



INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Robson Coelho Neves

Aplicações de Números Complexos em Geometria

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Eduardo Wagner.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2014

Aplicações de Números Complexos em Geometria

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Robson Coelho Neves

Aprovado por:

Eduardo Wagner (Orientador)

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Antonio Saraiva Branco

Moacyr Alvim Horta (suplente)

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2014

Dedico esse Texto aos meus Pais, Maria Celina Coelho Neves e Acydinir da Silva Neves, a minha Tia Maria Léa Coelho e ao meu Sogro Jorge Baptista Victor (In Memoriam).

Agradecimentos

A Deus agradeço sempre, por absolutamente tudo na minha vida.

Muitíssimo obrigado a minha esposa Gláucia (Gal), meu talismã, pelo companheirismo e incentivo incondicional. Sua presença me ilumina, torna tudo simples, possível e especial.

Aos meus filhos Carolina e Lucas, tesouros que Deus me confiou, agradeço por serem solícitos aos meus conselhos e sensíveis aos meus exemplos. Espero assim estar contribuindo para que vocês dois se tornem cidadãos exemplares e profissionais brilhantes.

Agradeço a todos que trabalharam para tornar o PROFMAT realidade. Iniciativas como essa contribuem efetivamente para a melhoria do ensino de Matemática no Brasil.

Agradeço de coração a todos os professores pelo empenho e competência com que conduziram suas atividades durante o curso.

Demorei um bom tempo, precisei de muito empenho e de alguma inspiração até ter um texto que merecesse a apreciação do meu orientador. Isto porque, tenho para mim que Eduardo Wagner é um autor de livros com talento pouco comum. Além de ser um professor inspirador. Agradeço a ele por ter aceitado me orientar, pelas sugestões precisas e comentários elogiosos sobre a primeira e a última versão do meu texto.

À primeira turma do PROFMAT-IMPA, composta por colegas bem humorados e inteligentes, agradeço pelo convívio festivo, amigável e sempre harmonioso. Sucesso para todos!

Resumo

Aplicações de Números Complexos em Geometria

Robson Coelho Neves

Orientador: Professor Eduardo Wagner.

Em geometria plana e espacial, é comum nos depararmos com questões cujas soluções se mostram bastante complicadas via geometria sintética. Nessas situações, os recursos da geometria analítica se mostram bastante eficazes. Particularmente em geometria plana, quando uma situação pode ser interpretada via translação, homotetia ou rotação de pontos, podemos utilizar as interpretações geométricas da adição, da multiplicação por número real e do produto escalar, respectivamente, dos vetores do \mathbb{R}^2 (o conjunto dos números reais será notado nesse texto por \mathbb{R}). Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) pretendo convencer os leitores de que os números complexos (também vetores) fazem o mesmo que os vetores do \mathbb{R}^2 , porém com uma vantagem: a multiplicação de números complexos nos permite tratar de rotações de modo muito mais eficiente do que com o emprego do produto escalar. Para atingir meu objetivo definirei translação, homotetia e rotação via funções de domínio e contradomínio \mathbb{C} (o conjunto dos números complexos será notado nesse texto por \mathbb{C}) e cujas leis de definição envolvem adição, multiplicação de número real por número complexo e multiplicação de números complexos, respectivamente, e aplicarei essas funções para tratar uma lista longa de exercícios e teoremas.

Palavras-chave: números complexos; transformações no plano; resolução de problemas; provas de teoremas.

Sumário

1. Introdução.....	1
2. Breve Histórico Sobre o Surgimento e o Alcance da Legitimidade Matemática dos Números Complexos.....	3
3. Interpretação Geométrica da Adição e Multiplicação de Números Complexos e da Multiplicação de Número Real por Número Complexo.....	6
3.1. Introdução.....	6
3.2. O Conjunto dos Números Complexos Via Pares Ordenados.....	7
3.2.1. Inclusão de \mathbb{R} em \mathbb{C}	8
3.2.2. Adição e Multiplicação de Números Reais por Números Complexos.....	8
3.3. Representação Geométrica de Números Complexos.....	9
3.4. Geometria das Operações em \mathbb{C}	10
3.4.1. Adição.....	10
3.4.2. Multiplicação de Número Real por Número Complexo.....	13
3.4.3. Multiplicação.....	14
3.4.3.1. Forma Par-Polar de um Número Complexo Não Nulo.....	14
3.4.3.2. Multiplicação na Forma Par-Polar.....	15
4. Transformações no Plano Complexo.....	17
4.1. Introdução.....	17
4.2. Translação.....	17
4.3. Homotetia.....	20

4.4. Rotação.....	22
4.5. Cálculo de Rotações Via Multiplicação em C X Via Produto Escalar no R^2	24
4.5.1. Cálculo em C	24
4.5.2. Cálculo no R^2	24
4.5.3. Comparações Entre os Dois Cálculos.....	25
5. Aplicações de Números Complexos em Geometria Plana.....	27
5.1. Introdução.....	27
6. Conclusão.....	80
7. Referências Bibliográficas.....	81

1. Introdução

É bastante comum apelarmos para a geometria analítica, como último recurso, quando a solução de um problema ou a prova de um teorema de geometria plana (ou espacial) torna-se complicada via geometria sintética.

As dificuldades tendem a diminuir quando o problema em questão pode ser interpretado via translações, homotetias ou rotações de pontos no plano cartesiano bem como da composição dessas transformações. Nessas situações podemos nos valer das interpretações geométricas, no plano cartesiano, das operações no \mathbb{R}^2 para superarmos as dificuldades de maneira mais tranquila. Mais exatamente, podemos nos valer da interpretação geométrica da adição para tratarmos de translações, da multiplicação por número real, para homotetias e do produto escalar, para rotações.

Os elementos de \mathbb{C} também podem ser definidos como pares ordenados de números reais ($\mathbb{C} = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$) e somados e multiplicados por números reais exatamente como os elementos do \mathbb{R}^2 . É justamente para explorar essas similaridades que adotarei essa definição. Mas a escolha dos números complexos para resolver problemas e provar teoremas da geometria plana nesse TCC vai além desse motivo: a multiplicação de números complexos nos permite tratar de rotações de maneira muito vantajosa se comparado com o tratamento via produto escalar. Mostrarei algumas dessas vantagens no capítulo quatro.

Pesquisei alguns livros, artigos, dissertações e teses que tratam da geometria dos números complexos. A maioria deles reescrevem os resultados da geometria analítica plana via variáveis complexas e dedicam pouco espaço para a aplicação efetiva dos resultados. Resolvi fazer diferente: utilizar transformações definidas via funções complexas de variável complexa para tratar de uma lista longa de exercícios e teoremas. Assim, não pretendo criticar os cursos de Licenciatura em Matemática nem os livros que tratam do ensino de números complexos. Também não pretendo propor novas metodologias para a abordagem desse tema em classe, isso já foi feito exaustivamente. Espero, entretanto, que esse TCC possa ser útil aos professores que queiram enriquecer suas aulas sobre números complexos e(ou) geometria.

Desenvolverei o tema deste TCC segundo o seguinte planejamento em capítulos: O capítulo um é uma introdução ao tema. No capítulo dois faço um breve histórico dos números complexos, desde o surgimento deles até o alcance da sua legitimidade como objeto matemático. Vale observar que a legitimidade dos números complexos foi alcançada graças ao surgimento de uma representação geométrica para tais números, coerente com suas operações e propriedades. Este acontecimento, coincidentemente, é também fundamental para esse TCC. Nos capítulos três e quatro, faço uma preparação enxuta para as aplicações que serão feitas no capítulo cinco. No capítulo três defino os números complexos como pares ordenados de números reais, defino suas operações e deduzo as interpretações geométricas dessas operações, citando e provando apenas os resultados operacionais que serão utilizados nos capítulos quatro e cinco. No capítulo quatro, defino transformações via funções $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (com domínio e contradomínio em \mathbb{C}) e cujas leis de associação envolvem operações entre números complexos e entre números reais e complexos. Me valerei das interpretações geométricas das operações em \mathbb{C} , estudadas no capítulo três, para entender a posição do ponto $f(z)$ como resultado de algum tipo de deslocamento do ponto z , no mesmo plano complexo. No capítulo cinco, interpreto uma lista numerosa de problemas e teoremas de geometria plana via movimentos de pontos para poder aplicar as transformações estudadas no capítulo quatro tanto na resolução dos problemas como nas provas dos teoremas. Finalmente, na conclusão faço alguns comentários para ratificar as vantagens da utilização de números complexos em geometria plana.

2. Breve Histórico Sobre o Surgimento e o Alcance da Legitimidade Matemática dos Números Complexos

Os textos de história da matemática afirmam que o surgimento dos números complexos está diretamente ligado as tentativas de resolução de equações algébricas do 3º grau. É no livro “Ars Magma”, Girolamo Cardano (1501-1576), publicado em 1545, que podemos encontrar o primeiro registro desse surgimento. Tudo ocorre quando Cardano expõe os métodos de Scipione Del Ferro (1465-1526) e Nicolo Tartaglia (1500-1557) para resolver tais equações. Para que esses métodos fornecessem algumas raízes conhecidas a priori, Cardano precisou operar com raízes quadradas de números negativos segundo as regras usuais da álgebra de então. Naturalmente que Cardano se mostrou surpreso e incrédulo diante dos fatos, afinal, nessa época nem os números negativos eram compreendidos com muita clareza. Assim sendo, ele não ousou seguir adiante.

Tal tarefa foi levada a cabo por Rafael Bombelli (1526-1572), que dedicou boa parte de seu livro “Algebra”, publicado em 1572, ao tratamento de regras para se operar com tais números. No final do século XVI, os matemáticos operavam com os números complexos segundo essas regras, mas o faziam com muita desconfiança, pois não os consideravam objetos matemáticos de fato, mas apenas como simples recurso de cálculo. Ainda assim, muitos progressos foram obtidos dessa forma. Albert Girard (1595-1632), por exemplo, fez a seguinte afirmação sobre as soluções de equações algébricas que envolviam raízes quadradas de números negativos:

“Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis. Eu respondo: para três coisas – para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções.”

Infelizmente a tão esperada legitimidade não seria alcançada mesmo decorridos dois séculos, ainda que nessa época Leonhard Euler (1707-1783) soubesse operar potências com expoente complexo, logaritmos de números complexos e funções trigonométricas com argumento complexo. Ele próprio declarou em seu livro “Pesquisa sobre Raízes Imaginárias de uma Equação”, publicado em 1749, que

“Como todos os números concebíveis são maiores ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis. E esta circunstancia nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua própria natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação.”

Afinal, o que faltava para que os números complexos alcançassem a legitimidade matemática? De acordo com a tradição grega ainda vigente, faltava para eles uma representação geométrica coerente com suas operações e respectivas propriedades. Vale destacar que, por coincidência, é justamente a geometria dos números complexos que pretendo explorar nesse TCC.

A primeira tentativa de se obter uma representação geométrica para os números complexos que se tem registro é atribuída a John Wallis (1616-1703), que publicou, em 1673, o livro *De Algebra Tractatus, Historicus e Practicus*. Infelizmente Wallis não obteve sucesso. Somente em 1797, quase 300 anos após a primeira aparição dos números complexos no livro de Cardano, surgiu um texto que propunha uma representação geométrica correta, via segmentos orientados, para os números complexos. Trata-se de um artigo científico apresentado na academia dinamarquesa de ciências, intitulado “Sobre a Representação Analítica da Direção”, do agrimensor norueguês Caspar Wessel (1745-1818). Nesse artigo, Wessel utiliza seus resultados para resolver polígonos planos e esféricos, além de demonstrar alguns teoremas já conhecidos da álgebra. Apesar do incontestável pioneirismo de Wessel, o plano complexo também é denominado “Plano de Argand-Gauss”, numa referência a dois matemáticos que apresentaram artigos, posteriores ao dele. Argand, porque escreveu sobre a representação geométrica dos números complexos e Gauss, por ter feito uso da geometria dos complexos em suas pesquisas. Alguns fatos podem explicar essa injustiça. Por exemplo, Wessel não era um matemático, vivia num país de pouca tradição matemática, um país que nem sequer tinha uma academia de ciências. Esse conjunto de fatores fez com que a comunidade matemática só tivesse acesso a obra de Wessel cem anos após a sua publicação, época em que alguns matemáticos de prestígio já haviam publicado trabalhos sobre esse tema. Dentre esses trabalhos, destaca-

se o livro *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, publicado em 1806, da autoria do italiano Jean Robert Argand (1768-1822). Surpreendentemente, mesmo com o surgimento de vários trabalhos sobre a representação geométrica dos números complexos, sua legitimidade só foi concebida pela comunidade matemática a partir dos trabalhos publicados por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o maior matemático do século XIX. Em 1831, no livro *Teoria dos Resíduos Quadráticos*, Gauss fez a seguinte declaração:

“Fazia muito tempo que as quantidades imaginárias estavam baseadas na ficção, não sendo plenamente aceitas na matemática e vistas como uma coisa a ser tolerada; elas estavam longe de ter o mesmo status que as quantidades reais. Agora não há mais justificativa para tal discriminação, uma vez que a metafísica dos números imaginários está plenamente esclarecida, e que provou que eles têm um significado tão real quanto o dos números negativos”.

Para finalizar, vale dizer que o tipo de tratamento dos números complexos que será adotado nesse TCC, ou seja, via pares ordenados de números reais, foi primeiro publicado no artigo “*Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*”, datado de 1833 e da autoria do matemático e físico irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865).

3. Interpretação Geométrica da Adição e Multiplicação de Números Complexos e da Multiplicação de Número Real por Número Complexo

3.1. Introdução

Nesse capítulo definirei números complexos via pares ordenados de números reais e interpretarei geometricamente as operações adição de números complexos, multiplicação de número real por número complexo e multiplicação de números complexos.

Escolhi a forma Par Ordenado para passar de imediato a tratar números complexos geometricamente, como pontos ou flechas do Plano Cartesiano, bem como para interpretar sua adição e multiplicação por número real, tal como é feito com os elementos do \mathbb{R}^2 .

Farei comentários sobre a inclusão do conjunto dos Números Reais no conjunto dos Números Complexos, isso para dar sentido à soma e à multiplicação de números reais por números complexos, já que essas operações serão utilizadas nos capítulos quatro e cinco.

Trocarei as coordenadas cartesianas pelas coordenadas polares para interpretar geometricamente a multiplicação de números complexos.

Serei o mais objetivo possível. Citarei e demonstrarei apenas os resultados que serão úteis nos capítulos quatro e cinco. Utilizarei os termos “Corpos”, “Isomorfismo”, “Corpos Ordenados” e “Espaços Vetoriais” sem defini-los formalmente. As expressões “É fácil ver” e “É fácil provar” antecederão conclusões e tarefas triviais.

3.2. O Conjunto dos Números Complexos via Pares Ordenados

Definição: Denomina-se Conjunto dos Números Complexos, aqui notado por C , o conjunto cujos elementos, notados por z , são pares ordenados de números reais (x,y) e para os quais a igualdade, a adição e a multiplicação são definidas da seguinte forma:

$$\text{Dados } z_1 = (x_1, y_1) \in C \text{ e } z_2 = (x_2, y_2) \in C,$$

$$\text{a) } z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

$$\text{b) } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\text{c) } z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$$

A adição e a multiplicação de números reais bem como as propriedades que essas operações gozam, fazem do conjunto dos Números Reais (aqui notado por R) um exemplo de Corpo. Com base nas definições a, b e c e no fato de que R é um corpo, é fácil provar que C também é um corpo.

Na forma par ordenado, distinguimos três “tipos” de números complexos:

a) $z = (x,y)$, com $x,y \neq 0$, são denominados Números Complexos, propriamente ditos,

b) $z = (x,0)$, são denominados Números Complexos Reais ou simplesmente Reais e

c) $z = (0,y)$, são denominados Números Complexos Imaginários Puros ou simplesmente Imaginários Puros.

O número complexo $(0,0)$, que é real e imaginário puro, ao mesmo tempo, é denominado Zero e notado por 0 .

Os números reais x e y que identificam (unicamente) o número complexo $z = (x,y)$, são denominados, respectivamente, Parte Real de z , nota-se por $\text{Re}(z)$, e Parte Imaginária de z , nota-se por $\text{Im}(z)$.

3.2.1. Inclusão de R em C

Consideremos o subconjunto $C' = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ de C .

É fácil provar que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow C'$, com $f(x) = (x,0)$, é uma bijeção. Além disso, f preserva a adição e a multiplicação em \mathbb{R} , ou seja, para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = f(x_1) + f(x_2) \text{ e}$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

Esses fatos fazem de \mathbb{R} e C' exemplos de conjuntos isomorfos. Vale observar que o isomorfismo entre \mathbb{R} e C' não significa exatamente que \mathbb{R} esteja contido em C , mas tudo ocorre como se essa inclusão fosse verdadeira, visto que podemos operar com elementos x de \mathbb{R} como se estivéssemos operando com elementos $(x,0)$ de C' e vice-versa.

3.2.2. Adição e Multiplicação de Números Reais por Números Complexos

Dado um número real r e um número complexo $z = (x,y)$, do isomorfismo entre \mathbb{R} e C' , tem-se que $r + z = (r + x, y)$ e $r \cdot z = (r \cdot x, r \cdot y)$, pois

$$r + z = (r,0) + (x,y) = (r + x, 0 + y) = (r + x, y) \text{ e}$$

$$r \cdot z = (r,0) \cdot (x,y) = (r \cdot x - 0 \cdot y, r \cdot y + 0 \cdot x) = (r \cdot x, r \cdot y).$$

Decorre daí que $x + y \cdot z$ é um número complexo para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $z \in C$.

Vale observar que, particularmente quando $z = (0,1) = i$, tem-se que

$$x + y \cdot i = (x,0) + (y,0) \cdot \underbrace{(0,1)}_i = (x,0) + \left(\underbrace{y \cdot 0 - 0 \cdot 1}_0, \underbrace{y \cdot 1 + 0 \cdot 0}_y \right) = (x,0) + (0,y) = (x,y).$$

A representação $x + y \cdot i$ é denominada Forma Algébrica e o número complexo i é denominado Unidade Imaginária.

É fácil provar que o quadrado de todos os elementos de R e C' são maiores do que ou iguais a zero. Essa é uma propriedade característica dos denominados Corpos Ordenados. Vale observar que C não é um corpo ordenado pois, por exemplo,

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

3.3. Representação Geométrica de Números Complexos

Os elementos do R^2 e de C são definidos de maneira inteiramente similar: são pares ordenados (x,y) , com x e y reais. Também a igualdade, a adição e a multiplicação por número real, bem como as propriedades válidas para tais operações, são inteiramente similares para ambos. Essas similaridades fazem do R^2 e C exemplos de Espaços Vetoriais. Elementos de espaços vetoriais são denominados Vetores.

Geometricamente, todo vetor (x,y) , do R^2 ou de C , no Plano Cartesiano, é um Ponto $P = (x,y)$ ou uma Flecha com origem no ponto O e extremidade em P . Mais do que isso, a adição de números complexos e a multiplicação de números reais por números complexos também herdam as interpretações geométricas das mesmas operações no R^2 .

Como uma flecha, os elementos (vetores) do R^2 e C se caracterizam por três informações geométricas: módulo, direção e sentido. O módulo é o comprimento da flecha, a direção é a da reta que contém a flecha e o sentido é sempre do ponto origem para o ponto extremidade da flecha.

O plano cartesiano no qual os números complexos são representados por pontos ou flechas é denominado Plano Complexo (ou Plano de Argand-Gauss, como vimos no capítulo 2). Nesse, os eixos das abscissas e das ordenadas passam a ser denominados, respectivamente, Eixo Real, notado por Re , e eixo Imaginário, notado por Im .

Na Figura 3.1, temos um plano complexo onde são representados, via pontos e flechas, a unidade imaginária i , o número complexo

$z_1 = (x_1, y_1) \in 1^\circ \text{ Quadrante}$, o número imaginário puro $z_2 = (0, y_2)$, com $y_2 < 0$, o número real $z_3 = (x_3, 0) \in \text{Re}$, com $x_3 < 0$ e 0 .

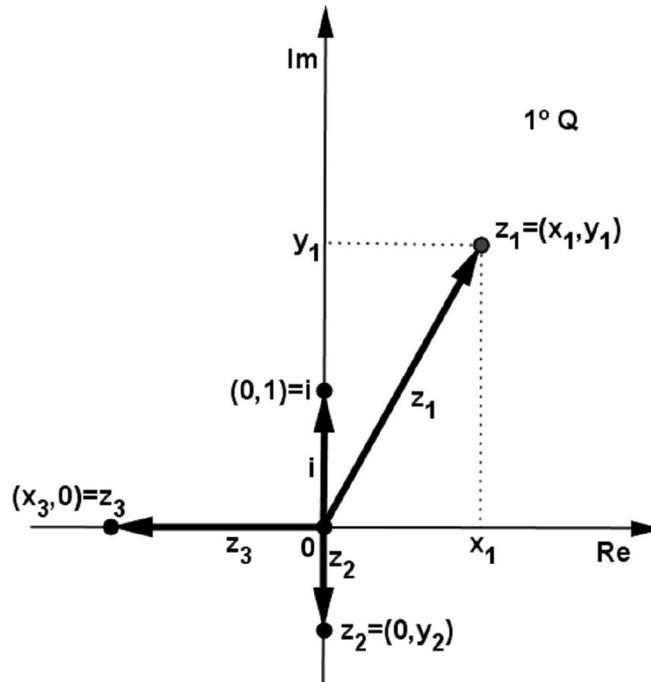


Figura 3.1 : Plano Complexo

Este momento é oportuno para reforçarmos, via um argumento geométrico, que a inclusão de \mathbb{R} em \mathbb{C} ocorre a menos do isomorfismo entre \mathbb{R} e \mathbb{C}' pois, enquanto \mathbb{R} é a Reta Real, \mathbb{C}' é o Eixo Real do plano complexo.

Geometricamente, dependendo da conveniência, tratarei um número complexo (vetor) como ponto ou uma flecha.

3.4. Geometria das Operações em \mathbb{C}

3.4.1. Adição

Dados os números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, com $z_1, z_2 \neq 0$ e $z_1 \neq z_2$, tem-se que os pontos $0, z_1, z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e z_2 são os vértices de um paralelogramo. Tomando por base a Figura 3.2, é fácil ver que

esse fato decorre das congruências dos pares de triângulos retângulos $0x_1z_1, z_2z_3(z_1 + z_2)$ e $0x_2z_2, z_1z_4(z_1 + z_2)$.

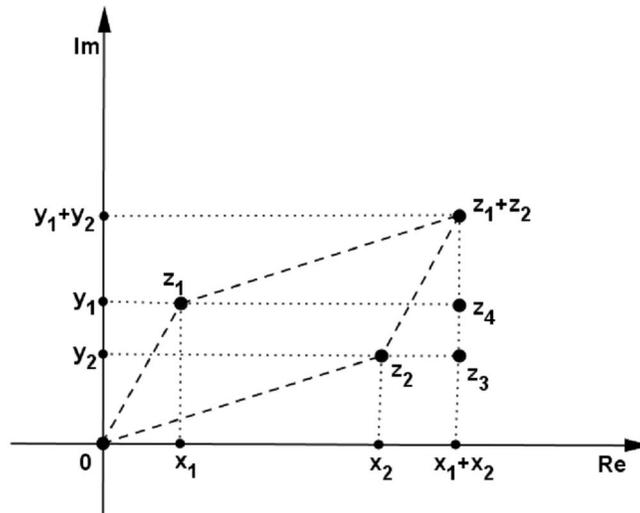


Figura 3.2 : $0z_1(z_1+z_2)z_2$ é um Paralelogramo

Em termos de flechas, tem-se que $z_1 + z_2$ é a flecha que coincide com a diagonal $0(z_1 + z_2)$ do paralelogramo cujos lados são definidos pelas flechas z_1 e z_2 . Essa interpretação, mostrada na Figura 3.3, é conhecida como Regra do Paralelogramo.

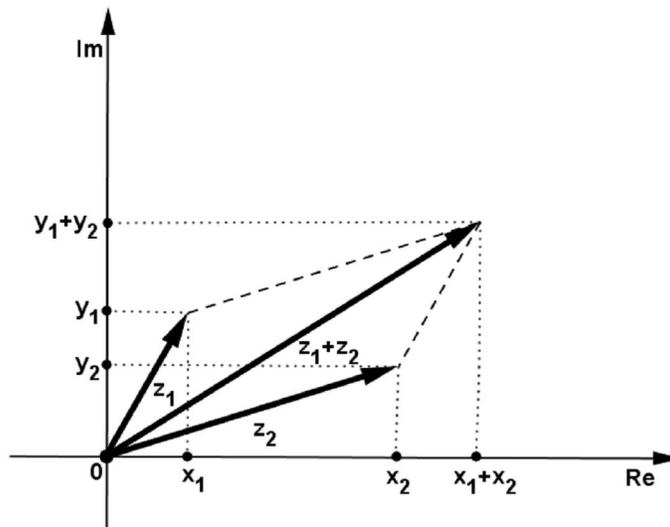


Figura 3.3 : Regra do Paralelogramo

É fácil ver que a regra do paralelogramo não é válida quando z_1 e z_2 são flechas de mesma direção ou pelo menos um dos dois é 0.

É fundamental para os objetivos desse TCC observarmos que o ponto $z_1 + z_2$ é o resultado do deslocamento do ponto z_1 segundo a flecha z_2 ou do ponto z_2 segundo a flecha z_1 , em módulo, direção e sentido. A Figura 3.4 ilustra essa observação.

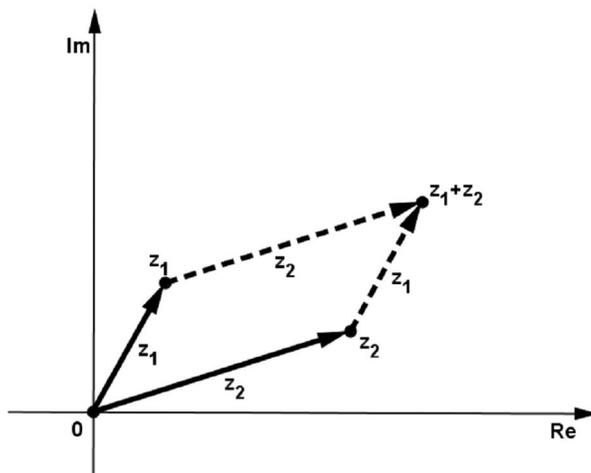


Figura 3.4 : O Ponto z_1+z_2 Resulta do Deslocamento do Ponto z_1 Segundo a Flecha z_2 ou do Ponto z_2 Segundo a Flecha z_1

Generalizando, fixada uma flecha w com origem e extremidade, respectivamente, nos pontos distintos z_1 e z_2 , tem-se que o resultado do deslocamento de um ponto z qualquer segundo o módulo, direção e sentido de w é o ponto $z+w$.

Vale observarmos que, particularmente, se $z = z_1$, tem-se que $z_1 + w = z_2$, o que equivale a dizer, somando $-z_1$ a ambos os membros, que $w = z_2 - z_1$. Assim, a flecha w' com origem em 0 e extremidade no ponto $z_2 - z_1$ tem a direção, o módulo e o sentido da flecha w , isto é, $z + w = z + w'$ para todo ponto z . Pares de flechas desse tipo são denominados Equipolentes.

A Figura 3.5 ilustra a equipolência entre as flechas w e w' .

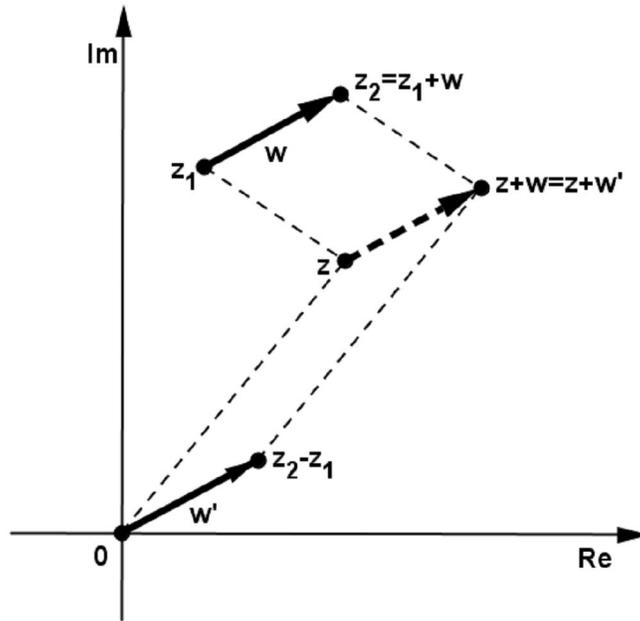


Figura 3.5 : w e w' são Flechas Equipolentes

3.4.2 – Multiplicação de Número Real por Número Complexo

Dado um número real $r \neq 0$ e um número complexo $z = (x, y) \neq 0$, é fácil provar que a flecha $r \cdot z = (r \cdot x, r \cdot y)$ tem a mesma direção da flecha z , tem módulo igual ao produto do módulo de r pelo módulo da flecha z e, se $r < 0$ ($0 < r$) seu sentido é contrário (mesmo sentido) da flecha z .

Vale observarmos que se $r = 0$ ou $z = 0$, tem-se que $r \cdot z$ é o ponto 0 .

A Figura 3.6 ilustra a geometria do produto $r \cdot z$.

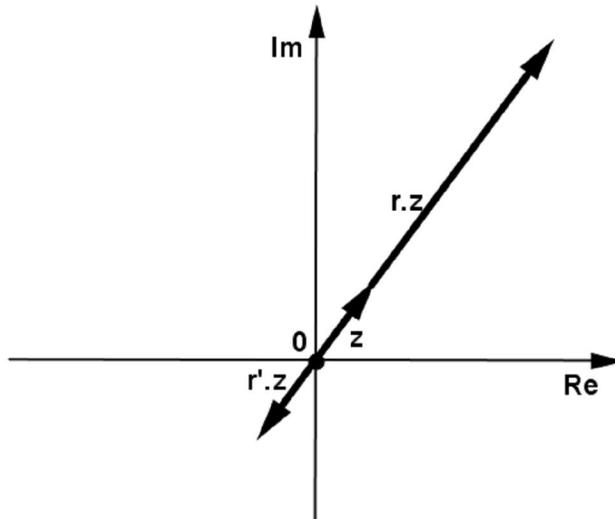


Figura 3.6 : Flechas z , $r'.z$ e $r.z$, com $r'=-1$ e $r=4$

3.4.3. Multiplicação

3.4.3.1. Forma “Par-Polar” de um Número Complexo Não Nulo

Definição: O Módulo de um número complexo $z = (x, y)$, nota-se por $|z|$ ou ρ , é o número real não negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$.

É fácil ver que ρ é, geometricamente, o módulo da flecha z ou a distância do ponto 0 ao ponto z .

Vale observar que $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |(x, -y)|$. O número complexo $(x, -y)$ é denominado Conjugado de $z = (x, y)$ e é notado por \bar{z} .

Definição: O Argumento Principal do número complexo $z = (x, y) \neq 0$, nota-se por $\arg(z)$, é o ângulo $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ formado pelo semieixo positivo dos reais e a flecha z , no sentido anti horário.

É fácil ver que são válidas as seguintes relações entre x, y, ρ e θ :

$$x = \rho \cdot \cos \theta \text{ e } y = \rho \cdot \text{sen} \theta.$$

Decorre dessas relações que $z = (x, y) \neq 0$ pode ser representado por $z = (\rho \cdot \cos \theta, \rho \cdot \text{sen} \theta)$. Nesse texto essa representação será denominada “Par-Polar”.

É fácil ver que os números complexos do tipo $z = (\cos \theta, \text{sen} \theta)$ tem módulo 1. Tais números complexos são denominados Unitários e serão notados nesse texto por $z = \text{CS} \theta$.

Assim, de forma geral, se z tem módulo ρ e argumento principal θ , tem-se que $z = (\rho \cdot \cos \theta, \rho \cdot \text{sen} \theta) = \rho \cdot (\cos \theta, \text{sen} \theta) = \rho \cdot \text{CS} \theta$ e $\bar{z} = \rho \cdot \text{CS}(-\theta)$.

Vale observar que $i = (0, 1) = (\cos 90^\circ, \text{sen} 90^\circ) = \text{CS}(90^\circ)$.

A Figura 3.7 ilustra as definições de módulo, argumento e forma par-polar.

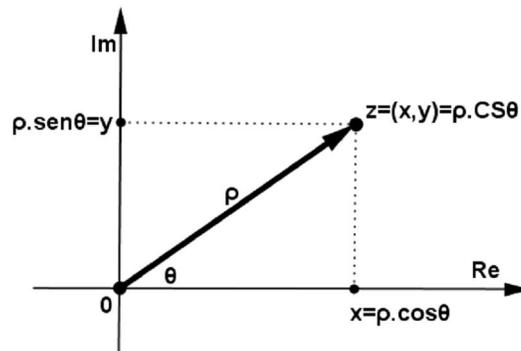


Figura 3.7 : Forma Par Ordenado e Par-Polar de $z \neq 0$

3.4.3.2 – Multiplicação na Forma Par-Polar

Dados os números complexos não nulos $z_1 = (\rho_1 \cdot \cos \theta_1, \rho_1 \cdot \text{sen} \theta_1) = \rho_1 \cdot \text{CS} \theta_1$ e $z_2 = (\rho_2 \cdot \cos \theta_2, \rho_2 \cdot \text{sen} \theta_2) = \rho_2 \cdot \text{CS} \theta_2$, tem-se que

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}(z_1 \cdot z_2) &= \rho_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos \theta_2 - \rho_1 \cdot \text{sen} \theta_1 \cdot \rho_2 \cdot \text{sen} \theta_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \text{Im}(z_1 \cdot z_2) &= \rho_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \rho_2 \cdot \text{sen} \theta_2 + \rho_1 \cdot \text{sen} \theta_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos \theta_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \text{CS}(\theta_1 + \theta_2).$$

Particularmente se z_2 é unitário, é fácil ver que o ponto $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot CS(\theta_1 + \theta_2)$ resulta da rotação do ponto z_1 de um ângulo θ_2 em torno do 0. A Figura 3.8 ilustra essa interpretação.

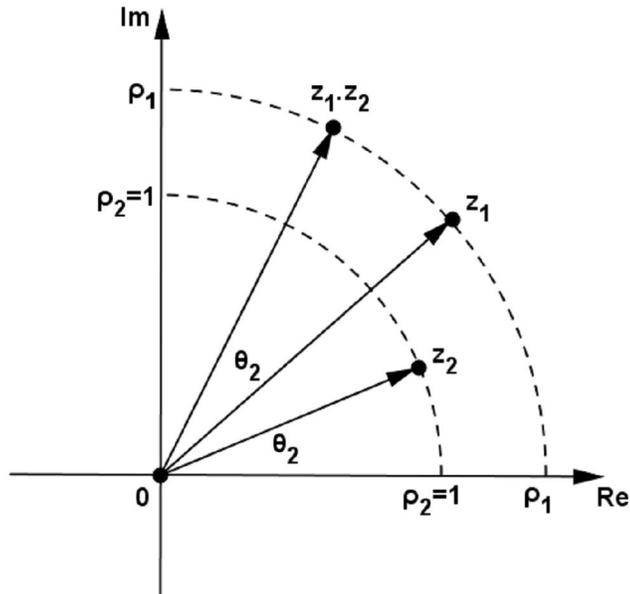


Figura 3.8 : O Ponto $z_1 \cdot z_2$ Resulta da Rotação do Ponto z_1 , de θ_2 , em Torno do 0

Se $0 < \rho_2 < 1$ ($1 < \rho_2$), é fácil ver que o ponto $z_1 \cdot z_2$ além de resultar da rotação do ponto z_1 de um ângulo θ_2 em torno de 0, também se aproxima (afasta) de 0, respectivamente.

Do fato de \mathbb{C} ser um corpo, dados $z, z_1 \in \mathbb{C}$, com $z = (x, y) = \rho \cdot CS\theta \neq 0$, tem-se que, na forma par ordenado

$$\frac{z_1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z_1 = \left(\frac{1}{z \cdot \bar{z}} \cdot \bar{z} \right) \cdot z_1 = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x, -y) \cdot z_1 = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \cdot z_1 \text{ e, na}$$

forma par-polar

$$\frac{z_1}{z} = \left(\frac{1}{z \cdot \bar{z}} \cdot \bar{z} \right) \cdot z_1 = \frac{1}{\rho^2 \cdot \underbrace{CS(\theta + (-\theta))}_{CS0=1}} \cdot \rho \cdot CS(-\theta) \cdot z_1 = \rho^{-1} \cdot CS(-\theta) z_1, \text{ para}$$

todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

4. Transformações no Plano Complexo

4.1. Introdução

Nesse capítulo definirei Translação, Homotetia e Rotação via funções $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (função complexa de variável complexa) e cujas leis de correspondência $f(z)$ envolvem as operações estudadas no capítulo três. Com base nas interpretações geométricas dessas operações, poderei interpretar cada $f(z)$, de cada uma das três funções, como resultante de um determinado tipo de deslocamento do ponto z , num mesmo plano complexo.

Farei uma generalização de cada uma das três funções. Esses três resultados serão numerados para que eu possa me referir a eles nas soluções dos problemas e nas provas dos teoremas do capítulo cinco.

Para justificar a minha preferência por utilizar números complexos em geometria, ao invés dos elementos do \mathbb{R}^2 , compararei os tratamentos das rotações proporcionados pelas multiplicações de números complexos e pelo produto escalar.

4.2. Translação

Definição: Fixada uma flecha w , denominamos Translação Segundo w , a função $T_w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que associa cada ponto z ao ponto

$$T_w(z) = z + w.$$

Vale observar que, de acordo com a interpretação geométrica da adição, tem-se que, no mesmo plano complexo, o ponto $T_w(z)$ resulta do deslocamento do ponto z segundo o módulo, a direção e o sentido da flecha w .

A Figura 4.1 ilustra essa transformação.

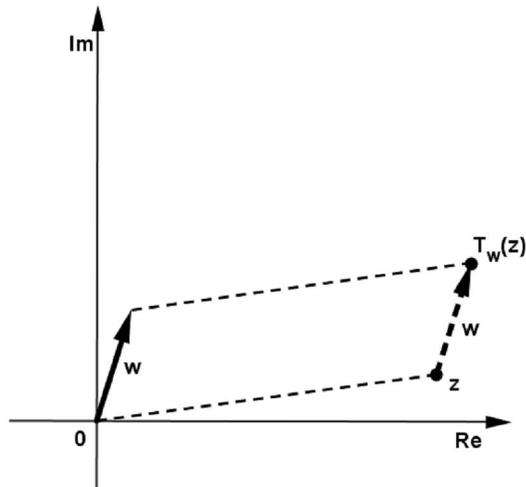


Figura 4.1 : O Ponto $T_w(z)$ Resulta do Deslocamento do Ponto z Segundo a Flecha w

Generalizando, se w tem por origem e extremidade, respectivamente, os pontos z_1 e z_2 , podemos calcular $T_w(z)$ em duas etapas:

1ª) Calculamos $T_{z_2}(z) = z + z_2$

2ª) Calculamos $T_{-z_1}(z + z_2) = (z + z_2) - z_1$.

Assim, teremos que

$$T_w(z) = z + (z_2 - z_1) \quad (1)$$

Observemos que o resultado (1) já era esperado, pois como já vimos no capítulo anterior, as flechas w e $z_2 - z_1$ são equipolentes.

É fácil ver que o resultado (1) é fruto de composições de T , mais exatamente,

$$T_w = T_{-z_1} \circ T_{z_2}.$$

A Figura 4.2 ilustra a generalização.

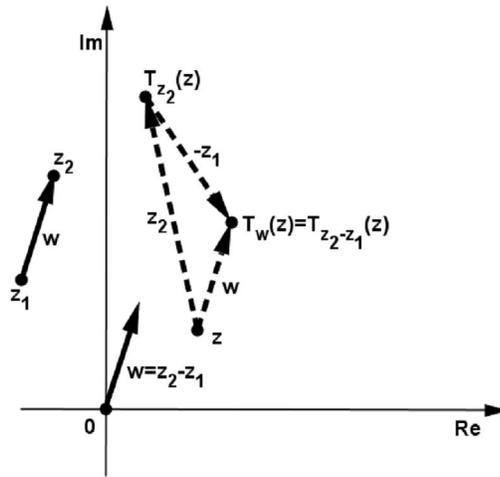


Figura 4.2: O Ponto $T_w(z)$ Resulta do Deslocamento do Ponto z Segundo a Flecha $w = z_2 - z_1$

4.3. Homotetia

Definição: Fixados o ponto 0 e o número real positivo r , chama-se Homotetia de Centro 0 e Razão r , a função $H_{0,r} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que associa cada ponto z ao ponto

$$H_{0,r}(z) = r \cdot z.$$

Vale observar que, de acordo com a interpretação geométrica da multiplicação de número real positivo por número complexo, tem-se que, no mesmo plano complexo, o ponto $H_{0,r}(z)$ é a extremidade de uma flecha cujo módulo é o produto de r pelo módulo da flecha z e tem a mesma direção e sentido da flecha z .

Como $r \cdot z = z + (r-1) \cdot z$, podemos também interpretar o produto $r \cdot z$ como sendo o ponto que resulta da translação do ponto z , no mesmo plano complexo, segundo a flecha $w = (r-1) \cdot z$, ou seja, $H_{0,r}(z) = T_w(z)$. A Figura 4.3 ilustra essa relação.

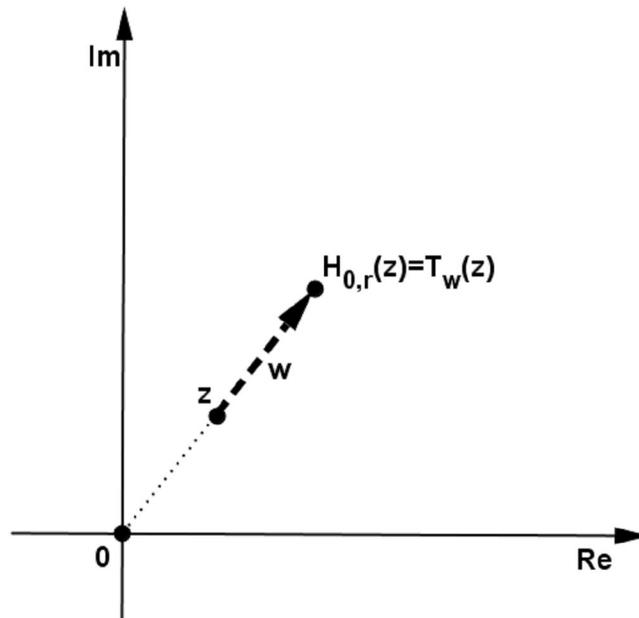


Figura 4.3 : $H_{0,r}(z) = T_w(z)$, com $w = (r-1) \cdot z$ e $r=2$

Generalizando, se $z_1 \neq 0$, podemos calcular $H_{z_1,r}(z)$ em três etapas:

1ª) Calculamos $T_{-z_1}(z) = z - z_1$

2ª) Calculamos $H_{0,r}(z - z_1) = r \cdot (z - z_1)$

3ª) Finalmente, teremos que

$$H_{z_1,r}(z) = r \cdot (z - z_1) + z_1 \quad (2)$$

É fácil ver que o resultado (2) é fruto de composições de T e H, mais exatamente,

$$H_{z_1,r} = T_{z_1} \circ H_{0,r} \circ T_{-z_1}.$$

A Figura 4.4 ilustra as etapas do cálculo do ponto $H_{z_1,r}(z)$.

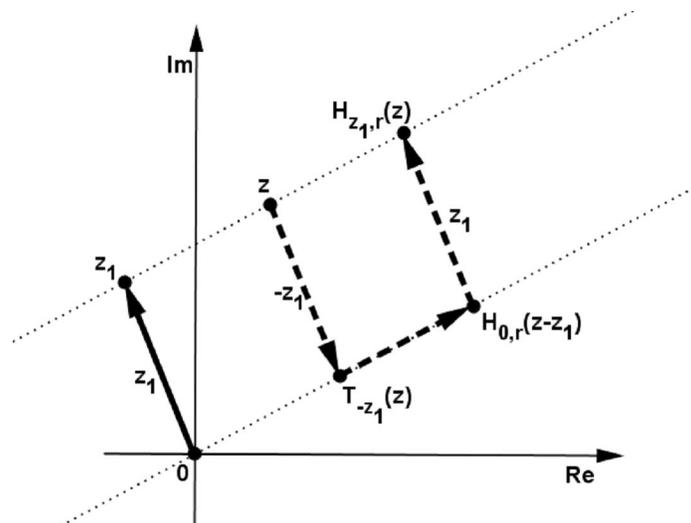


Figura 4.4 : As Três Etapas do Cálculo do Ponto $H_{z_1,r}(z)$,
Para $r=2$

4.4. Rotação

Definição: Fixados o ponto 0 e o ângulo θ' , chama-se rotação de centro 0, segundo θ' , a função $R_{0,\theta'} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que associa cada ponto z ao ponto

$$R_{0,\theta'}(z) = z \cdot CS\theta'.$$

Vale observar que, de acordo com a interpretação geométrica da multiplicação de um número complexo por um número complexo unitário, tem-se que, de fato, no mesmo plano complexo, o ponto $R_{0,\theta'}(z)$ resulta da rotação do ponto z de um ângulo θ' em torno do 0.

A figura-13 ilustra essa transformação aplicada a um número complexo de módulo ρ , para $0 < \theta'$.

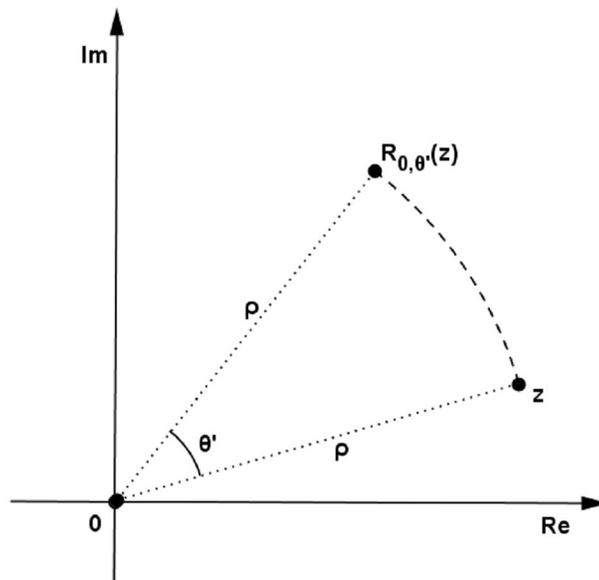


Figura 4.5 : O Ponto $R_{0,\theta'}(z)$ Resulta da Rotação do Ponto z com Centro 0, Segundo $\theta' > 0$

É fácil ver, como sugere a figura, que a função $R_{0,\theta'}$ preserva o módulo da flecha z .

Generalizando, se $z_1 \neq 0$, podemos calcular $R_{z_1, \theta'}(z)$ em três etapas:

1ª) Calculamos $T_{-z_1}(z) = z - z_1$

2ª) Calculamos $R_{0, \theta'}(z - z_1) = (z - z_1) \cdot CS\theta'$

3ª) Finalmente, teremos que

$$R_{z_1, \theta'}(z) = (z - z_1) \cdot CS\theta' + z_1 \quad (3)$$

É fácil ver que o resultado (3) é fruto de composições de T e R, mais exatamente,

$$R_{z_1, \theta'} = T_{z_1} \circ R_{0, \theta'} \circ T_{-z_1}.$$

A Figura 4.6 ilustra as etapas do cálculo do ponto $R_{z_1, \theta'}(z)$.

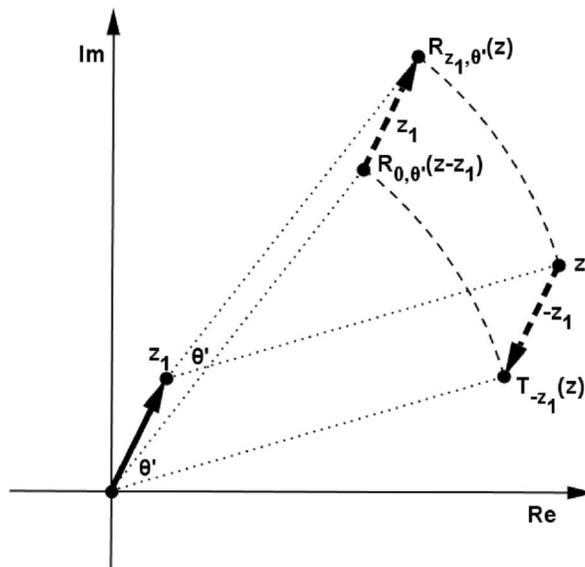


Figura 4.6 : As Três Etapas do Cálculo do Ponto $R_{z_1, \theta'}(z)$

4.5. Cálculo de Rotações Via Multiplicação em \mathbb{C} X Via Produto Escalar no \mathbb{R}^2

Pretendo aqui responder a seguinte pergunta: dado o ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, qual é a melhor maneira de se calcular o ponto P que resulta da rotação com centro em 0 , segundo o ângulo θ' , do ponto P_1 ? Aplicando a função $R_{0,\theta'}$ no ponto P_1 ou utilizando o produto escalar? Vejamos.

4.5.1. Cálculo em \mathbb{C}

Fazendo $P_1 = z_1$ e $P = z$, basta calcular o produto $(x_1, y_1) \cdot CS\theta'$, ou seja,

$$z = R_{0,\theta'}(z_1) = (x_1, y_1) \cdot CS\theta'.$$

4.5.2. Cálculo no \mathbb{R}^2

Utilizarei (sem demonstrar) o conhecido

Teorema: Se os pontos $P_1 = (x_1, y_1) \neq 0$, $P = (x, y) \neq 0$ do plano cartesiano são as extremidades das flechas (vetores) v_1 e v , com origem em 0 , e θ' = ângulo entre v_1 e v , então

$$\cos \theta' = \frac{\langle v_1, v \rangle}{|v_1| \cdot |v|},$$

onde, $\langle v_1, v \rangle = x_1 \cdot x + y_1 \cdot y =$ produto escalar entre v_1 e v ,

$$|v_1| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} = \text{módulo de } v_1 \text{ e } |v| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{módulo de } v.$$

Assim, como a rotação não altera o módulo de v_1 , tem-se que

a) $|v| = |v_1| \Rightarrow x^2 + y^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2$ e

$$b) |v| = |v_1| \Rightarrow \cos \theta' = \frac{\langle v_1, v \rangle}{|v_1|^2} \Rightarrow x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = ((x_1)^2 + (y_1)^2) \cdot \cos \theta'$$

ou seja, o ponto $P = (x, y)$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2 \\ x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = ((x_1)^2 + (y_1)^2) \cdot \cos \theta' \end{cases}$$

4.5.3. Comparações Entre os Dois Cálculos

Listarei três vantagens do cálculo em C em comparação com o cálculo no R^2 :

1ª) Em C, θ' pode ser qualquer ângulo enquanto que no R^2 , por ser o ângulo entre duas flechas, tem-se que $0^\circ \leq \theta' \leq 180^\circ$. Assim, o cálculo em C ganha em generalidade.

2ª) Em C, calculamos P apenas pelo produto $z_1 \cdot \cos \theta'$, enquanto que no R^2 temos que resolver um sistema do 2º grau em x,y. Assim, o cálculo em C é operacionalmente melhor.

3ª) Em C, o ponto P calculado é único para qualquer valor de θ' , enquanto que no R^2 , o ponto P só é único quando $\theta' = 0^\circ$ ou 180° . Assim, o cálculo em C ganha em precisão.

Vale observar que quando $\theta' = 0^\circ$ ou 180° é desnecessário apelar para o sistema, pois nesses casos teremos sempre que $P = (x_1, y_1)$ ou $P = (-x_1, -y_1)$, respectivamente.

Também vale observar que o cálculo no R^2 resulta em duas respostas quando $\theta' \neq 0^\circ$ e 180° porque tanto o produto escalar quanto o produto dos módulos são operações comutativas. Essa comutatividade faz com que a rotação seja executada nos dois sentidos: o de θ' e o de $-\theta'$.

Para exemplificar as três vantagens apontadas, finalizarei esse capítulo calculando o ponto P, dado que $P_1 = (1,1)$ e $\theta' = 45^\circ$, das duas maneiras.

Cálculo via Função $R_{0,0'}$:

Fazendo $P_1 = z_1$ e $P = z$, tem-se que

$$z = R_{0,45^\circ}(z_1) = \underbrace{z_1}_{(1,1)} \cdot \underbrace{\text{CS}(45^\circ)}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = (0, \sqrt{2}).$$

Cálculo via Produto Escalar:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{x_1}{1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{1}\right)^2 \\ \frac{x_1}{1} \cdot x + \frac{y_1}{1} \cdot y = \left(\left(\frac{x_1}{1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{1}\right)^2\right) \cdot \cos \frac{\theta_1}{45^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = \sqrt{2} \Leftrightarrow y = \sqrt{2} - x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + (\sqrt{2} - x)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \text{ e } y = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = (0, \sqrt{2}) = R_{0,45^\circ}(z_1) \text{ ou } z = (\sqrt{2}, 0) = R_{0,-45^\circ}(z_1).$$

Por escapar aos objetivos desse TCC, não discutiremos outras maneiras de se calcular o ponto P, como, por exemplo, via matrizes de rotação.

5. Aplicações de Números Complexos em Geometria Plana

5.1. Introdução

Esse é o capítulo que dá sentido ao título deste TCC, ou seja, é o capítulo em que aplicarei efetivamente os números complexos em uma lista de geometria plana. Essa lista consta de problemas e teoremas. Procederei sempre da seguinte maneira, ou para resolver os problemas ou para provar os teoremas:

1º) Identificarei vértices e segmentos com números complexos. Em quase todos os itens da lista, identificarei um vértice com 0. Na maioria das situações será desnecessário considerar os eixos do plano complexo, ou seja, as soluções, tal como admitem a maioria dos enunciados, serão as mais gerais possíveis.

2º) Traduzirei o que se pede em cada enunciado via movimento de pontos e suas respectivas imagens pelas transformações $T_w, H_{0,r}$ e $R_{0,\theta}$ ou composições dessas.

3º) Utilizarei os resultados operacionais do capítulo dois para desenvolver os cálculos. Vale dizer que por considerar que a parte mais delicada das tarefas reside em bem interpretar os enunciados e identificar as transformações adequadas a cada problema e teorema, não terei por objetivo terminar todos os cálculos, ainda que esses, na maioria das vezes, por serem bem poucos, estejam completos.

Nas argumentações, me referirei, pelos respectivos números, aos três resultados obtidos no capítulo quatro, bem como a alguns resultados obtidos neste próprio capítulo.

Farei alguns comentários que julgar necessários, seja para introduzir enunciados, seja para analisar resultados decorrentes das argumentações.

Os dois primeiros problemas são clássicos. Estão na lista porque fornecem resultados úteis para a maioria das soluções e provas do restante da lista.

1) Calcule o ponto médio do segmento cujas extremidades são os pontos

$$A = (x_1, y_1) \text{ e } B = (x_2, y_2).$$

Solução:

Fazendo $A = (x_1, y_1) = z_1$, $B = (x_2, y_2) = z_2$ e z_M = ponto médio de AB , como $z_1 z_2 = 2 \cdot z_1 z_M$, tem-se que $z_2 = H_{z_1, 2}(z_M)$. Assim, do resultado (2), tem-se que:

$$z_2 = 2 \cdot (z_M - z_1) + z_1 \Rightarrow z_M = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2) \Rightarrow z_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right). \quad (4)$$

2) Calcule o baricentro do triângulo cujos vértices são os pontos

$$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \text{ e } C = (x_3, y_3).$$

Solução:

Fazendo $A = (x_1, y_1) = z_1$, $B = (x_2, y_2) = z_2$, $C = (x_3, y_3) = z_3$, $z_G =$ baricentro de ABC e $z_M =$ ponto médio de AB, como $z_M z_3 = 3 \cdot z_M z_G$, tem-se que $z_3 = H_{z_M, 3}(z_G)$.

Assim, dos resultados (2) e (4), tem-se que:

$$\begin{aligned} z_3 &= 3 \cdot (z_G - z_M) + z_M \Rightarrow z_G = \frac{1}{3} \cdot (2z_M + z_3) \Rightarrow z_G = \frac{1}{3} \cdot (z_1 + z_2 + z_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow z_G &= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \quad (5) \end{aligned}$$

3) Dado um triângulo ABC, são construídos exteriormente a ABC, os triângulos retângulos isósceles CBD e ACE. Prove que o triângulo DEM também é isósceles e retângulo em M, onde M é o ponto médio do lado AB.

A Figura 5.1 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

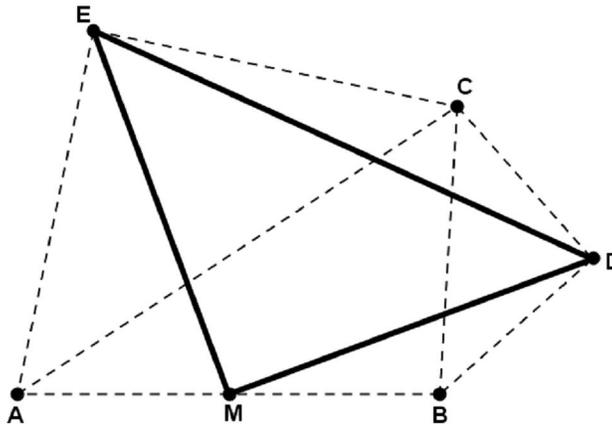


Figura 5.1 : O Triângulo DME é Isósceles e Retângulo em M

Prova:

Façamos $A = 0$, $B = z_1$, $C = z_2$, $D = z_3$, $E = z_4$ e $M = z_M$.

Provarei a tese provando que $R_{z_M, 90^\circ}(z_3) = z_4$.

Do resultado (3), isso equivale a provar que

$$(z_3 - z_M) \cdot CS(90^\circ) + z_M = z_4 \quad (*)$$

A Figura 5.2 ilustra a tese do teorema via rotação no plano complexo.

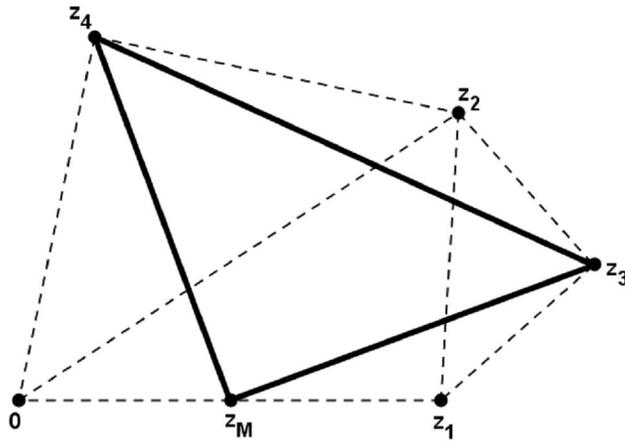


Figura 5.2 : $R_{z_M, 90^\circ}(z_3) = z_4$

Como $z_1 z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z_1 z_2$ e $0 z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 z_2$, tem-se que

$$z_3 = \left(H_{z_1, \frac{\sqrt{2}}{2}} \circ R_{z_1, 315^\circ} \right) (z_2) \text{ e } z_4 = \left(H_{0, \frac{\sqrt{2}}{2}} \circ R_{0, 45^\circ} \right) (z_2).$$

Assim, dos resultados (2) e (3), tem-se que

$$z_3 = H_{z_1, \frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{(z_2 - z_1) \cdot \text{CS}(315^\circ) + z_1}{z'} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (z_2 - z_1) + z_1 \Rightarrow z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (z_2 - z_1) \cdot \text{CS}(315^\circ) + z_1 \text{ e}$$

$$z_4 = H_{0, \frac{\sqrt{2}}{2}} (z_2 \cdot \text{CS}(45^\circ)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z_2 \cdot \text{CS}(45^\circ).$$

Do resultado (4) tem-se que

$$z_M = \frac{1}{2} \cdot (0 + z_1) = \frac{1}{2} \cdot z_1.$$

Finalizando, conclui-se que de fato a relação (*) é verdadeira, pois:

$$(z_3 - z_M) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_M = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z_2 \cdot \text{CS}(45^\circ) = z_4.$$

4) Dado um triângulo ABC, são construídos exteriormente a ele, os triângulos equiláteros CBE e ACF e, “internamente”, o triângulo equilátero ABD. Prove que o quadrilátero FDEC é um paralelogramo.

A Figura 5.3 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

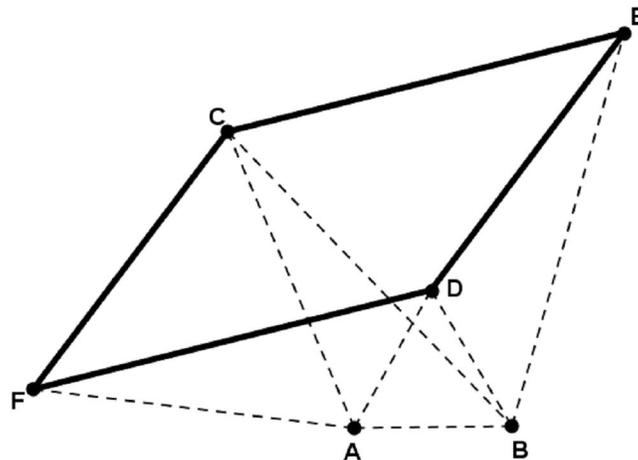


Figura 5.3 : O Quadrilátero FDEC é um Paralelogramo

Prova:

Façamos $A = 0$, $B = z_1$, $C = z_2$, $D = z_3$, $E = z_4$ e $F = z_5$.

Provarei a tese provando que as flechas (pontos) $z_2 - z_5$ e $z_4 - z_3$ são equipolentes (coincidentes).

A Figura 5.4 ilustra a tese do teorema via equipolência (coincidência) de flechas (pontos) no plano complexo.

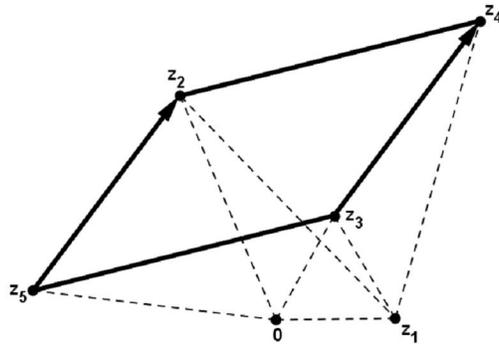


Figura 5.4 : As Flechas (Pontos) z_2-z_5 e z_4-z_3 são Equipolentes (Coincidentes)

Como $z_3 = R_{0,60^\circ}(z_1)$, $z_4 = R_{z_2,60^\circ}(z_1)$ e $z_5 = R_{0,60^\circ}(z_2)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_3 = z_1 \cdot \text{CS}(60^\circ),$$

$$z_4 = (z_1 - z_2) \cdot \text{CS}(60^\circ) + z_2 \text{ e}$$

$$z_5 = z_2 \cdot \text{CS}(60^\circ).$$

Assim, tem-se de fato que

$$z_2 - z_5 = z_2 \cdot (1 - \text{CS}(60^\circ)) = z_4 - z_3.$$

O teorema que segue é atribuído a Napoleão Bonaparte (1769-1821).

5) Dado um triângulo ABC, são construídos exteriormente a ABC os triângulos equiláteros ABD, BCE e CAF, cujos centros são, respectivamente, os pontos G, H e I. Prove que o triângulo GHI é equilátero.

A Figura 5.5 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

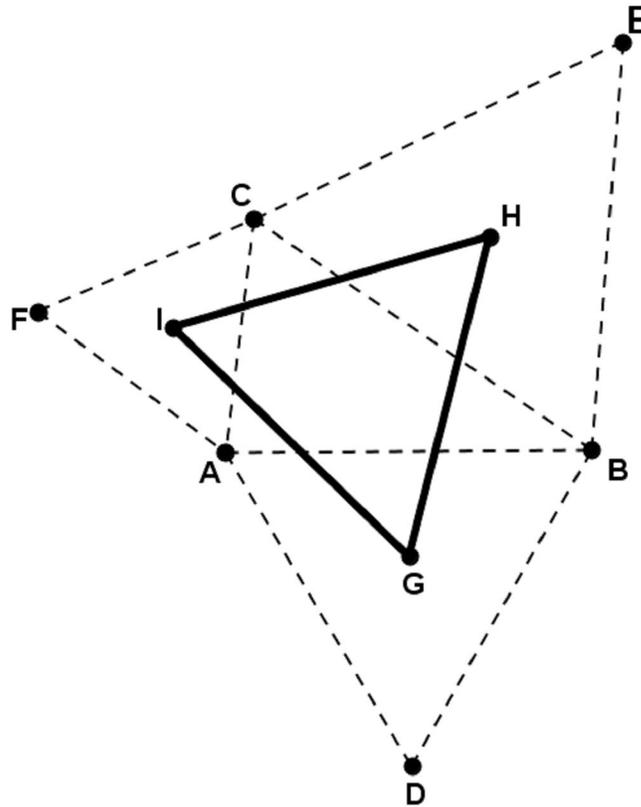


Figura 5.5 : O Triângulo GHI é Equilátero

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, D = z_3, E = z_4, F = z_5, G = z_6, H = z_7$ e $I = z_8$.

Provarei a tese provando que $z_8 = R_{z_6, 60^\circ}(z_7)$. Do resultado (3) isso equivale a provar que

$$(z_7 - z_6) \cdot CS(60^\circ) + z_6 - z_8 = 0 \quad (*)$$

A Figura 5.6 ilustra a tese do teorema via rotação no plano complexo.

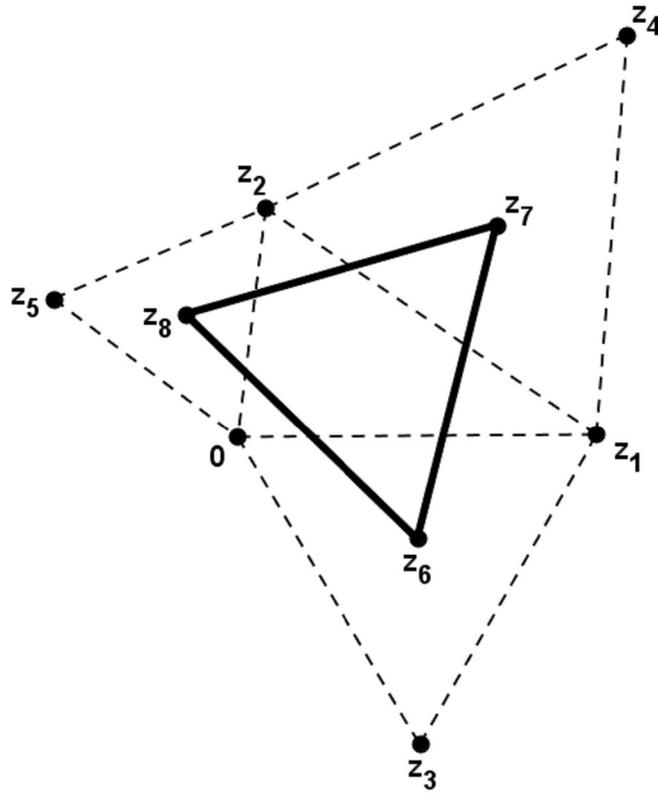


Figura 5.6 : $R_{z_6, 60^\circ}(z_7) = z_8$

Como $z_3 = R_{0, 300^\circ}(z_1)$, $z_4 = R_{z_1, 300^\circ}(z_2)$ e $z_5 = R_{0, 60^\circ}(z_2)$, do resultado (3), tem-se que

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 \cdot \text{CS}(300^\circ), \\ z_4 &= (z_2 - z_1) \cdot \text{CS}(300^\circ) + z_1 \quad \text{e} \\ z_5 &= z_2 \cdot \text{CS}(60^\circ). \end{aligned}$$

Como os centros dos triângulos equiláteros coincidem com seus baricentros, do resultado (5), tem-se que

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{1}{3} \cdot (0 + z_1 + z_3) = \frac{1}{3} \cdot z_1 \cdot (1 + \text{CS}(300^\circ)), \\ z_7 &= \frac{1}{3} \cdot (z_1 + z_2 + z_4) = \frac{1}{3} \cdot [2z_1 + z_2 + (z_2 - z_1) \cdot \text{CS}(300^\circ)] \quad \text{e} \\ z_8 &= \frac{1}{3} \cdot (0 + z_2 + z_5) = \frac{1}{3} \cdot z_2 \cdot (1 + \text{CS}(60^\circ)). \end{aligned}$$

Finalizando, conclui-se que de fato a relação (*) é verdadeira pois

$$(z_7 - z_6) \cdot \cos(60^\circ) + z_6 - z_8 = 0 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 = 0 \quad (6)$$

Vale observar que provei mais do que pretendia, pois o resultado (6) vale ainda que $z_2 \in 0z_1$ ou $z_1 \in 0z_2$, ou seja, ainda que o triângulo $0z_1z_2$ seja degenerado.

6) Prove que a tese do teorema de Napoleão é verdadeira mesmo quando os triângulos equiláteros ABD, BCE e CAF, cujos centros são, respectivamente, G', H' e I', são construídos interiormente a ABC.

A Figura 5.7 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

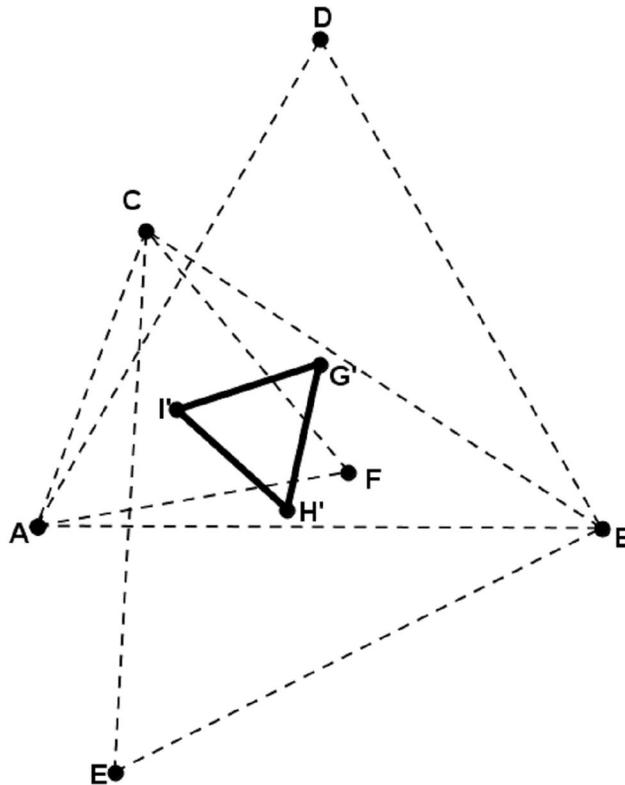


Figura 5.7 : O Triângulo G'H'I' é Equilátero

Prova:

Fazendo $G' = z'_6, H' = z'_7, I' = z'_8$, provarei a tese provando que

$$z'_8 = R_{z'_7, 60^\circ}(z'_6) \quad (*)$$

A Figura 5.8 ilustra a tese do teorema via rotação no plano complexo.

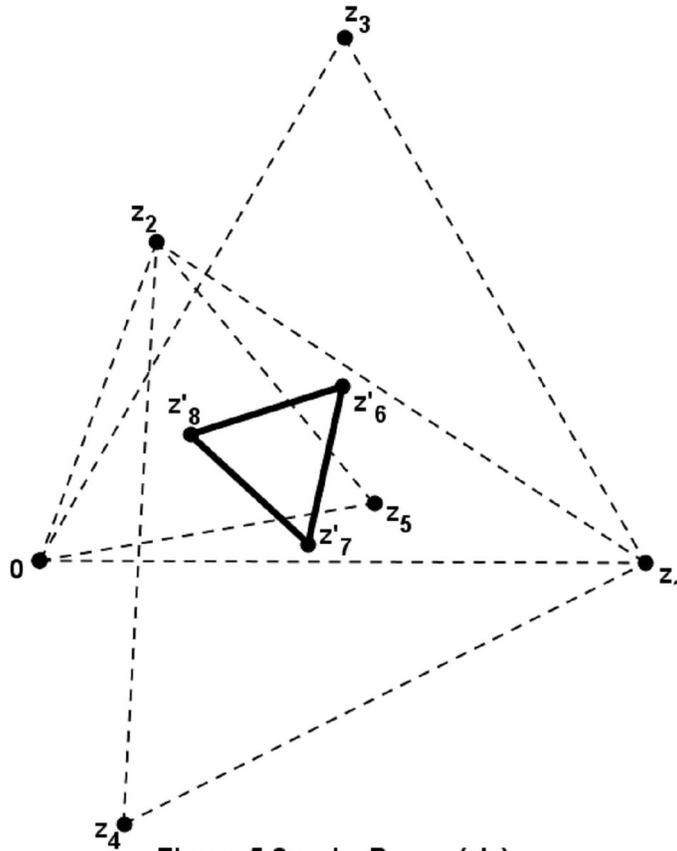


Figura 5.8 : $z'_8 = R_{z'_7, 60^\circ}(z'_6)$

Para calcular os pontos z'_6, z'_7 e z'_8 , basta ver que, fazendo m_1, m_2, m_3 , respectivamente, os pontos médios dos lados $0z_1, z_1z_2, 0z_2$, tem-se que z'_6, z'_7, z'_8 e z_6, z_7, z_8 são pontos, respectivamente, simétricos em relação a m_1, m_2, m_3 , e isso significa que $z'_6 = R_{m_1, 180^\circ}(z_6)$, $z'_7 = R_{m_2, 180^\circ}(z_7)$ e $z'_8 = R_{m_3, 180^\circ}(z_8)$.

A partir daí a prova da relação (*) é inteiramente similar a prova da versão anterior do teorema de Napoleão.

Vale observar que os pontos z'_6, z'_7 e z'_8 também são simétricos aos pontos z_6, z_7 e z_8 em relação aos segmentos (ou retas) $0z_1, z_1z_2, 0z_2$, respectivamente. Não farei uma segunda prova utilizando essa interpretação. Os dois problemas que seguem servem de preparação para tratarmos esse tipo de simetria e tal tratamento será utilizado para provar o teorema seguinte a eles.

7) Seja r a reta definida pelo ponto 0 e a inclinação θ_r . Calcule o ponto P' , simétrico do ponto $P \neq (0,0)$, em relação a r .

É fácil ver que se o ponto P pertence a reta r , tem-se que $P'=P$. Isso inclui $P=(0,0)$.

Solução:

Fazendo $P = z = \rho \cdot \text{CS } \theta$, com $\theta_r < \theta$ e $P' = z'$, tem-se que $z' = R_{0,-2(\theta-\theta_r)}(z)$.

Assim

$$\begin{aligned} z' &= R_{0,-2(\theta-\theta_r)}(z) = z \cdot \text{CS}(-2(\theta-\theta_r)) \Rightarrow z' = (\rho \cdot \text{CS } \theta)(\text{CS}(-2\theta + 2\theta_r)) \Rightarrow \\ \Rightarrow z' &= \rho \cdot \text{CS}(\theta - 2\theta + 2\theta_r) \Rightarrow z' = \underbrace{\rho \cdot \text{CS}(-\theta)}_{\bar{z}} \text{CS}(2\theta_r) \Rightarrow z' = \bar{z} \cdot \text{CS}(2\theta_r) \end{aligned} \quad (7)$$

Vale observar que z' pode ser calculado da mesma forma ainda que $\theta \leq \theta_r$.

O resultado (7) mostra que z' pode ser pensado via rotação do ponto \bar{z} em relação ao 0 de um ângulo de $2\theta_r$, ou seja,

$$z' = R_{0,2\theta_r}(\bar{z}). \quad (8)$$

A Figura 5.9 ilustra o cálculo do ponto z' e o resultado (8) via números complexos.

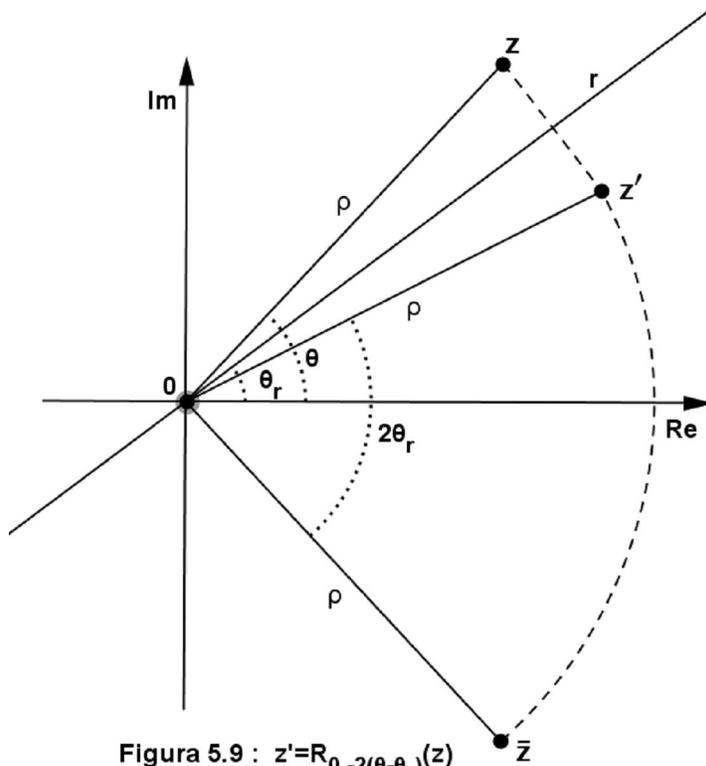


Figura 5.9 : $z' = R_{0, -2(\theta - \theta_r)}(z)$

O próximo problema é uma generalização deste.

8) Seja r a reta definida pelo ponto $P_1 = (0, y_1) \neq (0, 0)$ e a inclinação θ_r . Calcule o ponto P' , simétrico do ponto P em relação a reta r .

Solução:

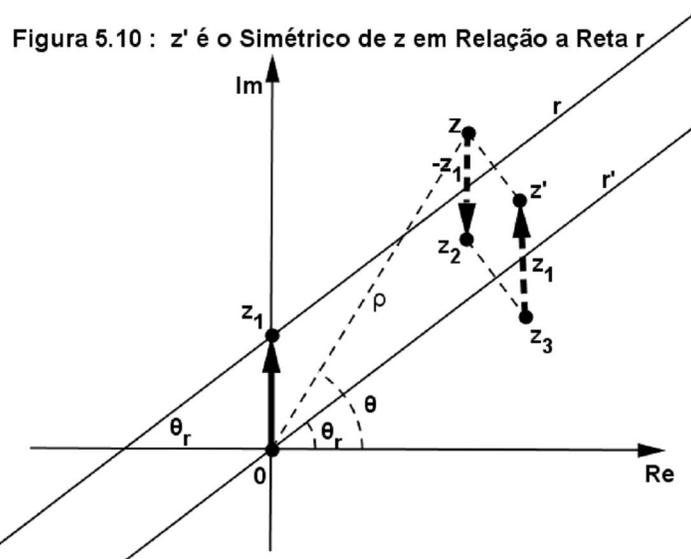
Fazendo $r' \parallel r$, com $(0, 0) \in r'$, tem-se que a inclinação de r' também é θ_r .

Fazendo $P_1 = z_1, P = z, P' = z'$ e $z_2 = T_{-z_1}(z) = z + (-z_1)$, do resultado (8) tem-se que $z_3 = \overline{z_2} \cdot \text{CS}(2\theta_r)$ é o simétrico de z_2 em relação a r' .

Finalizando, tem-se que $z' = T_{z_1}(z_3) = z_3 + z_1$ é o ponto procurado, ou seja,

$$z' = (\overline{z - z_1}) \cdot \text{CS}(2\theta_r) + z_1.$$

A Figura 5.10 ilustra o cálculo do ponto z' via números complexos.



Vale observar que a transformação $S_{z_1, \theta_r} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $S_{z_1, \theta_r}(z) = (\overline{z - z_1}) \cdot \text{CS}(2\theta_r) + z_1$, associa cada ponto z ao seu simétrico $S_{z_1, \theta_r}(z)$ em relação a reta r cujos coeficientes linear e angular são, respectivamente, $\text{Im}(z_1)$ e θ_r .

Utilizarei a transformação $S_{z_1, \theta_r} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ para provar o próximo teorema.

9) Seja G o baricentro de um triângulo equilátero ABC. Se P é um ponto do plano que contém ABC e Q, R e S são os pontos simétricos de P em relação aos lados AB, BC e AC, respectivamente, prove que o ponto G também é o baricentro do triângulo QRS.

A Figura 5.11 ilustra apenas uma das infinitas possibilidades de interpretação para o enunciado, além de enfatizar a tese do teorema.

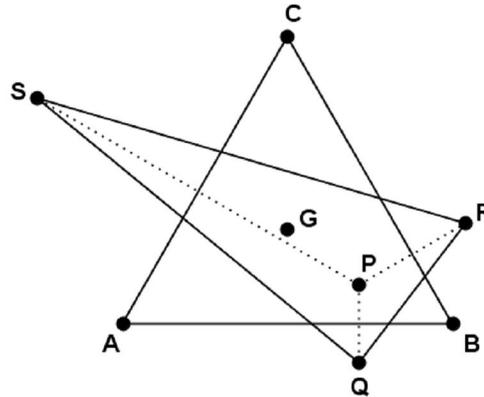


Figura 5.11 : O Ponto G é o Baricentro dos Triângulos ABC e QRS

Prova:

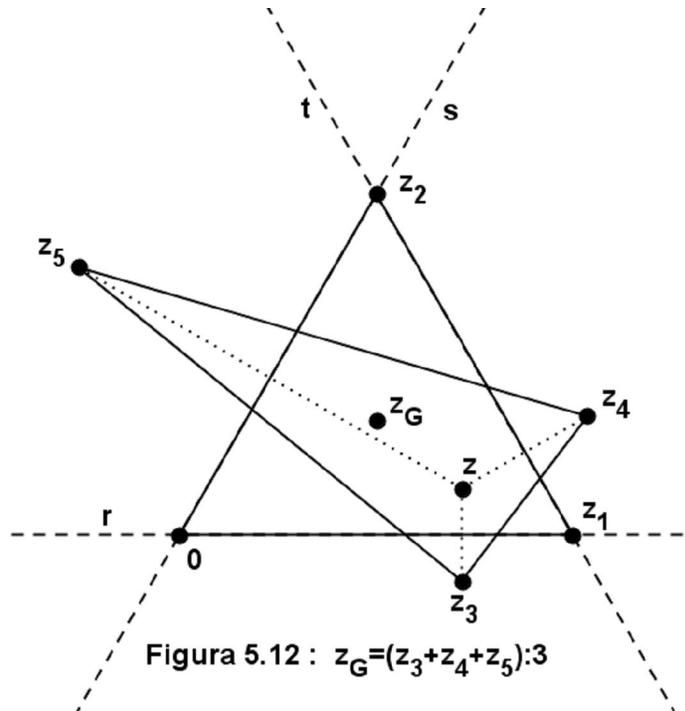
Façamos $A = 0, C = z_2, Q = z_3, R = z_4, S = z_5, P = z = (x, y), G = z_G$ e, sem perda de generalidade, façamos $B = z_1 =$ um real positivo .

De acordo com o resultado (5), provarei a tese provando que $\frac{1}{3} \cdot (z_3 + z_4 + z_5) = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(0 + z_1 + z_2)}_{z_G}$, o que equivale a provar que

$$z_3 + z_4 + z_5 = z_1 + z_2 \quad (*)$$

Fazendo r =reta que contém o lado $0z_1$, s =reta que contém o lado z_1z_2 e t =reta que contém o lado $0z_2$, é fácil ver que seus coeficientes lineares e angulares são, respectivamente, $0, 0^\circ; \sqrt{3} \cdot z_1, 120^\circ$ e $0, 60^\circ$.

A Figura 5.12 ilustra a tese via números complexos.



Como $z_2 = R_{0,60^\circ}(z_1)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_2 = z_1 \cdot \text{CS}(60^\circ) \text{ e,}$$

utilizando a transformação $S_{z_1,0,r} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tem-se que

$$\begin{aligned} z_3 &= S_{(0,0),0^\circ}(z) = (\overline{z - (0,0)}) \cdot \text{CS}(2 \cdot 0^\circ) + (0,0) = (x, -y) \\ z_4 &= S_{(0,\sqrt{3} \cdot z_1),120^\circ}(z) = (\overline{z - (0,\sqrt{3} \cdot z_1)}) \cdot \text{CS}(2 \cdot 120^\circ) + (0,\sqrt{3} \cdot z_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow z_4 &= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \cdot z_1, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot z_1 \right) \end{aligned}$$

e

$$z_5 = S_{(0,0),60^\circ}(z) = (\overline{z - (0,0)}) \cdot \text{CS}(2 \cdot 60^\circ) + (0,0) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right).$$

Finalizando, conclui-se que de fato a relação (*) é verdadeira pois

$$z_3 + z_4 + z_5 = z_1 + z_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot z_1.$$

Vale observar que na Figura 5.11 o ponto $P = z = (x,y)$ foi considerado interior ao triângulo ABC. Como $G = z_G = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot z_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \cdot z_1$, portanto independente dos valores de x e y , tem-se que a tese do teorema continua

válida ainda que P seja um ponto exterior ao triângulo ABC ou pertencente a um dos seus lados. P pode ser, inclusive, um dos vértices de ABC .

Voltando ao teorema de Napoleão, é natural indagarmos se o mesmo pode ser generalizado. Por exemplo, será verdade que os centros dos quadrados construídos exteriormente a um quadrilátero (qualquer) são vértices de um quadrado? A Figura 5.13 “mostra” que não.

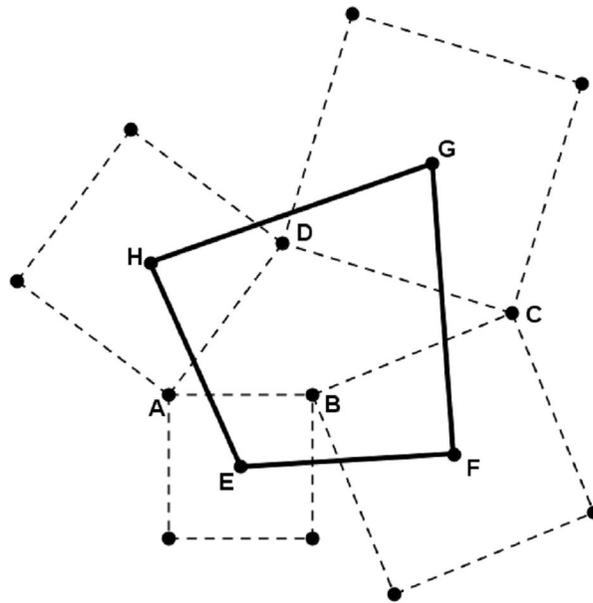


Figura 5.13 : O Quadrilátero EFGH não é um Quadrado

O próximo teorema afirma, entretanto, que o quadrilátero EFGH é um quadrado quando o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

10) Dado um paralelogramo ABCD, são construídos exteriormente a ABCD os quadrados ABEF, BCGH, CDJI e ADHL, cujos centros são, respectivamente, os pontos M, N, O e P. Prove que o quadrilátero MNOP é um quadrado.

A Figura 5.14 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

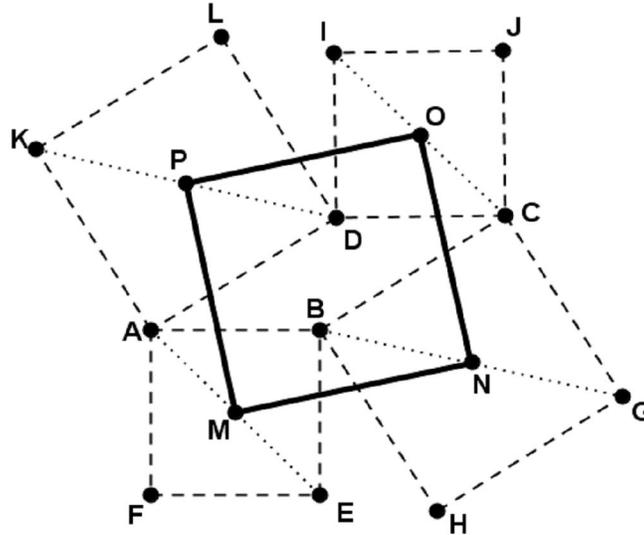


Figura 5.14 : O Quadrilátero MNOP é um Quadrado

Prova:

Façamos

$$A = 0, B = z_1, C = z_2, D = z_3, M = z_4, N = z_5, O = z_6, P = z_7, E = z_8, G = z_9, I = z_{10} \text{ e } K = z_{11}.$$

Provarei a tese provando que $z_6 = R_{z_5, 270^\circ}(z_4)$ e $z_7 = R_{z_4, 90^\circ}(z_5)$. Do resultado (3), isso equivale a provar que

$$(z_4 - z_5) \cdot \text{CS}(270^\circ) + z_5 = z_6 \quad (*)$$

$$\text{e} \\ (z_5 - z_4) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_4 = z_7 \quad (**)$$

A Figura 5.15 ilustra a tese do teorema via rotações no plano complexo.

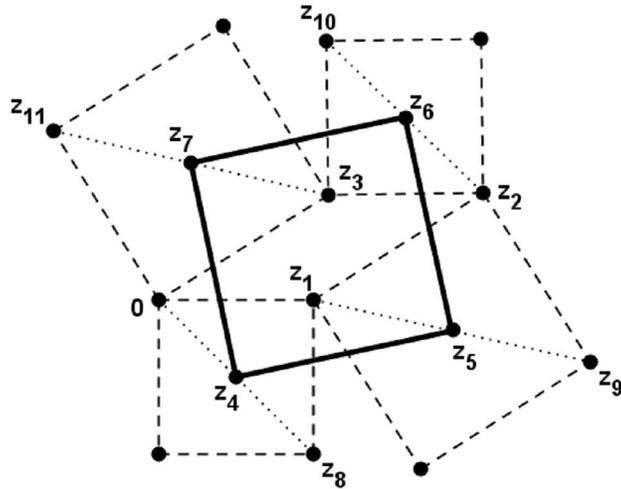


Figura 5.15 : $z_6 = R_{z_5, 270^\circ}(z_4)$ e $z_7 = R_{z_4, 90^\circ}(z_5)$

Como $z_2 = T_{z_1}(z_3)$, $z_8 = R_{z_1, 90^\circ}(0)$, $z_9 = R_{z_2, 90^\circ}(z_1)$, $z_{10} = R_{z_3, 90^\circ}(z_2)$ e $z_{11} = R_{0, 90^\circ}(z_3)$,

do resultado (1) tem-se que

$$z_2 = z_3 + z_1,$$

do resultado (3), tem-se que

$$\begin{aligned} z_8 &= (0 - z_1) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_1 = z_1 \cdot (1 - i), \\ z_9 &= (z_1 - z_2) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_2 = z_1 \cdot i + z_3 \cdot (1 - i), \\ z_{10} &= (z_2 - z_3) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_3 = z_1 \cdot i + z_3, \\ z_{11} &= z_3 \cdot \text{CS}(90^\circ) = z_3 \cdot i, \end{aligned}$$

e, do resultado (4), tem-se que

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{1}{2} \cdot (0 + z_8) = \frac{1}{2} \cdot z_1 \cdot (1 - i), \\ z_5 &= \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_9) = \frac{1}{2} [2z_1 + z_3 \cdot (1 - i)], \\ z_6 &= \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_{10}) = \frac{1}{2} [z_1 \cdot (1 + i) + 2z_3] \text{ e} \\ z_7 &= \frac{1}{2} \cdot (z_3 + z_{11}) = \frac{1}{2} \cdot z_3 \cdot (1 + i). \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que de fato as relações (*) e (**) são verdadeiras pois

$$(z_4 - z_5) \cdot \text{CS}(270^\circ) + z_5 = \frac{1}{2} \cdot [z_1 \cdot (1+i) + 2z_3] = z_6 \quad (*)$$

e

$$(z_5 - z_4) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_4 = \frac{1}{2} \cdot z_3 \cdot (1+i) = z_7 \quad (**)$$

11) Consideremos um triângulo retângulo isósceles ABC, cujo ângulo reto tem vértice A. Se M é o ponto médio do lado BC e P é um ponto do lado BC (diferente de B e C) cujas projeções ortogonais sobre os lados AB e AC, são os pontos D e E, respectivamente, prove que o triângulo MDE é retângulo isósceles cujo ângulo reto tem vértice M.

A Figura 5.16 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

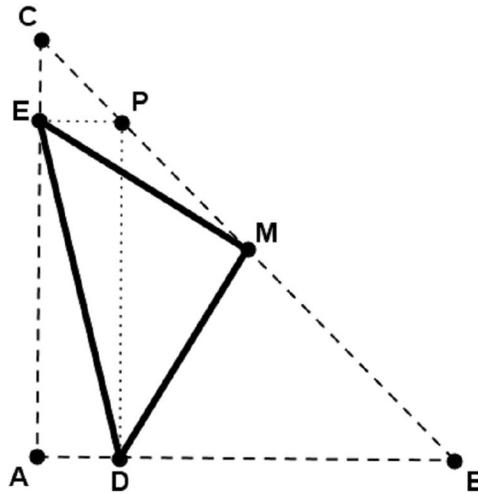


Figura 5.16 : O Triângulo MDE é Retângulo Isósceles, Cujo Ângulo Reto tem Vértice M

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, P = z = (x, y), D = z_3, E = z_4$ e $M = z_M$.

Provarei a tese provando que $z_3 = R_{z_M, 90^\circ}(z_4)$. Do resultado (3), isso equivale a provar que

$$(z_4 - z_M) \cdot CS(90^\circ) + z_M - z_3 = 0 \quad (*)$$

A Figura 5.17 ilustra a tese do teorema via rotação no plano complexo.

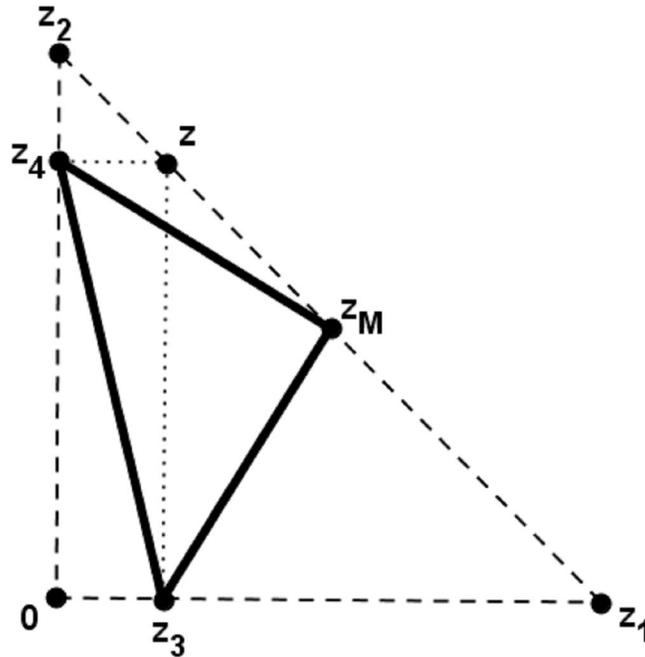


Figura 5.17 : $z_3 = R_{z_M, 90^\circ}(z_4)$

Sem perda de generalidade, fazendo $z_1 = \text{número real positivo}$, tem-se que $z_3 = x$ e $z_4 = y.i$. Como $z_2 = R_{0, 90^\circ}(z_1) = z_1 \cdot \text{CS}(90^\circ) = z_1 \cdot i$, do resultado (4) tem-se que

$$z_M = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2) = \frac{1}{2} \cdot z_1 \cdot (1 + i).$$

Como os triângulos EPC e ABC são triângulos retângulos isósceles semelhantes, tem-se que $x + y = z_1$ e

$$(z_4 - z_M) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_M - z_3 = z_1 - (x + y) = 0,$$

ou seja, a relação (*) é de fato verdadeira.

12) Dados os triângulos equiláteros ABC, DEC e o paralelogramo BFDC, prove que o triângulo AFE é equilátero.

A Figura 5.18 ilustra apenas uma das infinitas possibilidades de interpretação para o enunciado, além de enfatizar a tese do teorema.

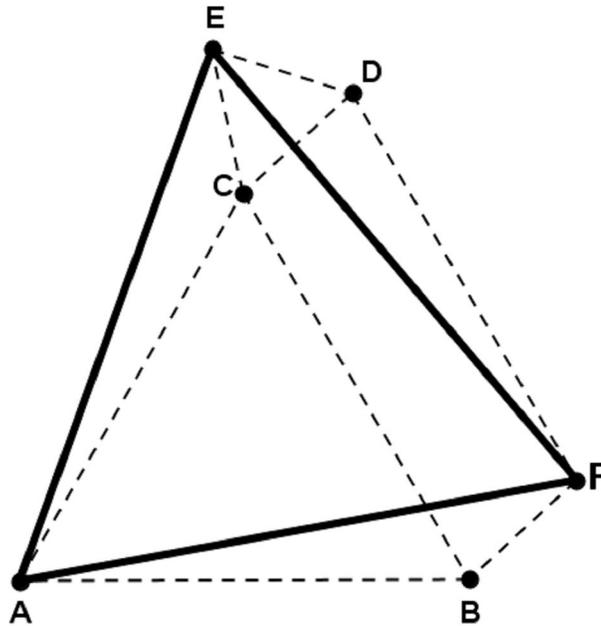


Figura 5.18 : O Triângulo AFE é Equilátero

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, D = z_3, E = z_4$ e $F = z_5$.

Provarei a tese provando que $z_4 = R_{0,60^\circ}(z_5)$. Do resultado (3) isso equivale a provar que

$$z_5 \cdot \text{CS}(60^\circ) = z_4 \quad (*)$$

A Figura 5.19 ilustra a tese do teorema via rotação no plano complexo.

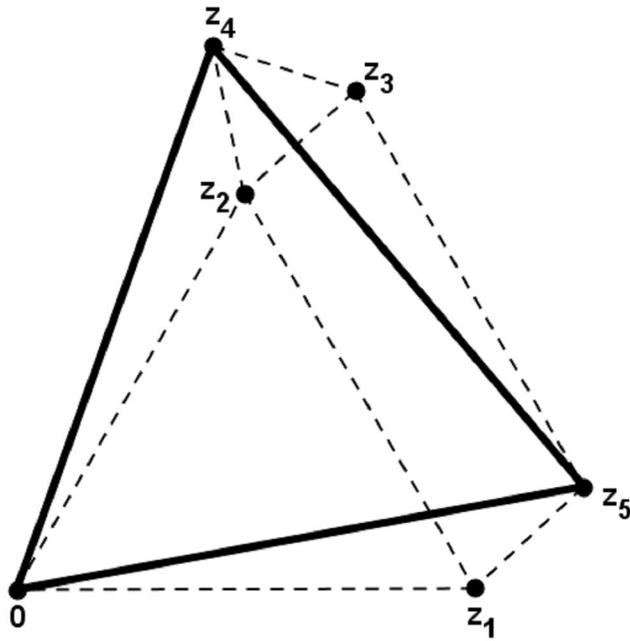


Figura 5.19 : $z_4 = R_{0,60}(z_5)$

Como $z_2 = R_{0,60}(z_1)$, $z_4 = R_{z_2,60}(z_3)$ e $z_5 = T_{z_1-z_2}(z_3)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_2 = z_1 \cdot \text{CS}(60^\circ),$$

$$z_4 = (z_3 - z_2) \cdot \text{CS}(60^\circ) + z_2 = z_1 + z_3 \cdot \text{CS}(60^\circ) \text{ e}$$

do resultado (1), tem-se que

$$z_5 = z_3 + (z_1 - z_2) = z_3 + z_1 \cdot (1 - \text{CS}(60^\circ)),$$

Assim, conclui-se que de fato a relação (*) é verdadeira pois

$$z_5 \cdot \text{CS}(60^\circ) = z_1 + z_3 \cdot \text{CS}(60^\circ) = z_4.$$

Vale observar que essa prova é genérica, ou seja, não é válida apenas para a interpretação utilizada.

13) Dado um quadrado ABCD, seja P um ponto da diagonal BD, cujas projeções ortogonais sobre os lados AB, BC, CD e AD, são, respectivamente, os pontos E, F, G e H. Prove que os segmentos EH e PC são perpendiculares e congruentes.

A Figura 5.20 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

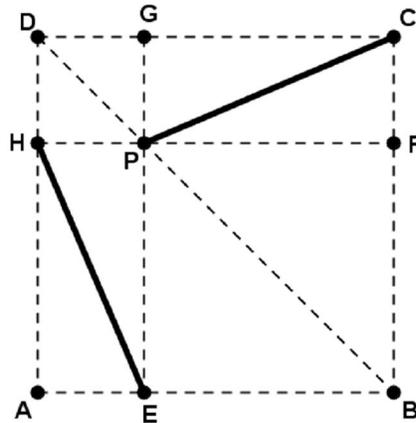


Figura 5.20 : Os Segmentos EH e PC são Perpendiculares e Congruentes

Prova:

Façamos $A = 0, C = z_2, E = z_3, H = z_4$ e $P = z = (x, y)$. Sem perda de generalidade, fazendo $B = z_1 = \text{número real positivo}$, tem-se que $z_3 = (0, x)$ e $z_4 = (0, y)$ com $0 < x, y < z_1$.

Provarei a tese provando que as flechas (pontos) $z_4 - z_3$ e $z_2 - z$ são equipolentes (coincidentes), ou seja, que $(R_{0,90^\circ} \circ T_{-z})(z_2) = T_{-z_3}(z_4)$. Dos resultados (1) e (3) isso equivale a provar que

$$(z_2 - z) \cdot CS(90^\circ) = z_4 - z_3 \quad (*)$$

A Figura 5.21 ilustra a tese do teorema via composição de translação e rotação no plano complexo.

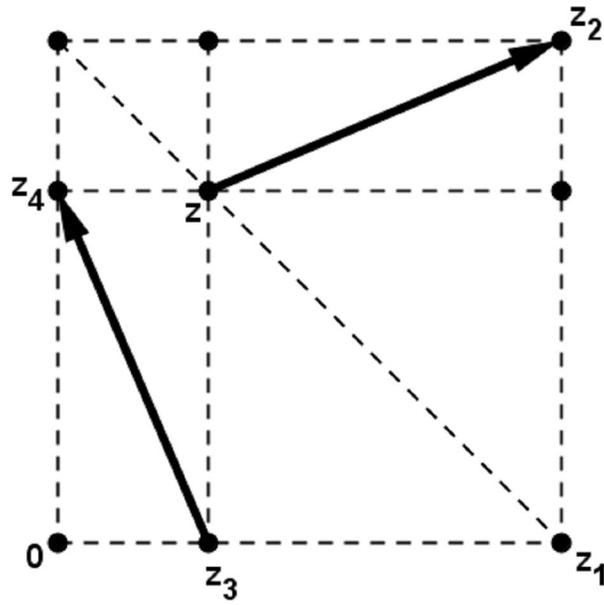


Figura 5.21 : $(R_{0,90^\circ} \circ T_{-z})(z_2) = T_{-z_3}(z_4)$

Como $z_2 = R_{z_1, 270^\circ}(0)$, do resultado (3) tem-se que $z_2 = (z_1, z_1)$.

Como o triângulo PEB é retângulo isósceles, tem-se que $x + y = z_1$ para todo ponto da diagonal (incluindo os pontos B e D, ou seja, para todo $z = (x, y)$, com $0 \leq x, y \leq z_1$), o que equivale a dizer que $z = (x, z_1 - x)$ e $z_4 = (0, z_1 - x)$. Assim, conclui-se que de fato a relação (*) é verdadeira pois

$$(z_2 - z) \cdot CS(90^\circ) = z_4 - z_3 = (-x, z_1 - x).$$

14) Dado um paralelogramo ABCD e os triângulos isósceles semelhantes CBE e FDC, prove que o triângulo FAE é semelhante aos triângulos CBE e FDC.

A Figura 5.22 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

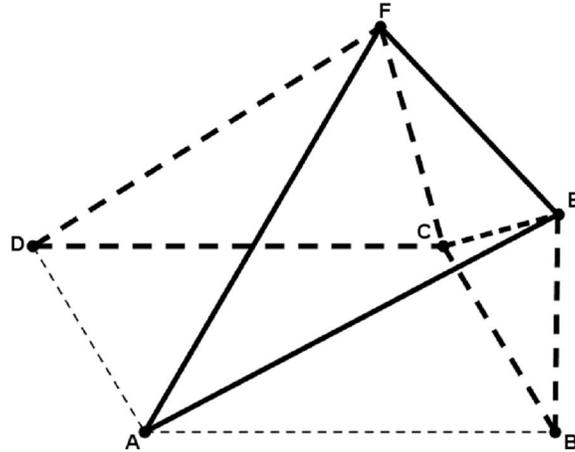


Figura 5.22 : O Triângulo FAE é Semelhantes aos Triângulos Isósceles Semelhantes CBE e FDC

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, D = z_3, E = z_4$ e $F = z_5$.

Para provar a tese provarei que $z_5 = R_{0,\beta}(z_4)$, onde $\beta = z_2 \hat{z}_1 z_4 = z_5 \hat{z}_3 z_2$. Isso equivale a provar que

$$z_5 = z_4 \cdot CS \beta. \quad (*)$$

A Figura 5.23 ilustra a tese do teorema via rotação no plano complexo.

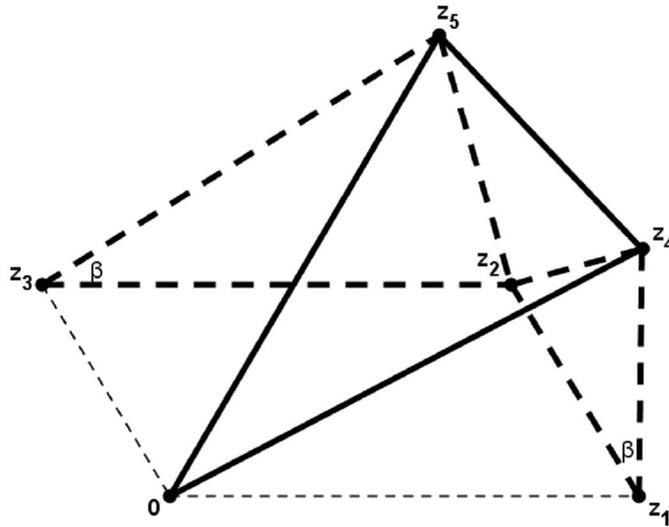


Figura 5.23 : $z_5 = R_{0, \beta}(z_4)$

Como $z_2 = T_{z_1}(z_3)$, $z_4 = R_{z_1, -\beta}(z_2)$ e $z_5 = R_{z_3, \beta}(z_4)$, do resultado (1), tem-se que $z_2 = T_{z_1}(z_3) = z_3 + z_1$ e, do resultado (3) tem-se que

$$z_4 = (z_2 - z_1) \cdot \text{CS}(-\beta) + z_1 = z_3 \cdot \text{CS}(-\beta) + z_1 \text{ e}$$

$$z_5 = (z_2 - z_3) \cdot \text{CS}\beta + z_3 = z_1 \cdot \text{CS}\beta + z_3.$$

Assim, tem-se que de fato a relação (*) é verdadeira pois

$$z_5 = z_1 \cdot \text{CS} + z_3 = z_4 \cdot \text{CS}\beta.$$

15) Dados os triângulos retângulos isósceles BAC e DAE, se M é o ponto médio do segmento CD, prove que os segmentos EB e AM são perpendiculares e $EB=2 \cdot AM$.

A Figura 5.24 ilustra apenas uma das infinitas possibilidades de interpretação para o enunciado, além de enfatizar a tese do teorema.

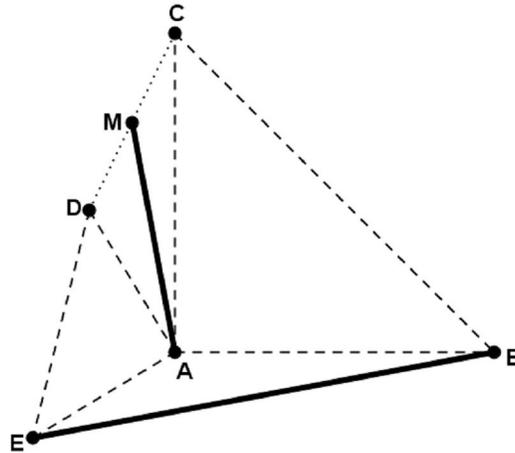


Figura 5.24 : Os Segmentos EB e AM são Perpendiculares e $EB=2 \cdot AM$

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, D = z_3, E = z_4$ e $M = z_M$.

Provarei a tese provando que as flechas (pontos) $z_4 - z_1$ e $2z_M \cdot CS(90^\circ)$ são equipolentes (coincidentes), o que equivale a provar que

$$(H_{0,2} \circ R_{0,90^\circ})(z_M) = T_{-z_1}(z_4) \quad (*)$$

A Figura 5.25 ilustra a tese via translação e composição de rotação e homotetia, no plano complexo.

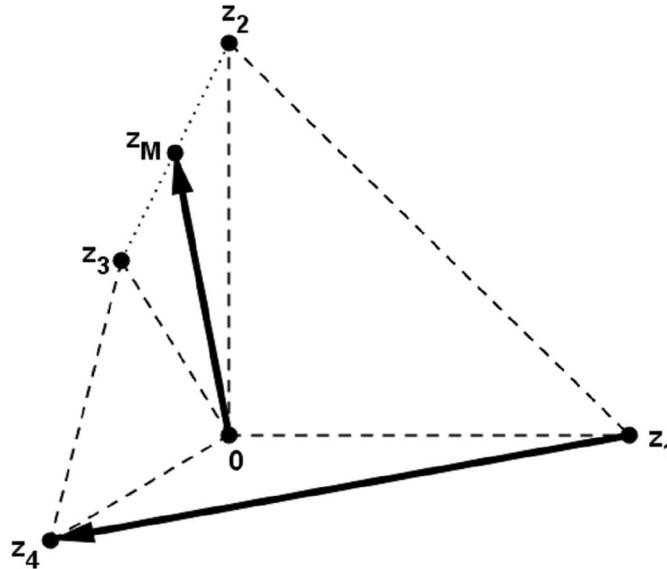


Figura 5.25 : $(H_{0,2} \circ R_{0,90^\circ})(z_M) = T_{-z_1}(z_4)$

Como $z_2 = R_{0,90^\circ}(z_1)$ e $z_4 = R_{0,90^\circ}(z_3)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_2 = z_1 \cdot \text{CS}(90^\circ) = z_1 \cdot i \text{ e } z_4 = z_3 \cdot \text{CS}(90^\circ) = z_3 \cdot i, \text{ e}$$

do resultado (4), tem-se que $z_M = \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_3) = \frac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot i + z_3)$.

Assim, conclui-se que de fato a relação (*) é verdadeira pois

$$(H_{0,2} \circ R_{0,90^\circ})(z_M) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot i + z_3) \cdot i \right) = z_3 \cdot i - z_1 = z_4 - z_1 = T_{-z_1}(z_4).$$

Vale observar que essa prova é genérica, ou seja, não é válida apenas para a interpretação utilizada.

16) Dados os quadrados ABCD e AEFG, cujos centros são os pontos L e J, respectivamente, e os paralelogramos ADIE e AGHB, cujos centros são os pontos M e K, respectivamente, prove que o quadrilátero JKLM é um quadrado.

A Figura 5.26 ilustra apenas uma das infinitas possibilidades de interpretação para o enunciado, além de enfatizar a tese do teorema.

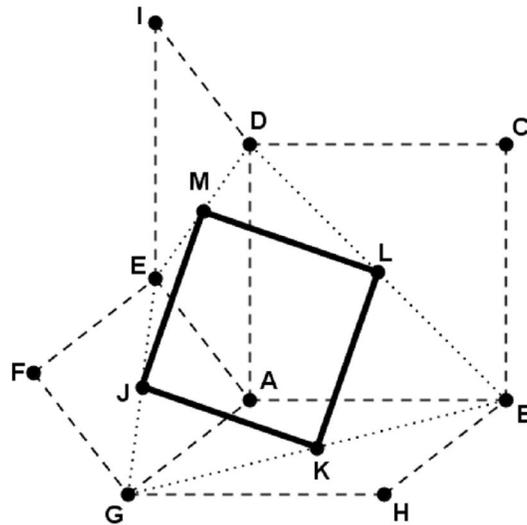


Figura 5.26 : O Quadrilátero JKLM é um Quadrado

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, D = z_2, E = z_3, G = z_4, J = z_5, K = z_6, L = z_7$ e $M = z_8$.

Para provar a tese provarei que $z_6 = R_{z_7, 90^\circ}(z_8)$ e $z_8 = R_{z_5, 90^\circ}(z_6)$.

Do resultado (3) isso equivale a provar que

$$(z_8 - z_7) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_7 = z_6 \quad (*)$$

e

$$(z_6 - z_5) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_5 = z_8 \quad (**)$$

A Figura 5.27 ilustra a tese do teorema via rotações no plano complexo.

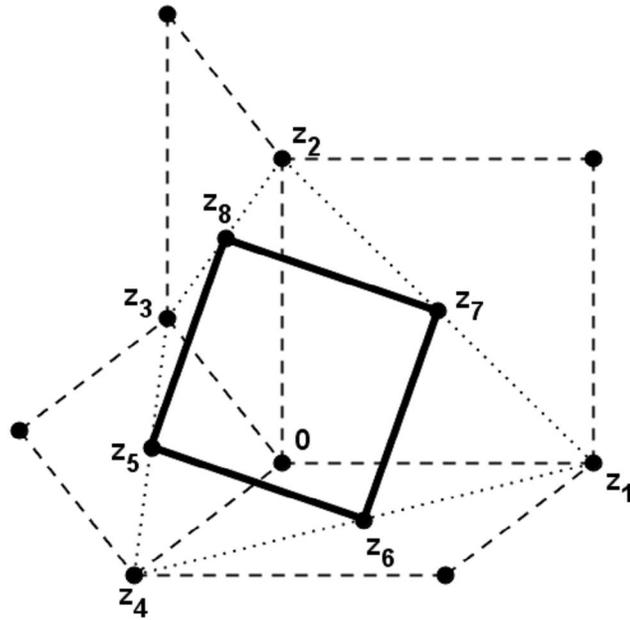


Figura 5.27 : $z_6 = R_{z_7, 90^\circ}(z_8)$ e $z_8 = R_{z_5, 90^\circ}(z_6)$

Como $z_2 = R_{0, 90^\circ}(z_1)$ e $z_4 = R_{0, 90^\circ}(z_3)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_2 = z_1 \cdot \text{CS}(90^\circ) = z_1 \cdot i \text{ e } z_4 = z_3 \cdot \text{CS}(90^\circ) = z_3 \cdot i \text{ e}$$

do resultado (4), tem-se que

$$z_5 = \frac{1}{2} \cdot (z_3 + z_4) = \frac{1}{2} \cdot z_3 \cdot (1 + i),$$

$$z_6 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_4) = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_3 \cdot i) .$$

$$z_7 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2) = \frac{1}{2} \cdot z_1 \cdot (1 + i) \text{ e}$$

$$z_8 = \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_3) = \frac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot i + z_3).$$

Assim, conclui-se que as relações (*) e (**) são de fato verdadeiras pois

$$(z_8 - z_7) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_7 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_3 \cdot i) = z_6 \quad (*)$$

e

$$(z_6 - z_5) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_5 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot i + z_3) = z_8 \quad (**)$$

Vale observar que essa prova é genérica, ou seja, não é válida apenas para a interpretação utilizada.

17) Dados os triângulos equiláteros ABC, ADE e AFG, se H, I e J são os pontos médios dos segmentos CD, EF e BG, respectivamente, prove que o triângulo HIJ é equilátero.

A Figura 5.28 ilustra apenas uma das infinitas possibilidades de interpretação para o enunciado, além de enfatizar a tese do teorema.

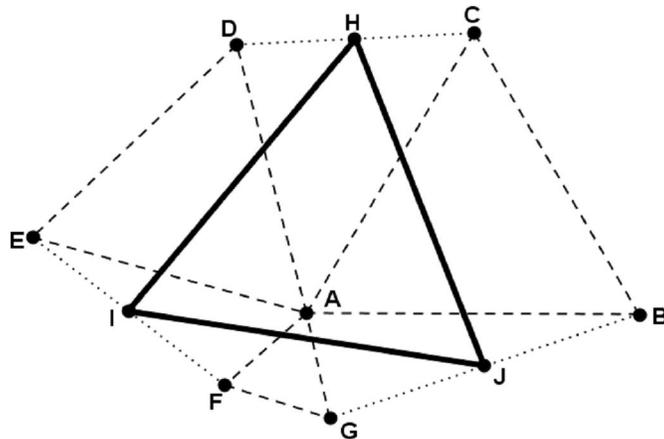


Figura 5.28 : O Triângulo HIJ é Equilátero

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, D = z_3, E = z_4, F = z_5, G = z_6, H = z_7, I = z_8$ e $J = z_9$.

Para provar a tese provarei que $z_7 = R_{z_8, 60^\circ}(z_9)$. De acordo com o resultado (3), isso equivale a provar que

$$(z_9 - z_8) \cdot \text{CS}(60^\circ) + z_8 = z_7 \quad (*)$$

A Figura 5.29 ilustra a tese do teorema via rotação no plano complexo.

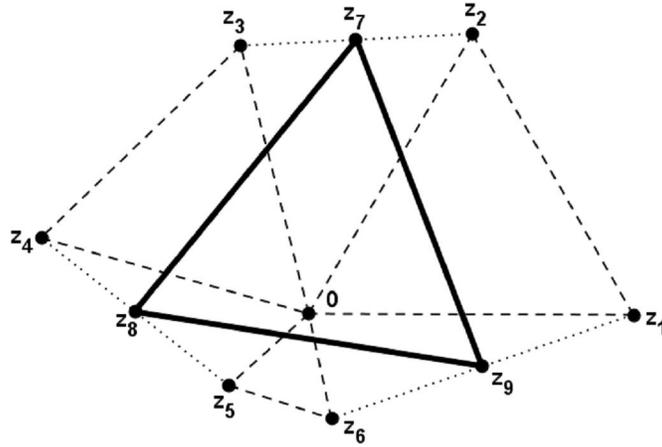


Figura 5.29 : $z_7 = R_{z_8, 60^\circ}(z_9)$

Como $z_2 = R_{0, 60^\circ}(z_1)$, $z_4 = R_{0, 60^\circ}(z_3)$ e $z_6 = R_{0, 60^\circ}(z_5)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_2 = z_1 \cdot \text{CS}(60^\circ), z_4 = z_3 \cdot \text{CS}(60^\circ) \text{ e } z_6 = z_5 \cdot \text{CS}(60^\circ).$$

Do resultado (4), tem-se que

$$z_7 = \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_3) = \frac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot \text{CS}(60^\circ) + z_3),$$

$$z_8 = \frac{1}{2} \cdot (z_4 + z_5) = \frac{1}{2} \cdot (z_3 \cdot \text{CS}(60^\circ) + z_5) \text{ e}$$

$$z_9 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_6) = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_5 \cdot \text{CS}(60^\circ)).$$

Assim, conclui-se que a relação (*) é de fato verdadeira pois

$$(z_9 - z_8) \cdot \text{CS}(60^\circ) + z_8 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot \text{CS}(60^\circ) + z_3) = z_7.$$

Vale observar que essa prova é genérica, ou seja, não é válida apenas para a interpretação utilizada.

18) A partir de um segmento AC que contem o ponto B (diferente de A e C), construímos os quadrados ABFG, BCDE e AHIC, cujos centros são os pontos L, K e J, respectivamente. Prove que os segmentos JK e LC são perpendiculares e congruentes.

A Figura 5.30 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

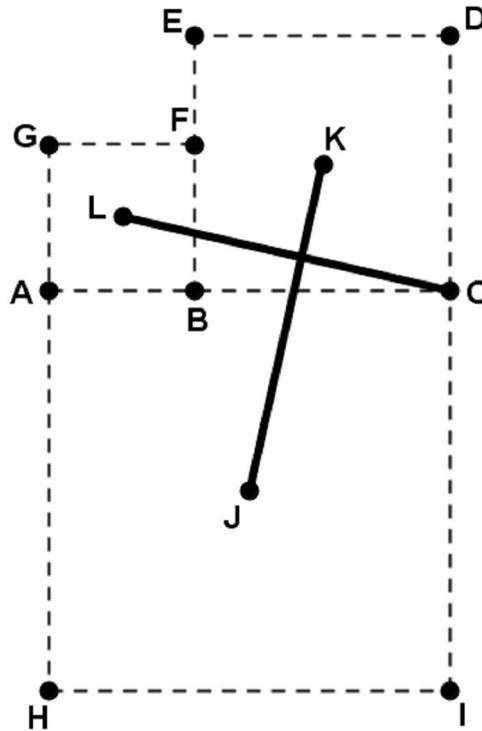


Figura 5.30 : Os Segmentos JK e LC são Perpendiculares e Congruentes

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, E = z_3, G = z_4, H = z_5, L = z_6, J = z_7$ e $K = z_8$.

Provarei a tese provando que as flechas $z_8 z_7$ e $z_2 z_6$ são perpendiculares e equipolentes, ou seja, que $(R_{0,90^\circ} \circ T_{-z_7})(z_8) = T_{-z_2}(z_6)$. Do resultado (3), isso equivale a provar que

$$(z_8 - z_7) \cdot CS(90^\circ) = z_6 - z_2 \quad (*)$$

A Figura 5.31 ilustra a tese do teorema via translação e composição de translação com rotação, no plano complexo.

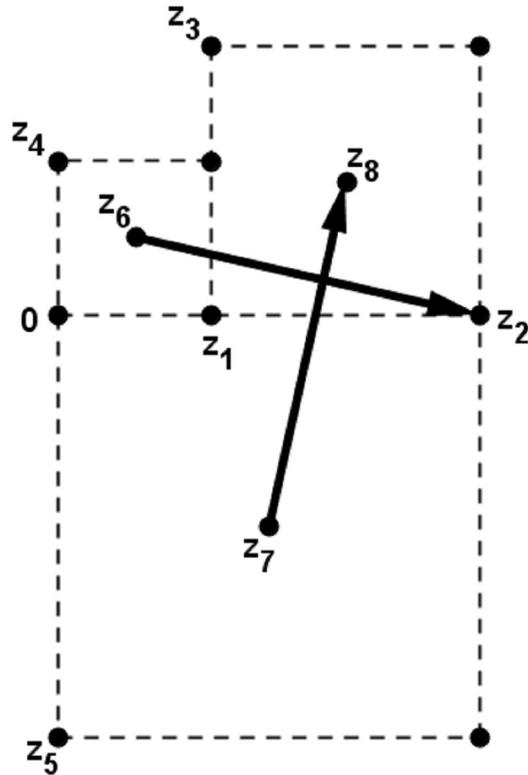


Figura 5.31 : $(R_{0,90^\circ} \circ T_{-z_7})(z_8) = T_{-z_2}(z_6)$

Como $z_3 = R_{z_1,90^\circ}(z_2)$, $z_4 = R_{0,90^\circ}(z_1)$ e $z_5 = R_{0,270^\circ}(z_2)$, do resultado (3) tem-se que

$$\begin{aligned} z_3 &= (z_2 - z_1) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_1 = z_1 \cdot (1 - i) + z_2 \cdot i, \\ z_4 &= z_1 \cdot \text{CS}(90^\circ) = z_1 \cdot i \text{ e} \\ z_5 &= z_2 \cdot \text{CS}(270^\circ) = -z_2 \cdot i. \end{aligned}$$

Como os centros z_6 , z_7 e z_8 também são, respectivamente, os pontos médios das diagonais z_1z_4 , z_2z_5 e z_2z_3 , do resultado (4), tem-se que

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_4) = \frac{1}{2} \cdot z_1 \cdot (1 + i), \\ z_7 &= \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_5) = \frac{1}{2} \cdot z_2 \cdot (1 - i) \text{ e} \\ z_8 &= \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_3) = \frac{1}{2} \cdot [z_1 \cdot (1 - i) + z_2 \cdot (1 + i)] \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que de fato a relação (*) é verdadeira pois

$$(z_8 - z_7) \cdot \text{CS}(90^\circ) = \frac{1}{2} \cdot [z_1 \cdot (1 + i) - 2z_2] = z_6 - z_2.$$

19) Dado um quadrado ABCD e os triângulos equiláteros ABE e BCF, respectivamente interno e externo ao quadrado, prove que os pontos D, E e F são alinhados.

A Figura 5.32 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

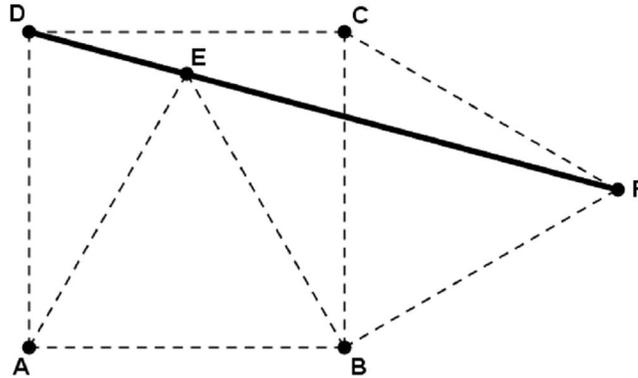


Figura 5.32 : Os Pontos D, E e F São Alinhados

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, D = z_2, E = z_3$ e $F = z_4$.

Para provar a tese provarei que existe um número real r tal que $z_4 = H_{z_2, r}(z_3)$. Do resultado (2) isso equivale a provar que $z_4 = r \cdot (z_3 - z_2) + z_2$ ou que

$$\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R} \quad (*)$$

A Figura 5.33 ilustra a tese do teorema via homotetia no plano complexo.

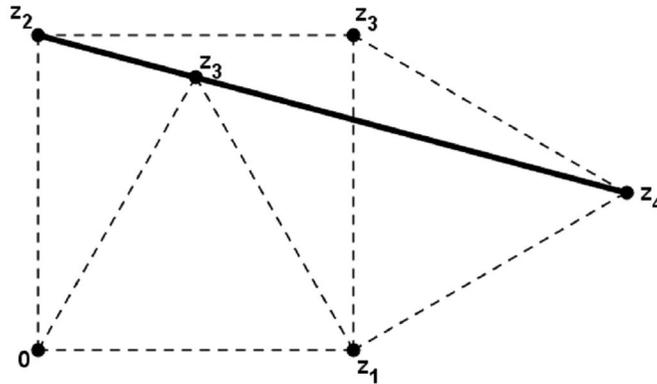


Figura 5.33 : Existe um Número Real r tal que $z_4 = H_{z_2, r}(z_3)$

Como $z_2 = R_{0,90^\circ}(z_1)$, $z_3 = R_{0,60^\circ}(z_1)$ e $z_4 = R_{z_1,210^\circ}(0)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_2 = z_1 \cdot \text{CS}(90^\circ),$$

$$z_3 = z_1 \cdot \text{CS}(60^\circ) \text{ e}$$

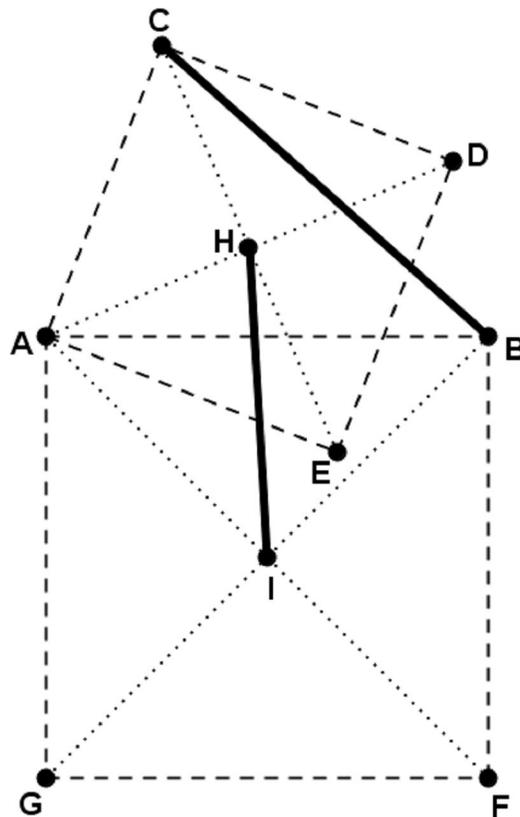
$$z_4 = (0 - z_1) \cdot \text{CS}(210^\circ) + z_1 = z_1 \cdot [1 - \text{CS}(210^\circ)]$$

Assim, conclui-se que a pertinência (*) é de fato verdadeira pois

$$\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{1 - \text{CS}(210^\circ) - i}{\text{CS}(60^\circ) - i} = (2 + \sqrt{3}) \in \mathbb{R}.$$

20) Dado um triângulo ABC, são construídos internamente sobre o lado AC o quadrado ACDE cujo centro é o ponto H e, externamente sobre o lado AB, o quadrado ABFG, cujo centro é o ponto I. Prove que os segmentos BC e IH formam um ângulo de 45° .

A Figura 5.34 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.



**Figura 5.34 : Os Segmentos BC e IH Formam
Ângulo de 45°**

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, E = z_3, G = z_4, H = z_5$ e $I = z_6$.

Para provar a tese provarei que existe um número real r tal que as flechas (pontos) $r \cdot (z_2 - z_1)$ e $(z_5 - z_6) \cdot CS(45^\circ)$ são equipolentes (coincidentes), ou seja, $(H_{0,r} \circ T_{-z_1})(z_2) = (R_{0,45^\circ} \circ T_{-z_6})(z_5)$. Dos resultados (1) e (2) e (3) isso equivale a provar que existe um número real r tal que $r \cdot (z_2 - z_1) = (z_5 - z_6) \cdot CS(45^\circ)$, ou que

$$\frac{(z_5 - z_6) \cdot \text{CS}(45^\circ)}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

A Figura 5.35 ilustra a tese do teorema via composições de translação e rotação, e translação com homotetia, no plano complexo.

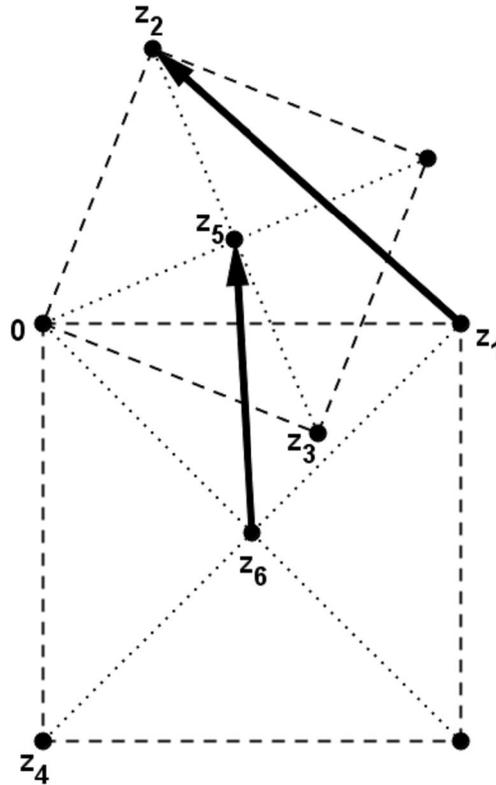


Figura 5.35 : $(H_{0,r} \circ T_{-z_1})(z_2) = (R_{0,45^\circ} \circ T_{-z_6})(z_5)$

Como $z_3 = R_{0,270^\circ}(z_2)$ e $z_4 = R_{0,270^\circ}(z_1)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_3 = z_2 \cdot \text{CS}(270^\circ) \text{ e}$$

$$z_4 = z_1 \cdot \text{CS}(270^\circ).$$

Do resultado (4) tem-se que

$$z_5 = \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_3) = \frac{1}{2} \cdot z_2 \cdot (1 + \text{CS}(270^\circ)) \text{ e}$$

$$z_6 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_4) = \frac{1}{2} \cdot z_1 \cdot (1 + \text{CS}(270^\circ)).$$

Assim, conclui-se que a pertinência (*) é de fato verdadeiro pois

$$\frac{(z_2 - z_1) \cdot \text{CS}(45^\circ)}{z_5 - z_6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}.$$

21) Dado um quadrado ABCD, se E é o ponto médio da diagonal BD, F é o ponto médio do segmento BE e G é o ponto médio do lado CD, prove que o triângulo AFG é isósceles com base AG.

A Figura 5.36 ilustra o enunciado e enfatiza a tese do teorema.

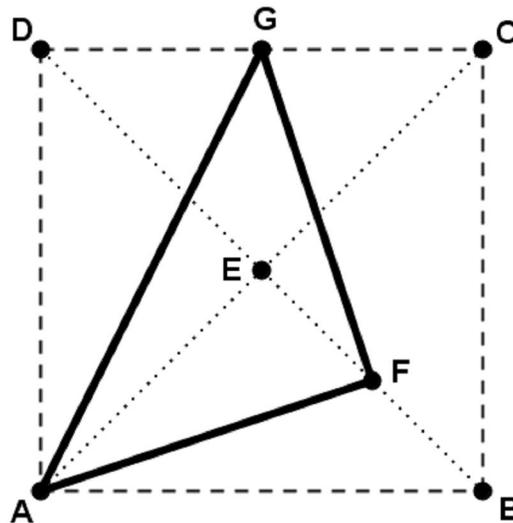


Figura 5.36 : O Triângulo AFG é Isósceles de Base AG

Prova:

Façamos $A = 0, B = z_1, C = z_2, D = z_3, E = z_4, F = z_5$ e $G = z_6$.

Para provar a tese provarei que existe um número complexo unitário z tal que as flechas (pontos) $(z_6 - z_5) \cdot z$ e $0 - z_5$ são equipolentes (coincidentes), o que equivale a provar que

$$|z| = \left| \frac{-z_5}{z_6 - z_5} \right| = 1 \quad (*)$$

A Figura 5.37 ilustra a tese do teorema via equipolência de flechas no plano complexo.

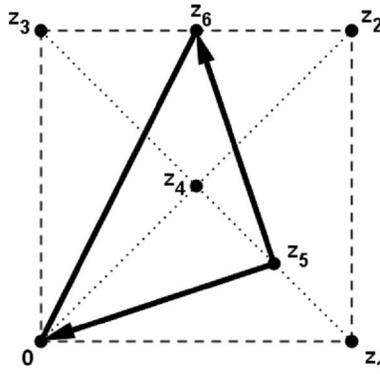


Figura 5.37 : Existe um Número Complexo Unitário z tal que as Flechas $(z_6 - z_5) \cdot z$ e $0 - z_5$ são Equipolentes

Do resultado (4), tem-se que

$$z_4 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_3) = \frac{1}{2} \cdot z_1 \cdot (1 + i),$$

$$z_5 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_4) = \frac{1}{4} \cdot z_1 \cdot (3 + i) \text{ e}$$

como $z_2 = T_{z_2}(z_1) = z_1 + z_2 = z_1 \cdot (1 + i)$, tem-se que $z_6 = \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_3) = \frac{1}{2} \cdot z_1 \cdot (1 + 2i)$

Assim, de fato a relação (*) é verdadeira pois

$$|z| = \left| \frac{-z_5}{z_6 - z_5} \right| = \left| \frac{-3 - i}{-1 + 3i} \right| = |i| = 1.$$

Vale observar que a igualdade $z = i$ significa que o triângulo AFG é retângulo em F.

22) Consideremos dois retângulos ABCD e A'B'C'D', congruentes e de dimensões 2a e a, posicionados (parcialmente sobrepostos) como mostra a Figura 5.38. Obtenha o centro P e o ângulo de rotação θ' com os quais devemos girar o retângulo ABCD de modo que esse coincida com o retângulo A'B'C'D'.

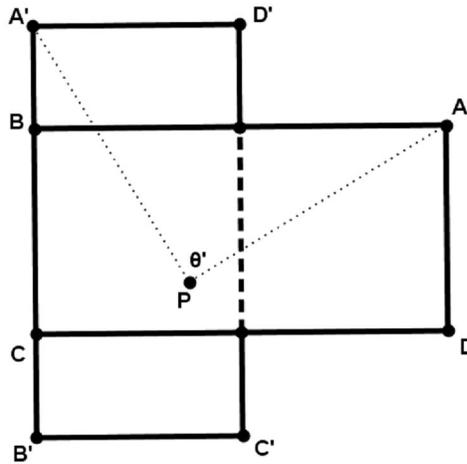


Figura 5.38 : A Rotação de Centro P e Ângulo θ' , Transforma o Retângulo ABCD no Retângulo A'B'C'D'

Solução:

Façamos

$$A = z_1 = 2a + \frac{a}{2} \cdot i, \quad D = z_2 = 2a - \frac{a}{2} \cdot i, \quad A' = z_3 = a \cdot i, \quad D' = z_4 = a + a \cdot i \quad \text{e} \quad P = z.$$

Para calcular z e θ' me valerei dos seguintes fatos:

$$R_{z, \theta'}(z_1) = z_3 \quad \text{e} \quad R_{z, \theta'}(z_2) = z_4.$$

Do resultado (3), tem-se que

$$\left(2a + \frac{a}{2} \cdot i - z\right) \cdot \text{cis } \theta' + z = a \cdot i \quad \text{e} \quad \left(2a - \frac{a}{2} \cdot i - z\right) \cdot \text{cis } \theta' + z = a + a \cdot i.$$

$$\text{Assim, } \text{cis } \theta' = i \quad \text{e} \quad z = \frac{3a}{4} - \frac{a}{4} \cdot i, \quad \text{ou seja, } \theta' = 90^\circ \quad \text{e} \quad P = \left(\frac{3a}{4} - \frac{a}{4} \cdot i\right).$$

Vale observar que, com os resultados obtidos, tem-se que a rotação (função complexa)

$$R_{P,90^\circ} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ com } R_{P,90^\circ}(z) = \left[z - \left(\frac{3a}{4} - \frac{a}{4} \cdot i \right) \right] \cdot \text{cis } 90^\circ + \frac{3a}{4} - \frac{a}{4} \cdot i,$$

transforma os pontos do retângulo ABCD nos pontos do retângulo A'B'C'D'.

Esse problema também é conhecido por “A mesa giratória” devido a seguinte interpretação prática: considerando que os retângulos são tábuas, exatamente em que local devemos introduzir um parafuso de modo que as duas tábuas possam ficar sobrepostas quando giradas?

23) Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem como pontos de referência, uma árvore (A) e duas pedras (P_1 e P_2). Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo reto, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto onde fazem uma marca (M_1). Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo reto, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca (M_2). Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio (M) entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltam a ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para a sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (nem as marcas, naturalmente). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?

Solução:

Façamos $A = z, P_1 = z_1, P_2 = z_2, M_1 = z_3, M_2 = z_4$ e $M = z_M$.

Para responder a pergunta, verificarei se o ponto z_M pode ser calculado independentemente do ponto z , o que significa verificar se o número complexo z_M independe do número complexo z . Em caso afirmativo concluirei que o pirata era matemático.

A Figura 5.39 ilustra apenas uma das infinitas possibilidades de interpretação para o enunciado, além de enfatizar a pergunta que procurarei responder, no plano complexo.

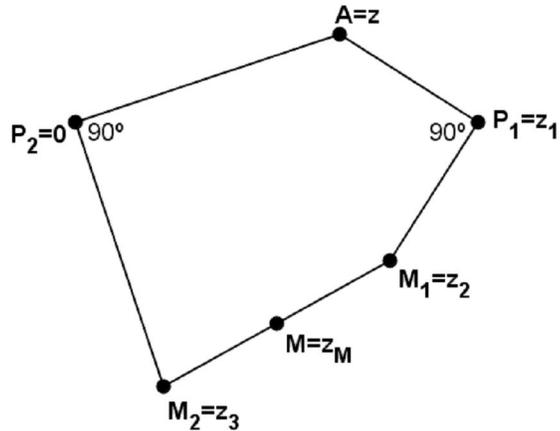


Figura 5.39 : O Número Complexo z_M Depende ou não do número Complexo z ?

Como $z_2 = R_{z_1, 90^\circ}(z)$ e $z_3 = R_{0, 270^\circ}(z)$, do resultado (3) tem-se que

$$z_2 = (z - z_1) \cdot \text{CS}(90^\circ) + z_1 = (z - z_1) \cdot i + z_1 \quad \text{e}$$

$$z_3 = z \cdot \text{CS}(270^\circ) = -z \cdot i.$$

Finalmente, do resultado (4), tem-se que

$$z_M = \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_3) = \frac{1}{2} \cdot z_1 \cdot (1 - i).$$

Assim, conclui-se que o tal pirata era “matemático”, pois o número complexo z_M independe do número complexo z .

Sem perda de generalidade, fazendo $z_1 = 1$, tem-se que $z_M = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Esse resultado particular significa que os piratas poderiam localizar o ponto z_M sem precisar considerar uma posição aleatória para o ponto z . Bastaria fazer o seguinte percurso: Partindo da pedra (P_1), caminhariam até o ponto médio (M') entre as duas pedras, dobrariam à esquerda, segundo um ângulo reto, e caminhariam a mesma distância. No final desse percurso estaria o ponto M .

A Figura 5.40 ilustra essa alternativa para encontrar o ponto M .

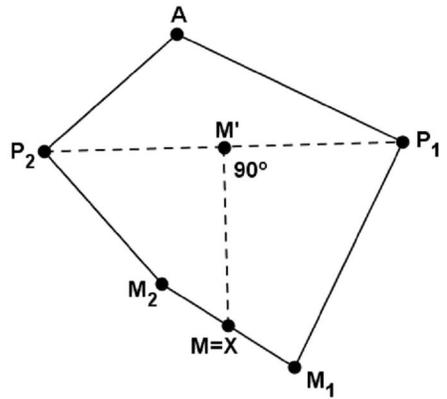


Figura 5.40 : O Percurso $P_1M'X$, com $P_1M'=M'X$ e $P_1M'X=90^\circ$
 Implica $X=M$

No próximo problema terei que extrair raízes de números complexos. O algoritmo para a extração de raízes n -ésimas de números complexos nos é fornecido pelo

Teorema: As n raízes n -ésimas distintas do número complexo (não nulo) $z = (\rho \cdot \cos \theta, \rho \cdot \operatorname{sen} \theta)$ possuem módulo igual $\sqrt[n]{\rho}$ e seus argumentos são os n termos da P.A. $\left(\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ}{n}, \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}, \dots, \frac{\theta}{n} + (n-1) \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)$ ou, de modo equivalente, podemos dizer que os números complexos do tipo

$$z_k = \left(\sqrt[n]{\rho} \cdot \cos \frac{\theta + k \cdot 360^\circ}{n}, \sqrt[n]{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta + k \cdot 360^\circ}{n} \right), \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

são as n raízes n -ésimas distintas de $z = (\rho \cdot \cos \theta, \rho \cdot \operatorname{sen} \theta)$.

É fácil ver que os pontos z_k 's são os vértices de um polígono regular de gênero n , inscrito numa circunferência de centro 0 e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

Vale observar que se z_k é uma raiz n -ésima de $z = (\rho \cdot \cos \theta, \rho \cdot \operatorname{sen} \theta)$ e j é um número inteiro qualquer, tem-se que $R_{0, j \cdot \frac{\theta}{n}}(z_k)$ também é uma raiz n -ésima de z .

24) Represente, no plano complexo, as raízes da equação

$$(z + (2,-3))^6 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Solução:

Como

$$(z + (2,-3))^6 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z = \underbrace{\sqrt[6]{\text{CS}(120^\circ)}}_{z_k} + \underbrace{(-2,3)}_w,$$

tem-se que cada uma das seis raízes z'_k da equação dada é a soma de uma das seis raízes sextas z_k do número complexo $\text{CS}(120^\circ)$ com a constante complexa $w = (-2,3)$. Geometricamente, cada uma das seis raízes z'_k da equação dada é um ponto que resulta da translação, segundo a flecha $w = (-2,3)$, do respectivo ponto z_k , que por sua vez é um vértice de um hexágono regular inscrito numa circunferência com centro em 0 e raio igual a $|z_k|$. Simbolicamente, tem-se que $z'_k = T_w(z_k)$, $k = 0,1,2,3,4,5$.

Do teorema tem-se que

$$z_k = \left(\sqrt[6]{1} \cdot \cos \frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{6}, \sqrt[6]{1} \cdot \text{sen} \frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{6} \right), \text{ com } k = 0,1,2,\dots,5.$$

Assim,

$$z_0 = \text{CS}(20^\circ), z_1 = \text{CS}(80^\circ), z_2 = \text{CS}(140^\circ), z_3 = \text{CS}(200^\circ), z_4 = \text{CS}(260^\circ) \text{ e } z_5 = \text{CS}(320^\circ), \text{ e}$$

$$z'_0 = T_w(z_0) = \text{CS}(20^\circ) + (-2,3), z'_1 = T_w(z_1) = \text{CS}(80^\circ) + (-2,3), \dots, z'_5 = T_w(z_5) = \text{CS}(320^\circ) + (-2,3).$$

A Figura 5.41 ilustra as seis raízes sextas z_k de $\text{CS}(120^\circ)$ e as seis raízes z'_k da equação dada, além de sugerir, particularmente, que $z'_0 = T_w(z_0)$, com $w = (-2,3)$.

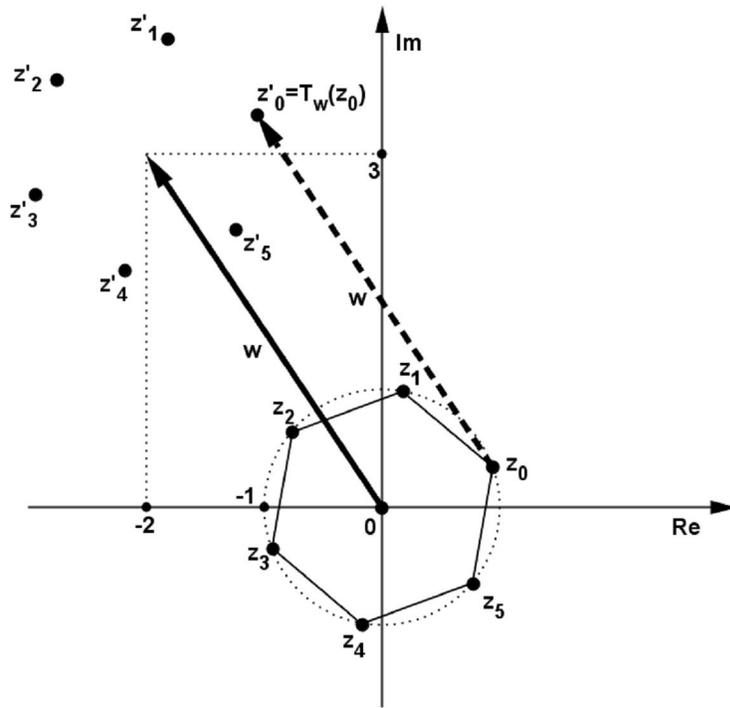


Figura 5.41 : Os (z_k) 's são as Raízes Sextas de $CS120^\circ$ e os (z'_k) 's são as Raízes da Equação

6. Conclusão

O objetivo que me serviu de guia na escolha de um tema foi a minha pretensão de dissertar sobre alguma técnica pouco usual, porém eficaz, para se tratar determinados tipos de problemas complicados.

Espero que o tratamento utilizado na extensa lista do capítulo 5 tenha convencido os possíveis leitores desse TCC de que as pouco usuais funções complexas $T_w(z) = z + w$, $H_{0,r}(z) = r \cdot z$ e $R_{0,\theta}(z) = z \cdot CS \theta'$ (e suas composições) proporcionam soluções operacionalmente econômicas e genéricas para situações complicadas da geometria plana, desde que, é claro, seus enunciados possam ser interpretados, respectivamente, via translação, homotetia e rotação (ou composições desses movimentos) de pontos. Particularmente em relação às rotações, espero que esses leitores também tenham se convencido de que a função $R_{0,\theta}(z) = z \cdot CS \theta'$ proporciona um tratamento melhor (se considerarmos as três razões discutidas no capítulo 4) do que o proporcionado pelo produto escalar no \mathbb{R}^2 .

Das referências que utilizei, apenas a [4] e a [8] fazem uso das funções complexas para tratar de situações da geometria plana. A referência [4] tem um mínimo de aplicações e a [8] tem uma extensa lista de aplicações. Boa parte dos teoremas presentes na lista do capítulo 5 foi extraída da referência [8]. Vale dizer que são minhas as generalizações (1), (2) e (3) do capítulo 4, utilizadas no capítulo 5, bem como todas as soluções e provas da lista do capítulo 5.

As funções complexas também são utilizadas, porém de forma implícita, sem formalizações, nas referências [1] e [2], cada qual em um problema de geometria plana.

As referências [3] e [7] reescrevem alguns resultados da geometria analítica plana via variáveis complexas e fazem algumas aplicações dos resultados obtidos.

Utilizei as referências [5] e [6] para escrever o resumo sobre a história do seu surgimento até a descoberta da sua representação geométrica, capítulo 2, bem como para formalizar todos os conceitos do capítulo 3.

7. Referências Bibliográficas

- [1] Sánches, Jesús A. P., Carneiro, José Paulo Q.. “*A Ilha do Tesouro: Dois Problemas, Duas Soluções*”. Editora da SBM: RPM-47, 2001.
- [2] Lino, Paulo Sérgio C., Carneiro, José Paulo Q.. “*Reflexões em Espelhos Usando Números Complexos*”. Editora da SBM: RPM-76, 2011.
- [3] Feitosa, Laércio Francisco. Dissertação PROFMAT “*Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana*”. UFPA : Abril de 2013.
- [4] Viggiani, Domingos. Tese de Doutorado em Ciências “*Alguns Aspectos da Aplicação dos Números Complexos à Geometria*”. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Marília : 1967.
- [5] Carmo, M. P., Morgado, A. C., Wagner, E.. *Trigonometria - Números Complexos*. Editora da SBM: Rio de Janeiro, 2005.
- [6] Ripoll, J. B., Cydara, C. R., Silveira, J. F. P.. *Números Racionais, Reais e Complexos*. UFRGS Editora: Porto Alegre, 2011.
- [7] Hahn, Liang-shin. *Complex Numbers & Geometry. The Mathematical Association of America*. USA, 1994.
- [8] Terracher, P.H., Ferachoglou, R. *Math enseignement de spécialité, Éducation*. Hachette Education, FRA, 1988, I.S.B.N. 2.01.13.5121.9.