INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Ricardo Santos de Azevedo

Rio de Janeiro

2014

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Ricardo Santos de Azevedo

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do IMPA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Eduardo Wagner

Rio de Janeiro

2014

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus-Pai, Jeová;

À minha mãe (*in memoriam*) e a meu pai, os quais sempre me apoiaram em todos os momentos;

Ao meu filho Arthur, que compreendeu os momentos de ausência nos encontros da família;

Ao amor da minha vida, Cristiane das Graças, a pessoa mais especial que já conheci, porque, sem ela, seria impossível chegar até aqui;

Ao meu orientador, Eduardo Wagner.

"A real justificativa para se estudar matemática é que ela é útil e, em particular, auxilia na solução de muitas espécies de problemas".

Edward Begle

"A razão principal de se estudar matemática é para aprender como se resolvem problemas".

Frank k. e Lester Jr

RESUMO

Neste trabalho, trata-se do uso de resolução de problemas como motivador no ensino de função afim no Ensino Médio. Inicialmente, apresenta-se a motivação que levou à escrita acerca desse assunto. Em seguida, delineiam-se alguns objetivos didáticos relacionados à função e como estes são abordados nos documentos estaduais e federais. Além disso, discute-se aquilo que se espera do aluno em relação a esse tópico. No momento seguinte, expõem-se algumas teorias em que se baseia o ensino de função por meio da resolução de problemas, além de se caracterizar função afim por intermédio de uma situação problema significativa. Por fim, sugerem-se problemas que podem ser usados como atividades com o intuito de que o aluno venha a desenvolver os conceitos de função afim.
Palavras-chave: Função afim; Resolução de problemas; Problemas de aprendizagem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como professor da rede pública desde o ano 2007, sabe-se que muitos são os desafios para o ensino da matemática, visto que, além dos problemas conhecidos por todos – a falta de estrutura das escolas, o excesso de alunos na sala de aula, a desvalorização do magistério e tantos outros, buscam-se sempre alternativas para que seja possível desempenhar um trabalho de qualidade com a educação.

Os alunos chegam cada vez mais desmotivados à escola e, também, assombrados pela “má fama” que a matemática possui, o que faz repensar, a cada ano letivo, aquilo que é necessário para que haja um aprendizado, de fato, significativo. Entretanto, entende-se que expor os conceitos da disciplina e, depois, dar algumas atividades descontextualizadas, não é a solução, já que, desse modo, os alunos ficam dispersos durante o processo, o que o dificulta ainda mais.

Em síntese, o ensino de matemática nunca foi fácil para quem ensina, tampouco para quem aprende. A questão, nesse impasse, gira em torno do motivo dessa dificuldade. Não obstante seja difícil saber, busca-se, neste trabalho, um novo caminho para a aprendizagem dos conceitos de função, a partir do qual haja uma interpretação melhor do enunciado e, por consequência, uma aprendizagem com mais qualidade.

A resolução de exercícios para a aprendizagem de função foi escolhida neste trabalho, pois se trata de uma alternativa interessante para ensinar o aluno. Para demonstrar essa afirmativa, serão mostrados, por um lado, alguns exemplos de problemas matemáticos que não estimulam esse entendimento de função e, por outro, serão postas em relevo atividades mais interessantes, investigativas e estimulantes.

Pretende-se, assim, proporcionar algumas ideias de exercícios matemáticos por intermédio dos quais os alunos possam perceber que tipo de situação matemática está ali inserida, sobretudo com relação à função, questão central deste estudo.

2 A PROPOSTA CURRICULAR PARA O ENSINO MÉDIO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO (CURRÍCULO MÍNIMO)

Utilizando como meta o ensino de função, de acordo com o currículo mínimo estabelecido pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC), principal órgão público responsável pelo Ensino Médio do Rio de Janeiro, para o primeiro bimestre, são apresentados os seguintes objetivos:

> - Compreender o conceito de função através da dependência entre variáveis.
> - Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade ou padrão.
> - Representar pares ordenados no plano cartesiano.
> - Construir gráficos de funções utilizando tabelas de pares ordenados.
> - Analisar gráficos de funções (crescimento, decrescimento, zeros, variação do sinal). (RIO DE JANEIRO, 2013).

Já seria possível introduzir o assunto no referido bimestre por meio de problemas, a partir dos quais se verificariam padrões que contribuíssem com o entendimento acerca do conceito de função para, depois, trabalhar a criação de gráficos.

Para o segundo bimestre, são apresentados os objetivos que seguem:

> - Identificar uma função polinomial do 1º grau.
> - Utilizar a função polinomial do 1º grau para resolver problemas significativos.
> - Identificar a função linear com o conceito de grandezas proporcionais.
> - Representar graficamente uma função do 1º grau.
> - Compreender o significado dos coeficientes de uma função do 1º grau.
> - Identificar uma função do 1º grau descrita através do seu gráfico cartesiano. (RIO DE JANEIRO, 2013).

Vários desafios poderiam ser lançados nesse caso, até mesmo antes de ser ministrado o conceito de função, o que permitiria aos alunos perceberem as propriedades, como proporcionalidade, por meio de problemas e serem questionados se quando uma variável cresce, a outra variável também cresce. Seria um exemplo de função, usado como contraexemplo, a relação peso *x* idade.

A Lei de Diretrizes e Bases do Ensino Nacional (LDBEN) expõe, no art. 29, que:

> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a

> novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores. (BRASIL, 1996).

Aqui, deixa-se bem claro que aluno não pode ficar preso a exercícios repetitivos. Deve-se sim propor atividades cujas questões sejam sempre desafiadoras para que o aluno possa, dessa maneira, criar estratégias para resolvê-las.

Já no art. 36 da LBDEN, o inciso II esclarece que:

> II – adotará metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes. (BRASIL, 1996).

Em consonância com o artigo supracitado, que rege a educação nacional, busca-se uma metodologia que possibilite ao estudante encontrar caminhos para resolver as atividades de função. Para reforçar essa ideia, mostra-se um fragmento do texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), do Ensino Médio, em relação ao ensino da matemática:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 1999, p.251).

De acordo com o relatado, deve-se iniciar o processo de aprendizagem com atividades simples, como estímulo, e, depois, aumentar paulatinamente o grau de complexidade até que se exponham, de maneira formal, todos os conceitos de função.

3 APRENDIZAGEM POR MEIO DE PROBLEMAS

A metodologia de ensino por meio da resolução de problemas requer que o professor saiba diferenciar aquilo que é exercício e aquilo que é problema. O exercício, como o nome sugere, serve para exercitar determinado conhecimento; e o problema, consoante Onuchic (1999, p. 215):

> [...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver, que o problema passa a ser um ponto de partida e que, através da resolução do problema, os professores devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Então, percebe-se que a resolução de problemas no ensino de funções, no Ensino Médio, tem como objetivo principal estimular o aluno com atividades que o levem à aprendizagem dos conceitos matemáticos (os quais sejam manipulados antes de conceituados).

Segundo Dante (Hatfield apud Dante. 2000):

> Aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática. Certamente outros objetivos da matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos através de um conhecimento significativo e habilidoso é importante. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los nas construção das soluções das situações-problema.

Todavia, esses problemas precisam estar inseridos no cotidiano do aluno, para que despertem nele o interesse em resolvê-los. O aluno, ademais, deve perceber que existe mais de uma maneira de resolução.

Nesse sentido, salientam Pozo e Echeverría (1988, p. 9) que:

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes.

A aprendizagem de função afim por meio de resolução de problemas no Ensino Médio será dinamizada quando houver problemas que instiguem os alunos, fazendo-os perceber que essa resolução é possível. O professor deve, para isso, sempre questioná-los e motivá-los a fazer as tarefas, ao criar condições propícias e mediar o processo de entendimento.

4 PROPORCIONALIDADE

Sabe-se que a compreensão do conceito de proporção acontece muito antes do ensino formal. Desse modo, os problemas de proporção devem ser explicados mediante estratégias diversificadas para que o aluno os assimilem melhor.

Neste capítulo, será usado o compêndio *Aritmética Progressiva*, datado de 1883, do conceituado escritor Antônio Trajano, material que ainda circulava, na década de 60, com mais de 80 publicações que de acordo com Lima et al(2006,p.93). O texto apresenta a seguinte definição:

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (TRAJANO, 1883)

Em resumo, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x, quando existe um número a tal que $y = ax$ (*a* será chamada de constante de proporcionalidade) para todo valor de x.

Segundo Dupuis e Pluvinage (1981, p.165), o ensino da proporcionalidade tem uma utilidade geral e incontestável no processo de ensino-aprendizagem da matemática: “A proporcionalidade se apresenta como de utilidade geral e incontestável, não somente representando um papel fundamental na matemática, mas suas aplicações são inumeráveis e estão presentes em todos os setores da atividade humana”.

No cotidiano escolar, os alunos são estimulados a usar, prioritariamente, os dados numéricos que o problema apresenta, não levando em consideração, muitas vezes, os dados relacionais necessários para a sua solução. Assim, estimulados a resolver esse tipo de problema apenas com a regra de três, os alunos deixam de analisar outros caminhos possíveis.

No ensino médio, a proporcionalidade direta, conforme sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), deve ser trabalhada como um caso particular. Como um importante modelo de crescimento (modelo linear: $f(x) = ax$.), deve-se levar o aluno a situações cotidianas e, assim, buscar estratégias para a resolução de problemas: “Observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade” (BRASIL, 1998, p. 65).

A seguir, será discutido um pouco mais sobre três afirmações consideradas chave para decidir se uma dada função é ou não linear.

4.1 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(k\,x) = k\,f(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Evidencia-se primeiro que $(1) \Rightarrow (2)$. Divide-se a demonstração em dois casos: primeiro, mostra-se que $f(x) = a \cdot x$ para todo x racional e, depois, que $f(x) = a \cdot x$ para todo x irracional.

(Caso 1) Seja r um número racional. Logo, $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}*$. Usando (1), tem-se que $n \cdot f(r \cdot x) = f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) = m \quad f(x)$ e, logo, $f(r \cdot x) = m\,n \cdot f(x) = r \cdot f(x)$.

Seja $a = f(1)$. Tem-se que, para todo r racional, $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = a \cdot r$.

(Caso 2) Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, o fato de f ser crescente evidencia que $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Supondo, por absurdo, que exista algum número irracional x tal que $f(x) \neq a \cdot x$ para $a \neq 0$. Para fixar ideias, admite-se que $f(x) < a \cdot x$ (o caso $f(x) > a \cdot x$ seria tratado de modo análogo). Tem-se, então, que $\frac{f(x)}{a} < x$.

Tome-se um número racional r entre $\frac{f(x)}{a}$ e x: $\frac{f(x)}{a} < r < x$.

Então $f(x) < a \cdot r < a \cdot x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a \cdot x$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente e, logo, como $r < x$, deveria ter $f(r) < f(x)$. Essa contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$. Partindo de (2), tem-se $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$, logo (2) $\Rightarrow$(3). Finalmente, supondo (3), vê-se imediatamente $f(nx) = n.f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in N$. Além disso, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, logo $f(0) = 0$. Daí resulta, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, que $0 = f(0) = f(-nx + nx) = f(-nx) + f(nx) = +n.f(x)$, logo $f(-nx) = -n.f(x)$. Segue-se que $f(nx) = n.f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, provando que $(3) \Longrightarrow (1)$. ■

O exemplo abordado a seguir é o de que a área do setor é diretamente proporcional ao seu ângulo.

Exemplo1:

Em um círculo de raio r, seja $f(\theta)$ a área do setor de ângulo central θ. Evidentemente, f é uma função crescente de θ; quanto maior o ângulo θ, maior será a área do setor circular. Além disso, tem-se $f(n\theta)= nf(\theta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo θ. De fato, a área de um setor de ângulo $n.\theta$ é n` vezes maior que a de um setor de ângulo θ (Gráfico 1).

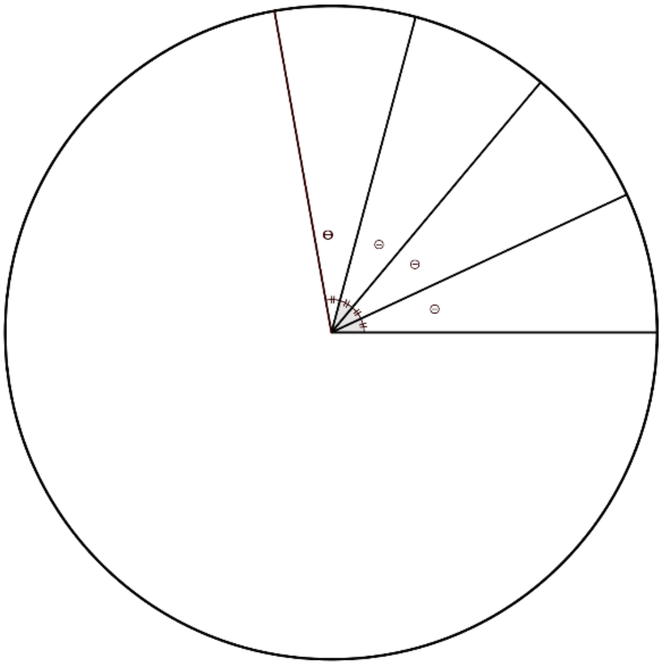

Gráfico 1: Setor do ângulo.

O Teorema Fundamental permite concluir que $f(\theta)$ é proporcional a θ. De modo mais preciso, se fosse calculada a área do setor circular para ângulo central igual a 1 radiano e encontrada a área igual a a, então, a área para qualquer ângulo θ seria igual a $f(\theta) = a\theta$.

Como $f(2\pi) = \pi r^2$, tem-se $f(\theta) = \theta \frac{r^2}{2}$

Para concluir, apresenta-se o exemplo 2:

Ao se investir uma certa quantia de x reais em uma caderneta de poupança, depois de certo tempo, haverá um capital de $f(x)$ reais. Pode-se, tal como nos exemplos anteriores, concluir que f é uma função crescente de x: quanto mais se aplica na caderneta, mais se receberá no final. Além disso, tem-se que $f(nx) = nf(x)$, para todo n $\in \mathbb{N}$ e todo x. De fato, tanto faz abrir uma caderneta de poupança com capital inicial $x' = nx$, como abrir (no mesmo dia) n cadernetas, cada uma com valor inicial x. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade permite concluir que $f(x)$ é proporcional a x; mais precisamente, a aplicação do capital de x reais será, ao final do ano, igual a $f(x) = ax$.

4.2 FUNÇÃO AFIM

Função afim será aqui definida tal como se encontra no livro *A matemática no ensino médio*: "*Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a, b $\in$ $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$*".

Na definição de função afim encontrada nos livros didáticos, o coeficiente a é denominado como coeficiente angular. Porém, esse conceito faz mais sentido na geometria analítica, e não muito aqui, pois se no gráfico de função afim a escala de eixo x for diferente da escala do eixo y, esse ângulo não corresponderá ao do gráfico. Além disso, esse ângulo não é usado na resolução dos exercícios.

No próximo capítulo, será demonstrado que o gráfico da função afim é sempre uma reta; então, dados dois pontos quaisquer, pode-se definir uma função que passa por esses pontos. Escolham-se os dois pontos quaisquer $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$. Por sua definição, a função afim é determinada pela seguinte expressão: $f(x) = ax + b$. Ou seja, para determinar tal função, basta encontrar os coeficientes a, b. Vê-se que, para descobrir esses coeficientes, é preciso apenas dois pontos e o valor da função nesses pontos. Antes de mostrar a expressão do caso geral, apresenta-se, a seguir, como proceder primeiro.

Exemplo 1:

Seja f uma função afim tal que $f(1) = 4$ e $f(2) = 7$, há, então, dois pontos e os valores da função nesses pontos.

Para $f(1)$, há: $f(1) \;=\; 4 \;=\; a.1 + b$

Para $f(2)$, há: $f(2) = 7 = a.2 + b$

Destacam-se essas duas relações de igualdade:

$$7 = 2a + b$$

$$4 = a + b$$

Se se subtrair uma igualdade da outra, tem-se o seguinte resultado, ou seja, a é igual a 3. Descobre-se o valor de um dos coeficientes. Para encontrar o outro, basta substituir o resultado em uma das igualdades. Usa-se, aqui, a segunda:

$$4 = a + b$$

Como $a = 3$, tem-se $4 = 3 + b$. Assim, tem-se $b = 1$

Como $f(x) = ax + b$ e $a = 3$ e $b = 1$, conclui-se que essa função, para $f(1) = 4$º e $f(2) = 7$, será a seguinte:

$$f(x) = 3x + 1.$$

Porém, fez-se uma conta para um caso específico. Agora, faz-se outra para o caso geral.

Seja $f(x) = ax + b$, e dados $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, para $x_1 \neq x_2$, e sendo estes pontos quaisquer. Então:

$$y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$$

$$y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$$

Subtrai-se, como no caso anterior, as duas expressões e, com isso, obtém-se:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Tendo a expressão para o coeficiente a, substitui-se a expressão para esse coeficiente em y_1.

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 + b$$

Fazendo os cálculos, tem-se:

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Analisando as expressões, percebe-se que os coeficientes a e b são determinados apenas pelos valores dos pontos, valores estes já conhecidos. Com isso, é possível determinar uma função afim, conhecendo apenas os valores em dois pontos.

O coeficiente a é chamado de taxa de variação. Caso $a = 0$, a função será constante. Ademais, o sinal de a mostra se a função é crescente ou decrescente, como será visto a seguir.

Teorema:

I) A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, a taxa de variação a for positiva.

Demonstração:

$f(x) = ax + b$ é crescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ $\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0$

II) A função afim $f(x) = ax + \mathrm{b}$ é decrescente se, e somente se, a taxa de variação a for negativa.

Demonstração:

$f(x) = ax + b$ é decrescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$

Desse modo, é importante também verificar como a função afim é definida na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio.

4.3 DEFINIÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Chama-se função afim qualquer função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados e $\boldsymbol{a \neq 0}$.

O que é interessante ressaltar é que, quando se tiver $\boldsymbol{a \neq 0}$, ter-se-á apenas um caso especial de função afim, o qual será denominado de função constante.

Função linear:

Também se pode acrescentar o caso em que, quando se tiver $b = 0$, a função afim será chamada de linear. Pode-se ainda definir função linear da seguinte forma: uma função que estabelece entre x e y uma relação tal que $\frac{y}{x}$ é constante é dita linear.

A função linear é a porta para o entendimento do aluno acerca dos conceitos de função afim. Como observado no capítulo sobre proporcionalidade, quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, então, a razão $\frac{y}{x}$ entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante. Se o valor dessa constante é a, então $\frac{y}{x} = a$, ou seja, $y = a\,x$. Assim, dado o valor de ax, para se obter o valor correspondente de y, basta multiplicar y pela constante a. Nesse caso, diz-se que a expressão $y = a\,.\,x$ define y como uma função linear de x.

Reciprocamente, se duas grandezas x e y estão relacionadas por uma função linear do tipo $y = a\,x$, então a razão $\frac{y}{x}$ para $x \neq 0$, entre o valor de y e o valor correspondente de x, é constante, e isto significa que as grandezas x e y são diretamente proporcionais. Assim, conclui-se que: duas grandezas relacionadas x e y são diretamente proporcionais se, e somente se, elas estiverem relacionadas por uma função linear, ou seja, se existir uma constante a tal que $y = ax$.

Não seria possível terminar esta parte sobre função linear sem falar de suas duas propriedades:

Princípio da aditividade:

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y) \rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Princípio da homogeneidade:

$$f(kx) = a(kx) = k(ax) = k.f(x) \rightarrow f(kx) = k.f(x) .$$

Para terminar este capítulo, pode-se citar um caso particular de função linear. Qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na forma $f(x) = x$, ou seja, uma função afim com $a = 1$ *e* $b = 0$ é denominada função identidade.

Em uma função identidade, todos os elementos do domínio têm como imagem um elemento com o mesmo valor do elemento no domínio, pois y sempre será igual a x.

5 GRÁFICO DE FUNÇÃO AFIM

No capítulo anterior, viu-se que toda função linear tem como gráfico uma reta que passa pela origem. Agora, será comprovado que, em qualquer função afim, o gráfico é uma reta não vertical (não paralela ao eixo y).

Teorema:

O gráfico de uma função afim f : x→ y = f(x) = a x +b é uma reta.

Demonstração:

Basta verificar que três pontos quaisquer do gráfico de f são colineares. Sejam, portanto, $P_1 = (x_1, ax_1 + b), P2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P3 = (x_3, ax_3 + b)$.

Para verificar que P_1, P_2 e P_3 são colineares, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2), d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois.

Sem perda de generalidade, pode-se supor que as abscissas x_1, x_2 e x_3, foram ordenadas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$.

A fórmula da distância entre dois pontos apresenta:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + a^2(x_2 + x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$
$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 + x_2)^2 + a^2(x_3 + x_2)^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)}$$
$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 + x_1)^2 + a^2(x_3 + x_1)^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

Daí, segue-se imediatamente que $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.

Será usada uma segunda prova para o mesmo teorema, usando agora a geometria.

Teorema:

O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ é uma reta.

Demonstração:

Sejam $A, B \; e \; C$ três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = ax + b$ e $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$e(x_3, y_3), respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos (Gráfico 2).

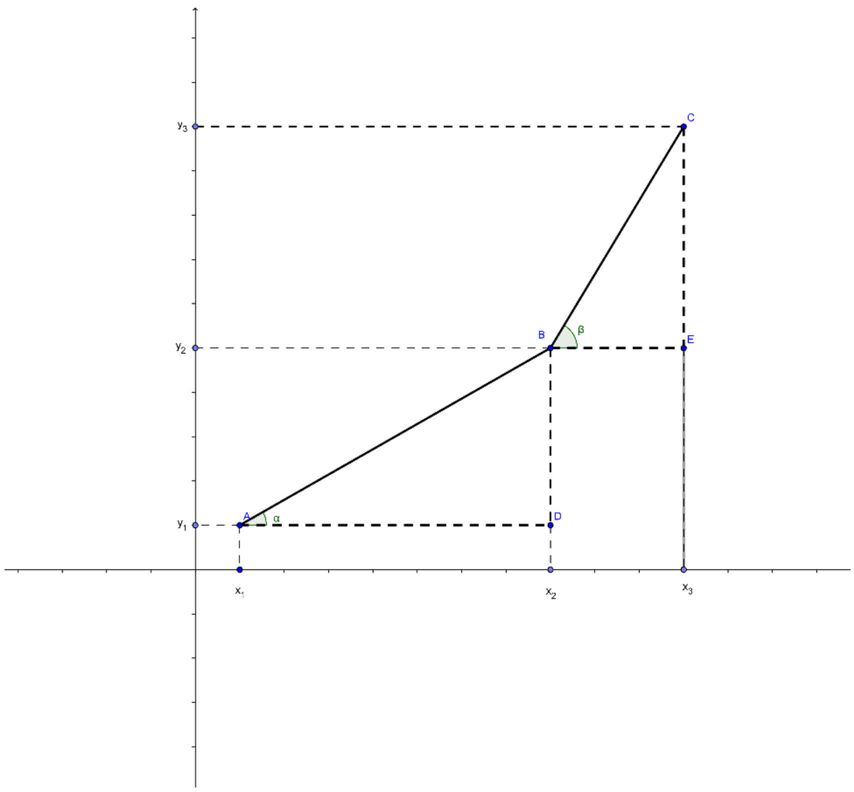

Gráfico 2: Demonstração do Teorema.

Para provar que os pontos *A*, *B* e *C* pertencem à mesma reta, mostra-se, inicialmente, que os triângulos retângulos $ABD \; e \; BCE$ são semelhantes.

De fato:

$$(x_1, y_1) \in f \Rightarrow ax_1 + b$$
$$(x_2, y_2) \in f \Rightarrow ax_2 + b$$
$$(x_3, y_3) \in f \Rightarrow ax_3 + b$$

Subtraindo membro a membro, tem-se:

$$y_3 - y_2 = a(x_3, x_2)$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2, x_1)$$

Tem-se então:

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Os triângulos *ABD* e *BCE* são retângulos e lados proporcionais e, então, são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados.

Pode-se destacar, neste capítulo, também um teorema importante que diz:

Toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim.

Para provar, são dados dois pontos distintos: $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ na reta r. Como r não é vertical, tem-se necessariamente $x_1 \neq x_2$. Logo, existe uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2. Logo, essa reta coincide com *r*.

Pode-se ressaltar, por intermédio da construção do gráfico da função afim, uma característica importante sobre o conjunto imagem. Se o domínio da função afim é o conjunto dos reais, então, a imagem é o conjunto dos números reais.

Teorema:

O conjunto imagem da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x) = ax + b, com a ≠ 0, é $\mathbb{R}$.

De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ existe x = $\frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a \, . \frac{y-b}{a} + b = y$$

6 CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM

Como saber se determinada situação pode ser modelada como uma função afim? Vale à pena analisar um caso extraído da prova do Enem (2010), abaixo transcrito.

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir (Figura 1). *Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.*

O quadro a seguir (Quadro 1) *mostra alguns resultados do experimento realizado.*

Quadro 1: Relação das bolas com a altura da água.

Números de bolas (x)	Nível de água (y)
5	6,35cm
10	6,70cm
15	7,05cm

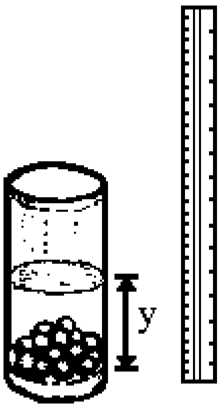

Figura 1: Cilindro com as bolas.

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) *em função do número de bolas* (x)*?*

O que o aluno deve perceber para resolver essa questão é que quantidades de bolas de vidro iguais farão com que o nível da água suba uma quantidade (y) em centímetros também igual. Dizendo de outra maneira, a medida que a água vai subir quando se aumentarem os números de bolinhas de 20 para 23 será a mesma quantidade que o nível vai subir quando se aumentarem os números de bolinhas de 27 para 30, isto é, sabendo-se que é um caso de função afim, pois para cada x bolinhas colocadas no cilindro, o nível de subirá o nível. Não se pode deixar de citar que as bolinhas de vidro têm formato esférico e mesmo volume. Além disso, o formato do copo de vidro é um cilindro. Assim, como todas as bolinhas de vidro têm o mesmo volume, o nível de água subirá exatamente a mesma quantidade para cada bolinha.

Como já se viu anteriormente, precisa-se apenas de dois pontos para determinar a função afim na forma $f(x) = ax + b$. Sabe-se, pela tabela, que, quando há cinco bolas de vidro na jarra, a medida será 6,35 e que, quando há dez bolas de vidro na jarra, a medida da jarra será 6,75cm, isto é, $x_1 = 5\ teremos\ f(x_1) = 6{,}35cm$ e, quando se tiver $x_2 = 10\ teremos\ f(x_1) = 6{,}75cm$.

Usando a fórmula para o coeficiente *a*:

Para $f(5)$, tem-se: $f(5) = 6{,}35 = a.5 + b$

Para $f(10)$, tem-se: $f(10) = 6{,}75 = a.10 + b$

Destacam-se essas duas relações de igualdade:

$$6{,}75 = 10.a + b$$

$$6{,}35 = 5.a + b$$

Se se subtrair uma igualdade da outra, obtém-se o seguinte resultado: *a* é igual a 0,05. Descobre-se, assim, o valor de um dos coeficientes. Para encontrar o outro, basta substituir o resultado em uma das igualdades. Aqui, será utilizada a segunda:

$$6{,}35 = 5.a + b$$

Como $a = 0{,}07$, tem-se $6{,}35 = 0{,}35 + b$. Assim, obtém-se $b = 6{,}00$

Como $f(x) = ax + b$ e $a = 0{,}07$ e $b = 6$, essa função, para $f(5) = 6{,}35°$ e $f(10) = 6{,}75$, será a seguinte:

$$f(x) = 0{,}07x + 6.$$

Tal fórmula dará a altura em centímetro em função da quantidade de bolas de vidro depositadas no recipiente.

Não se pode deixar de citar o caso interessante do uso de função linear que se encontra no livro *A matemática do ensino médio*, em que se narra o caso de E.W., que observou, numa sapataria, que o vendedor determinava o número do sapato do cliente medindo seu pé com uma escala na qual, em vez de centímetros, estavam marcados os números ... 35,36, 37, ... Porém, o fato mais importante que ele percebeu foi que esses números estavam igualmente espaçados, isto é, a distância entre cada um deles era constante. Isto queria dizer que acréscimos iguais no tamanho do pé correspondiam a acréscimos iguais no número do sapato. Dito de outro modo: se um certo pé crescer h centímetros para passar de tamanho 33 para 34, precisará crescer os mesmos h centímetros para passar de 38 para 39.

Sabendo que se tratava de uma caso de função afim (como será visto no teorema de caracterização da função afim), o que E.W. precisou foi apenas determinar dois pontos para descobrir a relação entre centímetros para a escala do sapateiro. Fazendo a comparação entre as escalas, descobriu os pontos (20,32) e (28,42). Efetuando os cálculos, chegou até a fórmula:

$$f(x) = \frac{5x + 28}{4}$$

Importante lembrar que esse problema em nada lembra os exemplos de função afim dados no Ensino Médio, porém demostra uma situação cotidiana de uso de função afim.

Teorema de caracterização da função afim:

$$Seja\ f{:}\,R\ uma\ função\ monotona\ injetiva. Se\ o\ acrescimo\ f(x+h) - f(x) \\ = \varphi(h)\ depender\ apenas\ de\ h, mas\ não\ de\ x, então\ é\ uma\ função\ afim.$$

A demonstração do teorema pode ser encontrada no primeiro volume do livro *A matemática do ensino médio.*

Suponha que a função é crescente. Então $\varphi{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é crescente, com $\varphi(0) = 0$. Além disso, para quaisquer $h, k \in R$, tem-se:

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x)$$

$$= f(x+k+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x))$$

$$= \varphi(h) + \varphi(k).$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a.h$ para todo $h \in R$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(h) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Há, então, no exemplo da questão do ENEM, que o nível h que a agua irá subir depende apenas da quantidade de bolas que serão colocadas no cilindro, isto é, para cada h bolas colocadas no cilindro, a variação do nível da agua será sempre igual a m. Conforme se pode ver no gráfico abaixo:

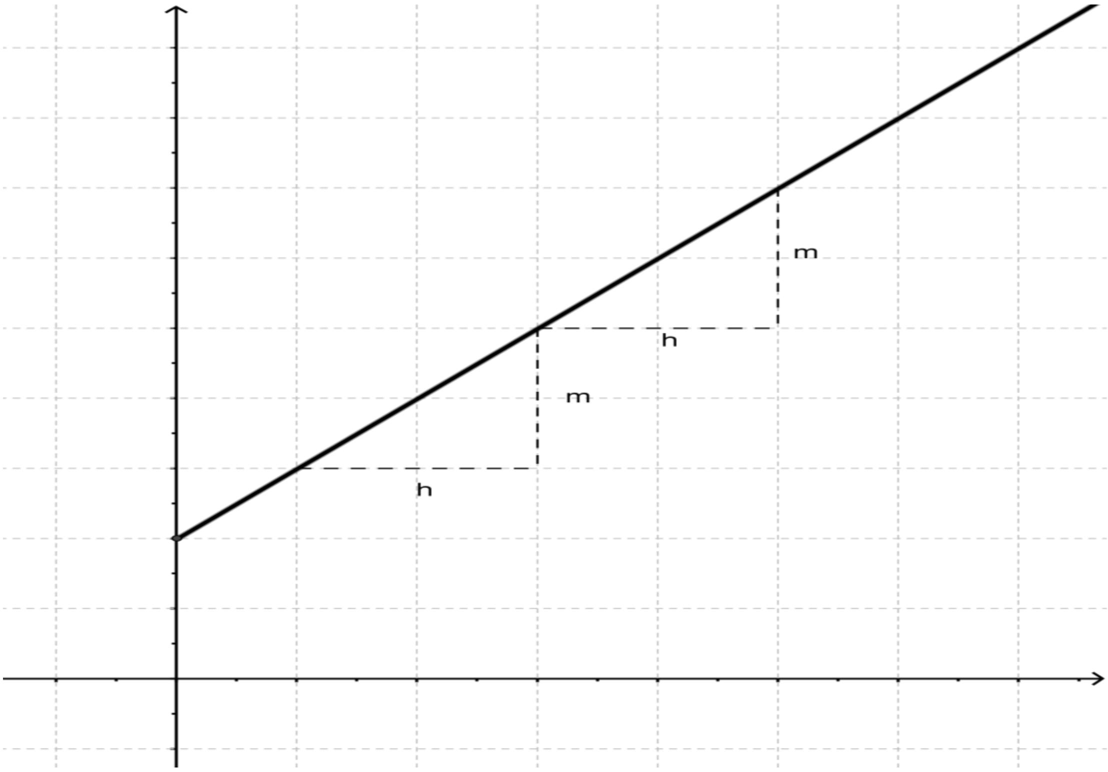

Gráfico 3: Relação entre a altura da água e a quantidade de bola.

Em outras palavras, independente do nível em que esteja a água, para cada quantidade h de bolinhas, o nível da água sempre subirá à mesma altura m.

7 EXEMPLOS DE PROBLEMAS

Neste capítulo, serão dados alguns exemplos de resolução de problemas e de como isto pode ser trabalhado no Ensino Médio. Será usado um exercício clássico, porém de forma diferente, questionando o passo a passo do aluno.

Exemplo 1:

José Roberto toma um táxi comum que cobra R$ 4,80 pela bandeirada e R$ 2,30 por quilômetro rodado. Ele quer ir à casa de um amigo que fica a 10 Km dali. Quanto José Roberto vai gastar de táxi?

A resolução do exercício é simples, mas encontrar somente o resultado não levaria os alunos a questionarem e, muito menos, a perceberem que o exercício é uma atividade de função afim. Então, antes de deixá-los buscar a resposta do problema, deve-se fazer junto com eles algumas perguntas, tais como:

a) Todos sabem o que é uma bandeirada?
b) O que se quer resolver no problema?
c) Quanto mais quilômetros andar, o que acontecerá com o valor da corrida?
d) Quanto ele vai gastar a mais para percorrer do terceiro ao quinto quilômetro? E do quarto ao sexto?
e) A partir do primeiro quilômetro, ao andar distâncias iguais, o valor pago será sempre igual?
f) Existe alguma quilometragem que possua dois preços diferentes?
g) Se ele andasse o dobro do percurso, ele iria pagar o dobro pela corrida?

Seria bom construir uma tabela para que o aluno percebesse o padrão de variação de preço da corrida de acordo com a quilometragem (Tabela 1). Veja:

Tabela 1: Relação do valor pago com os quilômetros rodados.

Quilômetros rodados(q)	Valor pago(p)	(q;p)
1	4,80 + 1 . 2,30	(1;7,1)
2	4,80 +2. 2,30	(2;9,4)
3	4,80 +3. 2,30	(3;11,7)
4	4,80 +4. 2,30	(4;14)
5	4,80 +5. 2,30	(5;16,3)
6	4,80 +6. 2,30	(6;18,6)
q	4,80 +*q*. 2,30	(q; 4,80 +q. 2,30)

O uso da tabela ajudará também na generalização da função afim, pois facilitará na observação dos padrões nesse contexto e também na construção de gráficos.

As perguntas servem para nortear o trabalho feito pelo docente e para estimular o discente, além de mostrar os conceitos e os objetivos buscados, tanto para familiarizar o aluno com o que está sendo proposto, quanto para passar as características da função afim. Pode-se destacar a pergunta *g*, pois, com esse tipo de questionamento, os alunos devem perceber que todas as situações podem ser resolvidas por meio da regra de três. Por esse motivo, não se pode deixar de destacar que o planejamento é primordial para maximizar a aprendizagem.

Entende-se que o professor precisa propor problemas simples apenas como introdução aos conceitos. Depois, de acordo com o desenvolvimento da aprendizagem, os problemas devem ficar mais complexos, até para não desestimular os alunos. Seguem mais alguns exemplos para reforçar essa ideia.

Exemplo 2:

Observe a figura abaixo (Figura 2), que relaciona o número de palitos de fósforo com o número de triângulos:

Figura 2: Formando triângulos com os palitos.

Seguindo o padrão estabelecido, complete a tabela abaixo (Tabela 2):

Tabela 2: Relação entre palitos e números de triângulos formados.

Números de triângulos(q)	Números de palitos(p)	(q;p)
1	3	(1;3)
2	3 +1. 2	(2;5)
3	3 +2. 2	(3;7)
4	3 +3. 2	(4;9)
5	3 +4. 2	(5;11)
6	3 +5. 2	(6;13)
q	3 +1. 2	(q; 1+q. 2)

a) Quantos palitos são necessários para formar 12 triângulos? Quantos triângulos são formados com 30 palitos?

b) Pode-se dizer que o número de palitos depende do número de triângulos?

c) Determine a expressão algébrica que representa o número de palitos em função do número de triângulos.

Exemplo 3:

O herói de uma história popular de espionagem conseguiu fugir após ter sido aprisionado por inimigos. O herói, dirigindo um caminhão roubado a 72 km/h está a 40 km de distância de seus inimigos. Estes, ao perceberem a fuga, tentarão alcançá-lo dirigindo um carro a 168 km/h. A distância entre o lugar onde o herói esteve prisioneiro e a fronteira da liberdade é de 83,8 km. O herói poderá alcançá-la?

Este é um excelente exemplo de um problema com um certo grau de dificuldade, mas que pode ser facilmente resolvido fazendo-se uso de alguns questionamentos, como:

a) Quanto tempo o herói tem para chegar à fronteira?

b) Em quanto tempo os bandidos, após perceberem a fuga do herói, têm para chegar à fronteira?

c) Determine a expressão algébrica que representa a distância percorrida em função do tempo dos bandidos.

d) Determine a expressão algébrica que representa a distância percorrida em função do tempo do herói.

e) Em que momento essas duas equações se equivalem? Esse momento representa o ponto onde o herói foi recapturado? Explique.

Exemplo 4:

Dois cavalos A e B partem simultaneamente de duas fazendas, um ao encontro do outro, percorrendo a mesma estrada. Os cavalos desenvolvem velocidades de módulos constantes e iguais a 2m/s, e as fazendas estão distanciadas de 10 km. No momento de partida dos cavalos, uma mosca, que estava na cabeça do cavalo A, levanta voo e se desloca até a testa do cavalo B. Em seguida, a mosca voa novamente até a testa do cavalo A e, assim, segue nesse vaivém, com a velocidade constante de 5m/s, até que os cavalos se encontram e esmagam a pobre mosca entre suas testas. Admitindo que a mosca gasta um tempo desprezível pousada nas cabeças dos cavalos, calcule o espaço percorrido por ela desde o instante em que levanta voo pela primeira vez até o seu trágico final.

a) 12,5km

b) 125 km

c) 1250 m

d) 25 km

e) 5 km

a) Crie uma estratégia para resolver esse problema.

b) Qual a dificuldade de calcular a distância percorrida entre os dois cavalos?

c) Quanto tempo a mosca vai poder ficar voando entre uma cabeça e outra?

d) Quanto tempo levará até os cavalos baterem as cabeças?

e) O tempo nas questões *c* e *d* é igual? Por quê?

f) Determine a expressão algébrica que representa a distância percorrida em função do tempo.

g) Calcule a distância percorrida pela mosca até os dois cavalos baterem as cabeças.

Exemplo 5:

Considere as três modalidades de serviços prestados por um restaurante:

A – SELF-SERVICE SEM BALANÇA: Também chamado de preço único. Nesse sistema, é cobrada uma taxa por pessoa, independente do seu consumo.

B – SELF-SERVICE COM BALANÇA: É estipulado um preço por quilograma e o valor cobrado será proporcional ao consumo.

C – SELF-SERVICE COM BALANÇA E *COUVERT* ARTÍSTICO: Além do valor cobrado proporcionalmente ao consumo, acrescenta-se ao preço um valor fixo por pessoa, denominado *couvert* artístico, que será direcionado para o pagamento do artista contratado.

Considere, para a modalidade A, o preço único de R$ 16,00. Para a modalidade B, R$ 24,00 por quilograma e, para C, R$ 20,00 por quilograma acrescido de R$ 5,00 do *couvert* artístico.

Preencha o quadro abaixo (Quadro 2), considerando as informações dadas:

Quadro 2: Tabela para auxiliar a aprendizagem.

Consumo(g) Preço(R$) A	Consumo(g) Preço(R$) B	Consumo(g) Preço(R$) C
100	100	100
200	200	200
300	300	300
400	400	400
500	500	500
600	600	600
700	700	700

a) Determine as expressões algébricas que expressam os valores a serem pagos em cada uma das modalidades.

b) Faça a representação gráfica de cada uma das situações no mesmo plano cartesiano.

c) Uma pessoa que consome 500g deve optar por qual das modalidades?

d) Uma pessoa que consome 750g deve optar por qual das modalidades?

e) Analise os três serviços e faça uma comparação entre eles, indicando as vantagens de escolha de um dos serviços em relação ao outro, considerando o consumo de *x* gramas.

Entende-se que o professor precisa propor problemas simples apenas como introdução aos conceitos. Depois, de acordo com o desenvolvimento da aprendizagem, os problemas devem ficar mais complexos, até para não desestimular os alunos. Dante (2000, p. 21) exemplifica assim:

> Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Sua autoestima aumenta consideravelmente com a sensação do “eu sou capaz de fazer isso”. Um bom problema suscita a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e seu conformismo.

Assim, estimulando o aluno a resolver problemas que sejam interessantes, acredita-se que uma aprendizagem sólida de função afim será possível.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se fala no ensino de função por meio da resolução de problemas, alguns equivocadamente imaginam que basta passar o problema, acreditando que os alunos irão fazer e aprender todo o conteúdo. Todavia, é justamente o contrário. Nessa metodologia, é necessário que o professor interaja, questione, tire dúvidas e, enfim, auxilie o aluno o tempo todo para que o mesmo não desanime.

Apresenta-se, neste trabalho, como o assunto é abordado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e se verifica, no mesmo tópico, que a temática deve ser ministrada aos alunos de Ensino Médio vinculados à SEEDUC. Desse modo, os problemas citados neste estudo servem apenas para nortear o trabalho do professor, o qual deve tornar sua abordagem o mais interessante possível para os discentes.

Citam-se, também, as vantagens do uso dessa metodologia no ensino de função, com ênfase em algumas ideias de questionamento que podem surgir durante o processo de aprendizagem. Ademais, chama-se a atenção do professor para o fato de que o planejamento é parte essencial desse processo, como lembram Menegolla e Sant'Anna (2001, p. 66):

> - (o planejamento) ajuda o professor a definir os objetivos que atendam os reais interesses dos alunos;
> - possibilita ao professor selecionar e organizar os conteúdos mais significativos para seus alunos;
> - facilita a organização dos conteúdos de forma lógica, obedecendo a estrutura da disciplina;
> - ajuda o professor a selecionar os melhores procedimentos e os recursos, para desencadear um ensino mais eficiente, orientando o professor no como e com que deve agir;
> - ajuda o professor a agir com maior segurança na sala de aula;
> - o professor evita a improvisação, a repetição e a rotina no ensino;
> - facilita uma maior integração com as mais diversas experiências de aprendizagem;
> - facilita a integração e a continuidade do ensino;
> - ajuda a ter uma visão global de toda a ação docente e discente;
> - ajuda o professor e os alunos a tomarem decisões de forma cooperativa e participativa.

Portanto, espera-se contribuir para o ensino de função afim com um incentivo aos professores que desejam mudar, deixando de lado a prática conservadora das aulas expositivas, em busca de algo que seja mais dinâmico e interessante.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**: 3º e 4º ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC, 1998.

______. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário oficial**, Brasília, 23 dez. 1996.

DANTE, L. R. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática**. Tese (Livre Docência) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1988.

______. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Editora Ática, 2000.

DUPUIS, C.; PLUVINAGE, F. La proporctionnalité et son utilisation. **Recherches em Didatique des Mathématiques**, La Pensée Sauvage editions, v. 2, n. 2, p. 165-212, 1981.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

MENEGOLLA, M.; SANT'ANNA, I. L. **Por que planejar? como planejar?** Petrópolis-RJ: Vozes, 2001.

SOARES, Maria Teresa Carneiro (UFPR): PINTO, Neuza Bertoni Metodologia da resolução de problemas disponível em http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf