

**Universidade Estadual de Santa Cruz**

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

---

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**CONSTRUÇÃO DE UMA MESA DE BILHAR  
ELÍPTICA COMO RECURSO MOTIVACIONAL  
PARA O ESTUDO DE CÔNICAS NO ENSINO  
MÉDIO**

por

**Cátia Menezes de Miranda<sup>†</sup>**

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Ilhéus - BA

**Orientador: Prof. Dr. André Nagamine**  
**Co-orientador: Prof. Ms. Geraldo de Assis Junior**

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes  
obtido através da SBM.

Cátia Menezes de Miranda

CONSTRUÇÃO DE UMA MESA DE BILHAR  
ELÍPTICA COMO RECURSO MOTIVACIONAL  
PARA O ESTUDO DE CÔNICAS NO ENSINO  
MÉDIO

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. André Nagamine  
Co-orientador: Prof. Ms. Geraldo de Assis Junior

Universidade Estadual de Santa Cruz  
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

**Ilhéus**  
**2013**

M672 Miranda, Cátia Menezes.  
Construção de uma mesa de bilhar elíptica como recurso motivacional para o estudo de cônicas no ensino médio / Cátia Menezes de Miranda. - Ilhéus : UESC, 2013.  
62f. : il.  
Orientador : André Nagamine.  
Co-orientador : Geraldo de Assis Junior.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissionalizante de Matemática.

Inclui bibliografia.

1. Geometria analítica. 2. Matemática – Estudo e ensino.  
I. Nagamine, André (orientador). II. Assis Junior, Geraldo de (co-orientador). III. Título.

CDD – 516.3

Cátia Menezes de Miranda

CONSTRUÇÃO DE UMA MESA DE BILHAR ELÍPTICA  
COMO RECURSO MOTIVACIONAL PARA O ESTUDO DE  
CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

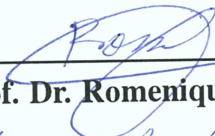
Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 21 de março de 2013:



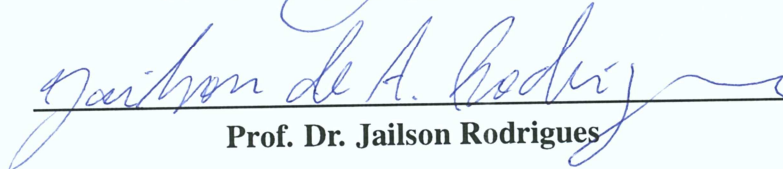
---

**Prof. Dr. André Nagamine**  
Orientador



---

**Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva**



---

**Prof. Dr. Jailson Rodrigues**

Ilhéus - 2013

# Agradecimentos

---

---

## **À minha família querida**

Motivo pelo qual estou sempre me qualificando;  
Por exemplificação de coragem e perseverança;  
Minha proteção e minha fortaleza;  
Meus sonhos e aspirações;  
Minha razão de viver;

## **Aos meus colegas de turma**

Companheiros de luta; Unidos nas dificuldades e nas alegrias;  
Que muito me ajudaram, me incentivaram e me fortaleceram nas horas de fraqueza;  
A cada um com seu jeito especial de ser o meu muito obrigada.

## **À Capes**

Pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

## **Ao meu tutor e co-orientador Prof. Geraldo Assis**

Que com paciência e dedicação me acompanhou e auxiliou durante estes dois anos de caminhada.

## **Aos meus professores: Afonso Henrique, André Nagamine, Gêrmam Ferrer, Francisco Bruno e Sérgio Mota Alves**

Que mais que mestres foram companheiros;  
Suas lições de sabedoria versaram não só pelo caminho dos números e das formas, mas pelo caminho da vida;  
Souberam com ministreza nos proporcionar conhecimento e experiência;

## **E em especial**

### **Ao meu orientador Prof. Dr. André Nagamine**

Sinônimo de inteligência, dedicação e doçura.  
Que mesmo na distância manteve presença constante.  
Passando sempre tranquilidade e espírito de luta.

### **E ao meu coordenador Prof. Dr. Sérgio Mota Alves**

Amigo e companheiro de todos;  
Conhecia a fundo cada mestrando, seus problemas, suas dificuldades, suas limitações;  
Acompanhou passo a passo o crescimento de cada um;  
Lecionou, orientou, coordenou, motivou, acalmou, exigiu, "botou no colo", enxugou as lágrimas, e foi rígido na hora certa.  
Este homem foi um verdadeiro super-herói.  
A ele e toda a sua equipe o meu muito obrigada.

# Resumo

---

---

O referente trabalho sugere a ideia da construção de uma mesa de bilhar elíptica como recurso motivacional para o estudo das cônicas no ensino médio. A intenção da elaboração do material é implantar um laboratório de matemática no Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães em Canavieiras, BA. As propriedades refletora e bissetora da elipse permitirão que na mesa construída, qualquer choque entre duas bolas, acontecido num foco, seja refletido, fazendo com que a bola caia na caçapa que intencionalmente se localizará no outro foco. Tal particularidade irá provocar a curiosidade e despertar o espírito investigador dos alunos que buscarão explicação para o acontecimento. Como embasamento para o ensino de cônicas, a presente dissertação apresenta um tópico sobre a história das cônicas onde reporta-se à alguns matemáticos que contribuíram para o estudo do tema e fornece conceitos básicos sobre parábola, hipérbole e elipse. Descreve também, detalhadamente, um roteiro sobre a construção da mesa acompanhado de medidas, relação de materiais, sugestões e fotos.

Palavras-chave: cônicas; bilhar elíptico; construção.

# Abstract

---

---

The related work suggests the idea of building an elliptical pool table as a motivational resource for the study of conics in high school. The intention on preparing the material is deploying a math lab in the Model College Luís Eduardo Magalhães in Canavieiras, BA. The ellipse's reflective and bisector properties will allow that in the built table, any collision between two balls, that has happened in focus, be reflected, making the ball fall into the pocket that will be intentionally located in another focus. This particularity will provoke curiosity and awaken the investigative spirit of students who will seek for an explanation of the event. As a foundation for the teaching of conics, this paper presents a topic on the history of conic where relates to some mathematicians who contributed to the study of the subject and provides basics parabola, ellipse and hyperbola. It also describes, in detail, a roadmap on building the table accompanied by action, bill of materials, suggestions and photos.

Keywords: conical, elliptical billiards; construction.

# Conteúdo

---

---

<b>Agradecimentos</b>	<b>4</b>
<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 História das Cônicas</b>	<b>3</b>
<b>2 Parábola</b>	<b>9</b>
2.1 Definição . . . . .	10
2.2 Elementos . . . . .	11
2.3 Construção de uma parábola usando alfinete e barbante . . . . .	11
2.4 Equações . . . . .	13
2.4.1 Equação da parábola com vértice na origem . . . . .	13
2.4.2 Equação da parábola com vértice fora da origem . . . . .	15
2.5 Aplicações . . . . .	18
<b>3 Hipérbole</b>	<b>20</b>
3.1 Definição . . . . .	21
3.2 Elementos . . . . .	22
3.3 Relação entre $a$ , $b$ e $c$ . . . . .	22
3.4 Construção de uma hipérbole usando alfinete e barbante . . . . .	23
3.5 Equações . . . . .	24
3.5.1 Equação da hipérbole com centro na origem . . . . .	24
3.5.2 Translação dos eixos coordenados . . . . .	27
3.5.3 Equação da hipérbole com centro fora da Origem do Sistema . . . . .	27
3.6 Assíntotas da hipérbole . . . . .	29
3.7 Aplicações . . . . .	30
<b>4 Elipse</b>	<b>33</b>
4.1 Definição . . . . .	34
4.2 Elementos . . . . .	35
4.3 Relação entre $a$ , $b$ e $c$ . . . . .	35
4.4 Construção de uma elipse usando alfinete e barbante . . . . .	36



4.5	Equações . . . . .	37
4.5.1	Equação da elipse com centro na origem . . . . .	37
4.5.2	Equação da elipse com centro fora da Origem do Sistema . . . . .	39
4.6	Aplicações . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Mesa de bilhar elíptica</b>	<b>44</b>
5.1	Materiais necessários para a construção do bilhar elíptico . . . . .	48
5.2	Roteiro para a construção da mesa . . . . .	50
5.3	Elementos contidos na elipse que faz parte da base da mesa de bilhar . . . . .	51
5.4	Croqui . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>54</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Anexos</b>	<b>59</b>
A.1	Fotos da Construção da Mesa de Bilhar . . . . .	59
A.2	Outras opções de mesas . . . . .	61

# Introdução

---

---

“Não é o ângulo reto que me atrai. Nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual. A curva que encontro nas montanhas do meu País, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar, nas nuvens do céu, no corpo da mulher preferida. De curvas é feito todo o Universo - o Universo curvo de Einstein”.

*Oscar Niemeyer*

A educação é reflexo de uma sociedade. Ela transforma e é transformada constantemente. Na era das tecnologias de informação e comunicação, os alunos têm acesso a notícias em frações de segundos. Equipamentos eletrônicos como celular, iphone, ipod, tablet, etc, fazem parte do mundo deles. As redes sociais e os jogos on-line ocupam quase todo o tempo de nossos educandos. Torna-se difícil a árdua tarefa da escola ao competir com tantos atrativos. O que fazer para voltar a atenção de nossos jovens para as atividades escolares? A resposta para esta pergunta é **motivação!** Adolescentes gostam de desafios. Para eles, é de suma importância serem reconhecidos como parte fundamental da comunidade a que pertencem. E foi tal fato que motivou a implantação de um laboratório de matemática (LEMAT) no Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães (COM-LEM), situado à rua Augusto Severo, nº 1020, em Canaveiras, BA. O colégio tem boa estrutura física e material. Possui laboratórios de ciências e de informática. Mas ter um espaço onde se possa desenvolver atividades de iniciação científica em matemática é o sonho dos professores da área nesta instituição. A ideia é fazer com que essa sala temática seja personalizada. Todos os materiais que servirão de ferramenta de ensino ou objeto de estudo que farão parte da composição do laboratório serão construídos por professores e alunos da unidade escolar. Cada um deles terão gravados registro de doação com o nome do autor. Qualquer aluno interessado poderá criar o seu material sob orientação dos professores e ver seu nome fazer parte da história do colégio.

E foi assim que surgiu a ideia da construção de uma mesa de bilhar elíptica onde se pudesse desenvolver atividades de pesquisas sobre as cônicas.

O tema escolhido partiu da seguinte premissa. Inicialmente, observou-se que na grande maioria das escolas públicas de ensino médio (inclusive onde leciono) o estudo das cônicas, apesar de fazer

parte da grade curricular e dos planejamentos escolares, raramente são explorados. Diversos são os motivos que levam a tal fato: número de aulas insuficiente para se trabalhar todos os conteúdos, imaturidade matemática no campo da geometria por parte dos alunos, falta de motivação, despreparo do profissional da área, etc. Era a oportunidade de trazer a discussão sobre esse conteúdo para sala de aula e trabalhar de forma espontânea e interessante, atividades extraclases. Pensou-se em algo divertido, que atraísse a curiosidade. Algo que envolvesse o lúdico e instigasse a reflexão dos educandos. O bilhar é um jogo atrativo e que faz parte das atividades recreativas dos jovens. Em especial escolheu-se a forma elíptica para o bilhar por apresentar, a elipse, as propriedades refletora e bissetora que garantem que qualquer choque entre duas bolas, acontecido num foco da elipse, será refletido e fará bater em uma terceira bola estacionada no outro foco. Em particular, se ao invés de uma terceira bola, for colocada uma caçapa no segundo foco, as bolas que se chocaram no primeiro foco serão refletidas para dentro da caçapa. Esta curiosa situação instigará aos alunos a tentarem diversas jogadas em inusitadas posições. Cabe ao professor aproveitar o momento para desafiar-los a pesquisar sobre a situação problema e descobrir o motivo pelo qual aquela mesa "mágica" permite a qualquer jogador, até o mais inexperiente, acertar a bola na caçapa.

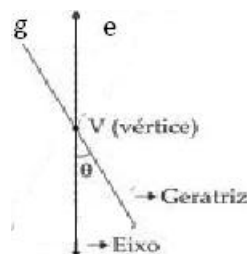
Esse trabalho é direcionado à professores do ensino médio ou qualquer pessoa que tenha interesse em produzir o material. Tem como objetivo fornecer ao leitor informações suficientes para que ele possa construir a sua própria mesa de bilhar elíptica. Traz em seu desenvolvimento os conteúdos básicos sobre as cônicas.

No primeiro capítulo, a dissertação apresenta como tópico a história das cônicas mencionando alguns matemáticos que contribuíram para o estudo dessas curvas. No segundo, terceiro e quarto capítulos são apresentados definição, principais elementos, equações e aplicação das cônicas: parábola, hipérbole e elipse, respectivamente. No quinto capítulo explica o funcionamento da mesa, apresenta as propriedades que embasam esse funcionamento, sugere uma relação de materiais que podem ser utilizados na construção da mesa, descreve detalhadamente a sua construção e cita medidas, equações e croqui utilizados no exemplar apresentado. No sexto e último capítulo são apresentadas as considerações finais da autora onde aparecem sugestões de atividades, variações que podem ser utilizadas na construção da mesa e dicas para economizar na compra de materiais. Em anexo, fotos da construção da mesa por partes.

# História das Cônicas

Este capítulo tem como intenção apenas divulgar os principais fatos históricos sem a preocupação de se aprofundar ou detalhar os conteúdos.

Consideremos duas retas  $e$  e  $g$  concorrentes em  $V$  não perpendiculares:



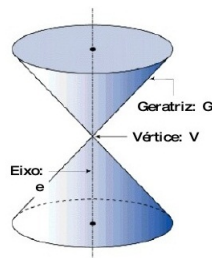
**Figura 1.1:** retas  $e$  e  $g$  concorrentes

Com a reta  $e$  fixa pelo ponto  $V$ , fazemos  $g$  girar  $360^\circ$  em torno de  $e$ , mantendo constante o ângulo  $\theta$  formado por elas (figura 1.1).

A reta  $g$  gera uma superfície denominada superfície cônica de duas folhas. A reta  $g$  é chamada geratriz dessa superfície (figura 1.2). As cônicas são geradas pela interseção dessa superfície cônica com um plano secante.

O estudo das cônicas deu-se início por volta do século III a.C. na Grécia antiga. O interesse dos matemáticos nas cônicas estavam nas contribuições das mesmas para a resolução dos três problemas clássicos da antiguidade: trissectar um ângulo, quadrar um círculo e duplicar um cubo.

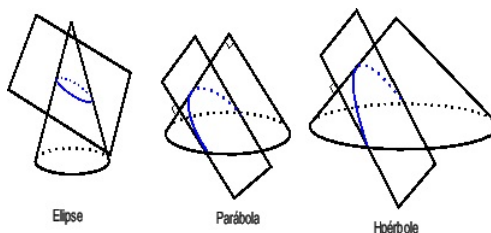
Manaecmo (380 a.C. - 320 a.C.) foi o primeiro matemático a mencionar as cônicas na tentativa de solucionar o clássico problema da Duplicação do Cubo.



**Figura 1.2:** Superfície cônica de revolução

Há indícios de que o problema da duplicação do cubo possa ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. Minos ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado. O poeta fez então Minos aduzir, incorretamente, que isso poderia ser feito dobrando-se cada uma das dimensões do túmulo. Essa falha matemática da parte do poeta levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma. (EVES, 1995, p.135)

Manaecmo pesquisava sobre a parábola e a hipérbole e suas propriedades quando descobriu a elipse. Para Manaecmo, cada cônica era obtida por um tipo diferente de cone (figura 1.3). As cônicas eram obtidas através de secções de cones circulares retos com planos perpendiculares a uma geratriz do cone, obtendo três tipos distintos de curvas, conforme a secção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso.



**Figura 1.3:** Cônicas de Manaecmo

Autores como Aristeu (370 a.C. - 300 a.C.) e Euclides de Alexandria (325 a.C. - 265 a.C.) também escreveram obras sobre secções cônicas. Infelizmente muitas das obras de Euclides, considerado “Pai da Geometria”, se perderam, inclusive “As Cônicas”.

Arquimedes (287-212 a.C.) foi um célebre cientista, matemático e inventor grego. Escreveu uma obra sobre a quadratura da parábola constituída por vinte e quatro proposições onde calculou a área de uma parábola usando o método de exaustão. Provou que a área da figura formada por um arco de parábola e um segmento de reta é igual a quatro terços da área de um triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto onde a tangente é paralela a base. Muitas histórias, não se sabe se todas verdadeiras, se contam sobre Arquimedes e a utilização de seus conhecimentos sobre as propriedades das cônicas em defesa de Siracusa, quando do sítio imposto à cidade pelos romanos. Dentre elas temos: criou catapultas móveis de alcance ajustáveis para arremessar pesos por sobre os navios inimigos; usou espelhos parabólicos para refletir raios solares e incendiar as

galeras romanas; com a ajuda de um sistema de polias compostas içou sozinho um pesado navio, esta última lhe fazendo jus a famosa frase: “Dê-me uma alavanca que moverei a Terra”.

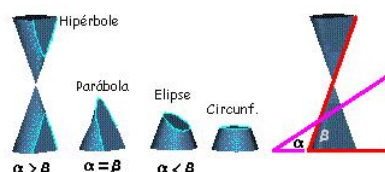
Apolônio de Pergas (262 a.C. - 190 a.C.) foi um astrônomo notável e o matemático que mais contribuiu para os estudos das secções cônicas. Estudou em Alexandria com os discípulos de Euclides. Apolônio, Euclides e Arquimedes foram os maiores matemáticos do século III a.C. Escreveu sobre vários assuntos, mas recebeu o cognome de “O Grande Geômetra” graças a sua obra extraordinária chamada “Secções Cônicas”. Em seus estudos, Apolônio conseguiu gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas apenas variando a inclinação do plano de interseção. Batizou as secções feitas em cones de cônicas e as estudou exaustivamente. Introduziu os nomes elipse, parábola e hipérbole que foram tomados da terminologia pitagórica referente à aplicação de área. A professora Geni Shulz da Silva em seu artigo “Porque os nomes elipse, parábola e hipérbole?” relata que

quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que a extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento diziam que tinham um caso de “ellipsis”, “parabole” ou “hyperbole” conforme a referida base fosse menor do que segmento, com ele coincidisse ou o excedesse. (SILVA, 1985, p.43-44)

Estudou também as retas tangentes e normais a uma cônica. Sua principal obra “Secções Cônicas”, já citada anteriormente, descreve um minucioso estudo sobre essas curvas, superando os trabalhos escritos anteriormente por Manaecmo, Aristeu e Euclides sobre esse tema, embora seus três primeiros livros fossem baseados nos trabalhos de Euclides. Secções Cônicas era uma coletânea de 8 livros compostos por cerca de 400 proposições dos quais apenas 7 chegaram nos dias atuais.

Os principais estudos registrados em Secções cônicas foram:

- No livro I de Secções Cônicas, Apolônio mostra que as três espécies de secções (parábola, elipse e hipérbole) podem ser obtidas de um único cone de revolução, bastando apenas variar a inclinação do plano (figura 1.4). Seja  $\beta$  o ângulo formado pela interseção da geratriz com a base do cone, e seja  $\alpha$  o ângulo formado pela intersecção do plano secante com a base do cone, tinha-se, através da comparação de  $\alpha$  e  $\beta$ , um caso de hipérbole, parábola, elipse e circunferência (caso particular de elipse).

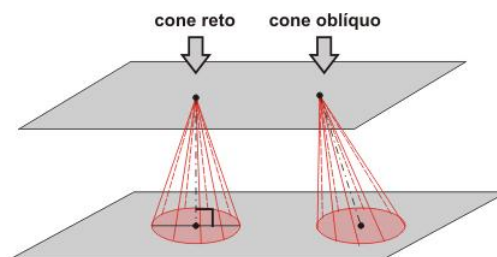


**Figura 1.4:** Variação da inclinação do plano de interseção com o cone duplo

Ainda no livro I Apolônio,

analisou as propriedades fundamentais das curvas mais completamente e com mais generalidade que os escritos de outros autores. (BOYER, 1996, p.165)

Foi nessa primeira obra que ele mostrou que o cone de onde se obtém as secções cônicas não precisa ser reto, pode ser oblíquo ou escaleno (figura 1.5), mostrando que no cone oblíquo há uma infinidade de secções circulares paralelas a base.



**Figura 1.5:** Cone reto e cone oblíquo

Mostrou também que os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse ou uma hipérbole formam um segundo diâmetro a quem nomeou de diâmetro conjugado e que se uma reta é traçada a partir da extremidade de um diâmetro de uma elipse ou uma hipérbole paralelamente ao diâmetro conjugado, a reta é tangente a cônica.

- No livro II, Apolônio ocupa-se das propriedades de assíntotas e hipérbole conjugadas e do traçado de tangentes.
- No livro III, foram demonstrados teoremas que permitem determinar o problema das três ou quatro retas: “dadas três ou quatro retas de um plano, achar o lugar de um ponto P, que se move de modo que o quadrado da distância de P a uma das retas seja proporcional ao produto das distâncias das outras duas”.
- No livro IV, é feito o estudo sobre o número de pontos em que uma secção de um cone pode intersectar uma curva. Dedicar-se principalmente à interseção com os ramos de uma hipérbole. Prova as recíprocas de algumas proposições do Livro III relativas a propriedades harmônicas de polos e polares. Os teoremas deste livro são todos originais, alguns sobre pares de cônicas que se interceptam.
- No livro V, Apolônio faz estudos sobre tangentes e normais a uma curva. Esse livro aborda,

as normais como segmentos de reta máximos e mínimos tirados a um ponto da curva e ocupa-se da construção e enumeração de normais por um ponto dado. (EVES, 1995, p.200)

- No livro VI, Apolônio descreve sobre a igualdade e semelhança das cônicas. Demonstra que todas as parábolas são semelhantes e que uma parábola não pode ser semelhante a uma elipse ou uma hipérbole, nem uma elipse a uma hipérbole.

- No livro VII, ele retorna aos estudos dos diâmetros conjugados, criando e demonstrando novas proposições.
- No livro VIII, apesar de desaparecido, acredita-se que ele exemplificou através de problemas os temas retratados no livro VII, pois no prefácio deste, Apolônio escreveu que

os teoremas do livro VII eram usados no livro VIII para resolver certos problemas sobre cônicas, de modo que o último livro é uma espécie de apêndice. (BOYER, 1996, p.106)

Johannes Kleper (1571 - 1630), alemão nascido perto da cidade de Stuttgart, realizou diversas contribuições no campo da matemática e da astronomia. Assistente do astrônomo Tycho Brache, após sua morte herdou sua vasta coleção de dados sobre o movimento dos planetas. Adepto da teoria copernicana, Kleper estudou exaustivamente esses movimentos e a trajetória de suas órbitas. Influenciado pelos estudos dos gregos ele formula as três leis que são consideradas marcos na história da astronomia, dentre elas a que descreve como elíptica a trajetória orbital dos planetas: “os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos”. Tomando assim uma importante aplicação do estudo das cônicas que haveria sido feito a 1800 anos atrás. Kepler estudou a determinação de volume de um sólido através da rotação de segmentos de seções cônicas em torno de um eixo de seu plano. Analisou a aplicação das cônicas à óptica e à construção de espelhos parabólicos. Resolveu o problema de determinar o tipo de cônica dado por um vértice, o eixo por esse vértice e uma tangente com seu ponto de tangência. Introduziu a palavra foco. Argumentava que uma parábola poderia ser considerada como um caso limite de uma elipse ou de uma hipérbole fazendo-se um dos focos retroceder ao infinito.

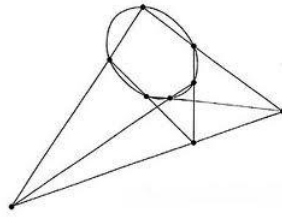
Gérard Desargues (1591- 1661), engenheiro e arquiteto, outrora oficial do exército francês escreveu um tratado sobre seções cônicas, mas seu trabalho foi negligenciado pelos outros matemáticos da época, caindo no esquecimento.

René Descartes (1596-1650) apresenta um método de construir tangentes a curvas.

No artigo “Isogoge ad lócus planos et sólidos” publicado em 1636, Pierre de Fermat (1.601- 1.665) apresentava uma discussão sobre hipérbolas, elipses e parábolas. Num trabalho posterior sobre tangentes e quadraturas definiu muitas curvas novas analiticamente, definindo-as por equações algébricas. Criou as equações cartesianas da reta e da circunferência. Criou as equações simples sobre cônicas. Estabeleceu como princípios no plano, que uma equação do primeiro grau representa uma reta e uma equação do segundo grau representa uma cônica. Estudou as cônicas a partir das equações com duas variáveis.

Blaise Pascal (1623 - 1662) foi um notável matemático que logo cedo mostrou suas habilidades na área. Escreveu um manuscrito sobre seções cônicas baseado no trabalho de Desargues. Nele figurava o famoso teorema do hexagrama místico de Pascal da geometria projetiva: Se um hexágono está inscrito numa cônica então os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos são colineares e reciprocamente (figura 1.6). O manuscrito nunca foi publicado e se perdeu. Só se tem notícia de um folheto que ele imprimiu onde foi divulgado algumas de suas descobertas.





**Figura 1.6:** Hexagrama Místico de Pascal

Christiaan Huygens (1629 - 1695) publicou um trabalho sobre a quadratura das secções cônicas, contribuindo com estudos sobre análise infinitesimal das cônicas e o cálculo da superfície de um segmento de um parabolóide de revolução.

Isaac Newton (1643-1727) deu continuidade aos trabalhos de Kepler possibilitando o estudo analítico das cônicas e suas aplicações aos movimentos no espaço. Elaborou muitas das proposições que mais tarde compuseram o livro dos "Principia", dentre elas:

- O lugar geométrico dos centros de todas as cônicas tangentes aos lados de um quadrilátero é uma reta (reta de Newton) que passa pelos pontos médios de suas diagonais.
- Se um ponto  $P$  que se move ao longo de uma reta está ligado a dois pontos fixos  $O$  e  $O'$  e se as retas  $OQ$  e  $O'Q$  formam ângulos fixos com  $OP$  e  $O'P$  então o lugar dos pontos  $Q$  é uma cônica.

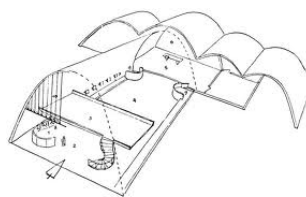
## Parábola



**Figura 2.1:** Ponte Juscelino Kubitschek - Brasília

Podemos observar parábolas em várias situações de nossa vida como: na trajetória de um jato de água que sai do bebedouro, na trajetória de uma bola lançada numa partida de futebol ou de um projétil disparado por um arma, desde que estes estejam num ambiente onde há a ação da força da gravidade.

O famoso arquiteto Oscar Niemeyer criava lindos design utilizando formas parabólicas como a ponte J.K. que podemos observar na figura 2.1. Outro exemplo é o projeto de construção da Igreja São Francisco de Assis também chamada Igreja da Pampulha em Minas Gerais.



**Figura 2.2:** Projeto da Igreja São Francisco de Assis - Minas Gerais

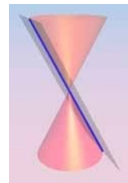
Vimos no capítulo 1 que as cônicas são formadas pela interseção de uma superfície cônica formada por um cone duplo com um plano secante. Conforme (VARANDAS, 2000/2001), se o plano é paralelo a geratriz do cone, obtemos:

- Uma **parábola**, se o plano não passa pelo vértice;



**Figura 2.3:** Parábola

- Uma **reta**, se o plano passa pelo vértice (parábola degenerada);

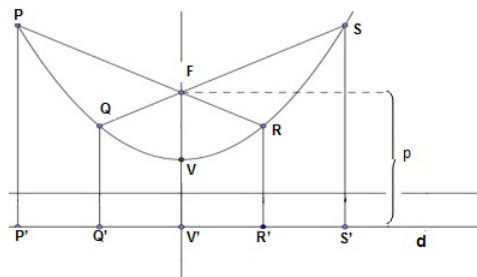


**Figura 2.4:** Reta (parábola degenerada)

A primeira, segunda e quarta seções foram adaptadas de (BARROSO, 2010).

## 2.1 Definição

Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano. O ponto fixo é chamado de foco e a reta fixa é chamada de diretriz.



**Figura 2.5:** Parábola

Consideremos uma reta  $d$  e um ponto  $F$  não pertencente a  $d$ .

Então um ponto  $P$  qualquer pertence à parábola se, e somente se,  $d(P, F) = d(P, d)$ , ou de modo equivalente,  $d(P, F) = d(P, P')$ , onde  $P'$  é o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta  $d$ .

Na figura 2.5 estão assinalados cinco pontos (P,Q,V,R e S) que são equidistantes do ponto  $F$  e da reta  $d$ .

Assim temos conforme (IEZZI, 2010, p.110):

$$VF=VV'$$

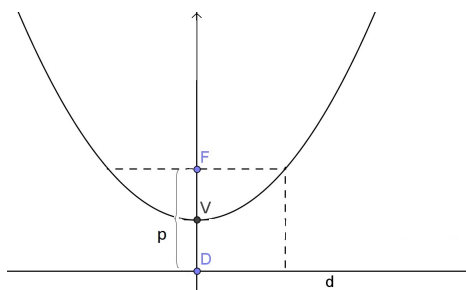
$$PF=PP'$$

$$QF=QQ'$$

$$RF=RR'$$

$$SF=SS'$$

## 2.2 Elementos



**Figura 2.6:** Elementos de uma parábola

Considerando a figura 2.6 temos:

**Foco:** é o ponto  $F$ .

**Diretriz:** é a reta  $d$ .

**Eixo:** é a reta que passa pelo foco e é perpendicular a diretriz. É fácil ver pela definição de parábola que esta curva é simétrica em relação ao seu eixo.

**Vértice:** é o ponto  $V$  de interseção da parábola com o seu eixo.

**Parâmetro da Parábola:** é a distância  $p$  entre o foco e a diretriz, isto é,  $p = FD$ . O vértice pertencente a parábola é o ponto médio de  $\overline{FD}$  pois é equidistante do foco  $F$  e da reta diretriz. Logo,  $\overline{FV} = \overline{VD} = \frac{p}{2}$ .

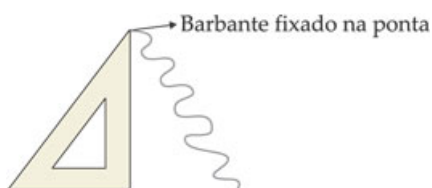
## 2.3 Construção de uma parábola usando alfinete e barbante

Esse roteiro foi retirado de (COC, 2009).

**Material necessário:** 1 esquadro, 1 régua, 1 alfinete, 1 lápis, barbante e cola.

**Roteiro de Construção**

1º) Colamos uma das extremidades do barbante no vértice do menor ângulo do esquadro (figura 2.7).



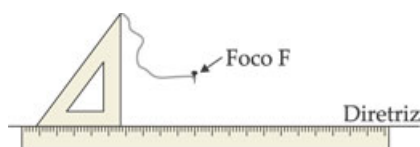
**Figura 2.7:** 1º passo

2º) Amarramos o barbante no alfinete de modo que a distância do alfinete à extremidade do esquadro seja igual ao cateto maior do esquadro (figura 2.8).



**Figura 2.8:** 2º passo

3º) No plano onde a parábola vai ser desenhada, colocamos uma régua na diretriz da parábola e fixamos o alfinete no foco da mesma (figura 2.9).



**Figura 2.9:** 3º passo

4º) Com a ponta do lápis, encostamos o barbante no esquadro de modo que fique bem esticado (figura 2.10). Notemos que a distância da ponta do lápis ao foco F é igual à distância dela até a régua.



**Figura 2.10:** 4º passo

5º) Deslocando o esquadro na régua-guia e mantendo o barbante esticado, a ponta do lápis desenhara uma parte da parábola (figura 2.11).

6º) Fazendo o mesmo com o esquadro do outro lado do foco F, obtemos a outra parte da parábola (figura 2.12).

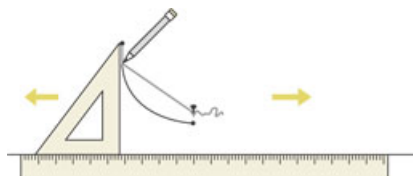


Figura 2.11: 5º passo

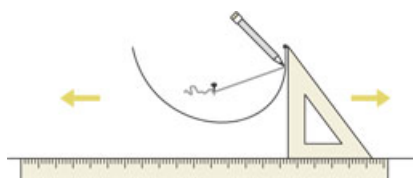


Figura 2.12: 6º passo

## 2.4 Equações

### 2.4.1 Equação da parábola com vértice na origem

Reta focal coincidente com o eixo OX e foco  $F$  a direita da reta diretriz (figura 2.13)

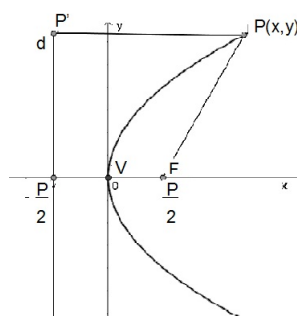


Figura 2.13: Foco a direita da diretriz

Se tomarmos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola onde o eixo das abscissas coincide com a reta focal, temos por  $FV = VD = \frac{p}{2}$  que o foco  $F$  localiza-se em  $F(\frac{p}{2}, 0)$  e a diretriz  $d$  tem equação  $x = -\frac{p}{2}$ . Pela definição  $P \in$  a parábola se, e somente se,  $PF = PP'$ . Então, seja  $P(x, y)$  e  $P'(-\frac{p}{2}, y)$  pois  $P'$  é o ponto de interseção da reta diretriz com a perpendicular baixada de  $P$  em  $d$  segue que:

$$PF = PP' \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2}$$

Quadrando e desenvolvendo, vem:

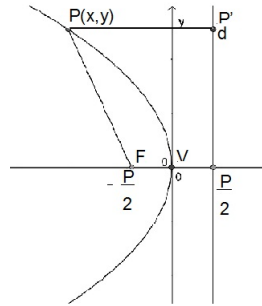
$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando, resulta:

$$y^2 = 2px.$$

Esta equação é chamada equação reduzida da parábola.

**Reta focal coincidente com o eixo OX e foco  $F$  a esquerda da reta diretriz (figura 2.14)**



**Figura 2.14:** Foco a esquerda da diretriz

Esta construção é feita de forma análoga a que foi demonstrada anteriormente. Para a parábola de foco  $F$  a esquerda da reta diretriz temos  $F(-\frac{p}{2}, 0)$  e diretriz com equação  $x = \frac{p}{2}$ .

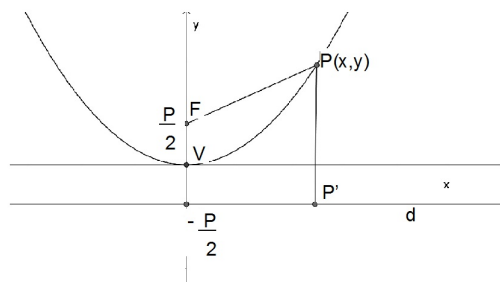
Vejam a dedução de sua equação:

$$PF = PP' \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

o que resulta em

$$y^2 = -2px.$$

**Reta focal coincidente com o eixo OY e foco  $F$  acima da reta diretriz (figura 2.15)**



**Figura 2.15:** Foco acima da diretriz

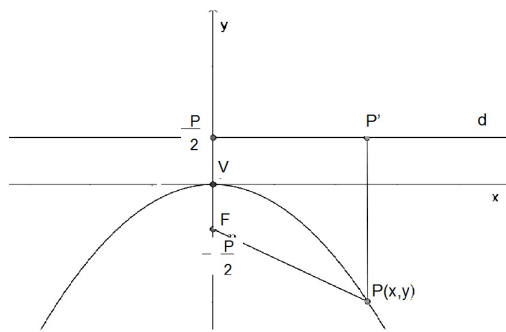
Como já apresentado, se a parábola apresentar foco acima da reta diretriz temos:

$$PF = PP' \Rightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Daí decorre a equação da parábola:

$$x^2 = 2py.$$

**Reta focal coincidente com o eixo OY e foco F abaixo da reta diretriz (figura 2.16)**



**Figura 2.16:** Foco abaixo da diretriz

Caso o foco esteja abaixo da diretriz vem:

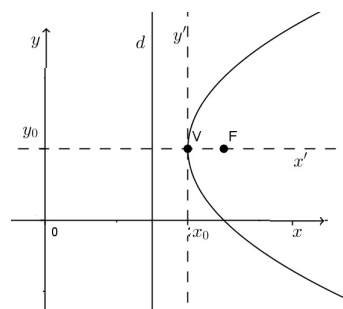
$$PF = PP' \Rightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y + \frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - \frac{p}{2})^2}$$

donde obtemos

$$x^2 = -2py.$$

### 2.4.2 Equação da parábola com vértice fora da origem

**Reta focal paralela ao eixo OX, diretriz d paralela ao eixo OY e vértice V(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) à direita da diretriz (figura 2.17)**



**Figura 2.17:**  $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

Seja V(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) o vértice da parábola. Sabendo que a distância do vértice ao ponto F é  $\frac{p}{2}$ . Temos F(x<sub>0</sub> +  $\frac{p}{2}$ , y<sub>0</sub>) e d : x = x<sub>0</sub> -  $\frac{p}{2}$ . Tomemos P(x, y) um ponto qualquer pertencente à parábola. Por definição, d(P, d) = d(P, F).

Assim,

$$x - (x_0 - \frac{p}{2}) = \sqrt{(x - (x_0 + \frac{p}{2}))^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow x - x_0 + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - x_0 - \frac{p}{2})^2 + (y - y_0)^2}$$



Chamemos  $X = x - x_0$  e  $Y = y - y_0$ . Segue que,

$$X + \frac{p}{2} = \sqrt{(X - \frac{p}{2})^2 + Y^2}$$

Quadrando vem,

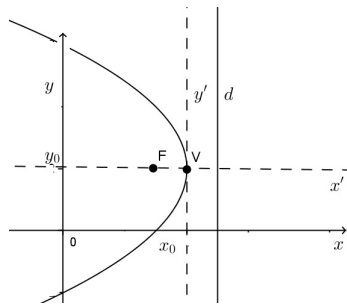
$$(X + \frac{p}{2})^2 = \left( \sqrt{(X - \frac{p}{2})^2 + Y^2} \right)^2 \Rightarrow (X + \frac{p}{2})^2 = (X - \frac{p}{2})^2 + Y^2 \Rightarrow X^2 + pX + \frac{p^2}{4} = X^2 - pX + \frac{p^2}{4} + Y^2 \Rightarrow pX = Y^2$$

Como  $X = x - x_0$  e  $Y = y - y_0$  temos que,

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

De maneira análoga deduzimos as demais equações.

**Reta focal paralela ao eixo  $OX$ , diretriz  $d$  paralela ao eixo  $OY$  e vértice  $V(x_0, y_0)$  à esquerda da diretriz (figura 2.18)**



**Figura 2.18:**  $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

Neste caso,  $F(x_0 - \frac{p}{2}, y_0)$  e  $d : x = x_0 + \frac{p}{2}$ . Donde segue pela definição:

$$x - (x_0 + \frac{p}{2}) = \sqrt{(x - (x_0 - \frac{p}{2}))^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow x - x_0 - \frac{p}{2} = \sqrt{(x - x_0 + \frac{p}{2})^2 + (y - y_0)^2}$$

Chamemos  $X = x - x_0$  e  $Y = y - y_0$ . Segue que,

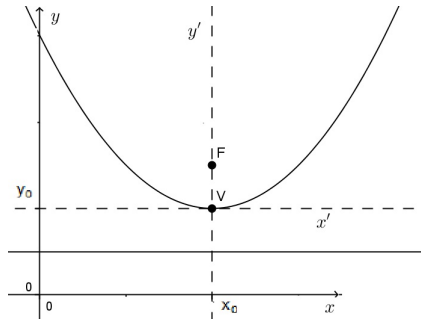
$$\Rightarrow X - \frac{p}{2} = \sqrt{(X + \frac{p}{2})^2 + Y^2} \Rightarrow (X - \frac{p}{2})^2 = \left( \sqrt{(X + \frac{p}{2})^2 + Y^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow (X - \frac{p}{2})^2 = (X + \frac{p}{2})^2 + Y^2 \Rightarrow X^2 - pX + \frac{p^2}{4} = X^2 + pX + \frac{p^2}{4} + Y^2 \Rightarrow -pX = +pX + Y^2 \Rightarrow Y^2 = -2pX$$

Como  $X = x - x_0$  e  $Y = y - y_0$  temos que,

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

**Reta focal paralela ao eixo  $OY$ , diretriz  $d$  paralela ao eixo  $OX$  e vértice  $V(x_0, y_0)$  acima da diretriz (figura 2.19)**



**Figura 2.19:**  $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

Neste caso,  $F(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$  e  $d : y = y_0 - \frac{p}{2}$ . Donde segue pela definição:

$$y - (y_0 - \frac{p}{2}) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - (y_0 + \frac{p}{2}))^2} \Rightarrow y - y_0 + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0 - \frac{p}{2})^2}$$

Chamemos  $X = x - x_0$  e  $Y = y - y_0$ . Segue que,

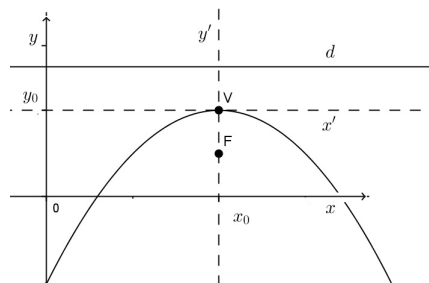
$$\Rightarrow Y + \frac{p}{2} = \sqrt{X^2 + (Y - \frac{p}{2})^2} \Rightarrow (Y + \frac{p}{2})^2 = \left(\sqrt{X^2 + (Y - \frac{p}{2})^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (Y + \frac{p}{2})^2 = X^2 + (Y - \frac{p}{2})^2 \Rightarrow Y^2 + pY + \frac{p^2}{4} = X^2 + Y^2 - pY + \frac{p^2}{4} \Rightarrow pY = X^2 - pY \Rightarrow X^2 = 2pY$$

Como  $X = x - x_0$  e  $Y = y - y_0$  temos que,

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

**Reta focal paralela ao eixo  $OY$ , diretriz  $d$  paralela ao eixo  $OX$  e vértice  $V(x_0, y_0)$  abaixo da diretriz (fig. 2.20)**



**Figura 2.20:**  $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

Neste caso,  $F(x_0, y_0 - \frac{p}{2})$  e  $d : y = y_0 + \frac{p}{2}$ . Donde segue pela definição:

$$y - (y_0 + \frac{p}{2}) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - (y_0 - \frac{p}{2}))^2} \Rightarrow y - y_0 - \frac{p}{2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0 + \frac{p}{2})^2}$$

Chamemos  $X = x - x_0$  e  $Y = y - y_0$ . Segue que,

$$\Rightarrow Y - \frac{p}{2} = \sqrt{X^2 + (Y + \frac{p}{2})^2} \Rightarrow (Y - \frac{p}{2})^2 = \left(\sqrt{X^2 + (Y + \frac{p}{2})^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (Y - \frac{p}{2})^2 = X^2 + (Y + \frac{p}{2})^2 \Rightarrow Y^2 - pY + \frac{p^2}{4} = X^2 + Y^2 + pY + \frac{p^2}{4} \Rightarrow -pY = X^2 + pY \Rightarrow X^2 = -2pY$$

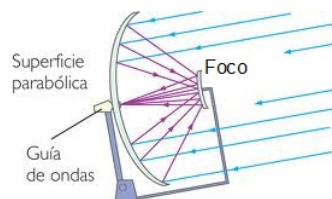
Como  $X = x - x_0$  e  $Y = y - y_0$  temos que,

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

## 2.5 Aplicações

A trajetória de projéteis sob a ação da gravidade é parabólica. A balística, através desse fato consegue determinar o local da queda de um projétil, mas é a propriedade refletora das parábolas que tem embasado a criação de diversas construções como pontes suspensas e o desenvolvimento de equipamentos tecnológicos.

Nos faróis de carros, por exemplo, é colocado uma lâmpada no foco do espelho parabólico. Os raios de luz que irradiam da lâmpada refletem no espelho sendo projetados para fora do carro. Assim como os fogões solares captam a energia solar e a concentra num ponto fixo gerando o calor necessário para o cozimento dos alimentos.



**Figura 2.21:** Antena parabólica

Outras aplicações da parábola são as antenas parabólicas, os espelhos de telescópios e radares. Nas antenas parabólicas, as ondas eletromagnéticas emitidas por satélites artificiais que se esbarram na superfície paraboloide da antena são refletidas para o receptor localizado no foco da parábola onde há a conversão das mesmas em sinal de TV (figura 2.21). De acordo com o artigo porque as antenas são parabólicas da Revista do Professor de Matemática n°33,

os sinais que recebemos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena ( ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão. (WAGNER, 1997, p.10-15)

## Hipérbole

---

---



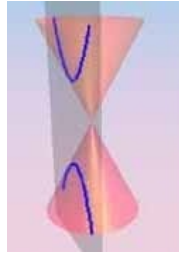
**Figura 3.1:** Catedral de Brasília

As hipérbolas são muito importantes para o sistema de localização em navegação e sua propriedade focal é fundamental na tecnologia dos telescópios.

Vimos no capítulo 1 que as cônicas são formadas pela interseção de uma superfície cônica formada por um cone duplo com um plano secante. Conforme (VARANDAS, 2000/2001), se um plano é paralelo ao eixo do cone duplo, obtemos:

- Uma **hipérbole**, se o plano não passa pelo vértice (figura 3.2);
- **Doas retas concorrentes**, se o plano passa pelo vértice, ou seja, hipérbole degenerada (figura 3.3);

A primeira, segunda, terceira, quinta e sexta seções foram adaptadas de (BARROSO, 2010).



**Figura 3.2:** Hipérbole

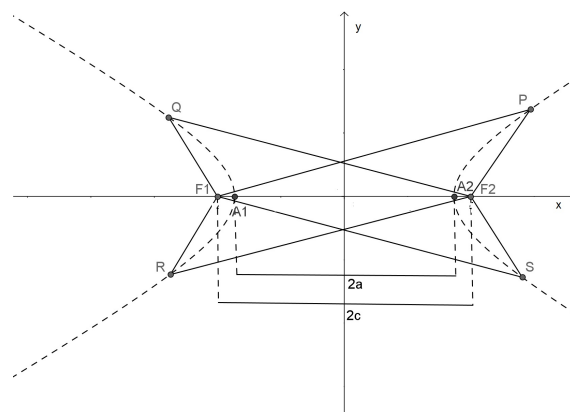


**Figura 3.3:** Duas retas concorrentes (hipérbole degenerada)

### 3.1 Definição

Hipérbole é o conjunto de todos os pontos  $P$  em um plano cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a dois pontos fixos, denominados focos ( $F_1$  e  $F_2$ ), é constante e igual a  $2a$ , de maneira que  $2a$  seja menor que a distância focal  $\overline{F_1F_2} = 2c$ , ou seja,  $2a < 2c$ .

$$| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} | = 2a$$



**Figura 3.4:**  $P \in H \Leftrightarrow | d(P, F_1) - d(P, F_2) | = 2a$

Assim, de acordo com a figura 3.4 temos:  $| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} | = 2a$

$$| \overline{QF_1} - \overline{QF_2} | = 2a$$

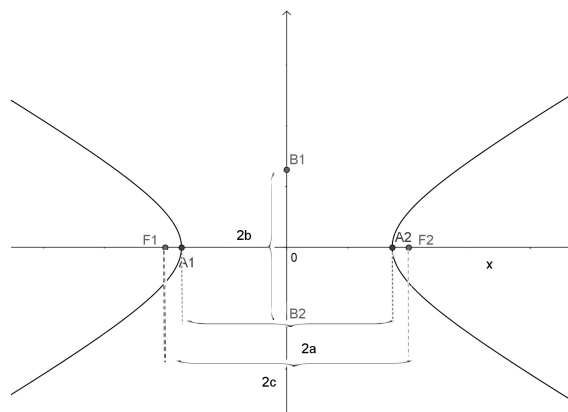
$$| \overline{RF_1} - \overline{RF_2} | = 2a$$

$$|\overline{SF_1} - \overline{SF_2}| = 2a$$

$$|\overline{A_1F_1} - \overline{A_1F_2}| = 2a$$

$$|\overline{A_2F_1} - \overline{A_2F_2}| = 2a$$

## 3.2 Elementos



**Figura 3.5:** Elementos de uma hipérbole

Considerando a figura 3.5 temos:

**Focos:** são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .

**Distância focal:** é a distância entre os focos ( $\overline{F_1F_2} = 2c$ ).

**Vértices:** são os pontos  $A_1$  e  $A_2$ , interseções de  $\overline{F_1F_2}$  com a hipérbole.

**Centro:** é o ponto  $O$ , ponto médio de  $\overline{A_1A_2}$ .

**Eixo real ou transverso:** é o segmento  $\overline{A_1A_2}$  ( $\overline{A_1A_2} = 2a$ ).

**Eixo imaginário ou conjugado:** é o segmento  $\overline{B_1B_2}$  ( $\overline{B_1B_2} = 2b$ ).

**Excentricidade (e):** é a razão  $e = \frac{c}{a}$ , sendo  $e > 1$ . A excentricidade é quem caracteriza a forma da hipérbole. Algumas têm ramos mais abertos que outras.

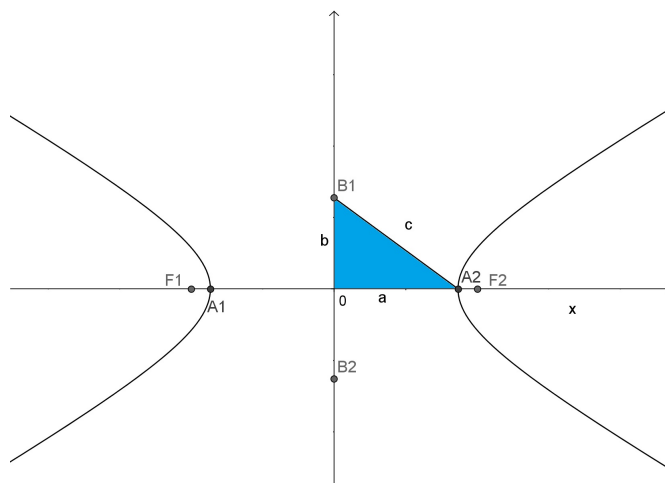
Se  $e$  for um número próximo de 1, os ramos da hipérbole serão mais fechados.

Se  $e$  for um número tendendo ao infinito, os ramos da hipérbole serão mais abertos.

## 3.3 Relação entre $a$ , $b$ e $c$

Observe na figura 3.6 que o triângulo  $OB_1A_2$  é um triângulo retângulo onde a distância  $\overline{B_1A_2} = c$  é a hipotenusa. Então, pelo Teorema de Pitágoras obtemos

$$c^2 = a^2 + b^2$$



**Figura 3.6:** Relação dada pelo Teorema de Pitágoras

### 3.4 Construção de uma hipérbole usando alfinete e barbante

Esse roteiro foi retirado de (COC, 2009).

**Material necessário:** lápis, barbante e dois alfinetes.

#### Roteiro de Construção

1º) Fixar uma das extremidades do barbante na extremidade da régua (figura 3.7).



**Figura 3.7:** 1º passo

2º) Amarrar um alfinete no barbante de tal modo que quando o barbante é esticado junto à régua, a distância do alfinete ao furo seja o eixo real da hipérbole que se deseja construir (figura 3.8).

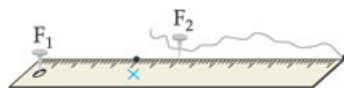


**Figura 3.8:** 2º passo

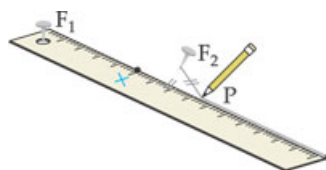
3º) Com um alfinete no furo da régua, colocamos a mesma num dos focos da hipérbole que se deseja construir, enquanto, no outro foco, fixamos o alfinete amarrado ao barbante (figura 3.9).

4º) Encostamos a ponta do lápis na régua de modo que o barbante fique esticado. Observamos que a diferença das distâncias de P até F1 e de P até F2 é constante, igual à distância de x até F1,





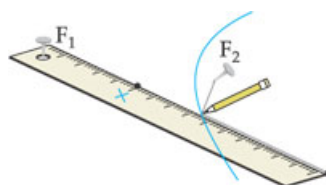
**Figura 3.9:** 3º passo



**Figura 3.10:** 4º passo

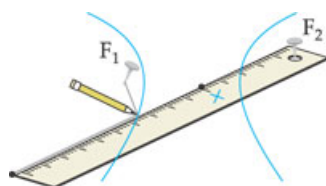
o eixo real da hipérbole (figura 3.10).

5º) Girando a régua em torno de  $F_1$  e mantendo o barbante esticado, a ponta do lápis, sempre junto à régua, desenhará um dos ramos da hipérbole (figura 3.11).



**Figura 3.11:** 5º passo

6º) Usando o mesmo procedimento, porém fixando a extremidade furada em  $F_2$  e a extremidade livre do barbante em  $F_1$ , obtemos o outro ramo da hipérbole (figura 3.12).

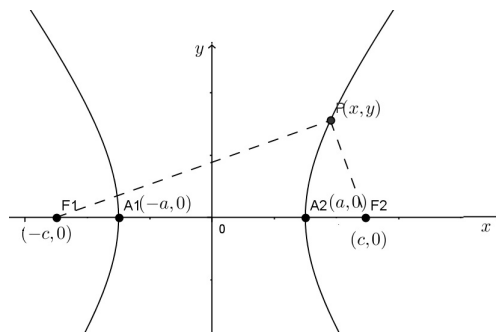


**Figura 3.12:** 6º passo

## 3.5 Equações

### 3.5.1 Equação da hipérbole com centro na origem

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no centro da hipérbole cujos eixos contêm os eixos da hipérbole.

**Eixo real coincidente com o eixo  $OX$  (figura 3.13)****Figura 3.13:** Hipérbole com o eixo real coincidente com o eixo  $OX$ 

Como  $\overline{A_1A_2}$  coincide com o eixo  $OX$ , temos que  $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ ,  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ . Seja  $P$  um ponto qualquer da hipérbole com coordenadas  $(x, y)$ . Por definição

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

Assim:

$$|\sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}| = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Quadrando e desenvolvendo, vem:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

Quadrando novamente, obtemos:

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Substituindo  $(c^2 - a^2)$  por  $b^2$ , onde  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$  encontramos

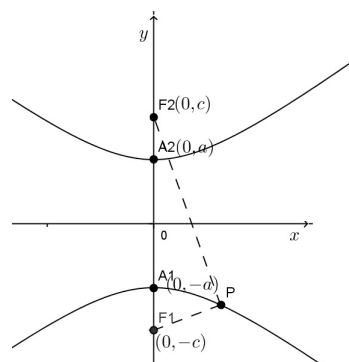
$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e, dividindo por  $a^2b^2$ , com  $a^2b^2 \neq 0$ , resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta equação é chamada equação reduzida da parábola.

### Eixo real coincidente com o eixo $OY$ (figura 3.14)



**Figura 3.14:** Hipérbole com o eixo real coincidente com o eixo  $OY$

Neste caso:  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ .

$P(x, y)$  estará na hipérbole se:  $\sqrt{(y+c)^2 + x^2} - \sqrt{(y-c)^2 + x^2} = \pm 2a$

Analogamente a situação anterior obtemos:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

### 3.5.2 Translação dos eixos coordenados

Sejam  $XOY$  um sistema de eixos ortogonais,  $\bar{O} = (x_0, y_0)$  um ponto no plano e  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$  o sistema cujos eixos  $\bar{O}\bar{X}$  e  $\bar{O}\bar{Y}$  são paralelos aos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Representamos por  $(\bar{x}, \bar{y})$  as coordenadas de um ponto  $P$  no sistema  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$  e por  $(x, y)$  as coordenadas desse mesmo ponto  $P$  no sistema  $XOY$ .

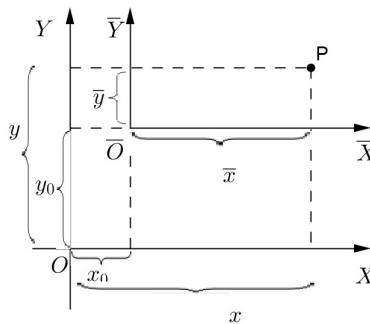


Figura 3.15: Translação de Sistema

Observe pela figura 3.15 que:

$$x = x_0 + \bar{x} \text{ e } y = y_0 + \bar{y}$$

ou

$$\bar{x} = x - x_0 \text{ e } \bar{y} = y - y_0$$

que são as fórmulas de translação e que permitem transformar coordenadas de um sistema para outro.

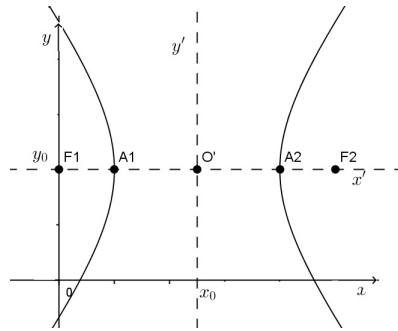
### 3.5.3 Equação da hipérbole com centro fora da Origem do Sistema

**Eixo real paralelo ao eixo  $OX$**

Consideremos uma hipérbole de centro  $\bar{O} = (x_0, y_0)$  (figura 3.16) pertencente a reta focal. Seus focos são  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ . Seja  $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$  um ponto qualquer pertencente a hipérbole. Por definição, temos  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ . Assim vem,

$$|\sqrt{((x_0 - c) - (\bar{x} + x_0))^2 + (y_0 - (\bar{y} + y_0))^2} - \sqrt{((x_0 + c) - (\bar{x} + x_0))^2 + (y_0 - (\bar{y} + y_0))^2}| = 2a$$

$$\sqrt{((x_0 - c) - (\bar{x} + x_0))^2 + (y_0 - (\bar{y} + y_0))^2} - \sqrt{((x_0 + c) - (\bar{x} + x_0))^2 + (y_0 - (\bar{y} + y_0))^2} = \pm 2a$$



**Figura 3.16:** Hipérbole com o eixo real paralelo ao eixo  $OX$

$$\sqrt{(-c - \bar{x})^2 + (-\bar{y})^2} - \sqrt{(c - \bar{x})^2 + (-\bar{y})^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{c^2 + 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2} - \sqrt{c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \pm 2a$$

Quadrando e desenvolvendo, vem:

$$c^2 + 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2} + c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2$$

$$4c\bar{x} - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$$

$$c\bar{x} - a^2 = \pm a\sqrt{c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$$

Quadrando novamente, obtemos:

$$c^2\bar{x}^2 - 2a^2c\bar{x} + a^4 = a^2(c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

$$c^2\bar{x}^2 - 2a^2c\bar{x} + a^4 = a^2c^2 - 2a^2c\bar{x} + a^2\bar{x}^2 + a^2\bar{y}^2$$

$$c^2\bar{x}^2 - a^2\bar{x}^2 = a^2c^2 + a^2\bar{y}^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)\bar{x}^2 - a^2\bar{y}^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Substituindo  $(c^2 - a^2)$  por  $b^2$ , onde  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$  encontramos

$$b^2\bar{x}^2 - a^2\bar{y}^2 = a^2b^2$$

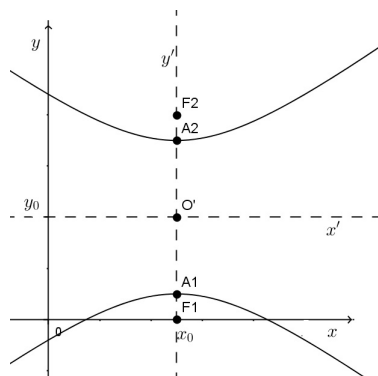
e, dividindo por  $a^2b^2$ , com  $a^2b^2 \neq 0$ , resulta:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

onde pela fórmula de translação temos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

**Eixo real paralelo ao eixo  $OY$  (figura 3.17)**



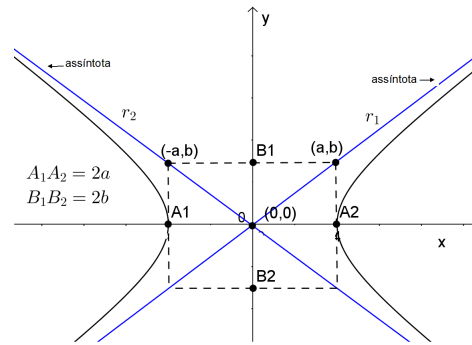
**Figura 3.17:** Hipérbole com o eixo real paralelo ao eixo  $OY$

De modo análogo ao anterior, temos

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

### 3.6 Assíntotas da hipérbole

Observe o retângulo de lados  $2a$  e  $2b$  na hipérbole abaixo:



**Figura 3.18:** Assíntotas  $r_1$  e  $r_2$

As retas  $r_1$  e  $r_2$ , representadas na figura 3.18, que contêm as diagonais desse retângulo são chamadas de assíntotas da hipérbole.

### Equações das retas assíntotas

- Equação de  $r_1$

Seja  $(0, 0)$  e  $(a, b)$  dois pontos de  $r_1$ . A equação de  $r_1$  pode ser calculada por:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow bx - ay = 0$$

- Equação de  $r_2$

Seja  $(0, 0)$  e  $(-a, b)$  dois pontos de  $r_2$ . A equação de  $r_2$  pode ser calculada por:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -a & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow bx + ay = 0$$

## 3.7 Aplicações

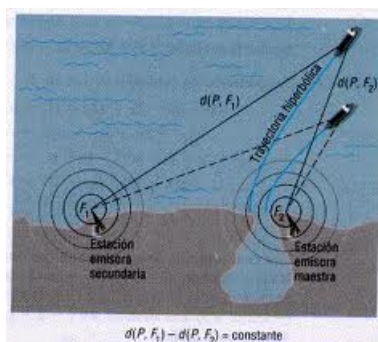
A rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo imaginário forma uma superfície hiperbolóide, que por sua estabilidade é muito utilizada na construção de centrais de energia atômica.

Como citado no início do capítulo, a propriedade refletora das hipérboles são muito importante na tecnologia dos telescópios. No artigo "A hipérbole e os telescópios", da RPM nº34, o professor Geraldo Ávila explica que

os primeiros telescópios foram construídos com lentes e funcionavam com base na refração da luz. Acontece que as lentes tem vários inconvenientes como as deformações das imagens que elas produzem, além de decompor a luz branca em várias cores, produzindo aberrações cromáticas. (AVILA, 1997, p.22-27)

Após várias tentativas de Galileu e Newton, o astrônomo francês Cassegrain propôs a utilização de um espelho hiperbólico na construção dos telescópios. Dessa forma, conforme cita João Filipe Queiró, o chamado telescópio de reflexão.

é construído com dois espelhos, um maior de forma parabólica (principal) e outro menor de forma hiperbólica (secundário). A disposição desses dois espelhos se dariam de tal forma que os eixos da parábola e da hipérbole coincidisse e que o foco da primeira coincidisse com um dos focos da segunda. O princípio básico do telescópio refletor é o seguinte: os raios de luz ao encontrar a superfície parabólica são refletidos para o foco pela propriedade refletora da parábola. Como o foco da parábola coincide com o foco da hipérbole, os raios estarão automaticamente também no foco da hipérbole, que pela propriedade refletora da hipérbole, serão direcionados para a superfície hiperbólica e encaminhados para o outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam por um orifício no centro do espelho maior onde uma lente corrige a trajetória da luz que chegará aos olhos do observador. Esses telescópios têm a vantagem de serem menores e mais leves. (QUEIRO, 2010)



**Figura 3.19:**  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = constante$

Outra aplicação das hipérboles é o sistema LORAN (LOng RANge Navigation). De acordo com (SATO, 2004), LORAN é um sistema de localização que permite a um navegante determinar a sua posição medindo o intervalo de tempo decorrido do envio de sinais feitos simultaneamente por estações de rádio localizadas nos focos de uma hipérbole, conforme visto na figura 3.19. Vejamos: Seja  $P$  o ponto onde se encontra a embarcação e  $F_1$  e  $F_2$  a localização das estações de rádio. A coordenada do ponto  $P$  pode ser encontrada através da equação  $PF_1 - PF_2 = c \cdot \Delta t$ , onde  $PF_1$  e  $PF_2$  são, respectivamente, as distâncias da posição da embarcação aos pontos  $F_1$  e  $F_2$ ,  $c$  é a velocidade da embarcação e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo entre a recepção dos sinais recebidos. A utilização dessa técnica auxiliou a detectar barcos japoneses na II grande guerra.

Na possibilidade do navegante receber sinais de três estações de rádio,  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ , sua posição é o ponto onde as três hipérboles se interceptam (figura 3.20), pois cada par de estações dá uma hipérbole que mostra a posição do navegante, o que pode ser mapeado por um computador.



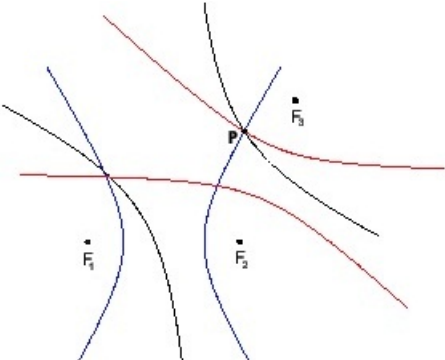


Figura 3.20: Mapa traçado pelas hipérboles

# Elipse



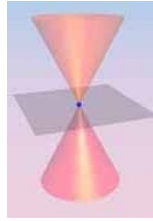
**Figura 4.1:** Maracanã

As formas elípticas são muito utilizadas na arquitetura (figura 4.1), design e engenharia. Suas propriedades refletoras embasam a construção de diversos aparelhos. Encontramos também essas formas nas órbitas dos planetas.

Vimos no capítulo 1 que as cônicas são formadas pela interseção de uma superfície cônica formada por um cone duplo com um plano secante. Se o plano intersecta todas as posições da geratriz e o eixo do cone duplo, obtemos:

- Um **ponto**, se o plano passa pelo vértice - elipse degenerada (figura 4.2);
- Uma **elipse**, se o plano não passa pelo vértice e é oblíquo em relação ao eixo (figura 4.3);
- Uma **circunferência**, se o plano não passa pelo vértice e é perpendicular ao eixo (figura 4.4);

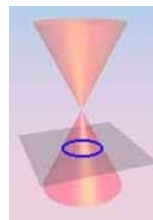
A primeira, segunda, terceira e quinta seções foram adaptadas de (BARROSO, 2010).



**Figura 4.2:** Ponto (elipse degenerada)

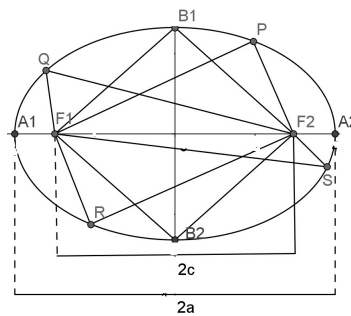


**Figura 4.3:** Elipse



**Figura 4.4:** Circunferência

## 4.1 Definição



**Figura 4.5:** Elipse

Elipse é o conjunto de todos os pontos  $P$  em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, denominados focos ( $F_1$  e  $F_2$ ), é constante e igual a  $2a$ , de maneira que  $2a$  seja maior que a distância focal  $\overline{F_1F_2} = 2c$ , ou seja,  $2a > 2c$ .

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Observando a figura 4.5 temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$QF_1 + QF_2 = 2a$$

$$RF_1 + RF_2 = 2a$$

$$SF_1 + SF_2 = 2a$$

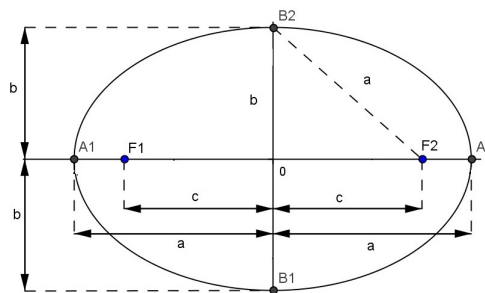
$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$$

$$A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$$

$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$$

$$B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$$

## 4.2 Elementos



**Figura 4.6:** Elementos de uma elipse

Considerando a figura 4.6 temos:

**Focos:** são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .

**Distância focal:** é a distância entre os focos ( $\overline{F_1F_2} = 2c$ ).

**Eixo maior:** é o segmento  $\overline{A_1A_2}$ , que passa pelos focos ( $\overline{A_1A_2} = 2a$ ).

**Centro:** é o ponto  $O$ , ponto médio de  $\overline{A_1A_2}$ .

**Eixo menor:** é o segmento  $\overline{B_1B_2}$ , perpendicular a  $\overline{A_1A_2}$ , que passa por  $O$  ( $\overline{B_1B_2} = 2b$ ).

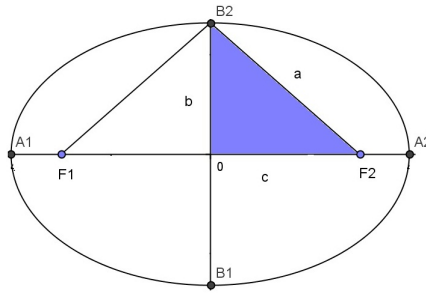
**Excentricidade (e):** é a razão  $e = \frac{c}{a}$ , sendo  $0 < e < 1$ . A excentricidade é quem caracteriza a forma da elipse.

Se  $e$  for próximo de 0, a forma da elipse é mais próxima a uma circunferência.

Se  $e$  for próximo de 1, a elipse é mais achatada.

## 4.3 Relação entre $a$ , $b$ e $c$

Dada uma elipse  $\varepsilon$  com centro na origem do sistema cartesiano. Seja  $P \in \varepsilon$  um ponto da elipse, onde  $P = B_2$ . Por definição temos  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Rightarrow \overline{B_2F_1} + \overline{B_2F_2} = 2a$ . Como  $\overline{F_1O} = \overline{F_2O}$



**Figura 4.7:** Relação dada pelo Teorema de Pitágoras

e portanto o triângulo  $F_1B_2F_2$  é isósceles, temos que  $\overline{B_2F_1} = \overline{B_2F_2}$ . Segue que  $\overline{B_2F_1} + \overline{B_2F_2} = 2a \Rightarrow \overline{B_2F_2} + \overline{B_2F_2} = 2a \Rightarrow 2\overline{B_2F_2} = 2a \Rightarrow \overline{B_2F_2} = a$ .

Observe na figura 4.7 que o triângulo  $OB_2F_2$  é um triângulo retângulo onde a distância  $B_2F_2 = a$  é a hipotenusa. Então, pelo Teorema de Pitágoras obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

## 4.4 Construção de uma elipse usando alfinete e barbante

Esse roteiro foi retirado de (COC, 2009).

**Material necessário:** lápis, barbante e dois alfinetes.

### Roteiro de Construção

1º) Amarrar dois alfinetes em um barbante, de modo que a distância entre eles seja a medida do eixo maior da elipse que se deseja construir (figura 4.8).



**Figura 4.8:** 1º passo

2º) Fixar os alfinetes nos focos  $F_1$  e  $F_2$  da elipse que se deseja construir (figura 4.9).



**Figura 4.9:** 2º passo

3º) Com a ponta do lápis manter o barbante esticado, observando que qualquer que seja a posição  $P$  da ponta do lápis, a soma das distâncias de  $P$  aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é o comprimento do barbante (eixo maior)(figura 4.10).

4º) Deslizar a ponta do lápis sobre o plano, de modo que o barbante sempre se mantenha esticado, ela desenhará a elipse (figura 4.11).

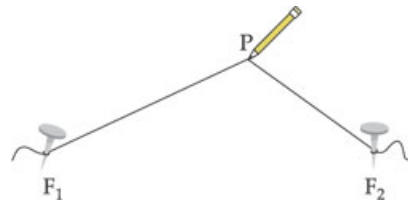


Figura 4.10: 3º passo

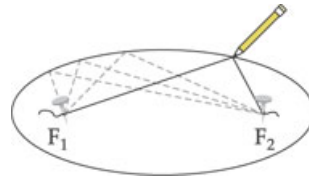


Figura 4.11: 4º passo

**Observação:** Note que no caso particular em que a distância focal é nula, isto é, quando os focos são coincidentes, a elipse que se obtém é uma circunferência (figura 4.12).



Figura 4.12: Caso especial - Circunferência

## 4.5 Equações

### 4.5.1 Equação da elipse com centro na origem

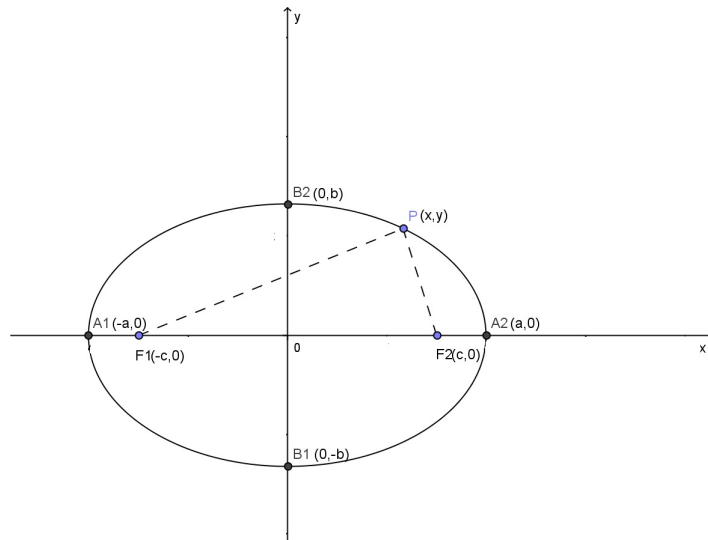
Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no centro da elipse cujos eixos contêm os eixos da elipse. Para obter a equação da elipse pensaremos em duas situações.

#### Eixo maior da elipse sobre o eixo das abscissas (figura 4.13)

Como  $\overline{A_1A_2}$  coincide com o eixo  $x$ , temos que  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$ ,  $C_1(-c, 0)$  e  $C_2(c, 0)$ . Do mesmo modo, sabendo que  $\overline{B_1B_2}$  coincide com o eixo  $y$ , temos  $B_1(0, -b)$ ,  $B_2(0, b)$ . Seja  $P$  um ponto qualquer da elipse com coordenadas  $(x, y)$ . Por definição  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$  onde utilizando a fórmula da distância entre dois pontos encontraremos a equação da elipse.

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$



**Figura 4.13:** Elipse com o eixo maior coincidente com o eixo  $OX$

Quadrando e desenvolvendo, vem:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} - 2cx$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Quadrando novamente, obtemos:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

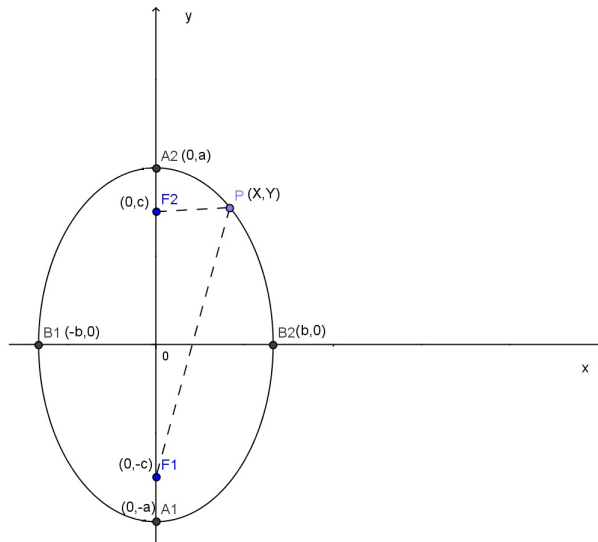
Substituindo  $(a^2 - c^2)$  por  $b^2$ , onde  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$  encontramos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e, dividindo por  $a^2b^2$ , resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$$

**Eixo maior da elipse sobre o eixo das ordenadas (figura 4.14)**



**Figura 4.14:** Elipse com o eixo maior coincidente com o eixo  $OY$

Neste caso:  $F_1(0, -c)$  e  $F_2(0, c)$ .

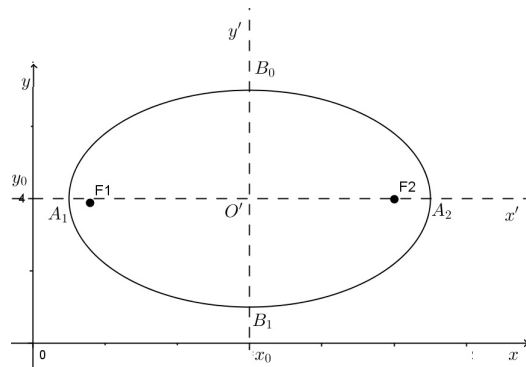
$P(x, y)$  estará na elipse se:  $\sqrt{(y+c)^2 + x^2} + \sqrt{(y-c)^2 + x^2} = 2a$

Analogamente a situação anterior obtemos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a > b$$

### 4.5.2 Equação da elipse com centro fora da Origem do Sistema

eixo maior é paralelo ao eixo  $OX$  (figura 4.15)



**Figura 4.15:** Elipse com o eixo maior paralelo ao eixo  $x$

Consideremos uma elipse de centro  $\bar{O} = (x_0, y_0)$ . Seus focos são  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ . Seja  $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$  um ponto qualquer pertencente a elipse. Por definição,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ . Assim temos,

$$\sqrt{(x_0 - c) - (\bar{x} + x_0))^2 + (y_0 - (\bar{y} + y_0))^2} + \sqrt{(x_0 + c) - (\bar{x} + x_0))^2 + (y_0 - (\bar{y} + y_0))^2} = 2a$$



$$\sqrt{(-c - \bar{x})^2 + (-\bar{y})^2} + \sqrt{(c - \bar{x})^2 + (-\bar{y})^2} = 2a$$

$$\sqrt{c^2 + 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \sqrt{c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2} = 2a$$

Quadrando e desenvolvendo, vem:

$$c^2 + 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2} + c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2$$

$$4c\bar{x} - 4a^2 = -4a\sqrt{c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$$

$$a\sqrt{c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2} = a^2 - c\bar{x}$$

Quadrando novamente, obtemos

$$a^2(c^2 - 2c\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2) = a^4 - 2a^2c\bar{x} + c^2\bar{x}^2$$

$$a^2c^2 - 2a^2c\bar{x} + a^2\bar{x}^2 + a^2\bar{y}^2 = a^4 - 2a^2c\bar{x} + c^2\bar{x}^2$$

$$a^2\bar{x}^2 + a^2\bar{y}^2 - c^2\bar{x}^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)\bar{x}^2 + a^2\bar{y}^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Substituindo  $(a^2 - c^2)$  por  $b^2$ , onde  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$  encontramos

$$b^2\bar{x}^2 + a^2\bar{y}^2 = a^2b^2$$

e, dividindo por  $a^2b^2$ , com  $a^2b^2 \neq 0$ , resulta:

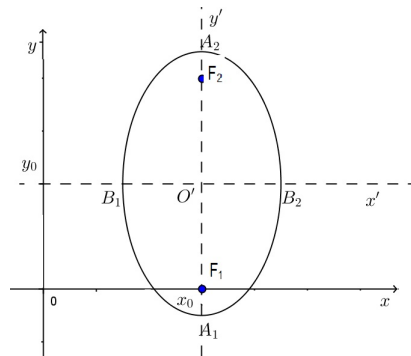
$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

onde pela fórmula de translação temos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

**eixo maior é paralelo ao eixo  $OY$  (figura 4.16)**

De modo análogo ao anterior, temos



**Figura 4.16:** Elipse com o eixo maior paralelo ao eixo  $y$

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

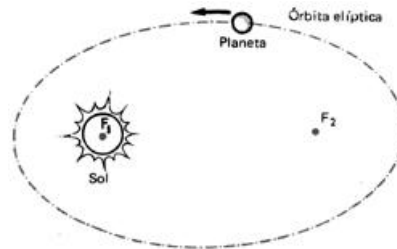
## 4.6 Aplicações

Na astronomia observa-se a importância das elipses no estudo das trajetórias de planetas e cometas, onde cada um tem trajetórias elípticas de diferentes tamanhos e formas ocupando diferentes planos no espaço. Johannes Kepler reforçou a teoria heliocêntrica (o sol é o centro do Universo e os planetas giram em torno dele) criada por Galileu Galilei. No artigo Kepler e a órbita elíptica, da RPM nº15, o professor Geraldo Ávila explica que após muitos cálculos Kepler consegue provar que a órbita de Marte não podia ser circular, era elíptica com o Sol em um dos seus focos (figura 4.17). Após esse estudo, ele

estendeu a todos os planetas do sistema solar a lei da órbita elíptica, que descobrira para o planeta Marte, a qual ficou conhecida como a 1ª lei que estabelece que: "Cada planeta descreve uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos". (AVILA, 1987, p.02-13)

Swokowski comenta que

a maior parte dessas órbitas são quase circulares, e conseguinte, suas excentricidades estão próximas de 0. A título de ilustração, para a Terra,  $e = 0,017$ ; para Marte,  $e = 0,093$  e para Urano,  $e = 0,046$ . Mercúrio e Plutão tem órbitas menos circulares, com excentricidade 0,206 e 0,249, respectivamente. (SWOKOWSKI, 1994, p.134)



**Figura 4.17:** Órbita de Kepler

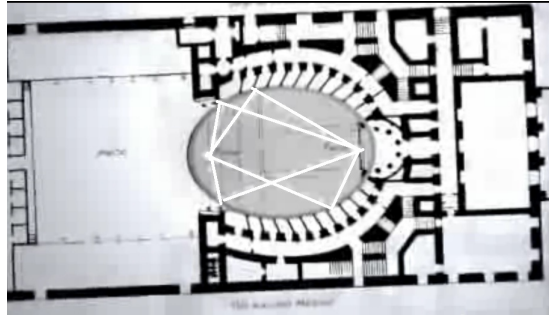
A propriedade refletora das superfícies geradas por cônicas elipsoides criam condições acústicas especiais em teatro, auditórios, estádios e igrejas, por isso são muito utilizadas na arquitetura. A Catedral de São Paulo em Londres e o Edifício do Capitólio em Washington, por exemplo, são projetados num formato de parte de um elipsoide, de maneira que duas pessoas localizadas em lugares estratégicos (“focos” do elipsoide) podem conversar entre si em voz baixa sem que sejam ouvidas no restante da sala. Estas são chamadas salas de sussurros, muito utilizadas em museus. No artigo da RPM nº36 : Elipse, sorrisos e sussurros, o professor Renato Valladares explica que,

a forma da sala é de fundamental importância. Ao projetá-la, fixam-se dois pontos  $P$  e  $Q$ , que ficam na altura da cabeça das pessoas que vão se comunicar. A seguir, toma-se uma elipse  $E$  que admita  $P$  e  $Q$  como focos, e a sala é construída de tal maneira que qualquer plano que passe por esses pontos intercepte a sala segundo uma elipse congruente com a escolhida. (VALLADARES, 1998, p.24-28)

Tal fato decorre da propriedade de que uma onda sonora ou luminosa emitida a partir de um “foco” de uma superfície refletora elíptica reflete para outro “foco”.

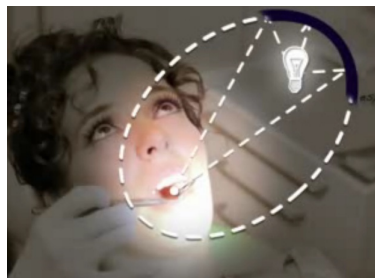
No teatro nacional de São Carlos em Lisboa, Portugal, a sala de espetáculos foi projetada para agradar o rei. Assim como na sala de sussurro, a sala de espetáculos possui a forma elíptica. Um foco está no palco e o outro ficava muito perto da tribuna real, assim sendo, o som emitido no palco era refletido nas paredes do teatro ao outro foco, ou seja aos ouvidos do rei (figura 4.18).

O aparelho de radioterapia, por exemplo, emite raios cujo objetivo é destruir tecidos doentes sem atingir os tecidos saudáveis que encontram-se ao seu redor, por isso ele se vale de espelhos elípticos cuja propriedade refletora permite concentrar os raios em um só ponto. Vemos uma importante aplicação óptica da elipse no consultório dos dentistas. O aparelho de iluminação que eles utilizam consiste de um espelho em forma de arco de elipse com uma lâmpada localizada em um dos focos. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, permitindo assim se ter



**Figura 4.18:** Projeção da sala de espetáculo do Teatro Nacional de São Carlos -Portugal

o máximo de luz onde se está trabalhando e evitando que os raios luminosos ofusquem a visão do paciente (figura 4.19).



**Figura 4.19:** Aparelho de iluminação de dentista

## Mesa de bilhar elíptica

---

---

A mesa de bilhar elíptica (figura 5.1) servirá como ferramenta de ensino/aprendizagem nas aulas de matemática ou nas atividades de iniciação científica da área. O fato inusitado que acontece com essa “mesa mágica”, onde a diversão se tornará curiosidade, deixará os educandos instigados.



**Figura 5.1:** Mesa de bilhar elíptica

O comportamento repetitivo da bola, que a qualquer jogada, independente de força e posição, cairá na caçapa, será o ponto de partida para um trabalho de investigação, que conforme orientações dos PCN's ao se referir ao papel da matemática nas escolas ressalta:

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (da Educação MEC, 1999, p.82)

A construção da mesa de bilhar elíptica se baseia nas propriedades bissetora e refletora da elipse.

Para analisarmos essas propriedades lembremos de duas leis da física:

- O raio incidente, o raio refletido e a normal são coplanares;
- O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

(BONJORNO, 2000, p.303)

A propriedade bissetora mostra que os ângulos entre uma reta tangente a elipse e os segmentos que vão do ponto de tangência aos focos são iguais. Tal fato gera a propriedade refletora que permite que todas as ondas sonoras ou luminosas emitidas em um dos focos, ao se refletirem na elipse cheguem ao segundo foco percorrendo a mesma distância.

Explicando como as propriedades da elipse atuam na sala de sussurros citada no capítulo anterior, o professor Renato J. C. Valladares reforça essa descrição lembrando que,

pela própria definição de elipse, a soma das distâncias de um ponto da curva aos focos é constante. Assim, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos que, ao se refletirem nas paredes da sala, cheguem ao segundo foco, terão percorrido a mesma distância e, por isso, chegarão ao mesmo tempo. Já a propriedade bissetora garante que todo som emitido em um dos focos se dirigirá após a reflexão exatamente para o outro foco.

Assim, conjugando essas duas propriedades, concluímos que todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos chegarão ao mesmo tempo no outro foco, o que, sem dúvida, proporciona uma amplificação natural do som, explicando o funcionamento das salas de sussurros. (VALLADARES, 1998, p.24-28)

O mesmo princípio acontece com a mesa de bilhar, apenas lembrando que se diferem na questão do tempo, pois o som e a luz tem velocidades constantes, enquanto que a velocidade da bola de bilhar dependerá da força aplicada na mesma.

### Propriedade bissetora da elipse

Seja uma elipse  $\varepsilon$  com focos  $F_1$  e  $F_2$  e seja  $P$  um ponto de  $\varepsilon$ . Então a reta  $r$  é tangente a  $\varepsilon$  em  $P$  se, e somente se, a reta  $r$  forma ângulos iguais com os raios focais  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$ .

### Demonstração:

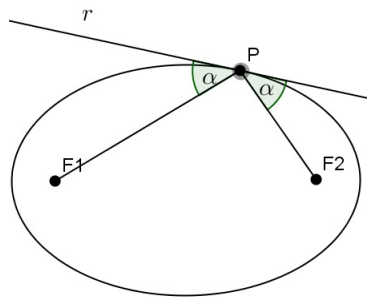
Lembremos que uma reta é tangente à elipse se, e somente se, intersecta esta somente no ponto de tangência. Denotando a distância entre dois pontos  $R$  e  $S$  por  $d(R, S)$  e caracterizando a elipse  $\varepsilon$ , de focos  $F_1$  e  $F_2$ , como lugar geométrico dos pontos  $P$  que satisfazem a propriedade métrica,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , em que  $2a$  é uma constante, segue-se que um ponto  $A$  não pertencerá a elipse se, e somente se,  $d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq 2a$ .

Logo, uma reta  $r$  será tangente à elipse  $\varepsilon$  em um ponto  $P$  se, e somente se, intersectar  $\varepsilon$  em  $P$  e qualquer que seja o ponto  $A$  em  $r$ ,  $A \neq P$ , se tenha:

$$d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq d(P, F_1) + d(P, F_2).$$

Inicialmente mostraremos que se os ângulos formados por  $r$  e os raios focais  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$  são iguais, então  $r$  é tangente a  $\varepsilon$ .

( $\Rightarrow$ )



**Figura 5.2:** Reta  $r$  tangente a elipse  $\varepsilon$

Seja um ponto  $P$  na elipse  $\varepsilon$  e  $r$  uma reta passando por  $P$  de tal forma que o ângulo entre  $\overline{PF_1}$  e  $r$  seja igual ao ângulo entre  $\overline{PF_2}$  e  $r$ . Tomemos sobre  $r$  um ponto  $A \neq P$  e consideremos o ponto  $F'$ , simétrico a  $F_1$  em relação a  $r$ . A reta  $r$  é mediatriz de  $\overline{F_1F'}$ . Logo,  $d(P, F_1) = d(P, F')$  e também  $d(A, F_1) = d(A, F')$ .

Observe a figura 5.2. Por construção, a reta  $r$  faz ângulos iguais com  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$  e, pela simetria, os ângulos  $APF_1$  e  $APF'$  também são iguais. Daí, os segmentos  $\overline{PF_2}$  e  $\overline{PF'}$  fazem ângulos iguais com  $r$  (o.p.v.) e, portanto, os pontos  $F'$ ,  $P$  e  $F_2$  são colineares.

Por definição  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ . Segue-se então que:

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F') + d(P, F_2) = d(F', F_2) < d(A, F') + d(A, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2)$$

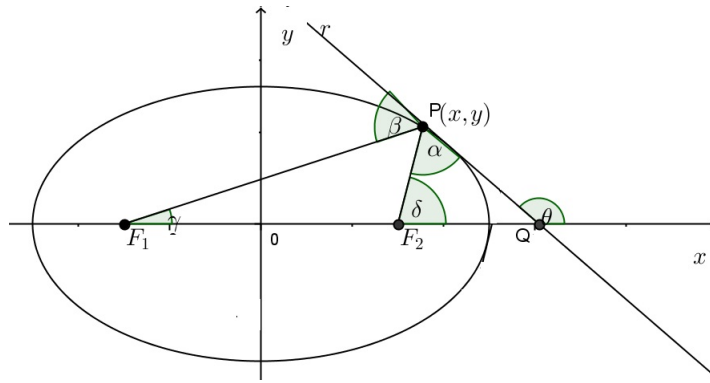
onde usamos a desigualdade triangular no triângulo  $F_2AF'$ .

Como  $d(A, F_1) + d(A, F_2) > 2a$ , conclui-se que  $P$  é o único ponto de  $r$  que pertence à elipse, o que mostra que essa reta tangencia a elipse  $\varepsilon$  em  $P$ .

Mostraremos agora que se  $r$  é tangente a  $\varepsilon$ , então os ângulos formados por  $r$  e os raios focais  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$  são iguais.

( $\Leftarrow$ )

Seja  $P(x, y)$  um ponto sobre a elipse  $\varepsilon$  e seja  $r$  uma reta tangente a  $\varepsilon$  em  $P$  que faz ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  com os raios focais  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$ . Seja  $Q$  o ponto de interseção entre a reta  $r$  e o eixo  $OX$ . Tomemos



**Figura 5.3:** Prova de que  $\alpha = \beta$

por  $\gamma$  e  $\delta$  os ângulos formados pelo eixo  $OX$  com os raios focais  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$ , respectivamente e  $\theta$  o ângulo que define a inclinação da reta tangente.

Considere agora a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Nesta equação os focos da elipse são  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  que estão localizados no eixo  $OX$ , sendo  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  com excentricidade  $e = \frac{c}{a}$ .

Derivando implicitamente a equação (1) obtemos:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)' = 1' \Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow 2yy' = -\frac{2b^2x}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\theta = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad (2)$$

Segue da figura 5.3:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{y - 0}{x - (-c)} = \frac{y}{x + c} \quad (3)$$

e

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{y - 0}{x - c} = \frac{y}{x - c} \quad (4)$$

Usando o teorema do ângulo externo no triângulo  $PQF_2$ , temos  $\theta = \alpha + \delta \Rightarrow \alpha = \theta - \delta$ .

Então:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\theta - \delta) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\delta}{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\delta} \quad (5)$$



Substituindo (2) e (4) em (5), temos:

$$tg\alpha = \frac{\frac{-b^2x}{a^2y} - \frac{y}{x-c}}{1 + \frac{(-b^2x)}{a^2y} \frac{y}{x-c}} = \frac{\frac{-b^2x^2 + b^2cx - a^2y^2}{a^2y(x-c)}}{\frac{a^2y(x-c) - b^2xy}{a^2y(x-c)}} = \frac{-(b^2x^2 + a^2y^2) + b^2cx}{a^2xy - b^2xy - a^2cy}$$

Fazendo  $(b^2x^2 + a^2y^2) = a^2b^2$  segue que:

$$tg\alpha = \frac{-a^2b^2 + b^2cx}{xy(a^2 - b^2) - a^2cy}$$

Substituindo  $a^2 - b^2$  por  $c^2$  vem:

$$tg\alpha = \frac{b^2(cx - a^2)}{xyc^2 - a^2cy} = \frac{b^2(cx - a^2)}{cy(cx - a^2)} = \frac{b^2}{cy} \quad (6)$$

Usando novamente o teorema do ângulo externo no triângulo  $F_1PQ$ , temos  $\theta = \gamma + 180^\circ - \beta \Rightarrow \beta = \gamma + 180^\circ - \theta$ . Então:

$$tg\beta = tg(180^\circ + \gamma - \theta) = \frac{\text{sen}(180^\circ + \gamma - \theta)}{\text{cos}(180^\circ + \gamma - \theta)} = \frac{-\text{sen}(\gamma - \theta)}{-\text{cos}(\gamma - \theta)} = tg(\gamma - \theta) = \frac{tg\gamma - tg\theta}{1 + tg\gamma tg\theta} \quad (7)$$

Substituindo (2) e (3) em (7), temos:

$$tg\beta = \frac{\frac{y}{x+c} - \frac{(-b^2x)}{a^2y}}{1 + \frac{y}{x+c} \frac{(-b^2x)}{a^2y}} = \frac{\frac{a^2y^2 + b^2x^2 + b^2cx}{a^2y(x+c)}}{\frac{a^2y(x+c) - b^2xy}{a^2y(x+c)}} = \frac{a^2b^2 + b^2cx}{a^2xy + a^2cy - b^2xy} = \frac{b^2(a^2 + cx)}{c^2xy + a^2cy} = \frac{b^2(a^2 + cx)}{cy(a^2 + cx)} = \frac{b^2}{cy}$$

De (6) e (8) concluímos que  $tg\alpha = tg\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ .

## 5.1 Materiais necessários para a construção do bilhar elíptico

- Pedacos de madeira;

Um pedaço de folha (1/4 de folha) de compensado cortado em forma de elipse (base da mesa);

Madeira a escolha para a fabricação da borda e os pés da mesa (aqui usou-se MDF);

- 1,50m de tecido acrílico verde de 1,40 de largura para forrar a mesa;



**Figura 5.4:** Materiais (ilustração)

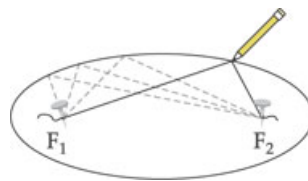
- 3,50m de borracha para mesa de jogos de bilhar. Em geral a borracha é vendida em pedaços de 1 metro. Dê preferência para comprar uma borracha inteira (anexo fig.A.1(p)), assim não correrá o risco de que a emenda da borracha atrapalhe o percurso da bola;
- Grampeador Industrial (Rocana);
- Grampos;
- Dobradiças
- Furadeira;
- Serra elétrica (caso não possua, leve as peças para serem cortadas em uma marcenaria);
- Parafusos;
- Lápis;
- Borracha;
- Régua;
- Compasso;
- Fita métrica;
- Lima ou lixadeira elétrica;
- Martelo;
- Cola instantânea (adesivo universal);
- verniz (opcional);
- (fórmica);

- Pregos finos;
- Barbante;
- 1 caçapa para jogos de bilhar;
- 1 taco para jogos de bilhar;
- 2 ou 3 bolas para jogos de bilhar.

## 5.2 Roteiro para a construção da mesa

Numa folha de compensado risque um sistema de eixos cartesianos ortogonais. Marque os focos de distância  $c=28,5$  cm da origem e as extremidades, horizontais e verticais, de distâncias  $a=47,5$  cm e  $b=38$  cm, respectivamente, da origem. Utilize a fita métrica (anexo figura A.1(a)).

Com um martelo, bata levemente um prego fino em cada foco. Amarre as extremidades do barbante nos pregos de modo que o comprimento do barbante que ficou entre os pregos tenha medida  $2a=95$ cm, ou seja, a mesma medida do eixo focal (maior eixo). Com o lápis por dentro do barbante (manter o lápis sempre na vertical) gire-o em torno dos pregos gerando assim o molde do fundo da mesa, em forma de elipse, conforme figura 5.5.



**Figura 5.5:** Construção do molde da base

Marque  $6$ cm, ou uma largura de borda para a mesa a escolha, a partir da linha da elipse e desenhe a curva externa (anexo figura A.1(b)). Lembrete: A segunda curva não será uma elipse, portanto as medidas devem ser realizadas na curva interna.

Repita o mesmo procedimento para a madeira destinada à borda da mesa.

Caso queira a mesa com uma caçapa, risque com um compasso uma circunferência em torno de um dos focos. Atenção para as medidas! O foco deve estar no centro da circunferência desenhada. A circunferência pode ter  $10$ cm de diâmetro, ou outra medida aproximada a escolha (o diâmetro deve ter largura suficiente para acomodar a bola).

Recorte a folha de compensado com a serra elétrica (anexo figura A.1(c)). O corte será feito na curva externa e na circunferência da caçapa. Utilize a lixa para alisar as curvas (anexo figura A.1(d)).

Recorte da folha de madeira (MDF) uma coroa para fazer a borda. Muito cuidado com o corte! Qualquer erro prejudicará a propriedade da elipse e consequentemente a intencionalidade

de acerto da bola na caçapa. Lembre-se: coroa mais a borracha terão juntas 6 cm de espessura, que é a largura da borda da mesa marcada no molde inicial. A parte interna da borracha deve coincidir com a marcação interna (elipse) feita na base da mesa. Caso a folha de madeira seja de pouca espessura deverá ser feito um alteamento antes de colocá-la sobre a base da mesa, pois a borracha deverá ser colada de modo a proporcionar contato com o meio da bola que tem aproximadamente 5cm de diâmetro. O alteamento pode ser feito com compensado ou sobras de madeira (anexo figura A.1(e)).

Cole o alteamento na base da mesa. Deixe-o mais estreito que a borda (aproximadamente 4cm a partir do corte externo). A cola instantânea é de rápida secagem e alta precisão. Após a colocação da peça não mais se poderá deslocá-la. Cuidado com as mãos!

Risque o tecido. Recorte (anexo figura A.1(f)). Forre a base da mesa (anexo figura A.1(g)). Fazer cortes no tecido, com a tesoura, na área da caçapa. Colar as sobras do pano na parte de baixo da mesa (anexo figura A.1(h)).

Cole a borracha na coroa (anexo figura A.1(i)). Se for cobrir a borracha com tecido lembre-se de deixá-lo bem esticado! Eventuais dobras podem atrapalhar a ida da bola para a caçapa.

Cole a borda da mesa (anexo figura A.1(j)). Pode usar parafusos para deixá-la mais firme (anexo figura A.1(k)).

Adapte uma redinha no buraco da caçapa que pode ser presa com parafusos (esta foi feita com arame e cordas de nylon e presa com grampos e grampeador (anexo figura A.1(l)).

Se preferir, prenda pedaços de madeira na parte inferior da base da mesa para deixá-la mais firme quando colocada sobre o pé. Os pedaços de madeira devem ser posicionados de modo a encaixar-se por dentro do pé (anexo figura A.1(m)).

Para fazer o pé da mesa, pegue uma placa de madeira (aqui utilizou-se o MDF com 1,5cm de espessura) risque retângulos: 2 peças de 60 x 85 cm (parte 1), 2 peças de 57 x 85 cm (parte 2). Recorte. Prenda as peças de madeira (parte 1 e 2 alternadamente) com dobradiças. Dessa forma, ela poderá ser desmontada facilmente sempre que necessário, tornando-a de fácil locomoção (anexo figura A.1(n)). Se desejar, poderá colocar quatro sapatas reguláveis no pé da mesa para ajustá-la em piso com desníveis.

Nesta mesa utilizou-se uma fita adesiva na cor do mdf para dar o acabamento lateral e cobrir as imperfeições da madeira. Caso a mesa seja feita com outro tipo de madeira poderá ser utilizado verniz, fórmica ou tinta para decorá-la.

### **5.3 Elementos contidos na elipse que faz parte da base da mesa de bilhar**

As medidas aqui contidas estão registradas em centímetros. Escolheu-se medidas proporcionais aos números pitagóricos 3, 4 e 5 em razão da facilidade de se obter números inteiros ou valores

próximos a eles. Nesta mesa o coeficiente de proporcionalidade foi 9,5 ( $3 \cdot 9,5 = 28,5$ ;  $4 \cdot 9,5 = 38$  e  $5 \cdot 9,5 = 47,5$ ). Escolha cuidadosamente as medidas, pois alguns valores podem levar a uma dízima ou a outros valores que possuam várias casas decimais, o que deverá ser arredondado. Porém, qualquer descuido acarretará em erro, invalidando a propriedade desejada.

Construindo a estrutura elíptica da mesa num plano cartesiano e tomando o centro da elipse como a origem do sistema temos:

- **Curva interna em forma de elipse**

Equação:  $1444x^2 + 2256,25y^2 - 3258025 = 0$  ou  $\frac{x^2}{2256,25} + \frac{y^2}{1444} = 1$  onde  $a = 47,5$ ;  $b = 38$  e  $c = 28,5$ .

Centro  $(0, 0)$ .

Comprimento do eixo maior : 95

Comprimento do eixo menor: 76

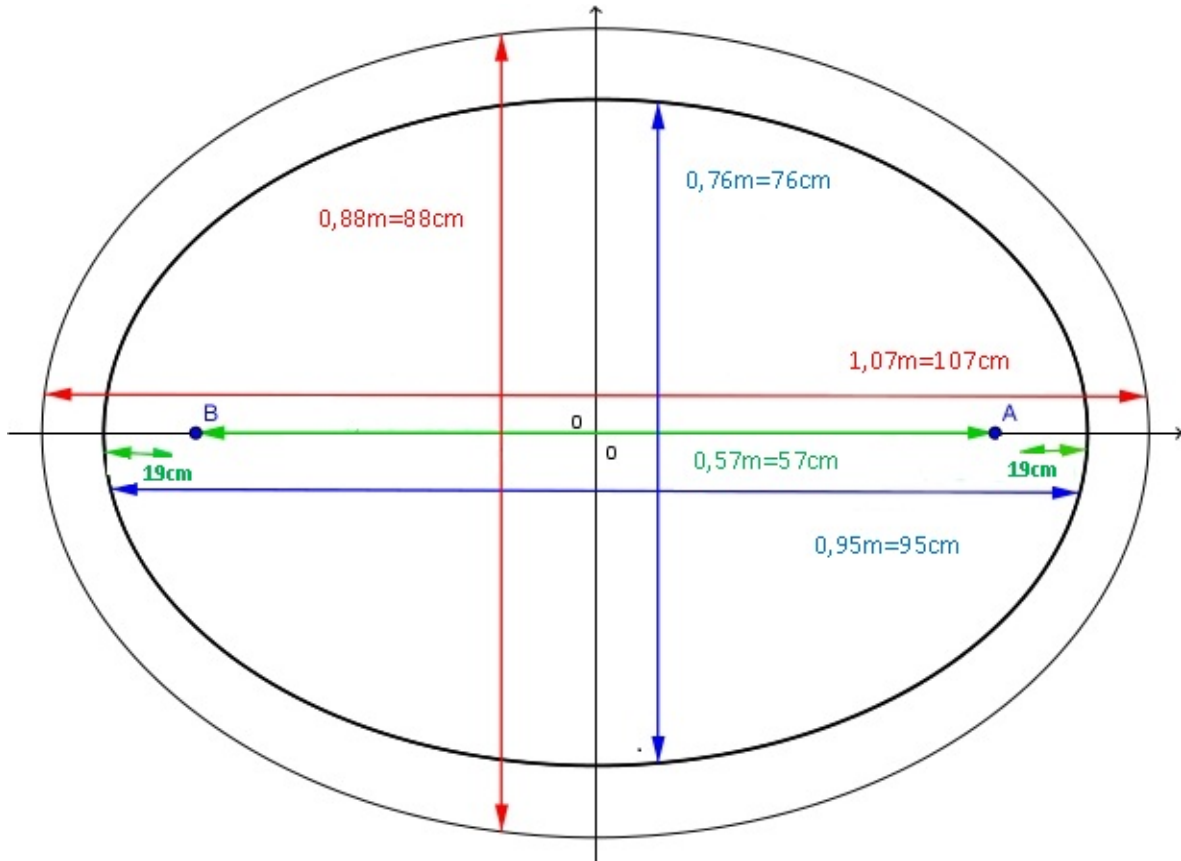
Focos  $(-28.5, 0)$  e  $(28.5, 0)$

- **Curva externa**

Foi medido  $6\text{cm}$  em toda a sua extensão a partir da curva interna (elipse).

## 5.4 Croqui

A figura 5.6 indica as medidas, em metro e em centímetro, utilizadas na fabricação da mesa descrita no presente trabalho.



**Figura 5.6:** Croqui da base da mesa

---

## Considerações Finais

---

Reportando-se a introdução, lembramos que o fato que desencadeou a motivação para a elaboração do presente trabalho foi a criação de uma sala temática na área de matemática que pudesse ser acervo de materiais construídos por docentes e discentes do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães em Canavieiras, BA.

Espera-se que além de servir como ferramenta para o ensino/aprendizagem de cônicas, a mesa de bilhar elíptica possa motivar os trabalhos de iniciação científica dos discentes que desejarem seguir a linha de pesquisa, elaboração e descrição de atividades como a que foi realizada nesta dissertação.

Os materiais criados serão expostos por seus autores na feira de ciências do colégio, programada para acontecer em outubro deste ano. Seguindo a linha das cônicas pode-se ter um campo de golfe em forma de parábola. Há várias sugestões de atividades que podem ser confeccionadas como por exemplo, modelos matemáticos para o estudo de análise combinatória, sólidos geométricos para estudo de área e volumes, mosaicos, construções em espelhos para o estudo de simetria, materiais de manipulação para o estudo de equações e produto notáveis, etc.

As orientações contidas nesta dissertação referente a construção da mesa de bilhar direcionam-se para professores, pois o material está diretamente ligado ao estudo de um conteúdo da disciplina matemática. Porém, nada impede que qualquer pessoa que queira construir uma mesa como esta, apenas para efeito de curiosidade ou diversão, o possa também fazê-lo.

Como já havíamos citado na introdução, o objetivo deste trabalho foi o de fornecer ao leitor informações suficientes (materiais necessários, medidas, cuidados, equações e roteiro detalhado da construção) para que ele possa construir a sua própria mesa de bilhar. E para tal, aconselha-se que antes de iniciar a construção da mesa seja feita uma pesquisa com a finalidade de se escolher o

modelo mais adequado a necessidade individual de cada um. Deve-se analisar espaço de alocação, tempo de preparo, durabilidade, custo, disponibilidade e tipo de materiais, etc.

Como a maioria das escolas não dispõe de recursos financeiros para auxiliar na compra de materiais, dar-se-ão algumas dicas que podem ajudar nessa aquisição: a redinha poderá ser feita de crochê ou com material de pesca; as bolas podem ser doadas por algum comércio que possua bilhar; o taco pode ser feito numa marcenaria; pode-se utilizar o brim comum como tecido para forrar a mesa.

Ao escolher o tipo de madeira a ser utilizada na construção da mesa esteja atento a adequação da madeira ao estilo de trabalho. Algumas espécies de madeiras como o mogno, a cerejeira, o jequitibá, o jacarandá-da-bahia, o pau-brasil e outras tem exploração proibida ou regulada pela CITES (Convenção sobre o Comércio Internacional de Espécies da Flora e Fauna Selvagens em Perigo de Extinção).

A mesa de bilhar elíptica, depois de construída poderá ser explorada pelo professor para um trabalho de investigação por parte dos alunos, desafiando-os a pesquisar e apresentarem soluções viáveis para essa situação problema. Orienta-se que este material seja utilizado com alunos do 3º ano, embora nada impessa o professor de estimular o interesse de alunos de outras séries, já que o currículo escolar é flexível.

Sugere-se algumas atividades que podem ser exploradas a partir da utilização da mesa de bilhar elíptica:

- Jogadas livres - Deixar os alunos experimentar jogadas diversas;
- Tempestade de idéias - Abrir um espaço para que os alunos exponham a sua opinião sobre o porquê a bola cai na caçapa sem interferência. Permitir que todos fiquem a vontade para dar suas opiniões;
- Proposta de pesquisa - Propor aos alunos pesquisarem em livros ou na internet com a finalidade de trazerem materiais para um posterior debate;
- Debate e exposição do resultado das pesquisas;
- Leitura de textos sobre aplicabilidade das cônicas - Distribuir textos sobre aplicações das cônicas para os alunos em grupo. Abrir discussão. Fazer interferências quando necessário. Mediar o conhecimento através de interrogações, proporcionando a reflexão dos educandos;
- Exploração dos conteúdos - Trabalhar o conteúdo conceitual;
- Resolução de problemas contextualizados - Distribuir atividades de situações problemas que possam ser resolvidas com o embasamento dado sobre o conteúdo de cônicas.

A mesa de bilhar elíptica poderá apresentar algumas variações conforme o interesse do construtor:



- ser construída sem caçapa com a marcação dos dois focos. Serão utilizadas três bolas: uma em cada foco e a terceira será lançada sobre uma das bolas para que essa seja arremessada contra a outra; ou ainda, utilizar duas bolas, uma em cada foco arremessando uma contra a “parede” da mesa afim de que sua reflexão lhe impulse a bater na outra bola;
- ser construída com uma caçapa rasa localizada em um dos focos. Utilizar-se-á apenas uma bola localizada no segundo foco. Essa deverá ser lançada em qualquer posição e se acomodará no orifício da caçapa;
- ser construída com uma caçapa composta com rede ou gaveta localizada em um dos focos. Poderão ser utilizadas duas bolas: uma localizada no foco fechado e a outra será arremessada contra ela afim de impulsioná-la para a caçapa. Ou ser utilizada uma bola como explicado no item anterior.

Em anexo o leitor encontrará outros modelos de mesas.

Na primeira (anexo fig. A.1(q)), o buraco da caçapa é raso. Esta não precisa de rede para aparar a bola. A bola fica presa no orifício, mas visível aos olhos do jogador. É de baixo custo e fácil de construir.

Na segunda existe uma gaveta onde caem as bolas (anexo fig. A.1(r)). Esta precisará de um número maior de bolas. Sua construção será um pouco mais trabalhosa, porém podem ser feitas várias demonstrações de tacadas uma após a outra.

Se preferir, pode construir a mesa de forma parabólica ou hiperbólica. Poderá encontrar fotos das mesmas no anexo (fig. A.1(s) e A.1(t)). Obs.: As mesas apresentadas nas fotos não foram construídas de forma artesanal.

A mesa de bilhar elíptica é um material já existente no mercado. O leitor poderá encontrá-la em alguns laboratórios de matemática, bem como mencionada em alguns trabalhos científicos ou relacionada em alguns sites.

Em (SOUZA, 2008, p.15) encontra-se ferramenta similar a este trabalho de construção, onde o leitor poderá fazer uma análise de comparação podendo mesclar, acrescentar ou inovar em sua própria construção.

O diferencial que este trabalho apresenta é o direcionamento da construção da mesma detalhadamente, alertando para alguns possíveis entraves, sugerindo opções e variações e compartilhando caminhos (fotos e sites) para que o leitor possa fazer a escolha de um modelo adequado a sua necessidade.

# Bibliografia

---

---

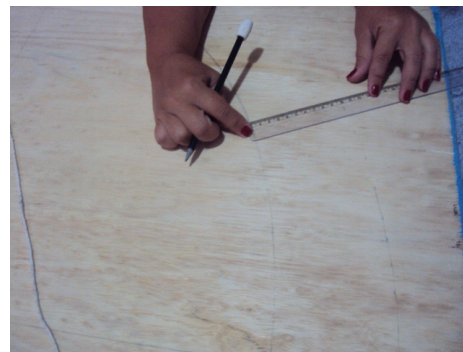
- AVILA, G. Kepler e a órbita elíptica. *Revista do Professor de Matemática - RPM*, v. único, n. 15, p. 02–13, 1987.
- AVILA, G. A hipérbole e os telescópios. *Revista do Professor de Matemática - RPM*, v. único, n. 34, p. 22–27, 1997.
- BARROSO, J. *Conexões com a matemática*, v. 3. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.
- BONJORNO, R. A. *Física completa: ensino médio*. São Paulo: FTD, 2000.
- BOYER, C. *História da matemática*. 2ª ed. São Paulo: Edgar Bluncher/Edusp, 1996.
- COC, P. Geometria analítica: Livro 4, 2009. Disponível em: <<http://interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/9996.htm>>. Acesso em: Novembro de 2012.
- EDUCAÇÃO MEC, M. *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas-SP: Unicamp, 1995.
- IEZZI, G. E. A. *Matemática: Ciências e aplicações*, v. 3. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- QUEIRO, J. F. A elipse, a parábola e a hipérbole - propriedades e aplicações, 2010. <http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/aplicacoes.pdf>. Acesso em: Novembro de 2012.
- SATO, J. As cônicas e suas aplicações, 2004. <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node18.html>. Acesso em: Novembro de 2012.
- SILVA, G. S. Porque os nomes elipse, parábola e hipérbolas? *Revista do Professor de Matemática- RPM*, v. único, n. 7, p. 43–44, 1985.

- SOUZA, E. Cônicas e aplicações, 2008. [http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/monografia\\_eric.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/monografia_eric.pdf). Acesso em: Janeiro de 2013.
- SWOKOWSKI, E. *Cálculo com geometria analítica*, v. 2. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1994.
- VALLADARES, R. J. C. Elipse, sorrisos e sussuros. *Revista do Professor de Matemática-RPM*, v. único, n. 36, p. 24–28, 1998.
- VARANDAS, J. M. Da geometria...as cônicas, 2000/2001. <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/historia.htm>. Acesso em: Novembro de 2012.
- WAGNER, E. Porque as antenas são parabólicas. *Revista do Professor de Matemática- RPM*, v. único, n. 33, p. 10–15, 1997.

## A.1 Fotos da Construção da Mesa de Bilhar



(a) Marcação das medidas da base



(b) Desenhando a curva externa



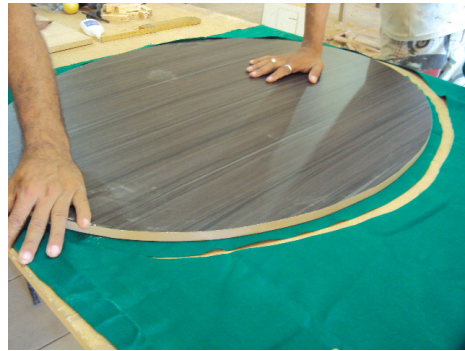
(c) Recorte da base da mesa



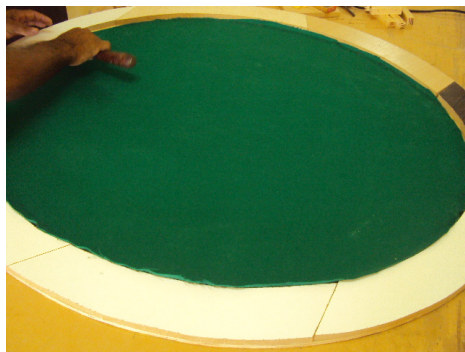
(d) Alisamento das curvas através de lixa



(e) Colagem do alteamento



(f) Recorte do tecido



(g) Colagem do tecido



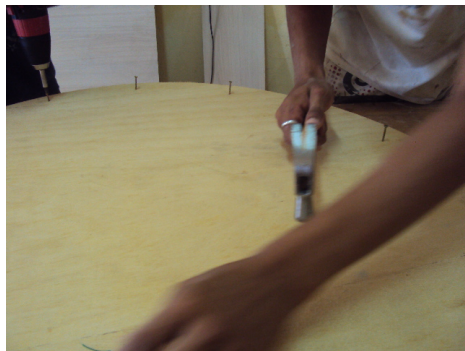
(h) Arremate da sobra de pano na caçapa



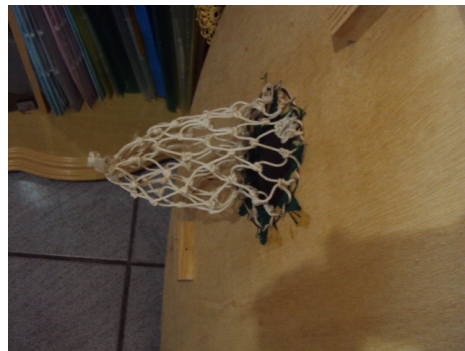
(i) Colagem da borracha



(j) Colagem da borda



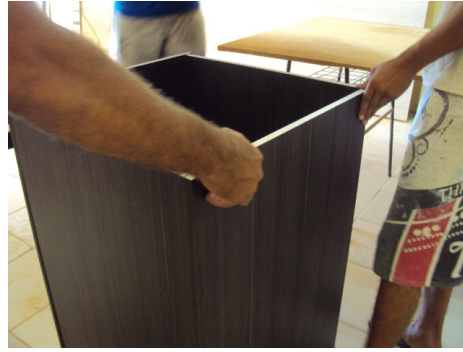
(k) Colocação de parafusos para fixação da borda na base da mesa



(l) Colocação da caçapa



(m) Peças de madeira para dar firmeza ao encaixe da mesa no pé



(n) Pé da mesa



(o) Mesa Pronta



(p) Borracha inteira

## A.2 Outras opções de mesas

Nas figuras A.1(q) e A.1(r) encontram-se outros modelos de mesas as quais foram citadas nas considerações finais. Esses exemplares tiveram como fonte os sites:

[www.youtube.com/watch?v=O3ndN4gv4cc](http://www.youtube.com/watch?v=O3ndN4gv4cc) e [www.youtube.com/watch?v=EMTIQQAXLPw](http://www.youtube.com/watch?v=EMTIQQAXLPw), respectivamente.



(q) Mesa opcional (1)



(r) Mesa opcional (2)

Nas figuras A.1(s) e A.1(t) encontrem-se exemplares de mesas de bilhar parabólica e hiperbólica que foram retirados, respectivamente, dos sites <http://www.atractor.pt/matviva/geral/A/A01/A01-1.htm> e <http://www.atractor.pt/matviva/geral/A/A02/A02-1.htm>.



(s) Mesa parabólica (1)



(t) Mesa hiperbólica (2)

O bilhar hiperbólico tem uma tabela em forma de ramo de hipérbole. O outro ramo da hipérbole está desenhado. No foco correspondente a este ramo há um buraco e o foco correspondente à hipérbole-tabela, está apenas marcado na parte superior. Uma bola atirada na direção do foco de cima deverá ir parar no buraco.

O bilhar parabólico tem uma das tabelas formada por um arco de parábola e tem um buraco no foco da parábola. Uma bola atirada paralelamente às tabelas laterais (isto é, na direção do eixo da parábola) deverá cair no buraco.