVI, deixou claro que a associação de uma progressão aritmética a uma progressão geométrica era algo muito útil para que grandes cálculos pudessem ser realizados. A vantagem de fazer essa associação era transformar contas de multiplicação e divisão em contas de adição ou subtração.

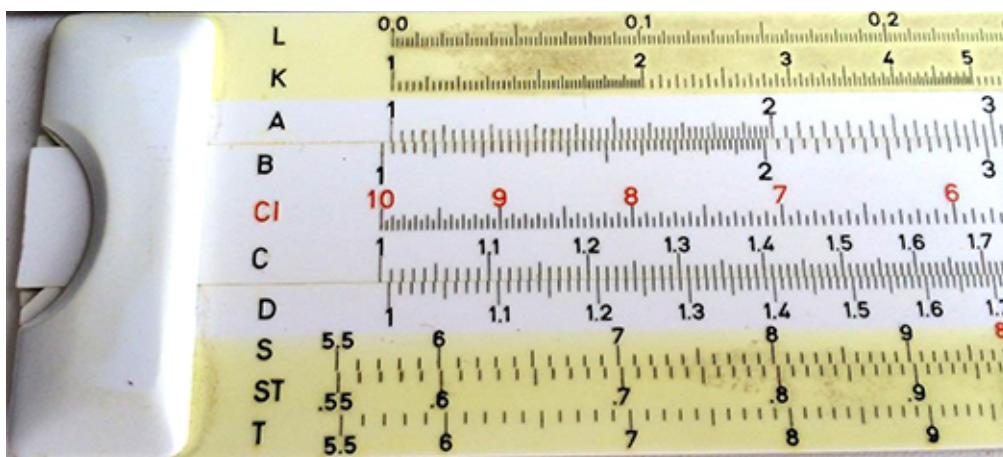
Alguns anos antes, o alemão Johannes Werner (1468 - 1528) utilizava as relações entre senos e co-senos para realizar tais transformações e obter velocidade em suas contas voltadas para a astronomia. Seu método ficou conhecido como *prostaférese*, uma palavra de origem grega que significa "adição e subtração".

Anos mais tarde, Napier, conhecedor do método da prostaférese, começou a fazer as associações entre valores que estivessem relacionados a uma progressão geométrica. Em 1614, publicou seu trabalho sobre os *logaritmos*. No ano seguinte, Henry Briggs procurou Napier para discutir algumas ideias. Nesse encontro, eles chegaram à conclusão que a tábua de logaritmos, apresentada por Napier, seria mais útil se estivesse na forma decimal.

No ano de 1624, Briggs publicou um trabalho que continha uma significativa tabela de logaritmos, a mesma que utilizamos até os dias de hoje.

A palavra logaritmo significa "número de razão". É atribuída a John Napier a invenção dos logaritmos.¹

Os estudantes dos cursos de engenharia utilizavam régua de cálculo que continham uma conversão entre os logaritmos e os números naturais até bem pouco tempo atrás, porém elas caíram em desuso por conta das máquinas de calcular. A figura abaixo é uma fotografia de uma dessas régua de cálculo.



Conforme podemos ver acima a "linha" iniciada pela letra *D* contém alguns números racionais maiores ou iguais a um, já a "linha" iniciada pela letra *L* representa os logaritmos² dos números contidos na "linha" *D*. Através de uma régua perpendicular às "linhas" *D* e *L* fazemos a conversão entre um número racional e seu logaritmo ou vice-versa.

4.1 Definições de logaritmo

Definição 1: Dizemos que uma função $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando goza das seguintes propriedades:

¹Este parágrafo e o anterior foram escritos com base no livro "Introdução à História da Matemática" de Howard Eves.

²Os logaritmos estão calculados na base 10.

Propriedade 1: A função L é crescente³, ou seja, dado $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$ e $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ de forma que $x_1 < x_2$ então $L(x_1) < L(x_2)$.

Propriedade 2: $L(x_1 \cdot x_2) = L(x_1) + L(x_2)$.

Podemos denotar a função logarítmica conforme vemos abaixo:

$$\begin{array}{l} L : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto L(x) = y \end{array}$$

Uma função que possua essas duas propriedades será considerada, por nós, uma função logarítmica, e o valor de $L(a)$ será um logaritmo de a .⁴ Note que utilizamos os símbolos \mathbb{R}_+^* para designar o conjunto dos números reais positivos e o símbolo \mathbb{R} que representa o conjunto de todos os números reais.

O logaritmo também pode se caracterizar por transformar progressões geométricas em progressões aritméticas. Isso decorre das propriedades que fazem parte da definição 1. Voltemos ao exemplo dado na seção 3.2 e criemos uma função que faça exatamente o que Napier pretendia.

Seja então a função $L : B \longrightarrow A$ que faça as seguintes associações:

$$L(2) = 1, L(4) = 2, L(8) = 3, L(16) = 4, L(32) = 5, L(64) = 6, \dots$$

Vejamos que a pretensão de reduzir as contas era perfeitamente possível.

$$L(4 \cdot 16) = L(4) + L(16) = 2 + 4 = 6 = L(64)$$

³Neste caso, estamos limitando a base do logaritmo a um número real maior do que 1. Caso trocarmos a palavra crescente por decrescente, limitaremos a base do logaritmo a um número real entre 0 e 1. As consequências e os teoremas posteriores podem ser provados para ambos os casos (crescente ou decrescente), observadas, obviamente, as características de cada uma destas funções.

⁴O valor de $L(x)$ pode variar de acordo com a base em que o logaritmo é calculado. Veremos o que é a base de um logaritmo um pouco mais à frente.

Somar o valor de $L(4)$ com o valor de $L(16)$ seria mais simples do que multiplicar 4 por 16, uma vez que $L(4) = 2$ e $L(16) = 4$. Repare ainda que 6 é exatamente o resultado para $L(64)$. Esse tipo de operação, embora utilíssima, só faria sentido caso fosse conhecida uma tabela para a função L .

Existe uma segunda definição que é mais utilizada do que a definição 1, embora esta esteja perfeitamente correta e provenha de problemas históricos.

Definição 2: Dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$. Logo temos que

$$L_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Já vimos que os logaritmos seriam capazes de reduzir contas de multiplicação e divisão e, para isso, teríamos de utilizar uma tábua universal de logaritmos⁵. Além disso, a função logarítmica também é capaz de reduzir contas em caso de raízes enésimas e outros problemas envolvendo expoentes.

Veremos, a seguir, algumas consequências das propriedades listadas na definição 1 e alguns teoremas úteis para os nossos cálculos.

4.1.1 Consequência 1

$$\boxed{L(1) = 0}$$

Utilizando a propriedade 2, temos que:

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$$

Logo precisamos ter $L(1) = 0$ obrigatoriamente.

⁵A tábua universal de logaritmos é uma tabela que podemos consultar de modo a saber as associações entre x e y de forma que $L(x) = y$. Nesse caso, precisaríamos conhecer cada x e seu correspondente y após aplicada a função L . Esta função torna-se mais interessante caso provarmos que a mesma é bijetiva, uma vez que, conhecendo a tábua de logaritmos e o valor de y , somos capazes de encontrar o valor de x .

4.1.2 Consequência 2

$$\boxed{\text{Se } 0 < x < 1 \text{ então } L(x) < 0, \text{ se } x > 1 \text{ então } L(x) > 0}$$

Esta segunda consequência se torna bem simples de ser provada se utilizarmos a consequência 1. Uma vez que a função é crescente, por conta da propriedade 1, temos que, se $x < 1$ então $L(x) < L(1)$. Sabemos que $L(1) = 0$, pela consequência 1, então $L(x) < 0$.

O mesmo acontece para $x > 1$, pois se $x > 1$ então $L(x) > L(1)$. Novamente, como sabemos que $L(1) = 0$, então $L(x) > 0$.

Concluimos que, caso $0 < x < 1$ então o valor de $L(x)$ será negativo, porém, se $x > 1$ então o valor de $L(x)$ será positivo.

4.1.3 Consequência 3

$$\boxed{L\left(\frac{1}{a}\right) = -L(a)}$$

Este fato vem de uma simples multiplicação. Vejamos:

$$L\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = L(1) = 0 \quad \text{pela consequência 1} \quad (4.1)$$

$$L\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = L\left(\frac{1}{a}\right) + L(a) \quad \text{pela propriedade 2} \quad (4.2)$$

Por conta das equações (4.1) e (4.2) temos que:

$$L\left(\frac{1}{a}\right) + L(a) = 0$$

4.1.4 Consequência 4

$$\boxed{L\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = L(x_1) - L(x_2)}$$

Fazendo uso da consequência 3, podemos escrever o seguinte:

$$L\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = L\left(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\right) = L(x_1) + L\left(\frac{1}{x_2}\right) = L(x_1) - L(x_2)$$

4.1.5 Consequência 5

$$\boxed{L(x^r) = r \cdot L(x) \text{ onde } r \in \mathbb{Q}}^6$$

Para garantir que esta consequência é válida, mostraremos, primeiro, que isto vale para os números naturais. Segue, então, pela propriedade 2 que:

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = L((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) = L(x_1 \cdot x_2) + L(x_3) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3)$$

Podemos expandir a ideia para n elementos. Para isso, continuaremos fazendo uso da propriedade 2. Temos, então, que:

$$L(a^n) = L(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n) = \underbrace{L(a) + L(a) \dots + L(a)}_n = n \cdot L(a)$$

Já mostramos que essa consequência é verdadeira para os naturais. A questão agora é mostrar que ela vale também para os números racionais. Faremos isso por conta da manipulação dos expoentes, mas, antes disso, precisamos do seguinte fato:

$$x^n \cdot x^{-n} = 1$$

Para que a propriedade acima seja válida, precisamos que $\frac{1}{a} = a^{-1}$ quando $a \neq 0$. Isto vem da necessidade de mantermos bem definidas as operações entre potências de mesma base. Após admitirmos tal propriedade, temos que:

$$L(x^{-n}) = -n \cdot L(x)$$

Tal fato não é muito difícil de ser demonstrado. Veja:

$$L(x^{-n}) = L\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right) = n \cdot L\left(\frac{1}{x}\right) = n \cdot [-L(x)] = -n \cdot L(x)$$

⁶O símbolo \mathbb{Q} refere-se ao conjunto dos números racionais.

Repare que utilizamos o fato recentemente admitido e também a consequência 3.

Finalmente, demonstraremos que $L(x^r) = r \cdot L(x)$ onde r é um número racional sob a forma $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.⁷ Daí:

$$(x^r)^q = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p$$

Por fim, temos:

$$q \cdot L(x^r) = L((x^r)^q) = L(x^p) = p \cdot L(x) \implies L(x^r) = \frac{p}{q} \cdot L(x) = r \cdot L(x)$$

Sendo assim terminamos a nossa demonstração acerca desta consequência, válida agora para r racional. Este é um fato muito importante para resolver diversos problemas.

Admitiremos válida a mesma hipótese para um número r real qualquer, embora esta demonstração não seja apresentada neste trabalho. Podemos pensar que um número irracional pode ser aproximado o quanto quisermos por um número racional e isso torna o fato bem legítimo para r real.

4.1.6 Consequência 6

A função $L(x)$ é ilimitada

Para que uma função seja considerada ilimitada, a mesma não pode ser limitada superiormente ou inferiormente.

Primeiro vamos mostrar que a função não é limitada superiormente, isto é, mostraremos que existe algum x de forma que $L(x) > \beta$ para um β real qualquer.

É fato de que existe um número n natural que seja maior do que $\frac{\beta}{L(2)}$, daí segue que:

$$n > \frac{\beta}{L(2)} \implies n \cdot L(2) > \beta \implies L(2^n) > \beta$$

⁷A notação \mathbb{Z} é referente ao conjunto dos números inteiros e a notação \mathbb{Z}^* é referente ao conjunto dos números inteiros com a exceção do zero.

Tomando $x = 2^n$, então $L(x) > \beta$. Isto mostra que a função não é limitada superiormente.

Agora vamos mostrar que a mesma não é limitada inferiormente, ou seja, dado um α real qualquer, vamos mostrar que existe x de modo que $L(x) < \alpha$. Como a função é ilimitada superiormente, podemos dizer que existe a de modo que $L(a) > -\alpha$, como $L(\frac{1}{a}) = -L(a)$ então temos que:

$$L\left(\frac{1}{a}\right) = -L(a) < \alpha$$

Logo, basta tomarmos $x = \frac{1}{a}$ para mostrarmos que a função é ilimitada inferiormente. Finalmente, acabamos de mostrar que a função $L(x)$ é ilimitada.

4.1.7 Teorema 1

Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$.

Para provar o teorema acima, dividiremos a demonstração em duas etapas. A primeira parte consiste em provar que, se existe $a > 1$ onde $L(a) = M(a)$, então $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

Sabemos que, pela consequência 5, $L(a^r) = r \cdot L(a)$ e, por hipótese, $L(a) = M(a)$. Segue que:

$$L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$$

Logo, é verdade que $L(a^r) = M(a^r)$ para todo r racional. Seria interessante garantir isso para um valor além de um a específico. Queremos que isso valha para qualquer valor. Vamos admitir que isto não aconteça a um valor $b > 0$, então teremos que $L(b) \neq M(b)$.

Dados dois números z e w , temos que $z = w$, $z > w$ ou $z < w$. No nosso caso, como estamos admitindo que $L(b) \neq M(b)$, sabemos que nos restam duas opções. Tomemos por exemplo que $L(b) < M(b)$ sem perda de generalidade. Segue disso que $M(b) - L(b) > 0$.

A partir deste fato, tomemos um número natural n suficientemente grande de forma que

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a) \Rightarrow M(b) - L(b) > \frac{L(a)}{n}.$$

Vamos dizer que $\frac{L(a)}{n} = L(a^{\frac{1}{n}}) = c$, logo $M(b) - L(b) > c$.

Se tomarmos o intervalo $(L(b), M(b))$, existe m natural tal que $m \cdot c \in (L(b), M(b))$. É importante observar que $c, 2c, 3c, \dots$ dividem o intervalo \mathbb{R}_+^* em intervalos de comprimento c justapostos.

Como esses intervalos de comprimento c são menores do que o comprimento do intervalo $(L(b), M(b))$, sem dúvida alguma, um dos extremos de algum intervalo múltiplo de c cairá dentro do intervalo $(L(b), M(b))$. Vamos pensar por outra perspectiva para que este fato se torne mais algébrico.

Existe algum m tal que $m \cdot c > L(b)$ e $(m - 1) \cdot c$ não seja maior do que $L(b)$, nesse caso, $(m - 1) \cdot c \leq L(b)$. Podemos dizer que m é o primeiro número natural que, ao multiplicar c , faz com que este produto seja maior do que $L(b)$. Por isso, qualquer valor menor do que m não torna o produto $m \cdot c$ maior do que $L(b)$.

Seguindo esta ideia, temos que $m \cdot c > L(b)$ e que $(m - 1) \cdot c \leq L(b)$, portanto $m \cdot c \leq L(b) + c$. Temos, abaixo, duas desigualdades fundamentais.

$$L(b) < m \cdot c \leq L(b) + c \quad \text{desigualdade 1}$$

$$M(b) - L(b) > c \Rightarrow M(b) > c + L(b) \quad \text{desigualdade 2}$$

Juntando as desigualdades 1 e 2, temos que $L(b) < m \cdot c \leq L(b) + c < M(b)$. Utilizando a transitividade, podemos concluir que $L(b) < m \cdot c < M(b)$.

Repare que $m \cdot c = m \cdot \frac{L(a)}{n} = L(a^{\frac{m}{n}})$. Se dissermos que $\frac{m}{n} = r$, então temos que $L(a^{\frac{m}{n}}) = L(a^r)$. Lembremos que $L(a^r) = M(a^r)$, daí podemos escrever:

$$L(b) < L(a^r) = M(a^r) < M(b)$$

A desigualdade descrita acima recai em um absurdo, pois, como o logaritmo pela sua caracterização é crescente, então, estamos afirmando que $b < a^r$ e que $a^r < b$. A primeira das duas afirmações vem da desigualdade $L(b) < L(a^r)$ e a segunda da desigualdade $M(a^r) < M(b)$.

Sabemos que estas possibilidades são excludentes, ou seja, um número não pode ser maior e menor do que outro ao mesmo tempo. Esse absurdo vem do fato de termos admitido, no começo da demonstração, a possibilidade de $L(b) \neq M(b)$, logo temos de ter $L(b) = M(b)$ como queríamos demonstrar.

A segunda parte da demonstração é o caso mais geral. Tomemos, então, L e M como funções logarítmicas quaisquer.

Sabemos que $L(2) > 0$ e que $M(2) > 0$. Este fato se deve à consequência 2. Façamos, então, $c = \frac{M(2)}{L(2)}$ e tomemos a função $N : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, onde $N(x) = c \cdot L(x)$.

Temos para $x = 2$ que $N(2) = c \cdot L(2)$. Escolhemos $c = \frac{M(2)}{L(2)}$, logo

$$N(2) = \left[\frac{M(2)}{L(2)} \right] \cdot L(2) = M(2).$$

A demonstração feita, na primeira parte, mostra-nos que, caso $N(2) = M(2)$, então $N(x) = M(x)$, mas como a função N está definida como $N(x) = c \cdot L(x)$ podemos concluir que $M(x) = c \cdot L(x)$.

4.1.8 Teorema 2

Uma função logarítmica é bijetiva.

Para provar que a função L é bijetiva precisamos demonstrar que a função é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Mostrar que a função é injetiva não é tão difícil, pois, seja $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ e $x_1 \neq x_2$. Podemos dizer que um deles é menor do que o outro. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2$. Pela propriedade 1, devemos ter $L(x_1) < L(x_2)$, logo $L(x_1) \neq L(x_2)$. Isto conclui que a função é injetiva.

A prova de que a função é sobrejetiva é um tanto quanto trabalhosa. Para que possamos compreendê-la, faremos a mesma em duas partes. A primeira parte consta em demonstrar o seguinte lema:

Lema: Em um intervalo real (u, v) existe algum $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $u < L(x) < v$.

Temos que $v - u > 0$, portanto, podemos dizer que existe algum número natural n de forma que $\frac{L(2)}{n} < v - u$ (sabemos que $L(2) > 0$). Façamos $\frac{L(2)}{n} = c$. Então existe algum m inteiro que faz $m \cdot c$ pertencer ao intervalo real (u, v) .

Se dividirmos toda a reta real em pedaços justapostos de comprimento c menores do que $v - u$, então, certamente, um destes intervalos cairá dentro de $v - u$ ⁸.

Uma outra maneira de entender isso é pensar algebricamente. Digamos que m seja o primeiro número inteiro que faz $m \cdot c$ ser superior a u , desta forma temos duas desigualdades.

$$u < m \cdot c \quad \text{desigualdade 1}$$

$$(m - 1) \cdot c \leq u \Rightarrow m \cdot c \leq u + c \quad \text{desigualdade 2}$$

Sabemos, de antemão, que $c < v - u$ ou que $u + c < v$, portanto temos a desigualdade $u < m \cdot c \leq u + c < v$. Usando a transitividade, podemos escrever que $u < m \cdot c < v$. Devemos recordar que $m \cdot c = m \cdot \frac{L(2)}{n} = L(2 \frac{m}{n})$.

Com o lema já provado, demonstraremos agora que L é sobrejetiva.

Para que uma função logarítmica $L(x)$

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto L(x) = y \end{aligned}$$

seja sobrejetiva, precisamos que para cada um dos elementos do contra-domínio exista pelo menos um elemento do domínio que o associe. Se um elemento b pertence ao contra-domínio então devemos ser capazes de encontrar um elemento a pertencente ao domínio da função L , de forma que $L(a) = b$.

Para demonstrarmos tal fato, precisamos lembrar como um número real a pode ser representado na sua forma decimal. Temos que

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots$$

onde α_0 é um número inteiro qualquer e α_n , para todo $n \geq 1$, admite apenas valores iguais a 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Podemos dizer que α_0 representa a parte inteira do número real e α_n , para todo $n \geq 1$, representa a parte decimal do número real. Valeremo-nos da seguinte notação:

⁸Esta argumentação é semelhante à realizada no teorema 1.

$$a_{\alpha_n} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}$$

Exemplo: $a_{\alpha_5} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \frac{\alpha_5}{10^5}$

Disso tiramos duas consequências imediatas: $a \geq a_{\alpha_n}$ e $a - a_{\alpha_n} < \frac{1}{10^n}$. A partir daí, mostraremos que se um número x é menor do que a ($x < a$), então existe um número natural n tal que $x < a_{\alpha_n}$.

De fato, podemos dizer que se $x < a$, então $a - x$ é um número positivo. Tomando n tão grande quanto queiramos, podemos dizer que:

$$\frac{1}{10^n} < a - x$$

Por conta das consequências imediatas na formação dos números reais, temos que:

$$a - a_{\alpha_n} < \frac{1}{10^n} < a - x$$

Podemos dizer que $a - a_{\alpha_n} < a - x$, logo $x < a_{\alpha_n}$. Utilizando esses fatos, vamos demonstrar que a função $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva.

Dado um número real b qualquer, precisamos achar um a de forma que $L(a) = b$. Utilizaremos uma ideia de aproximação para esse número, construiremos um número real através da sua formação decimal. Queremos descobrir quais são os inteiros $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ para a construção do número real a , que será disposto da forma:

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Sabemos que $L(x)$ é ilimitada. Portanto, deve existir algum valor para x que torne $L(x) > b$. Seja $a_{\alpha_0} + 1$ o primeiro número inteiro que faz $L(x) > b$, então podemos dizer que $L(a_{\alpha_0}) \leq b < L(a_{\alpha_0} + 1)$.

O número inteiro α_0 que compõe o número $a = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ já está aproximado. Vamos, agora, encontrar o α_1 .

As lógicas dedutivas para encontrarmos o α_1 e o α_0 são semelhantes. Repare no desdobramento para a primeira casa decimal:

$$a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0} + \frac{1}{10}, a_{\alpha_0} + \frac{2}{10}, a_{\alpha_0} + \frac{3}{10}, \dots, a_{\alpha_0} + \frac{8}{10}, a_{\alpha_0} + \frac{9}{10}, a_{\alpha_0} + 1$$

Da mesma forma, devem existir dois termos, acima, consecutivos, que chamaremos de a_{α_1} e $a_{\alpha_1} + \frac{1}{10}$ tal que $L(a_{\alpha_1}) \leq b < L(a_{\alpha_1} + \frac{1}{10})$. Lembremos que $a_{\alpha_1} = \alpha_0, \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}$, onde $0 \leq \alpha_1 \leq 9$.

Seguiremos com esta ideia e faremos o mesmo para a segunda casa decimal e, assim, encontraremos o α_2 . Segue o desdobramento para a segunda casa decimal:

$$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_1} + \frac{1}{10^2}, a_{\alpha_1} + \frac{2}{10^2}, a_{\alpha_1} + \frac{3}{10^2}, \dots, a_{\alpha_1} + \frac{8}{10^2}, a_{\alpha_1} + \frac{9}{10^2}, a_{\alpha_1} + \frac{1}{10}$$

Logo, devem existir dois termos, acima, consecutivos, que chamaremos de a_{α_2} e $a_{\alpha_2} + \frac{1}{10^2}$ tal que $L(a_{\alpha_2}) \leq b < L(a_{\alpha_2} + \frac{1}{10^2})$. Lembremos que $a_{\alpha_2} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}$, onde $0 \leq \alpha_2 \leq 9$.

Seguindo esta ideia, somos capazes de formar um número real a .

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots$$

Seguindo o mesmo procedimento, teremos para um n qualquer a_{α_n} e $a_{\alpha_n} + \frac{1}{10^n}$ tal que $L(a_{\alpha_n}) \leq b < L(a_{\alpha_n} + \frac{1}{10^n})$. Lembremos, mais uma vez, que $a_{\alpha_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}$, onde $0 \leq \alpha_n \leq 9$. Isto vale para todo $n \geq 0$.

É bem aceitável afirmarmos que $L(a) = b$, pois caso não fosse verdade teríamos que $L(a) < b$ ou $L(a) > b$.

Caso $L(a) < b$, então poderíamos arrumar algum x de forma que $L(a) < L(x) < b$. Já mostramos que entre quaisquer dois números reais é possível encontrar o logaritmo de algum outro número real.

Como a função é crescente, isso implicaria que $a < x$, portanto, poderíamos arrumar um n tão grande quanto quiséssemos e dizer que $\frac{1}{10^n} < x - a$ ou $a + \frac{1}{10^n} < x$, porém já vimos que $a_{\alpha_n} \leq a$. Por conseguinte, seríamos capazes de escrever a seguinte desigualdade:

$$a_{\alpha_n} + \frac{1}{10^n} \leq a + \frac{1}{10^n} < x$$

Por transitividade, temos que $a_{\alpha_n} + \frac{1}{10^n} < x$, mas, como a função é crescente, poderíamos dizer que:

$$b < L(a_{\alpha_n} + \frac{1}{10^n}) < L(x)$$

Isso é um grande absurdo, pois supomos, inicialmente, que $L(x) < b$. Esse absurdo surgiu justamente por tentarmos admitir que o valor de $L(a)$ poderia ser menor do que b .

Vejam os que acontece se tentarmos admitir que $L(a) > b$, nesse caso poderíamos arrumar um x de forma que $b < L(x) < L(a)$ e, conseqüentemente, teríamos que $x < a$, uma vez que a função é crescente. Já vimos, porém que se, $x < a$, então $x < a_{\alpha_n}$ a partir de um certo n .

Seria possível dizer que $L(x) < L(a_{\alpha_n}) \leq b$, uma vez que a função é crescente. Pela transitividade, teríamos que $L(x) < b$, o que nos dá um absurdo, pois x foi obtido de forma que $b < L(x)$. Esse absurdo surgiu por admitirmos que $L(a) > b$.

Vimos que $L(a) > b$ e $L(a) < b$ são ambos impossíveis, resta-nos admitir que $L(a) = b$.

4.1.9 Consequência 7

Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca ente \mathbb{R}_+^* e \mathbb{R} .

O importante disso é que temos uma tábua de cálculos bem definida para as operações com logaritmos. De costume, somos capazes de calcular $L(a)$ e encontrar b como resultado. Podemos ainda fazer o inverso, ou seja, sabendo que o resultado é b somos capazes de, através de uma tábua de logaritmos, encontrar o valor a que originou b . Lembremos que $L(a) = b$.

A função chamada de exponencial é a que nos dará a tábua inversa dos logaritmos.

4.1.10 Consequência 8

A base de um sistema de logaritmos.

Dada uma função $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único número $a > 0$ tal que $L(a) = 1$. Chamamos este número de base do sistema de logaritmos de L .

Para que saibamos, de antemão, qual é a base de um sistema de logaritmos, podemos indicá-la através da seguinte notação:

$L_a(x)$ quer dizer o logaritmo de x calculado na base a

Como consequência, se L_a e L_b são funções logarítmicas, então temos que $L_a(a) = 1$ e $L_b(b) = 1$.

Por conta do teorema 1, podemos dizer que existe algum $c > 0$ de forma que $L_a(x) = c \cdot L_b(x)$. Se fizermos $x = b$ teremos que $L_a(b) = c \cdot 1$ e assim conseguiremos escrever que $L_a(x) = L_a(b) \cdot L_b(x)$, para todo $x > 0$.

Chamamos de mudança de base o procedimento anterior. Podemos transformar uma função logarítmica de base a em outra de base b , precisando conhecer apenas o valor de $L_a(b)$ (o logaritmo de b calculado na base a).

As bases mais comuns são $e = 2,71828\dots$ e 10 . Em alguns casos, pode ser que a função $L(x)$ não apareça indicando a base. Por convenção, costuma-se dizer que a base é igual a 10 quando a mesma não está explícita.

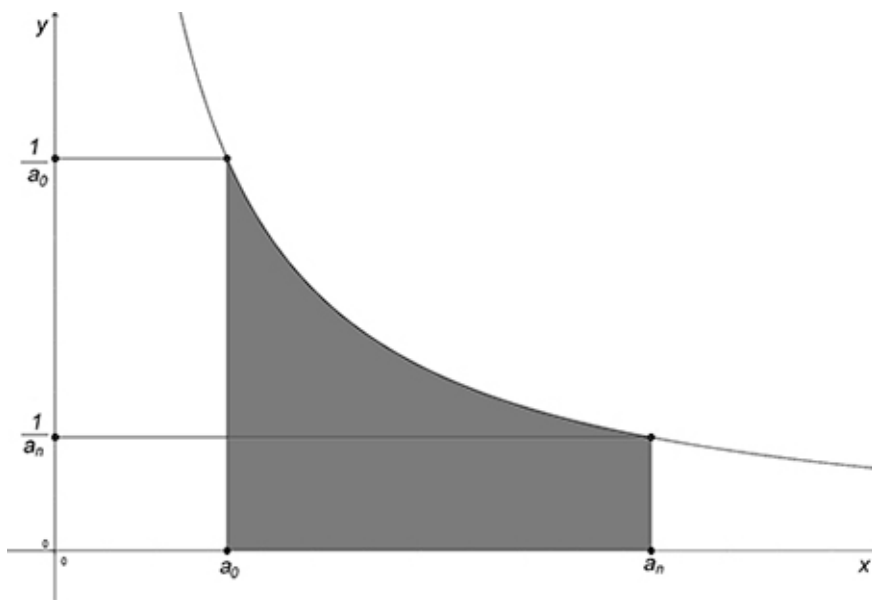
4.2 Logaritmo natural

Estudaremos, nesta seção, o logaritmo natural. Conheceremos um sistema de logaritmos que utilizaremos para realizar cálculos e resolver problemas práticos.

4.2.1 Algumas definições

Precisamos entender alguns conceitos que nos esclarecerão a ideia de logaritmo natural. Abaixo, veremos algumas definições que nos ajudarão nessa empreitada.

Definição: Dados dois números reais positivos a_0 e a_n , onde $a_0 < a_n$. Dizemos que a faixa da hipérbole, $H_{a_0}^{a_n}$, é uma região do plano limitada pelas retas $x = a_0$, $x = a_n$, pelo eixo das abscissas e pela hipérbole $H = \{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\}$.



A faixa $H_{a_0}^{a_n}$ está representada pela região sombreada na figura acima.

Seria interessante que conseguíssemos calcular a área da região $H_{a_0}^{a_n}$. Para isso dividiremos o intervalo $H_{a_0}^{a_n}$ em um número finito de intervalos justapostos. Após uma divisão deste intervalo em n partes, teremos os intervalos $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, \dots , $[a_{n-1}, a_n]$ ⁹.

Podemos aproximar a área da região $H_{a_0}^{a_n}$ por retângulos. Conseguiremos isso, pegando cada um dos intervalos $[a_i, a_{i+1}]$, onde i é um número inteiro tal que $0 \leq i < n$, e multiplicando $\frac{1}{a_{i+1}}$ pela diferença entre os valores dos extremos do intervalo em questão.

A área do retângulo, que tem como base o intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ e altura $\frac{1}{a_{i+1}}$, pode ser dada pela seguinte expressão:

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \frac{1}{a_{i+1}}$$

Diremos que o retângulo acima está inscrito na faixa $H_{a_0}^{a_n}$ e que o conjunto desses retângulos inscritos forma um polígono, que chamaremos de polígono retangular inscrito na faixa $H_{a_0}^{a_n}$. A área do polígono retangular inscrito pode ser calculada pela expressão:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \frac{1}{a_{i+1}}$$

Uma premissa importante é sobre o refinamento deste resultado. Quanto maior for o valor de n , mais refinado será o resultado para a área do polígono retangular inscrito. Com mais intervalos, conseguimos diminuir o erro existente no cálculo. Isso se torna bem evidente se dividirmos um intervalo qualquer ao meio.

A ideia pode ser expandida para todo o polígono retangular. Logo podemos dividir todos os intervalos ao meio e conseguir um valor superior ao que já tínhamos anteriormente para a área do polígono retangular inscrito.

Para que a premissa mencionada seja válida, precisamos prová-la. A prova deste fato é bem simples. Basta que realizemos os cálculos de ambas as áreas.

⁹Fica subentendido que, em um intervalo $[a_i, a_{i+1}]$, temos $a_0 \leq a_i < a_{i+1} \leq a_n$

Queremos provar que a área do retângulo que tem como base o intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ e altura $\frac{1}{a_{i+1}}$, é menor do que a soma das áreas dos retângulos formados pela divisão deste intervalo ao meio, ou seja, da área do retângulo, cuja base é o intervalo $[a_i, \frac{a_i+a_{i+1}}{2}]$ e altura $\frac{2}{a_i+a_{i+1}}$, somada com a área do retângulo, cuja base é o intervalo $[\frac{a_i+a_{i+1}}{2}, a_{i+1}]$ e altura $\frac{1}{a_{i+1}}$.

Embora os cálculos sejam bem simples, a prova pode ser intuitiva. As figuras seguintes poderão ser mais esclarecedoras.

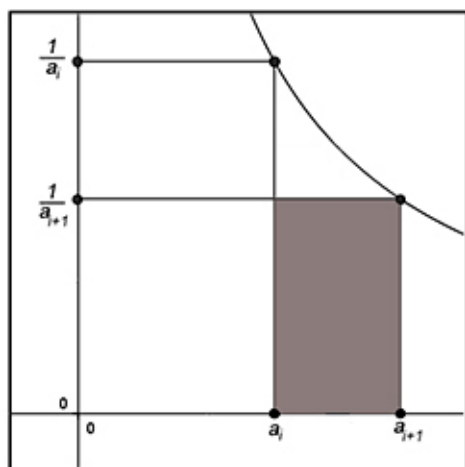


Figura 1

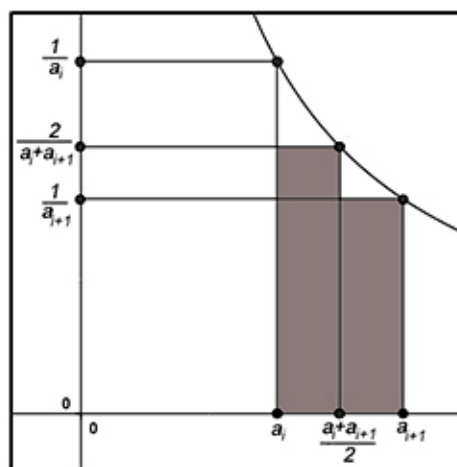


Figura 2

As imagens acima, dão-nos uma "prova" visual. Podemos ver claramente que a área da figura 2 é maior do que a área da figura 1. As figuras 1 e 2 dispensam os resultados algébricos.

Definição: Diremos que a área da faixa $H_{a_0}^{a_n}$ é o número real, cujas aproximações, por falta, são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em $H_{a_0}^{a_n}$.

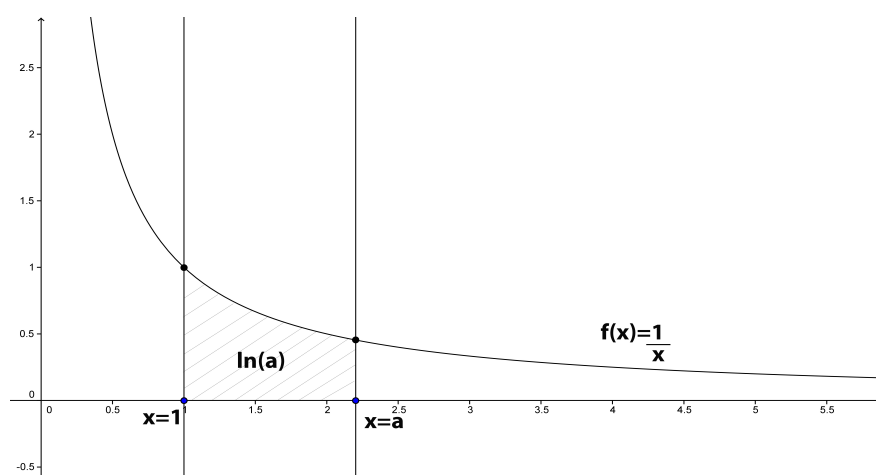
Podemos pensar que, se tivermos $A = \text{área da faixa } H_{a_0}^{a_n}$, então poderemos dizer que, dado qualquer número real $a < A$, existe um polígono retangular P , inscrito em $H_{a_0}^{a_n}$, tal que $a < \text{área de } P < A$.

4.2.2 O $\ln(a)$

Definição: O *logaritmo natural de a* é o número real dado pela área da faixa H_1^a se $a > 1$ ou pelo número real simétrico à área da faixa H_a^1 caso $0 < a < 1$.

Sabemos que, por conta da consequência 1, o valor de $L(1)$ independente de sua base é igual a 0. Este fato se confirma com relação a definição dada pela área, uma vez que, se $a = 1$, não existe área a ser calculada. Diremos então que $H_1^1 = 0$.

A seguir, podemos ver uma figura que representa o $\ln(a)$.



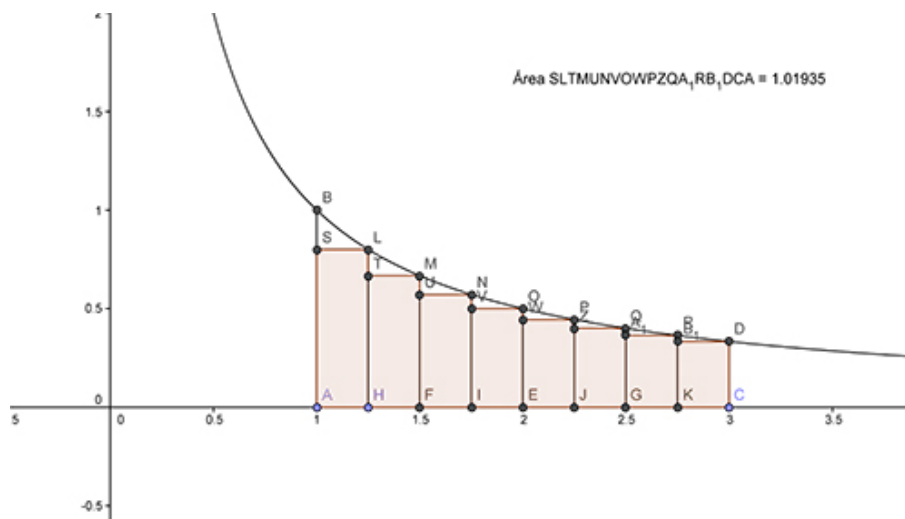
Para que esta definição faça sentido, precisamos mostrar que a função está bem definida e representa, de fato, uma função logarítmica.

4.2.3 Cálculo do $\ln(a)$

Fazer o cálculo da área de uma região desconhecida pode, por vezes, ser difícil, porém adotaremos a técnica de aproximação mencionada anteriormente. A partir dos polígonos retangulares inscritos, seremos capazes de aproximar o valor do $\ln(a)$, por falta, tanto quanto desejarmos.

A área não sombreada, embora faça parte da área que queremos, não faz parte do nosso cálculo. A diferença que essa área irá produzir no nosso resultado é dada como um valor de erro.

No exemplo, a seguir, temos um cálculo para $\ln(3)$ aproximado por falta. O valor aproximado pela calculadora para $\ln(3)$ é 1,09861, logo, se compararmos o nosso resultado (1,01935) com o valor dado pela calculadora, teremos um erro de 0,07926 aproximadamente. Este erro pode ser considerado bem pequeno, uma vez que utilizamos apenas oito intervalos.



4.2.4 Consequência da aproximação para $\ln(a)$

Temos uma consequência bem curiosa para o cálculo das áreas dos polígonos retangulares inscritos. Dado um intervalo $[a, b]$, a área H_a^b calculada neste intervalo, conforme vimos na subseção anterior¹⁰, é igual a área $H_{a \cdot k}^{b \cdot k}$ calculada no intervalo $[a \cdot k, b \cdot k]$. Vejamos a demonstração para isto:

- $H_a^b = (b - a) \cdot f(b) = (b - a) \cdot \frac{1}{b} = 1 - \frac{a}{b}$
- $H_{a \cdot k}^{b \cdot k} = (b \cdot k - a \cdot k) \cdot f(b \cdot k) = (b \cdot k - a \cdot k) \cdot \frac{1}{b \cdot k} = 1 - \frac{a}{b}$

Logo, mostramos que vale a igualdade $H_a^b = H_{a \cdot k}^{b \cdot k}$. Fizemos a demonstração para a aproximação da área por falta.

¹⁰A área está sendo aproximada por falta. O cálculo leva em conta os polígonos retangulares inscritos.

4.2.5 A definição para $\ln(a)$ é boa?

Ainda não provamos que a nossa definição para logaritmos naturais seja boa, porém podemos mostrar, com facilidade, que o nosso logaritmo está bem definido. Para mostrar que a nossa definição para $\ln(x)$ é boa, temos de garantir as duas propriedades que caracterizam um logaritmo.

Primeiro vamos mostrar que a nossa função $\ln(x)$ é crescente. Esta parte não exige uma demonstração formal, uma vez que é bem intuitiva.

A nossa função é claramente crescente e sua aceitação bem simples, pela própria construção. Temos dois casos:

No caso onde $a > 1$ podemos ver que quanto maior for o valor de a , maior será a área da faixa H_1^a que encontraremos e portanto maior será o $\ln(a)$.

No caso onde $0 < a < 1$ é o contrário. Quanto menor o valor de a , maior será a área da faixa H_a^1 . No entanto, quando temos $0 < a < 1$, então $\ln(a)$ é igual ao número real simétrico ao valor da área. Assim fica satisfeita a propriedade 1.

Já a propriedade 2 não é tão óbvia. Para garanti-la, precisaremos mostrar que $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Vamos analisar o que significa $\ln(a \cdot b)$. De acordo com a nossa definição para $\ln(x)$, o que queremos calcular é $H_1^{a \cdot b}$. Para calcular a área correspondente a esta faixa, utilizaremos uma separação de intervalos, que será feita da seguinte forma:

$$H_1^{a \cdot b} = H_1^a + H_a^{a \cdot b}$$

Vimos, anteriormente, que a igualdade $H_a^b = H_{a \cdot k}^{b \cdot k}$ é válida, então, podemos concluir que $H_1^b = H_{1 \cdot a}^{b \cdot a} = H_a^{a \cdot b}$. Assim, temos:

$$H_1^{a \cdot b} = H_1^a + H_a^{a \cdot b} = H_1^a + H_1^b$$

Nesse ponto, o que mostramos é que o cálculo feito, para os polígonos retangulares inscritos, cumpre a propriedade 2 perfeitamente. Como podemos aproximar, o quanto quisermos, a área de uma faixa por polígonos retangulares inscritos, isso implica que o mesmo vale para a área de uma faixa qualquer.¹¹

¹¹A demonstração foi feita para $a > 1$, mas a demonstração para $0 < a < 1$ é análoga.

Podemos escrever que, se $H_1^{a \cdot b} = H_1^a + H_1^b$ então $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Por fim, podemos dizer que a segunda propriedade também é satisfeita e, desta forma, temos que o nosso logaritmo natural está bem definido.

4.3 O número e

Para o logaritmo natural, temos uma base especial que chamaremos de e . Este número é irracional e sua aproximação com 10 casas decimais é 2,7182818284. Este número é a base do logaritmo natural $\ln(x)$, onde $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Assim temos que $\ln(e) = 1$.

Veremos, a seguir, de onde surge o número e e como podemos mostrar isso através do que estudamos anteriormente.

4.3.1 De onde vem o número e ?

O número e surge da expressão

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

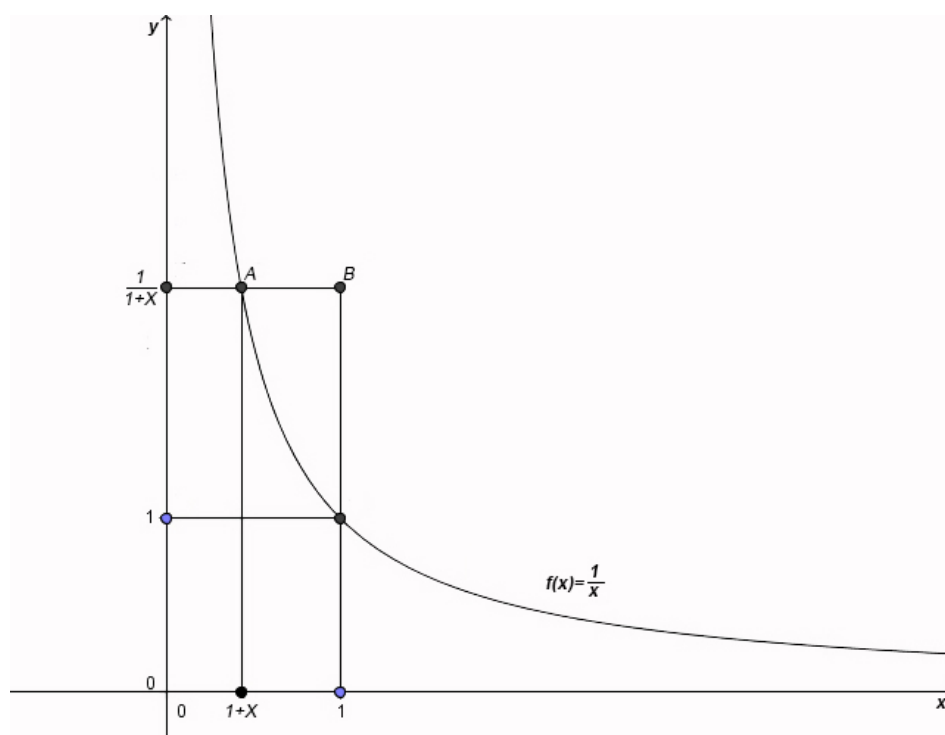
Lê-se o limite da expressão, quando n tende ao infinito positivo. Esta expressão pode ser explicada sem mesmo precisarmos ver formalmente o conceito de limite. A ideia é calcular o valor da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ para um n cada vez maior.

- Para $n=1$ temos $(1 + \frac{1}{1})^1 = 2$
- Para $n=2$ temos $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$
- Para $n=12$ temos $(1 + \frac{1}{12})^{12} = 2,6130352902$ (valor aproximado em 10 casas decimais)

Quanto maior for o número n mais perto de $e = 2,7182818284$ (valor truncado na décima casa decimal) estará o resultado da expressão.

4.3.2 De onde vem a expressão que dá o valor de e ?

Já vimos que o número e é dado por uma aproximação à qual chamamos de limite. O que queremos ver agora é de onde surge esta expressão. Com o que estudamos, até aqui, consideraremos duas ilustrações que, praticamente, nos mostrarão esta expressão. Veja, a seguir, a primeira ilustração:



Na ilustração acima, temos que $-1 < x < 0$, portanto $1 + x < 1$. Note que a curva representa a função $f(x) = \frac{1}{x}$, onde $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Dados os pontos $A = (1 + x, \frac{1}{1+x})$ e $B = (1, \frac{1}{1+x})$, é fácil ver que a área composta pelo retângulo, cujos vértices são os pontos $A, B, (1, 0)$ e $(1+x, 0)$, é maior do que a área da faixa H_{1+x}^1 . Do mesmo modo, a área da faixa H_{1+x}^1 é maior do que a área formada pelo retângulo cujos vértices são os pontos $(1, 1), (1, 0), (1+x, 0)$ e $(1+x, 1)$.

Lembremos que, se $0 < x < 1$, então $H_x^1 = -\ln(x)$. Fazendo o cálculo das áreas, temos, respectivamente:

Área 1

$$\text{Base: } 1 - (1 + x) = 1 - 1 - x = -x$$

$$\text{Altura: } f(1 + x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\text{Área: base} \cdot \text{altura} = -x \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

Área 2

$$H_{1+x}^1 = -\ln(1 + x), \text{ note que } 1 + x < 1.$$

Área 3

$$\text{Base: } 1 - (1 + x) = 1 - 1 - x = -x$$

$$\text{Altura: } f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Área: base} \cdot \text{altura} = -x \cdot 1 = -x$$

Somos capazes de escrever a seguinte desigualdade:

$$\frac{-x}{1+x} > -\ln(1+x) > -x$$

Dividiremos toda a desigualdade por $-x$ sem alterá-la, uma vez que $-x$ é positivo. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{-x}{1+x}}{-x} &> \frac{-\ln(1+x)}{-x} > \frac{-x}{-x} \\ \frac{1}{1+x} &> \frac{\ln(1+x)}{x} > 1 \\ \frac{1}{1+x} &> \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) > 1 \end{aligned}$$

Fazendo $x = \frac{1}{n}$, observamos a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) > 1$$

Podemos tomar n tão grande quanto quisermos. Para isso, somos obrigados a escrever:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) > \lim_{n \rightarrow +\infty} 1$$

Claramente temos que o primeiro limite tende a 1, pois $\frac{1}{n}$ tende a 0 e portanto $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ tende a 1. O último limite é trivial, pois não temos n na expressão. Então, a própria expressão é o resultado do limite.

Concluimos que o limite de $\ln((1 + \frac{1}{n})^n)$ também deverá ser igual a 1. Ao aproximar $e = (1 + \frac{1}{n})^n$ para um n grande, temos $\ln(e) = 1$.

Repare que passamos da desigualdade para a desigualdade dos limites. Isto pode ser feito, pois o teorema do confronto, narrado a seguir, garante tal passagem.

Teorema do confronto: Sejam $f(x), g(x)$ e $h(x)$ funções reais contidas em um domínio $D \subseteq \mathbb{R}$, seja a um ponto deste domínio tal que $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ e seja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = t$$

então temos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = t$$

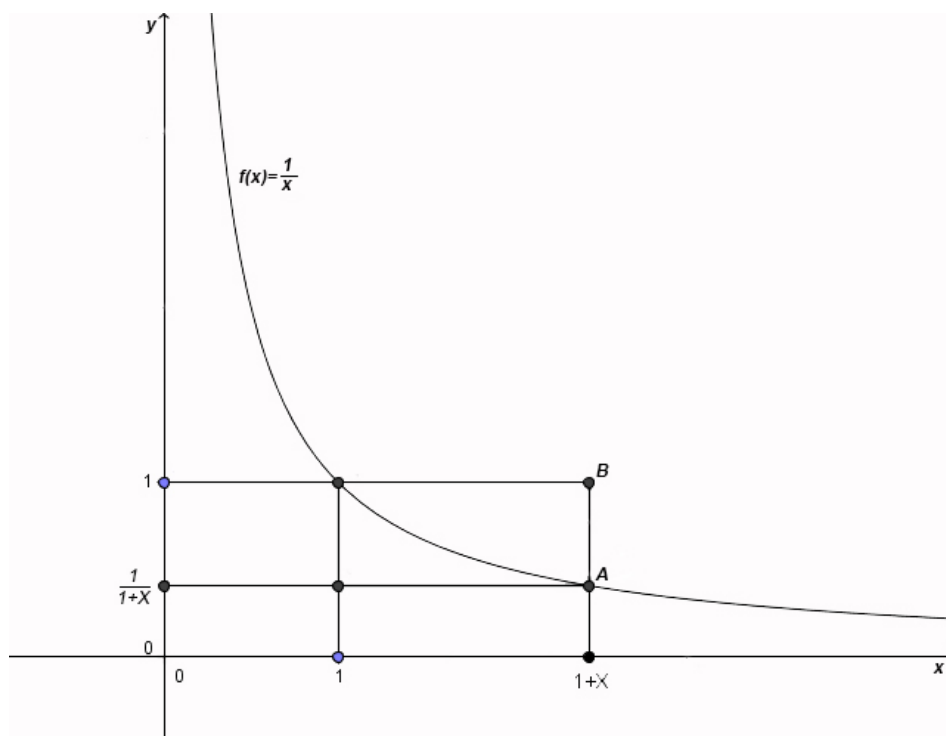
Esse teorema não é o tema do nosso trabalho, portanto, não será demonstrado, porém pode-se ver sua demonstração no livro de Análise Real do professor Elon Lages Lima.

Na ilustração, a seguir, temos que $x > 0$ e portanto $1 + x > 1$.

Note que a curva representa a função $f(x) = \frac{1}{x}$, onde $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Dados os pontos $A = (1 + x, \frac{1}{1+x})$ e $B = (1 + x, 1)$, é fácil ver que a área composta pelo retângulo, cujos vértices são os pontos $(1, 1)$, B , $(1 + x, 0)$ e $(1, 0)$, é maior do que a área da faixa H_1^{1+x} . Do mesmo modo, a área da faixa H_1^{1+x} é maior do que a área formada pelo retângulo cujos vértices são os pontos $(1, \frac{1}{1+x})$, A , $(1 + x, 0)$ e $(1, 0)$.

Lembremos que, se $x > 1$, então $H_1^x = \ln(x)$. Fazendo o cálculo das áreas, temos, respectivamente:



Área 1

Base: $1 + x - 1 = x$

Altura: $f(1) = \frac{1}{1} = 1$

Área: base \cdot altura $= x \cdot 1 = x$

Área 2

$H_1^{1+x} = \ln(1+x)$, note que $1+x > 1$.

Área 3

Base: $1 + x - 1 = x$

Altura: $f(1+x) = \frac{1}{1+x}$

Área: base \cdot altura $= x \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

Somos capazes de escrever a seguinte desigualdade:

$$x > \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$$

Dividiremos toda a desigualdade por x sem alterá-la, uma vez que x é positivo. Com isso temos que:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x} &> \frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{\frac{x}{1+x}}{x} \\ 1 &> \frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{1+x} \\ 1 &> \ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) > \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

Fazendo $x = \frac{1}{n}$ teremos a desigualdade:

$$1 > \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) > \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Podemos tomar n tão grande quanto quisermos. Para isso somos obrigados a escrever:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 > \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) > \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

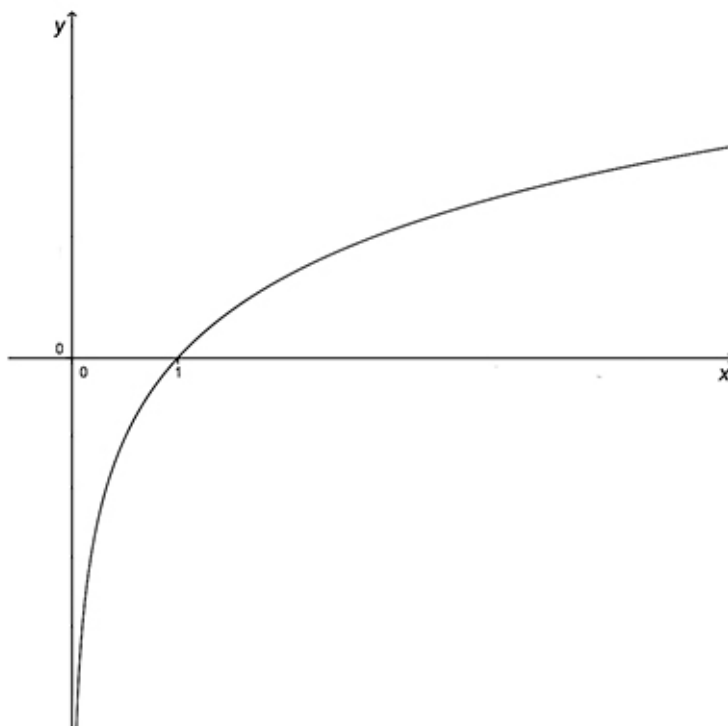
Claramente, temos que o terceiro limite tende a 1, pois $\frac{1}{n}$ tende a 0 e, então, $\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ tende a 1. O primeiro limite é trivial pois não temos n na expressão, então a própria expressão é o resultado do limite.

Concluimos que o limite de $\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ também deverá ser igual a 1. Ao aproximar $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para um n grande, temos $\ln(e) = 1$.

4.4 O gráfico da função $L(x)$

Nesta seção, veremos como é o formato do gráfico da função $L(x)$. Trataremos do gráfico em que a função $L(x)$ é crescente, isto é, a base é maior do que 1. As ideias, que seguirão, também se aplicam se tratarmos a função $L(x)$ como decrescente. Neste caso, a base será um número real entre 0 e 1.

O gráfico da função $L(x)$ encontra-se a seguir.



Vamos analisar algumas premissas que indicarão se o gráfico acima poderia representar uma função logarítmica.

A função $L(x)$ é crescente

Olhando o gráfico podemos ter a certeza de que a função $L(x)$ é crescente. Além disso, podemos notar que a mesma está definida de forma que $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical e todo o gráfico está construído à direita desta.

Podemos notar que algumas referências também estão presentes no gráfico, por exemplo, $L(1) = 0$. Além do ponto $(1, 0)$ pertencer ao gráfico podemos ver que para os valores de $x < 1$ temos $f(x) < 0$ e quando $x > 1$ temos $f(x) > 0$.

A função $L(x)$ apresenta um crescimento lento

É fato que uma função logarítmica sempre apresentará um crescimento lento a longo prazo, uma vez que um sistema de logaritmos tem a característica de transformar uma multiplicação em uma soma.

Dado um $a > 1$ podemos¹² dizer que, para um n suficientemente grande, teremos que $a^n > n \cdot a$. Isso implica em dizer que para, um n grande, teremos $a^n > n \cdot a > L(a^n) = n \cdot L(a)$.

A ideia, acima, nos diz que a partir de um determinado momento, x se tornará muito maior do que $L(x)$, e a cada incremento em x maior ainda será essa diferença.

A partir de um n grande a inclinação da curva será inferior a 45° , e como $L(x)$ tende a ser muito menor do que x , esta inclinação tende a diminuir cada vez mais. O gráfico é capaz de nos mostrar isso.

Podemos concluir que não há nada que impeça o gráfico acima de representar uma função logarítmica¹³.

¹²A demonstração para este fato será omitida, mas pode ser realizada através de indução finita.

¹³Não podemos ver um gráfico e garantir que este representa uma função logarítmica, para isso precisaríamos conhecer todos os seus infinitos pontos. Essa análise é útil para garantirmos que um determinado gráfico não possa representar uma função logarítmica

Capítulo 5

Funções exponenciais

Falaremos, neste capítulo, de uma função que é essencial para trabalharmos com os logaritmos. Trata-se da função exponencial.

As funções exponenciais, além de aparecerem mais facilmente nos problemas, são inversas às funções logarítmicas. Por conta de sua importância, temos de conhecê-las um pouco mais.

5.1 Caracterização da função do tipo exponencial

Para cada b e t reais, suponhamos dado um número $f(b, t) > 0$ com as seguintes propriedades:

1) $f(b, t)$ depende linearmente de b e é monótona injetiva em relação a t ;

2) $f(b, s + t) = f(f(b, s), t)$.

Então, pondo $a = f(1, 1)$, tem-se $f(b, t) = b \cdot a^t$

Por conseguinte, temos que

$$f(k \cdot b, t) = k \cdot b \cdot a^t = k \cdot (b \cdot a^t) = k \cdot f(b, t)$$

Esta forma de caracterizar uma função exponencial talvez pareça um pouco estranha, mas não é de difícil entendimento.

Suponha que t seja o tempo transcorrido, então, quando calculamos $f(b, 0)$, temos como retorno o valor b que é o valor inicial da função no instante $t = 0$.

Em uma função do tipo exponencial, se começarmos com um valor inicial (no caso b) e deixamos transcorrer o tempo $s + t$ é o mesmo que começar com um valor inicial $f(b, s)$ e deixar transcorrer o tempo t , ou seja, aplicar o valor inicial b e deixar transcorrer o tempo s e, em seguida, deixar transcorrer o tempo t é o mesmo que aplicar o valor inicial b a um tempo $s + t$.

Esta segunda característica nos dará pistas importantes para que consigamos resolver problemas mais adiante. Sempre que observarmos estas características em um problema, ele tratará de funções exponenciais e, por conseguinte, de logaritmos.

5.2 A função exponencial

Existe uma leve diferença entre a função do tipo exponencial e a função exponencial. Embora ambas tenham características semelhantes, a função exponencial não tem o valor inicial b .

5.2.1 Caracterização da função exponencial

Seja a um número real positivo diferente de 1, a função exponencial de base a , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e

$x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

2) $a^1 = a$;

3) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

As funções exponenciais apresentam um crescimento muito rápido quando $a > 1$, ou um decrescimento muito rápido quando $0 < a < 1$.

5.3 A função exponencial é a inversa da função logarítmica

Já vimos que uma das maneiras de definir uma função logarítmica é através da inversa de uma função exponencial. Poderemos notar, a partir disso, que as propriedades de ambas as funções são respeitadas se assim a definirmos. Seja a um número real maior do que zero e diferente de 1, podemos dizer que:

$$L_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Vejamos que as propriedades de ambas as funções são equivalentes.¹ Vamos mostrar todas as equivalências em duas partes:

Equivalência 1: $f(y) = a^y$ é crescente $\Leftrightarrow L_a(x)$ é crescente

Parte 1: $f(x)$ é crescente $\Rightarrow L_a(x)$ é crescente

$$\begin{aligned} y_1 < y_2 &\Rightarrow a^{y_1} < a^{y_2} \\ y_1 < y_2 &\Rightarrow x_1 < x_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Temos ainda que:

$$y_1 < y_2 \Rightarrow L_a(x_1) < L_a(x_2) \tag{5.2}$$

Sabemos que a função $f(y)$ é crescente. Por isso há a implicação 5.1. Note que $x = f(y)$ e $y = L_a(x)$, isso surge da definição e nos garante a validade da implicação 5.2.

¹Foi utilizado $a > 1$ para mostrar as equivalências entre as funções logarítmicas e exponenciais. Continuaremos utilizando a definição 1 para a função logarítmica, que é caracterizada por duas propriedades (uma delas onde a função é crescente e nesse caso precisamos que $a > 1$ obrigatoriamente). Isso não impede que a demonstração seja realizada para $0 < a < 1$, mas deve-se utilizar o fato da função logarítmica ser decrescente.

Parte 2: $f(x)$ é crescente $\Leftrightarrow L_a(x)$ é crescente

$$\begin{aligned}x_1 < x_2 &\Rightarrow L_a(x_1) < L_a(x_2) \\x_1 < x_2 &\Rightarrow y_1 < y_2\end{aligned}\tag{5.3}$$

Temos ainda que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{y_1} < a^{y_2}\tag{5.4}$$

A implicação 5.3 decorre da função $L_a(x)$ ser crescente. Novamente, por conta da definição, temos que $x = f(y)$ e $y = L_a(x)$ e isto valida a implicação 5.4.

Equivalência 2: $a^1 = a \Leftrightarrow L_a(a) = 1$

Parte 1: $a^1 = a \Rightarrow L_a(a) = 1$

$$\begin{aligned}a^1 &= a \\L_a(a^1) &= L_a(a)\end{aligned}\tag{5.5}$$

$$L_a(a^1) = 1 \quad \text{por definição}\tag{5.6}$$

De 5.5 e 5.6 temos que $L_a(a) = 1$.

Parte 2: $a^1 = a \Leftrightarrow L_a(a) = 1$

$$\begin{aligned}L_a(a) &= 1 \\a &= a^1 \quad \text{por definição}\end{aligned}\tag{5.7}$$

A igualdade 5.7 surge da própria definição e apresenta-se de forma bem clara.

Equivalência 3: $a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2} \Leftrightarrow L_a(x_1 \cdot x_2) = L_a(x_1) + L_a(x_2)$

Parte 1: $a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2} \Rightarrow L_a(x_1 \cdot x_2) = L_a(x_1) + L_a(x_2)$

$$\begin{aligned}a^{y_1} \cdot a^{y_2} &= a^{y_1+y_2} \\L_a(a^{y_1} \cdot a^{y_2}) &= L_a(a^{y_1+y_2})\end{aligned}\tag{5.8}$$

$$L_a(a^{y_1+y_2}) = y_1 + y_2 \quad \text{por definição}\tag{5.9}$$

$$y_1 + y_2 = L_a(x_1) + L_a(x_2)\tag{5.10}$$

De 5.8, 5.9 e 5.10 temos que $L_a(a^{y_1} \cdot a^{y_2}) = L_a(x_1) + L_a(x_2)$. Sabemos ainda que $L_a(a^{y_1} \cdot a^{y_2}) = L_a(x_1 \cdot x_2)$, portanto $L_a(x_1 \cdot x_2) = L_a(x_1) + L_a(x_2)$.

$$\text{Parte 2: } a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2} \Leftrightarrow L_a(x_1 \cdot x_2) = L_a(x_1) + L_a(x_2)$$

$$L_a(x_1 \cdot x_2) = L_a(x_1) + L_a(x_2)$$

$$L_a(a^{y_1} \cdot a^{y_2}) = L_a(a^{y_1}) + L_a(a^{y_2}) \quad (5.11)$$

$$L_a(a^{y_1}) + L_a(a^{y_2}) = y_1 + y_2 \quad \text{por definição} \quad (5.12)$$

De 5.11 e 5.12 temos que $L_a(a^{y_1} \cdot a^{y_2}) = y_1 + y_2$. Por definição podemos dizer que $a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2}$.

Em todos os casos anteriores, a definição dada para a função logarítmica, como sendo a inversa da função exponencial, foi fundamental para demonstrar que, ao partirmos das propriedades de uma das funções, somos capazes de chegar nas propriedades da função inversa da qual partimos. Certamente teríamos problemas para demonstrar tal fato caso a definição dada não fosse válida.

5.4 Conveniência

A aplicação de função logarítmica nem sempre é muito simples. Antes de aplicá-la, precisamos reconhecer maneiras para utilizarmos, de forma conveniente, as funções logarítmicas.

5.4.1 Resolvendo uma equação exponencial

Podemos utilizar logaritmos para resolver uma equação exponencial. O logaritmo, através de suas propriedades, é capaz de minimizar o problema de um expoente que venha a nos atrapalhar.

É importante lembrarmos que a maioria das equações exponenciais, oriundas de problemas reais, têm resultados irracionais. Fazer o cálculo por aproximação do resultado de uma equação pode ser muito trabalhoso, mas fazer este mesmo cálculo por aproximação para várias equações pode ser ainda pior.

Neste ponto, os logaritmos nos facilitam. O que precisamos é conhecer uma tabela para eles. Essa tabela pode vir por cálculos de equações

exponenciais ou através de definições como a que foi dada no capítulo 4 para a função $\ln(x)$, porém o mais importante é que os cálculos só precisarão ser feitos uma vez.

Abaixo, podemos ver como nos livramos de um expoente indesejado:

$$\begin{aligned}3^x &= 8 \\ \ln(3^x) &= \ln(8) \\ x \cdot \ln(3) &= \ln(8) \\ x &= \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \\ x &\cong \frac{2,07944}{1,09861} \\ x &\cong 1,89279\end{aligned}$$

Para resolver a equação exponencial acima, tivemos de utilizar uma das consequências provenientes das propriedades que caracterizam um sistema de logaritmos, o valor de $\ln(8)$ e o valor de $\ln(3)$.

A ideia para resolver o problema foi simples. Ao aplicarmos o logaritmo natural de ambos os lados, mantivemos a igualdade e nos livramos do problema, que era o x como expoente do 3.

Qualquer tipo de problema que recaia em uma equação exponencial, como esta, pode ser resolvido através do procedimento acima.

5.4.2 Transformação de progressões geométricas em progressões aritméticas

Podemos utilizar os logaritmos para sair de um conjunto de dados e chegar em outro, como, transformar uma progressão geométrica em uma progressão aritmética.

Veamos a seguir uma tabela informativa que nos mostra a relação entre a pressão sonora (Pa) e o nível sonoro (dB) em decibel.²

²CRISTÓFARO-SILVA, Thais ; YEHIA, Hani Camille . Sonoridade em Artes, Saúde e Tecnologia. Belo Horizonte: Faculdade de Letras, 2009. Disponível em <http://fonologia.org>. ISBN 978-85-7758-135-1.



Existe uma relação entre Pa e dB. Queremos descobrir esta relação e, a partir disso, montar uma função entre Pa e dB, uma vez que as medições são feitas em Pa e interpretadas em dB.

Repare que as marcações em Pa estão sempre multiplicadas por 10 e as relações em dB estão sempre somadas em 20, ou seja, temos uma progressão geométrica que é transformada em uma progressão aritmética (característica de um logaritmo).

Vamos escrever uma relação para Pa e uma relação para dB utilizando

um mesmo parâmetro t , conforme abaixo:

$$Pa(t) = 2 \cdot 10^t \quad (5.13)$$

$$dB(t) = 20t + 100 \quad (5.14)$$

Façamos $P(t) = x$ e $dB(t) = y$, e isolemos o t em cada caso. Teremos:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 10^t \\ \ln(x) &= \ln(2 \cdot 10^t) \\ \ln(x) &= \ln(2) + \ln(10^t) \\ \ln(x) &= \ln(2) + t \cdot \ln(10) \\ \ln(x) - \ln(2) &= t \cdot \ln(10) \\ \ln\left(\frac{x}{2}\right) &= t \cdot \ln(10) \\ \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} &= t \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} y &= 20t + 100 \\ y - 100 &= 20t \\ \frac{y - 100}{20} &= t \end{aligned} \quad (5.16)$$

Desta maneira, transformamos a equação 5.13 na equação 5.15 e a equação 5.14 na equação 5.16. Vamos igualar a equação 5.16 à equação 5.15. Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{y - 100}{20} &= \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} \\ y - 100 &= 20 \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} \\ y &= 20 \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} + 100 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para montarmos a nossa função, colocaremos y em função de x . Assim basta dizer que $y = f(x)$. Também precisamos definir o domínio e o contradomínio da função f .

Desta forma, a função que procuramos possui dois conjuntos (A e B), onde $f : A \rightarrow B$.

Embora possamos definir $A = \mathbb{R}_+^*$ e $B = \mathbb{R}$, não é nosso interesse tomar conjuntos tão grandes. Queremos apenas uma correspondência entre os conjuntos que nos interessam, ou seja, queremos criar uma correspondência entre o conjunto de dados da pressão sonora e dos decibéis audíveis ao ser humano.

Sabemos, de antemão, que o conjunto $B = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 130\}$, logo temos a possibilidade de fazer o cálculo para os valores dos extremos do intervalo real que definirá o conjunto A .

O extremo inferior do conjunto A já é nosso conhecido e vale $2 \cdot 10^{-5}$. Agora basta encontrarmos o extremo superior do conjunto A . Sabemos que, dado um valor para $x \in A$, seu correspondente $y \in B$ é 130 (valor extremo do conjunto B). Ao substituirmos y por 130 na equação 5.17 teremos o valor de x , que é o extremo superior do conjunto A . Vejamos:

$$\begin{aligned} y &= 20 \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} + 100 \\ 130 &= 20 \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} + 100 \\ 130 - 100 &= 20 \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} \\ 30 &= 20 \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} \\ \frac{30 \cdot \ln(10)}{20} &= \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\ \ln(10)^{\frac{3}{2}} &= \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\ (10)^{\frac{3}{2}} &= \frac{x}{2} \\ 20 \cdot \sqrt{10} &= x \end{aligned}$$

A função que transforma a escala de pressão sonora em decibéis é dada por:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) = 20 \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(10)} + 100 \end{aligned}$$

Onde o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} | 2 \cdot 10^{-5} < x < 20\sqrt{10}\}$ e o conjunto $B = \{f(x) = y \in \mathbb{R} | 0 < y < 130\}$.

Esta função nos permite pegar os dados medidos como pressão sonora (Pa) (representados pelo conjunto A) e convertê-los em decibel (dB) (representados pelo conjunto B).

Através desta função é mais fácil analisar os dados pretendidos, uma vez que a análise é feita na escala decibel.

5.5 Aplicação

Veremos, agora, alguns problemas e suas soluções como forma de aplicação.

5.5.1 O problema do santo sudário de Turim

Antes de apresentar o problema, precisamos entender o significado do teste do carbono-14 ou C^{14} .

Alguns materiais, principalmente os orgânicos ou provenientes deles, possuem uma certa quantidade radiativa de C^{14} . Como exemplo desses materiais temos a madeira, tecidos, ossos, etc.

Sabe-se que a quantidade de C^{14} cai pela metade após passados 5730 anos. Se um determinado material tem 5kg de C^{14} , após 5730 anos ele terá 2,5kg de C^{14} e assim por diante. Dizemos que 5730 anos é a meia-vida do C^{14} .

[PROBLEMA] Em 1357, teria aparecido, na França, um tecido que envolveu Jesus Cristo após sua morte. Esse tecido ficou conhecido como santo sudário.

Os sudários eram tecidos utilizados para envolver o corpo de uma pessoa após a sua morte. Em 1578, esse tecido foi levado à catedral de Turim, na Itália, e lá permanece até hoje. Alguns textos falam da presença dessa relíquia em Jerusalém no ano 640 d.C. e, no ano 1150 d.C., em Constantinopla.

No ano 1988 d.C., o santo sudário foi datado através do teste de C^{14} constatando-se que o tecido teria cerca de 0,9154800 vezes (aproximadamente) a

quantidade de C^{14} de um tecido feito do mesmo material no ano de 1988. Sendo assim, será mesmo que o tecido teria sido fabricado na época de Jesus Cristo?

[SOLUÇÃO] Repare que neste problema temos um dado muito importante que é a meia-vida do C^{14} , pois a quantidade de C^{14} sempre reduz pela metade após 5730 anos. Como a quantidade sempre cai pela metade após passado o mesmo período de tempo, devemos ser capazes de criar uma função $f(b, t)$ de forma que b seja a quantidade inicial de C^{14} e t o tempo decorrido.

Dada uma quantidade inicial b de C^{14} e passado o tempo $s + t$, o decrescimento radiativo será o mesmo, caso essa quantidade inicial b de C^{14} seja submetida a um intervalo de tempo s e, após decorrido o tempo s , a nova matéria já decaída seja submetida a um tempo t . Daí $f(b, s + t) = f(f(b, s), t)$.

Algumas pessoas ainda podem confundir a função exponencial com a função afim. O que irá diferenciar as duas é que, neste caso, a meia-vida indica que a cada 5730 anos a quantidade cai pela metade sempre, logo temos de multiplicar a quantidade anterior por 0,5. Caso a função fosse afim, a quantidade reduziria 0,5 a cada 5730 anos e teríamos de subtrair 0,5 da quantidade anterior.

Por fim, temos caracterizada uma função do tipo exponencial, $f(b, t) = b \cdot a^t$ onde $a = f(1, 1)$. Diremos que a quantidade inicial é b e que $t = 5730$ é o tempo da meia-vida, ou seja, quando $t = 5730$ $f(b, t) = \frac{b}{2}$. Vejamos:

$$f(b, 5730) = b \cdot a^{5730} = \frac{b}{2}$$

Podemos utilizar a manipulação, neste momento, para encontrar o valor de a , a saber:

$$\begin{aligned} b \cdot a^{5730} &= \frac{b}{2} \\ a^{5730} &= \frac{b}{2 \cdot b} \\ a^{5730} &= 2^{-1} \\ \ln(a)^{5730} &= \ln(2^{-1}) \\ 5730 \cdot \ln(a) &= -1 \cdot \ln(2) \\ \ln(a) &= \frac{-1 \cdot \ln(2)}{5730} \\ \ln(a) &= \frac{-1 \cdot 0,6931471}{5730} \\ \ln(a) &= -0,0001209681 \\ e^{\ln(a)} &= e^{-0,0001209681} \\ a &= 0,999879039 \end{aligned}$$

Sabemos que a nossa função pode ser descrita por $f(b, t) = b \cdot 0,999879039^t$, assim, após passado um determinado tempo t a função $f(b, t)$ nos retorna a quantidade de C^{14} de uma matéria que tinha sua quantidade inicial igual a b .

No caso do santo sudário, sabemos que a quantidade de C^{14} , em 1988, era de 0,9154800 vezes em relação ao tecido original. Para saber a idade do santo sudário, basta fazer $f(b, t) = 0,9154800 \cdot b$. Daí temos,

$$\begin{aligned} f(b, t) &= b \cdot 0,999879039^t \\ 0,9154800 \cdot b &= b \cdot 0,999879039^t \\ \ln(0,9154800) &= \ln(0,999879039^t) \\ \ln(0,9154800) &= t \cdot \ln(0,999879039) \\ \frac{\ln(0,9154800)}{\ln(0,999879039)} &= t \\ 730 &= t \end{aligned}$$

O tempo que se passou foi cerca de 730 anos, aproximadamente, e, neste caso, o tecido seria datado de 1258 d.C. (1988 – 730), o que tornaria impossível a utilização desse tecido por Jesus Cristo.

Controvérsias a parte, a Igreja continua afirmando que o tecido é de fato o utilizado por Cristo. A polêmica, em relação ao teste, tem outras variáveis como as restaurações que o tecido haveria sofrido no século XIII e, até mesmo, um incêndio que teria danificado parte do tecido. Ambos os fatos poderiam ter contribuído para que o teste sofresse alterações.

5.5.2 A boca e os germes

[PROBLEMA] A boca dos seres humanos tem cerca de 1.000 a 100.000 germes por dente, quando saudável. Além disso, mais de 700 espécies de germes são encontrados em nossas bocas.

Suponha que um cidadão tenha cerca de 40000 germes por dente, após a sua escovação, e que a taxa de crescimento populacional desses germes seja de 1,3 por hora. Após quanto tempo, sem escovar os dentes, esta pessoa estará fora dos padrões de saúde bucal?

[SOLUÇÃO] Novamente, temos neste problema alguns dados interessantes, como o crescimento populacional que se dá a cada hora a uma taxa de 1,3.

Sabemos que, se um cidadão tem uma quantidade b de germes na boca e que, passado um tempo t , esses germes se multiplicam, isto é, existe uma função $f(b, t)$ onde b e t norteiam a população de germes, após um determinado instante t e uma quantidade inicial b de germes.

É fácil observar que, dada uma quantidade inicial b de germes, e passadas s horas, a quantidade de germes será dada por $f(b, s)$. Tomando essa quantidade $f(b, s)$ e deixando-a por mais t horas na boca, o total de germes será o mesmo que se você deixasse a quantidade inicial b de germes por durante $s + t$ horas. Assim temos que $f((b, s), t) = f(b, s + t)$.

A taxa de 1,3 significa que, para saber a quantidade de germes, atualmente, devemos pegar a quantidade de germes na hora anterior e multiplicar por 1,3. Este tipo de taxa de crescimento também nos dá uma ideia de progressão geométrica. Ela está diretamente ligada as funções do tipo exponencial.

Podemos montar uma função do tipo $f(b, t) = b \cdot a^t$. Nesse caso, sabemos que $a = 1,3$ que é a nossa taxa de crescimento, $b = 40000$ que é a nossa

quantidade inicial de germes e t é o tempo que queremos descobrir. Teremos, então, a função dada por $f(b, t) = \varphi(t) = 40000 \cdot 1,3^t$.

O que queremos saber é o menor valor de t para que a função $\varphi(t)$ ultrapasse os 100000 germes, que não deixarão mais a boca saudável. Segue que:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &> 100000 \\ 40000 \cdot 1,3^t &> 100000 \\ 1,3^t &> \frac{100000}{40000} \\ 1,3^t &> 2,5 \\ \ln(1,3^t) &> \ln(2,5) \\ t \cdot \ln(1,3) &> \ln(2,5) \\ t &> \frac{\ln(2,5)}{\ln(1,3)} \\ t &> 3,5\end{aligned}$$

Concluimos que, aproximadamente, após 3,5 horas ou 3 horas e 30 minutos, esse cidadão precisará fazer nova higiene bucal para que seus dentes continuem dentro dos padrões aceitáveis.

Obviamente ninguém medirá a população de germes de sua boca para saber a hora em que deverá escovar os dentes, mas este problema nos mostra que, em pouco tempo, os germes se multiplicam absurdamente.

A fim de manter a saúde em dia, recomenda-se ter uma boa higiene bucal.

5.5.3 A mesada que triplica

[PROBLEMA] Joãozinho é um menino muito esperto e está sempre pensando em multiplicar o seu dinheiro. Ele ficou sabendo que poderia abrir uma conta em um banco, mesmo tendo apenas 7 anos, e aplicar todo o seu dinheiro na caderneta de poupança. Joãozinho foi ao banco saber em quanto tempo o seu dinheiro triplicaria. Será mesmo que ele vai ter paciência para o seu capital triplicar?

Sabe-se que o rendimento anual da caderneta de poupança é de 6%.

[SOLUÇÃO] Problemas financeiros são muito explorados e, em parte, bem interessantes. Nesse caso, por exemplo, Joãozinho quer pegar uma quantidade c de capital e aplicá-lo por um tempo t .

Devemos ser capazes de conseguir uma função $f(c, t)$ que nos diga o tempo necessário para que Joãozinho atinja seus objetivos. Se Joãozinho aplicar seu capital c por um tempo s , retirá-lo do banco já com os rendimentos e, no mesmo dia, reaplicá-lo por um tempo t , o seu rendimento final será o mesmo que se ele pegar o seu capital c e investí-lo pelo período $s + t$. Desta forma temos que $f((c, s), t) = f(c, s + t)$.

Temos uma taxa de 6% de acréscimo, o que nos dá um multiplicador igual a 1,06. Logo, temos $a = 1,06$, c que é o capital do menino e t que significa o tempo necessário para triplicar o investimento inicial c . Podemos representar essa situação pela função $f(c, t) = \varphi(t) = c \cdot 1,06^t$. Repare que c é fixo, pois é a quantidade de dinheiro que Joãozinho tem.

O objetivo de Joãozinho é ter o triplo do que ele tem, que é igual a $3 \cdot c$. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= 3 \cdot c \\ c \cdot 1,06^t &= 3 \cdot c \\ 1,06^t &= \frac{3 \cdot c}{c} \\ 1,06^t &= t \cdot 3 \\ \ln(1,06)^t &= \ln(3) \\ t \cdot \ln(1,06) &= \ln(3) \\ t &= \frac{\ln(3)}{\ln(1,06)} \\ t &\cong 18,85\end{aligned}$$

Caso o rendimento de 6% se mantenha constante, o menino precisará esperar cerca de quase 19 anos para resgatar o dinheiro para que seu capital triplique. O menino terá quase 26 anos de idade. Provavelmente Joãozinho não terá tanta paciência assim.

5.5.4 O jogo de xadrez

[PROBLEMA] Reza a lenda³ que o jogo de xadrez foi inventado por Sessa. Assim que Sessa inventou o jogo, deu-o de presente ao rei, que havia perdido seu filho em uma batalha. O rei, que andava muito desanimado, acabou se interessando pelo jogo. Tempos depois, o rei chamou Sessa ao seu palácio e pediu para que ele escolhesse o que bem desejasse como recompensa, uma vez que o jogo teria trazido uma nova razão de viver para o rei.

Por várias vezes, Sessa recusara a oferta do rei, mas o soberano continuava a insistir para que Sessa escolhesse a sua recompensa. Foi então que Sessa pediu ao rei, como recompensa, 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, 2 grãos de trigo pela segunda casa, 4 grãos de trigo pela terceira casa, e assim por diante, ou seja, a cada casa a quantidade de grãos de trigo dobraria.⁴

O rei pensou por um instante e, logo depois, disse a Sessa que retornasse três dias depois para receber seu saco de trigo. O rei pediu que os matemáticos da corte calculassem a quantidade de grãos de trigo. Três dias mais tarde, Sessa voltou para receber a recompensa e os matemáticos apresentaram ao rei a dívida de $2^{64} - 1$ grãos de trigo para com Sessa⁵. Sabendo que $L_{10}(2) = 0,301$, aproximadamente, então, quantos dígitos tem o número que expressa a dívida do rei em grãos de trigo?

[SOLUÇÃO] Podemos utilizar os logaritmos para ter uma noção da grandeza deste número. Sabemos que o número é relativamente grande, então podemos pensar apenas em 2^{64} . Fazer uma multiplicação de 64 termos não é muito simples, portanto seria interessante transformar esta multiplicação em uma soma.

Para transformarmos uma multiplicação em uma soma, podemos utilizar os logaritmos. Vejamos:

$$L_{10}(2)^{64} = 64 \cdot L_{10}(2) = 64 \cdot 0,301 = 19,264 \quad (5.18)$$

³O leitor que se interessar poderá ler este e outros contos no livro "O homem que calculava" Tahan, Malba.

⁴Um tabuleiro de xadrez tem 64 casas.

⁵O cálculo para se chegar ao valor de $2^{64} - 1$ pode ser feito através da soma dos termos finitos de uma progressão geométrica.

Devemos lembrar que podemos escrever:

$$L_{10}(2)^{64} = 19,264 \Leftrightarrow 10^{19,264} = (2)^{64} \tag{5.19}$$

Sabemos que o nosso número está entre 10^{19} e 10^{20} . Como 10^{19} é um número com 20 dígitos e 10^{20} é um número com 21 dígitos, então o número que procuramos tem 20 dígitos. Um número com 20 dígitos está na classe dos quintilhões.

Os matemáticos da corte disseram ao rei que, caso todo o reino fosse coberto de plantações de trigo, as safras colhidas durante 2.000 anos não seriam suficientes para pagar Sessa. O rei, para tentar sanar sua dívida, convidou Sessa a participar do seu reinado e deu-lhe diversos títulos a fim de tentar diminuir sua dívida impagável. Sessa, por sua vez, perdoou o rei e recebeu títulos de nobreza e tudo que o dinheiro pudesse comprar para o resto de sua vida.

Apenas por curiosidade, o número de grãos de trigo que o rei devia a Sessa era de exatamente 18446744073709551615 unidades.

Capítulo 6

Exercícios

Este capítulo é dedicado ao leitor que, por ventura, queira aplicar o que foi tema de estudo deste material. Alguns exercícios foram selecionados para que possam ser resolvidos posteriormente e, desta forma, consolidem o aprendizado do tema.

1) Uma pessoa deposita uma quantia em um banco, que a remunera à taxa de 1% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobra?

2) Uma piscina tem capacidade para $100m^3$ de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado 1kg de cloro na piscina. Água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado através de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam 900g de cloro na piscina.

- a) Que quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação?
- b) E após meia hora da aplicação?
- c) E após t horas?
- d) Quanto tempo depois ainda restarão 500g de cloro na piscina?

3) Uma pessoa tomou 60mg de uma certa medicação. A bula do remédio informava que sua meia-vida era de seis horas. Como o paciente não sabia o significado da palavra, foi a um dicionário e encontrou a seguinte definição:

Meia-vida: Tempo necessário para que uma grandeza (física, biológica) atinja metade de seu valor inicial.

A) Sabendo disso, crie uma função que relacione a quantidade de horas que se passam para que tenhamos uma determinada quantidade q de remédio no organismo.

B) Quantos mg de remédio esse cidadão terá de remédio em seu corpo após passadas 3 horas? E após passadas 12 horas?

4) As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Deseja-se saber quantas horas se passaram após as bactérias atingirem uma quantidade q . Crie uma função que permita tal relação.

5) Um arqueólogo ao encontrar uma ossada, pretende descobrir o tempo que se passou desde que aquela ossada se encontra ali. Para tanto, colhe-se uma amostra da ossada que é submetida ao teste do carbono quatorze (C^{14}). A meia vida do isótopo radioativo do carbono quatorze é de 5730 anos. Se uma amostra possui apenas 10% da quantidade de carbono quatorze original, então quanto tempo tem essa amostra?

6) Alfredo paga 10% de juros mensais em seu cartão de crédito. Caso ele gastar R\$ 1.000,00 no cartão e deixar sua dívida acumular por 20 anos, então quantos algarismos (excetuando-se os centavos) terá o valor da fatura do cartão de Alfredo?

Observação: As cinco primeiras questões foram retiradas do livro *Temas e Problemas* do professor *Elon Lages Lima*, algumas dessas questões foram adaptadas para que contemplassem o interesse do nosso estudo.

Capítulo 7

Orientações ao leitor

Caríssimo leitor, este trabalho visa dar a você uma nova maneira de entender os logaritmos.

Para que este trabalho possa ser significativo em sua vida, é interessante que você utilize alguns recursos como o Geogebra, por exemplo. Os recursos tecnológicos não são obrigatórios para que você possa compreender o conteúdo deste trabalho, mas podem auxiliá-lo para que consiga uma melhor visualização dos gráficos ou, até mesmo, no cálculo dos logaritmos através da área.

As demonstrações contidas no trabalho são importantes, pois mostram que tudo está fundamentado em algumas poucas propriedades. Não se preocupe se, ao lê-las pela primeira vez, sentir demasiada dificuldade no entendimento das mesmas. Uma demonstração matemática, por vezes, não se absorve instantaneamente.

Muitos alunos precisam de uma segunda, terceira ou até mesmo uma quarta leitura para que as demonstrações lhe pareçam naturais. A persistência é a chave do sucesso para o êxito em qualquer área, portanto, não desista.

Os exercícios propostos, neste trabalho, dar-te-ão uma base para que você possa aplicar o que foi aprendido durante a leitura do mesmo, então, procure resolver todos os exercícios.

Capítulo 8

Considerações finais

Espero que este trabalho ajude os estudantes e os professores que têm contato com esta matéria. Sei que o apelo à definição tradicional dos logaritmos é algo latente e que deverá ser estudada, não por suas aplicações ou pela necessidade da solução de problemas práticos, por ser cobrada em exames tradicionais.

Embora a definição dada aqui não seja comum, pensar diferente pode fazer com que o aluno perca o medo em relação aos logaritmos, principalmente quando este é visto como algo concreto. Assim, deixo a minha singela contribuição para que possamos caminhar para um futuro mais promissor em relação à Matemática ensinada nas escolas brasileiras.

Referências Bibliográficas

- [1] EVES, H. (2004). Introdução à história da matemática. 1. ed; tradução: Hygino H. Domingues - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004
- [2] LIMA, E. L. (2010). Logaritmos. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do Professor de Matemática)
- [3] LIMA, E. L. et al. (1997). A Matemática do Ensino Médio. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Volume 1. (Coleção do Professor de Matemática)
- [4] LIMA, E. L. (2013). Números e Funções Reais. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção PROFMAT)
- [5] LIMA, E. L. et al. (2005). Temas e Problemas Elementares. 12. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 256 p. (Coleção do Professor de Matemática)
- [6] TAHAN, M. (2001). O Homem que Calculava. 55. ed. Editora Record.