

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ROGÉRIO DA SILVA PAIXÃO

O ENSINO DE FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

MARINGÁ-PR  
2014

**ROGÉRIO DA SILVA PAIXÃO**

**O ENSINO DE FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

MARINGÁ-PR  
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Biblioteca Central - UEM- Maringá-PR - Brasil**

Paixão, Rogério da Silva. O ENSINO DE FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL - Maringá-2014 – nº de folhas, 68 ilustração, 34.

Arantes, Luciene Parron Gimenes, orient. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

O ENSINO DE FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

1. Definição de Fractais. 2. Fractais Gerados por Programas Gráficos. 3. Plano de Aula. 4. Considerações Finais

I. Autor. Paixão, Rogério da Silva

Título. O ENSINO DE FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

ROGÉRIO DA SILVA PAIXÃO

**O ENSINO DE FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Me. Eduardo Michel Vieira Gomes  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Francisco Beltrão



Prof. Dr. Rodrigo Martins  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

## DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha esposa Jandira, ao meu pai Seu Raimundo, à minha mãe Dona Cida e à minha filha Ana Laura, pela força, incentivo e compreensão durante todo esse desafio.

## **AGRADECIMENTOS**

À Professora Doutora Luciene Parron Gimenes Arantes, orientadora amiga e solícita na orientação e intervenção no trabalho desenvolvido.

Ao Professor João Flávio Gonçalves, que mesmo com pouco tempo disponível nunca se negou a me ajudar.

Ao Professor João Alessandro, amigo de curso, que foi muito importante nesta caminhada, me orientando nos assuntos de informática e inglês.

A todos os professores do PROFMAT do Polo da Universidade Estadual de Maringá, que com inteligência e simplicidade souberam acolher a todos os alunos mestrandos.

Ao Diretor Gilberto Ito e a todos os professores da Escola Estadual Kosuke Endo.

À minha amiga Professora Cristina Vasconcelos, que acreditou no meu potencial profissional.

Ao Professor Cícero Nobre, Professora Hanae Eto, Professora Joana Lorenzetti e ao amigo Everton Alamino pelo apoio.

Ao amigo e meu motorista particular Antonio Nascimento, sempre prestativo nos momentos de enfermidade.

A CAPES pelo fundamental apoio financeiro.

A todos os professores do IMPA e da SBM, por todo trabalho desenvolvido durante este programa.

“A geometria surgiu da sensatez Divina que a utilizou para desenhar um Universo perfeito, e é a forma mais prática que os homens encontraram de mantê-lo livre do caos.”  
Calvino Júnior

## RESUMO

Este trabalho propõe a inclusão do estudo de geometria fractal no ensino fundamental, especialmente por sua possibilidade de tornar a aprendizagem da matemática mais significativa para os alunos. A ideia de estudar fractais e o uso de tecnologia de computador para sua construção baseia-se em: conexões com várias ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorrem nos diversos ambientes; difusão e acesso aos computadores e às tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade; sensação de surpresa diante da ordem na desordem. Concluímos então que os fractais são ampliações da aplicação de conceitos matemáticos que podem permitir que os alunos visualizem suas aplicações nas artes, ou na ciência. Ainda, o uso do computador para a construção de fractais tem sido entendido como uma facilitação do acesso dos alunos à tecnologia e aos programas específicos de conteúdo matemático.

**Palavras Chave:** Fractais - Ensino Fundamental – Software SuperLogo.



## **ABSTRACT**

This work proposes the inclusion of the study of fractal geometry in elementary school, especially for its ability to make the learning of math more meaningful to students. The idea of studying fractals and the use of computer technology for its construction is based on: connections with various sciences; deficiencies of Euclidean geometry to study the forms of nature, since it is generally only appropriate for ways of coming world human, as constructions of houses, buildings, bridges, roads, machinery, etc.; the natural objects are frequently more complicated and require a richer geometry that models how fractals, allowing developing educational projects on cross-cutting issues facing the understanding of phenomena occurring in various environments; dissemination and access to computers and the information technologies at various levels of schooling; existence of the beauty in the fractals and possibility of awakening and developing the aesthetic sense as the study and art applied to the constructions of fractals, it being understood art as any action that involves both emotion, skill and creativity, sense of surprise at the order in disorder. It was concluded that fractals are an extension of the application of mathematical concepts that can allow students to visualize their applications in the arts, or science. Still, the use of computers for the construction of fractals has been understood as a facilitating student access to technology and specific programs to mathematical content.

**Key words:** Fractals - Elementary School - SuperLogo Software.

---

# SUMÁRIO

---

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1 DEFINIÇÃO DE FRACTAIS</b>	<b>14</b>
1.1 Cálculo da dimensão de Hausdorff	16
1.2 Teoria do Caos	17
1.3 Fractais Precursores	18
1.3.1 Triângulo de Sierpinski	19
1.3.2 Tapete de Sierpinski	20
1.3.3 Fractal Pentagonal de Dürer	21
1.3.4 Árvore Pitagórica Fundamental	23
1.3.5 Curva de Koch	24
1.3.6 Floco de Neve de Koch	25
1.3.7 Curva de Peano	27
1.3.8 Curva de Hilbert	29
1.3.9 Conjunto de Cantor	31
1.4 Fractais Aleatórios	32
1.4.1 Fatou e Julia	33
1.4.2 Iterações com funções e o conjunto de Mandelbrot	34
1.4.3 Previsão do tempo e o conjunto de Mandelbrot	38

<b>2 FRACTAIS GERADOS POR PROGRAMAS GRÁFICOS</b>	<b>44</b>
2.1 Software Nfract. ....	44
2.2 Software SuperLogo. ....	46
<b>3 PLANO DE AULA</b>	<b>54</b>
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>63</b>
<b>5 BIBLIOGRAFIA</b>	<b>65</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

Os fractais são uma das mais fascinantes descobertas da matemática. A sofisticação e o exotismo de suas formas, bem como a ampla divulgação que lhes foi concedida pela mídia, despertaram a atenção do grande público e o interesse de grupos de pesquisadores, reduzidos no início, mas que se avolumaram a medida que os fractais começaram a invadir as áreas de outras ciências, como a física, a geologia, a computação gráfica, e encontrando inúmeras aplicações práticas, como a compreensão de arquivos de imagens, intensamente utilizada em multimídia, ingressando ainda no domínio das artes plásticas e adquirindo, dessa maneira, um caráter interdisciplinar.

Ainda não se escoaram duas décadas desde o seu surgimento, e os fractais já se proliferam por uma imensa variedade de tipos, gerados por processos os mais distintos e regidos por princípios matemáticos bastante diversificados, guardando, porém, algumas características peculiares que os distinguem das figuras geométricas convencionais. A abordagem dessa multiplicidade de tipos é uma tarefa de dimensão enciclopédica, razão pela qual a maioria dos autores limita o escopo de suas obras a um ou alguns gêneros de fractais que possam ser tratados dentro de um mesmo enfoque.

Neste trabalho, pretendemos abordar o ensino de fractais no ensino fundamental com o uso de softwares e estudar, de forma sintética, os principais conjuntos desenvolvidos por Cantor, Koch, Peano, Hilbert, Mandelbrot e outros matemáticos famosos. Ainda descrevemos os fractais geométricos e os fractais aleatórios.

A busca por uma formulação que possibilite o ensino dos fractais no ensino fundamental significa, ainda promover a tecnologia como mediadora privilegiada da geometria fractal. A apresentação dos objetos fractais é essencialmente visual, o que é amplamente possível através do uso de tecnologia dos softwares de padrões gráficos, ferramenta importante deste trabalho.

Compreendemos que os softwares de padrões gráficos são elementos indispensáveis a uma metodologia didática que considera seriamente o ensino da geometria fractal.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. O Capítulo 1 trata da descoberta dos fractais. Incluímos a definição e dimensão de um fractal, bem como conceitos matemáticos envolvidos, a teoria do caos, alguns fractais precursores, além dos fractais aleatórios, e finalmente, comentamos sobre o famoso conjunto de Mandelbrot.

No Capítulo 2, destacamos os fractais gerados por programas gráficos e apresentamos dois softwares que possibilitam a construção de fractais, a saber, destacamos os softwares Nfract e SuperLogo. Demos mais ênfase ao SuperLogo, pois será o programa sugerido nas atividades do plano de aula para o 9º ano do ensino fundamental contido no Capítulo 3.

No Capítulo 4, apresentamos nossas conclusões a respeito do trabalho desenvolvido, esclarecendo que o ensino dos fractais pode fascinar aos alunos e proporcionar o desenvolvimento do conhecimento matemático. É de grande valia a inclusão de softwares, como por exemplo, os citados neste trabalho, pois os mesmos permitem que os alunos visualizem os fractais e possa elaborá-los passo a passo através das iterações.

## CAPÍTULO 1

---

## DEFINIÇÃO DE FRACTAIS

---

Inicialmente, fractais são figuras. O conceito de figura é muito amplo e abrangem, entre outras coisas, as figuras geométricas com que o leitor está familiarizado, como o círculo, o retângulo, a esfera, o cone. Dizemos, também, que a imagem de um ente ou de um objeto é uma figura, e assim nos referimos ao desenho de uma flor como uma figura ou ilustração.

Convém estabelecermos uma distinção entre *figura* e *imagem*. Ao nos referirmos a uma entidade geométrica, como, por exemplo, uma circunferência, diremos que se trata de uma figura. A figura possui as propriedades e características que a geometria lhe atribui. Nessas condições, a circunferência é uma curva unidimensional, com comprimento, entretanto, sem espessura. O desenho da circunferência feito com o compasso no papel é uma imagem da circunferência. Por mais fina que seja a curva traçada pelo compasso, ela tem alguma espessura, caso contrário seria invisível. A imagem da circunferência pode ser bastante fiel, como no caso do desenho, mas será apenas sofrível se ao construirmos em um computador com tela gráfica de baixa resolução.

Essa mesma distinção pode ser estabelecida no caso dos fractais, devemos observar, todavia, que é bem mais difícil construir a imagem de um fractal bastante aproximada do fractal, pois os fractais são geralmente figuras de grande complexidade, com detalhes que se multiplicam em suas partes mais ínfimas. Exceto em alguns casos muito simples, o computador é o único instrumento capaz de construir a imagem de um fractal que se aproxime razoavelmente do que o fractal realmente o é.

Nem sempre prevalece, todavia, a distinção entre figura e imagem, sendo comum, confundirmos, na linguagem coloquial, a figura com a sua imagem e vice-versa.

Uma figura é um conjunto de pontos. O círculo é um conjunto de pontos do plano, a esfera é um conjunto de pontos do espaço tridimensional. A geometria trata adequadamente dessas figuras, ensinando-nos como calcular distâncias e ângulos,

áreas ou volumes, como traçar tangentes e realizar uma variedade de outras tarefas. Os fractais são figuras com propriedades e características peculiares, que os diferenciam das figuras geométricas habituais.

Nos últimos anos, diferentes definições de fractais têm surgido. No entanto, a noção que serviu de fio condutor a todas as definições foi introduzida por Benoit Mandelbrot através do neologismo “Fractal”, que surgiu do latino *fractus*, que significa irregular ou quebrado, como ele próprio disse: “Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim *fractus*. O verbo em latim correspondente *frangere* significa quebrar: criar fragmentos irregulares é, contudo, sabido – e como isto é apropriado para os nossos propósitos – que, além de significar quebrado ou partido, *fractus* também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento”.

Assim, os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. Mandelbrot constatou ainda, que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos com aqueles encontrados na natureza.

Um fractal é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma iterativa produz resultados fascinantes e impressionantes, dando infinitas possibilidades criativas ao seu criador.

Benoit Mandelbrot, diz que: “Um conjunto é dito fractal se a dimensão de Hausdorff Besicovitch excede estritamente a sua dimensão topológica”.

A dimensão fractal de um objeto mede o seu grau de irregularidade, a sua estrutura e o seu comportamento, seja de uma figura ou de um fenómeno físico, biológico ou social. Os fractais têm dimensões diferentes e próprias de cada imagem.

Neste trabalho, assumimos que:

- um ponto possui dimensão zero;
- uma linha reta dimensão um;
- uma superfície plana dimensão dois;
- um sólido dimensão três.

Uma curva irregular tem dimensão entre um e dois, enquanto uma superfície irregular tem dimensão entre dois e três.

### 1.1 Cálculo da dimensão de Hausdorff

Inicialmente, notemos que uma linha pode ser dividida em  $n$  partes iguais e temos  $n^1$  partes iguais à original, porém, cada multiplicada por um coeficiente de redução  $r = 1/n$ .

Dividindo os lados de um quadrado em  $n$  partes congruentes, ou seja, usando um coeficiente de redução  $r = 1/n$ , obtemos  $n^2$  partes semelhantes ao quadrado original.

Do mesmo modo, se subdividirmos as arestas de um cubo em  $n$  partes iguais, portanto, usando um coeficiente de redução  $r = 1/n$ , obteremos  $n^3$  partes semelhantes ao cubo original.

Sendo assim, a quantidade  $N$  de partes semelhantes ao todo corresponde ao inverso do coeficiente de redução elevado à dimensão da figura.

No caso do segmento, temos  $N = 1/(1/n)^1$  e um segmento tem dimensão um. Já no caso do quadrado,  $N = 1/(1/n)^2$  e ele tem dimensão dois. Agora o cubo tem dimensão três e  $N = 1/(1/n)^3$ . Através destes exemplos percebe-se uma relação entre a dimensão de uma figura e a quantidade de elementos semelhantes que se consegue ao subdividi-la.

Assumindo que  $N = 1/r^d$ , onde  $d$ , representa a dimensão e  $r$  um coeficiente de redução não nulo, temos a seguinte fórmula

$$N = \frac{1}{r^d} = \left(\frac{1}{r}\right)^d \Rightarrow \log N = \log\left(\frac{1}{r}\right)^d \Rightarrow d = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Mais adiante, veremos exemplos de como calcular a dimensão de Hausdorff de alguns fractais.



## 1.2 Teoria do Caos

O termo caos está ligado à ideia de confusão, de falta de ordenação, e que traduz “desordem” ou comportamento imprevisível.

Caos s. m. sing. e pl. Confusão geral dos elementos da matéria, antes da presumível criação do Universo. / Geologia Amontado de blocos de certas rochas, que se formam como consequência da erosão. / Fig. Desordem. (Aurélio) [9].

A Física, entretanto, começou a estudar o caos como um fenômeno que não possuía previsibilidade. Segundo Almeida (2006, p. 121), a teoria tem relação com a irregularidade do comportamento:

A palavra caos é formada a partir de um grafo, de origem indo-européia, cujo sentido poderia ser o abismo, de princípio e falta de organização. O caos é um estado muito complexo, caracterizado pela aparente imprevisibilidade de comportamento e por grande sensibilidade a pequenas mudanças na variação do sistema ou nas condições iniciais. O mundo segue a tendência de se tornar mais e mais caótico. A teoria do caos abriu caminho para que se percebessem padrões em eventos desprovidos de padrões, tais como o trânsito de uma grande cidade, as variações da bolsa de valores, ou fenômenos meteorológicos, pois são excessivamente dependentes das condições iniciais, gerando o chamado efeito borboleta.

A importância dessa teoria é que dela abriu-se caminho para a percepção de padrões em eventos onde não haveria, a princípio, um padrão, ou seja, para eventos aleatórios que dependem das condições iniciais e geram o “efeito borboleta”, que em tese, afirma que o simples bater de asas de uma borboleta poderia influenciar o curso natural das coisas e, assim, talvez provocar um tufão do outro lado do mundo.

Desde os primórdios do desenvolvimento da ciência dos fractais, a ideia de caos acha-se profundamente entranhada no senso de julgamento que desenvolvemos, seja, para uma simples apreciação estética dessas figuras, seja, para a análise de sua intrincada estrutura. Não é fácil definir o caos. Admitimos, contudo, que ele tem conotação com desordem, irregularidade e aleatoriedade. Quando não entrevemos nenhum padrão de ordem ou regularidade na estrutura de um objeto, tachamo-lo de

caótico. Se um movimento se processa de tal maneira que não podemos prever para onde o móvel se deslocará em cada instante, consideramos o movimento errático, com sentido análogo ao de caótico. Se um objeto for organizado de modo muito complexo, ficamos incapacitados de discernir a ordem nele existente, e o objeto nos parecerá caótico. É nesse contexto que julgamos caóticos os fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos. Na realidade, tais sistemas são absolutamente determinísticos, pois tudo o que ocorre na evolução de suas órbitas está perfeitamente determinado pela função que governa o sistema e pelo valor inicial que a variável assume. Apesar desse determinismo, as órbitas que se originam em certos pontos se desenvolvem de forma tão intrincada que não vislumbramos nenhum indício de ordem, embora haja uma ordem subjacente.

Os sistemas dinâmicos têm uma forte propensão para o caos. O caos se relaciona com as regiões onde se manifesta a instabilidade. As regiões caóticas são as de maior interesse na investigação matemática dos fractais, e são, além disso, as que mais contribuem para a riqueza estética que os fractais indiscutivelmente possuem.

### **1.3 Fractais Precursores**

Chamam-se fractais precursores, os objetos que são considerados fractais antes que Mandelbrot (1975) lhe tenha dado o nome de fractais. Conforme Barbosa (2005), esses objetos e eventos são conhecidos como “monstros matemáticos”, especialmente por suas características e resultados inusitados.

Foram selecionados alguns “monstros matemáticos”, e os apresentamos abaixo.

### 1.3.1 Triângulo de Sierpinski

Em 1916, Sierpinski apresentou um dos famosos “monstros” em seu trabalho, que complementava uma sua publicação anterior de 1915.

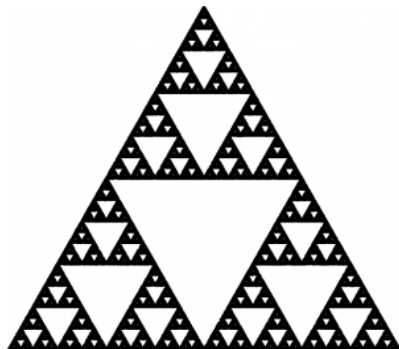


Figura 1. Triângulo de Sierpinski  
fonte: Barbosa, 2005, p. 43

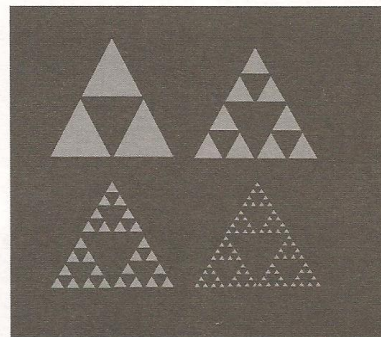


Figura 2. Passos 1, 2, 3, 4 e 5  
fonte: Barbosa, 2005, p. 43

A construção do triângulo de Sierpinski consiste de repetição de passos. Os passos são:

- 1 – Considere, inicialmente, um triângulo equilátero;
- 2 – Marque os segmentos dos pontos médios formando quatro triângulos equiláteros;
- 3 – Elimine (remova) o triângulo central, o que pode ser codificado, por exemplo, com cor preta, e os outros com uma cor cinza;
- 4 – Repita em cada um dos triângulos não eliminados as construções 2 e 3;
- 5 – Repita a operação 4, sucessivamente.

Esse processo de remoção possui alguns aspectos interessantes, observe que, inicialmente, temos um triângulo, após a primeira iteração obtemos três triângulos, na segunda, obtemos nove triângulos, e assim sucessivamente. Podemos facilmente mostrar, por indução, que o número de triângulos  $T_N$  na iteração  $N$  será:  $T_N = 3^N$ .

Quando  $N$  cresce indefinidamente, o número de triângulos tende ao infinito, ou seja,  $\lim_{N \rightarrow \infty} 3^N = \infty$ .

O perímetro do triângulo de Sierpinski é outro aspecto interessante de analisarmos. Consideremos que o lado do triângulo inicial seja  $\ell$ , logo seu perímetro inicial será  $P_0 = 3\ell$ . Na primeira iteração, o perímetro de cada triângulo será  $P_1 = 3\ell/2$ , na segunda, teremos  $C_2 = 3\ell/4$ , e na iteração  $N$ , o perímetro de cada triângulo será  $P_N = 3\ell/2^N$ , como vimos anteriormente o número de triângulos na iteração  $N$  é igual a  $T_N = 3^N$ . O perímetro total será  $P_T = 3 \cdot 3^N \ell / 2^N$ , e quando  $N$  tende ao infinito, o perímetro total também tende ao infinito.

Vamos analisar a área do triângulo de Sierpinski. Denotemos por  $A_0$  a área do primeiro triângulo, determinaremos a área de cada um dos triângulos obtidos após as iterações. Na primeira iteração, dividimos o triângulo inicial em quatro triângulos e tiramos o triângulo central, sendo assim, a área de cada triângulo é dada por  $A_1 = A_0/4$ , na segunda iteração a área de cada triângulo será  $A_2 = A_0/16$  e na iteração  $N$ , temos  $A_N = A_0/4^N$ . Logo a área total na iteração  $N$  será  $A_T = 3^N \cdot A_0/4^N$ , o que implica que  $A_T = A_0 (3/4)^N$ . Quando  $N$  tende ao infinito a área total tende a zero, pois  $A_0$  é um número fixo e  $3/4 < 1$ .

Para calcular a dimensão do Triângulo de Sierpinski, perceba que a cada iteração obtemos três novos triângulos semelhantes ao anterior e o fator de redução é  $r = 1/2$ . Logo, calculando a dimensão fracionária deste fractal, temos  $d = \log N / \log (1/r) = \log 3 / \log 2$ . Logo,  $d$  é, aproximadamente, 1,585.

### 1.3.2 Tapete de Sierpinski

Podemos aplicar a mesma técnica de eliminação (remoção) usada no Triângulo de Sierpinski, partindo de um quadrado, dividindo-o em nove pequenos quadrados congruentes, e eliminando o quadrado central. Em seguida, aplicamos esse mesmo procedimento em cada um dos oito quadrados restantes, e assim sucessivamente, e iterativamente. O resultado que obtemos após algumas iterações já é, surpreendentemente, bonito e conhecido como Tapete de Sierpinski (ou tapete de Sierpinski).

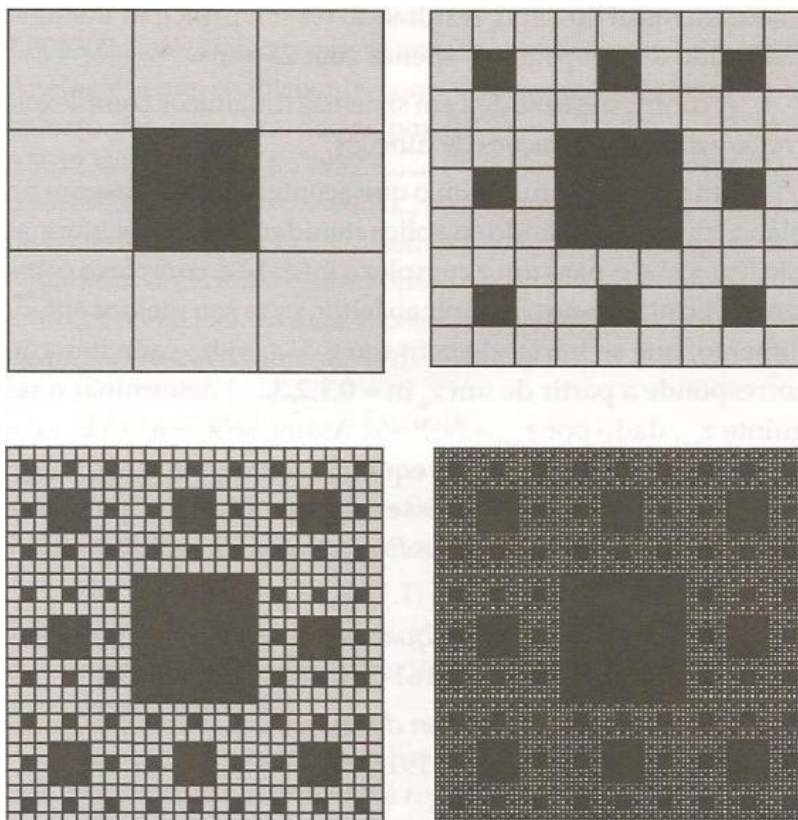


Figura 3. Triângulo de Sierpinski  
 fonte: Barbosa, 2005, p. 45

Para calcular a dimensão do Tapete de Sierpinski, perceba que a cada iteração obtemos oito novos quadrados semelhantes ao anterior e o fator de redução é  $r = 1/3$ . Logo, a dimensão fracionária deste fractal é  $d = \log N / \log (1/r)$ , logo temos  $d = \log 8 / \log 3$ , ou seja,  $d$  é aproximadamente 1,892.

### 1.3.3 Fractal Pentagonal de Dürer

A sua construção inicia-se com um pentágono regular. Seja AB um de seus lados. Coloquemos pentágonos menores I e II em cada um dos extremos A e B, dispostos de tal maneira que um de seus ângulos coincida com o ângulo do pentágono regular inicial, e ainda com a condição de que os pentágonos I e II tenham um vértice comum, Figura 4.

Repetindo essa ação, em cada lado, ficará formado ao centro um novo pentágono regular congruente aos dos lados.

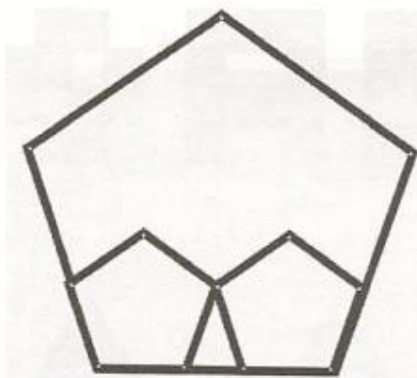


Figura 4. Pentagonal de Dürer  
fonte: Barbosa, 2005, p. 60

Remova os cinco triângulos intermediários e o pentágono central, obtendo o nível 1 do Fractal de Dürer, Figura 5.

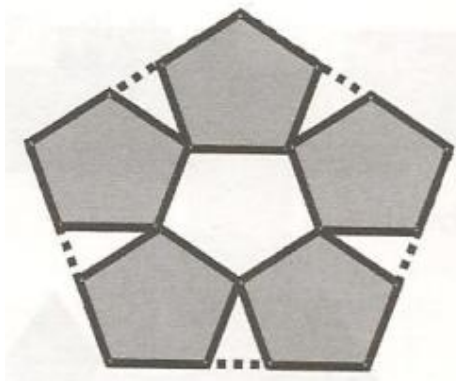


Figura 5. Pentagonal de Dürer  
fonte: Barbosa, 2005, p. 60

Iterando, repetindo essa operação em cada um dos pentágonos regulares restantes, obteremos sucessivamente, os outros níveis do fractal, Figura 6 e 7.

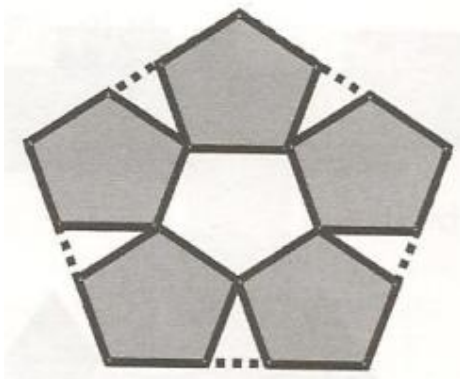


Figura 6. Pentagonal de  
fonte: Barbosa, 2005, p. 60

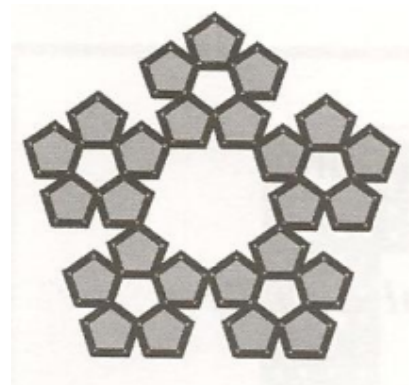


Figura 7. Pentagonal de Dürer  
fonte: Barbosa, 2005, p. 60

### 1.3.4 Árvore Pitagórica Fundamental

Sua construção inicia-se com um triângulo retângulo cujos catetos e hipotenusa são dados pelo terno pitagórico fundamental (3, 4, 5). Sobre seus catetos e hipotenusa construímos os quadrados respectivos, Figura 8. O triângulo retângulo e os quadrados dos catetos constituem o iniciador-gerador. O quadrado da hipotenusa será o tronco inicial. Para obtenção do nível 1 do fractal, Figura 9, construímos sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto novo triângulo retângulo tendo por hipotenusa justamente esse lado. O que se faz em cada iteração é substituir as funções, cada cateto transforma-se uma hipotenusa. Mas, para se obter a autossimilaridade, os novos triângulos retângulos precisam ser semelhantes ao inicial, isto é, seus lados devem ser proporcionais aos números 3, 4 e 5, veja a Figura 10.

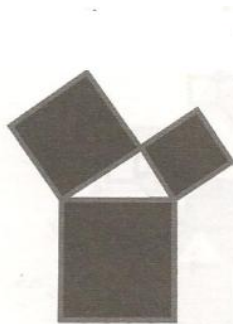


Figura 8. Árvore Pitagórica  
fonte: Barbosa, 2005, p. 63

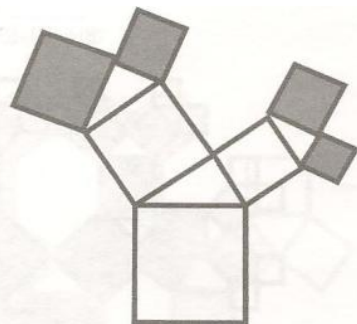


Figura 9. Árvore Pitagórica  
fonte: Barbosa, 2005, p. 63

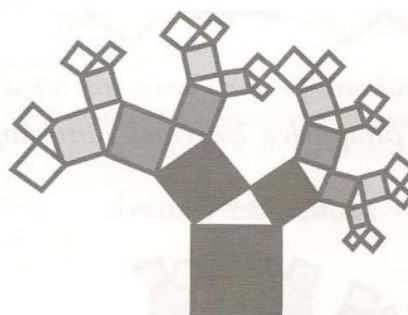


Figura 10. Árvore Pitagórica  
fonte: Barbosa, 2005, p. 63

### 1.3.5 Curva de Koch

Helge Von Koch (1870-1924) foi um matemático pouco conhecido que entre 1904 e 1906 criou a curva de Koch. A definição dada por ele é que sobre uma curva contínua, sem tangente, se obtém uma construção geométrica elementar, como se observa na Figura 11.

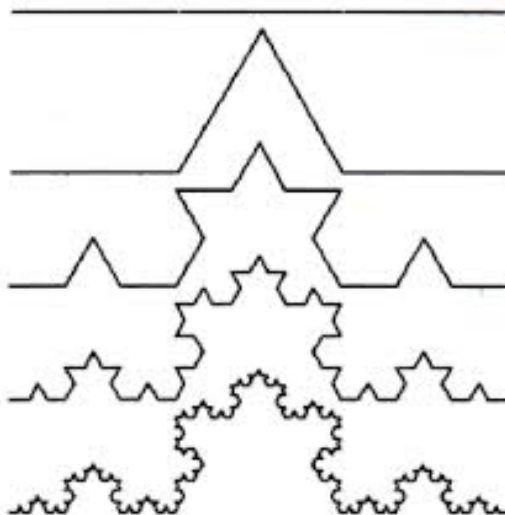


Figura 11. Curva de Koch  
 fonte:[http://www.itis-molinari.eu/Molinari\\_old/studenti/progetti/Tesina\\_Mate/koch.html](http://www.itis-molinari.eu/Molinari_old/studenti/progetti/Tesina_Mate/koch.html)

A ideia é que a partir de um segmento de reta são feitas alterações recorrentes. Inicialmente, o segmento é dividido em três segmentos iguais, resultando em um triângulo equilátero cujo segmento central seja a base.

Em seguida, apaga-se o segmento que serviu de base ao triângulo e o que aparece é uma imagem como um chapéu em forma de cone. Continuando da mesma forma para cada um dos quatro segmentos, o que se forma são novos dezesseis segmentos menores.

Fazendo a curva de Koch a partir de um segmento de comprimento igual a uma unidade, vamos fazer uma análise dessa curva começando pelo número de segmentos em cada iteração. Denote por  $N$  a iteração e por  $S$  o número de segmentos, sendo assim,  $S_0 = 1$ . Após a primeira iteração,  $S_1 = 4$ , na segunda iteração o número de segmentos será  $S_2 = 16$ , e assim por diante. Podemos concluir que o número de



segmentos obtidos na iteração  $N$  será  $S_N = 4^N$ . Quando  $N$  tende ao infinito, o número de segmentos também tende ao infinito. Logo o número de segmentos da curva de Koch cresce infinitamente, conforme o número de iteração aumenta.

Denotando por  $L$  o comprimento do segmento inicial, e por  $C_N$  o comprimento de cada segmento na iteração  $N$ , temos  $C_0 = L$ , após a primeira iteração  $C_1 = L/3$ , e na segunda iteração  $C_2 = L/9$ , e na iteração  $N$ ,  $C_N = L/3^N$ . Quando o número de iterações tende ao infinito, o comprimento de cada segmento tende a zero, ou seja,  $\lim_{N \rightarrow \infty} (L/3^N) = 0$ .

$$N \rightarrow \infty$$

Para obter o comprimento total da curva do Koch, multiplique o número total de segmentos pelo comprimento de cada segmento na iteração  $N$ , logo  $C_T = L 4^N / 3^N$ , o que resulta em  $C_T = L (4/3)^N$ . Calculando o limite do comprimento total da curva de Koch quando  $N$  tende ao infinito, podemos concluir que apesar do comprimento de cada segmento tender a zero quando  $N$  cresce infinitamente, o comprimento total da curva de Koch tende ao infinito.

Para calcular a dimensão fractal da curva de Koch devemos observar que a cada iteração de cada um dos segmentos são obtidos quatro novos segmentos, logo  $N = 4$ , e que o coeficiente de redução é  $r = 1/3$ . Portanto,  $d = \log N / \log (1/r) = \log 4 / \log 3$ , ou seja,  $d$  é, aproximadamente, 1,26.

### 1.3.6 Floco de Neve de Koch

A construção do Floco de Neve de Koch é obtida a partir da mesma construção básica da curva de Koch, sendo que não se inicia a sua construção a partir de um segmento de reta, mas por um triângulo equilátero, seguindo os mesmos passos da construção da curva de Koch. Isso deverá ser feito para cada triângulo, ou seja, os mesmos passos que foram feitos na construção anterior. Dividindo cada aresta do triângulo em três segmentos de retas, todos com a mesma medida, retira-se o segmento central, substituindo por um triângulo equilátero sem a sua parte inferior, e assim sucessivamente.

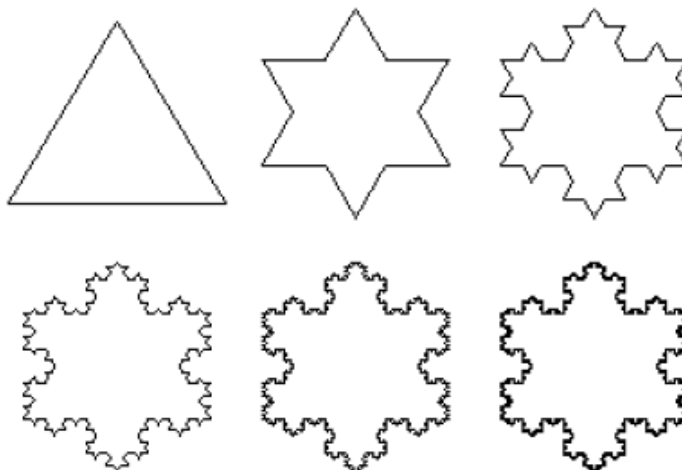


Figura 12. Floco de Neve de Koch.  
 fonte: <http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/213/ractaisuma-nova-viso-da-natureza>

Para calcular o perímetro do Floco de Neve do Koch, multiplica-se o comprimento total da Curva de Koch por três, já que cada lado é formado a partir de uma Curva de Koch, assim tem-se que o perímetro desta figura é também infinito.

Para obter a área do Floco de Neve de Koch, adicione à área da figura da iteração anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é  $1/3$  do anterior, multiplicada pelo número de lados do polígono anterior. Pela semelhança de figuras planas, sabe-se que, se o lado de um polígono sofre uma redução de razão  $1/3$ , a área sofre uma redução de  $1/9$ .

Considere a área do triângulo gerador igual a um. Assim, se  $A_N$  denota a área na iteração  $N$ , então:

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = 1 + (1/9) \cdot 3 = 1 + 1/3$$

$$A_2 = 1 + 1/3 + (1/9)^2 \cdot (3 \cdot 4) = 1 + 1/3 + 4/9$$

$$A_{N+1} = 1 + 1/3 + 1/3 \cdot 4/9 + 1/3 \cdot (4/9)^2 + \dots + 1/3 \cdot (4/9)^N$$

$$A_{N+1} = 1 + S_N, \text{ onde}$$

$$S_N = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N}{1 - \left(\frac{4}{9}\right)}$$

Calculando o limite de  $S_N$  quando  $N$  tende para o infinito tem-se  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 3/5$ .

$N \rightarrow \infty$

A área do Floco de Neve de Koch é dada pelo limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + S_N) = 1 + 3/5 = 8/5.$$

O Floco de Neve de Koch tem perímetro infinito e área finita e sua dimensão é a mesma da curva de Koch, já que ambas têm o mesmo processo recursivo.

### 1.3.7 Curva de Peano

Peano (1858-1932) foi um dos primeiros a oferecer uma definição formal de espaço vetorial. Em 1890, ele publicou a sua curva, considerada um “monstro matemático”. Esta curva é resultado do aprofundamento dos estudos de Peano (1858-1932), nas noções de continuidade e dimensão. Vilenkin (1949) criticou seu trabalho. Ele afirmava que Peano fazia parecer que tudo estava em ruínas, que todo conceito matemático tinha perdido o seu sentido. Também chamadas de extravagantes, foram consideradas por Mandelbrot (1924-2010), como importantes para o relacionamento de uma nova Geometria com a natureza.

A construção da Curva de Peano inicia com um segmento. Na primeira iteração, o segmento inicial é substituído por nove segmentos de comprimento igual a  $1/3$  do segmento inicial. Aplica-se o mesmo processo aos 9 segmentos obtidos, e assim por diante.

Na Figura 13, temos o segmento original e as três primeiras iterações.

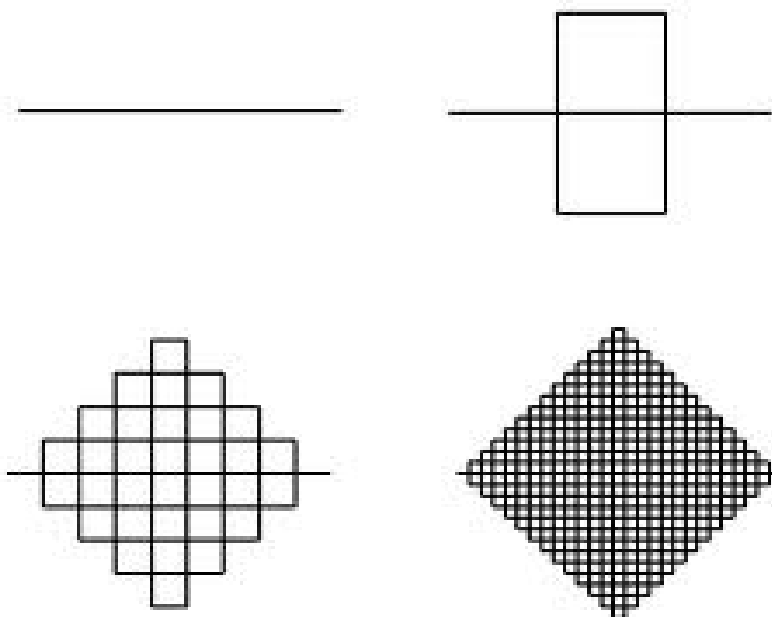


Figura 13. Curva de Peano

fonte: [http://www.avaad.ufsc.br/moodle/mod/hiperbook/view.php?id=2089&pagenum=10&target\\_navigation\\_chapter=3713&show\\_navigation=1](http://www.avaad.ufsc.br/moodle/mod/hiperbook/view.php?id=2089&pagenum=10&target_navigation_chapter=3713&show_navigation=1)

Para calcular o comprimento total da Curva de Peano, precisa-se, primeiramente, saber o número de segmentos em cada iteração e o comprimento de cada um deles. No nível zero, considere o comprimento inicial igual a  $\ell$ , na primeira iteração, o número de segmentos será nove, o comprimento de cada um deles será  $\ell/3$  e o comprimento total será  $9\ell/3 = 3\ell$ . Na segunda iteração, o número de segmentos será  $9^2$ , o comprimento de cada um deles será  $\ell/3^2$  e o comprimento total será  $9^2\ell/3^2 = 3^2\ell$ , e assim por diante, na iteração  $N$  o número de segmentos será  $9^N$ , o comprimento de cada um deles será  $\ell/3^N$  e o comprimento total será  $9^N\ell/3^N = 3^N\ell$ . Portanto, o comprimento total da Curva de Peano tende ao infinito quando  $N$  cresce infinitamente.

O matemático Peano ao construir as primeiras curvas tinha o interesse de elaborar curvas contínuas capazes de preencher totalmente o plano. Observe-se que as curvas nas diferentes iterações da recursão, a partir da primeira, intersectam-se a si próprias nos vértices dos pequenos quadrados que se vão formando em cada iteração. Podemos demonstrar que no limite, isto é, na Curva de Peano, se passa o mesmo, dando-se o preenchimento de um quadrado cuja diagonal é igual ao comprimento inicial do segmento gerador da curva.

Considere o comprimento do segmento inicial igual a  $\ell$ , a área da figura formada pela Curva de Peano será igual a de um quadrado cuja diagonal será  $\ell$ , logo o lado será  $\ell/\sqrt{2}$ , sendo assim, a área será  $A = \ell^2/2$ .

A dimensão fractal da Curva de Peano é obtida observando que cada segmento forma nove outros segmentos, e o coeficiente de redução é  $1/3$ , logo a dimensão será  $d = \log N / \log (1/r) = \log 9 / \log 3$ , ou seja,  $d$  é, aproximadamente, 2.

### 1.3.8 Curva de Hilbert

A Curva de Hilbert (862-1943) passa por todos os pontos de um quadrado, assim, ela pertence a uma família das curvas de Peano, porém possui diferenças sutis que a tornam única. Primeiramente, a cada iteração do seu processo recursivo, a curva preenche quadrados menores, mas ela nunca se intercepta. Outra característica importante é que a curva passa por todos os pontos de uma superfície, e através do seu processo de recursividade o comprimento dessa curva é infinito.

A sua construção inicia-se com um quadrado de medida  $\ell$ . Dividimos este quadrado em quatro quadrados congruentes, unimos os pontos centrais destes, conforme é mostrado na figura abaixo.

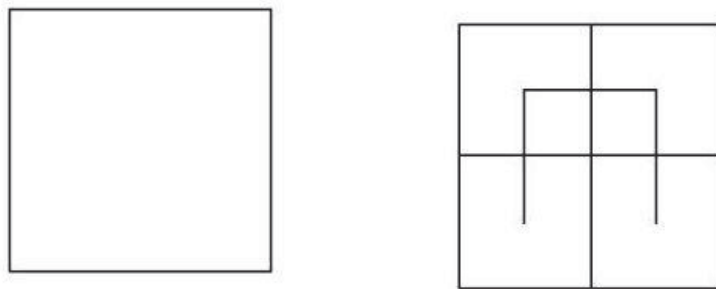


Figura 14. Curva de Peano  
fonte: ALMEIDA, 2006, p. 56

O segundo estágio de construção da curva consiste em subdividir cada um dos quatro quadrados menores do estágio anterior em outros quatro quadrados congruentes

e unir os pontos centrais desses novos dezesseis quadrados conforme é apresentado na Figura 15.

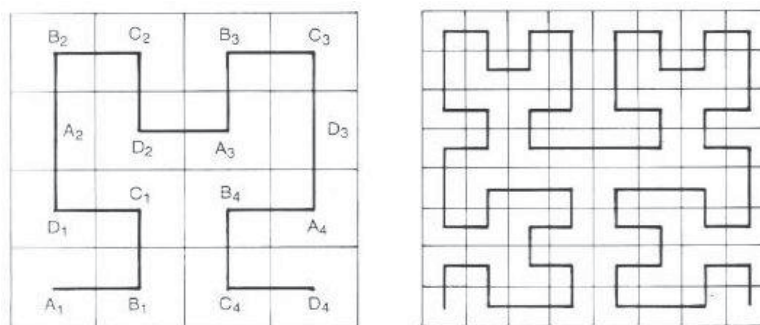


Figura 15. Curva de Peano  
fonte: Almeida, 2006, p. 57

Ao repetir esse processo recursivo novamente, subdividiram-se cada um dos dezesseis quadrados da figura anterior em quatro quadrados congruentes e unindo os pontos centrais desses 64 quadrados é formada uma terceira curva. A curva de Hilbert é obtida ao fazer a generalização desse processo recursivo. A Figura 16 representa essa generalização da curva

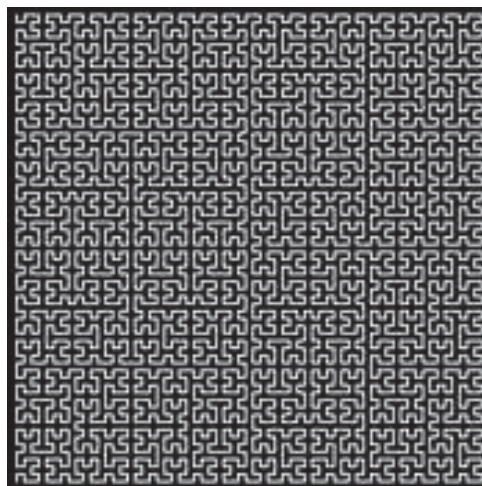


Figura 16. Curva de Peano  
fonte: <http://www.abrejosensamblador.net/html/Pags/Cap32.html>

O cálculo da dimensão fractal da curva de Hilbert deve-se ao seu processo de recursividade, que é formado por quatro quadrados congruentes ( $N=4$ ), tendo a metade do

lado do quadrado original, logo o coeficiente de redução é  $r = 1/2$  e sua dimensão é  $d = \log N / \log (1/r) = \log 4 / \log 2 = 2$ .

Essa curva, topologicamente, equivale a uma linha, mas é tão contorcida que ocupa exatamente toda a área de um quadrado. Logo a curva comporta-se como um objeto bidimensional.

### 1.3.9 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é um fractal clássico que é gerado através de um processo que remove uma parte da figura original que ao contrário dos conjuntos de Hilbert (1862-1943), Peano (1858-1932) e Koch (1870-1924) não é alterada.

Cantor (1845-1918) foi o primeiro matemático a quebrar a noção intuitiva de dimensão. No final do século XIX, Cantor provou que se pode esquadrihar o espaço euclidiano de forma contínua, o que significa que se podemos localizar todos os pontos de um plano com apenas uma coordenada.

O conjunto criado por Cantor, Figura 17, é conhecido também como “Poeira de Cantor”, ele é um subconjunto infinito de pontos contidos no intervalo unitário  $[0,1]$ .

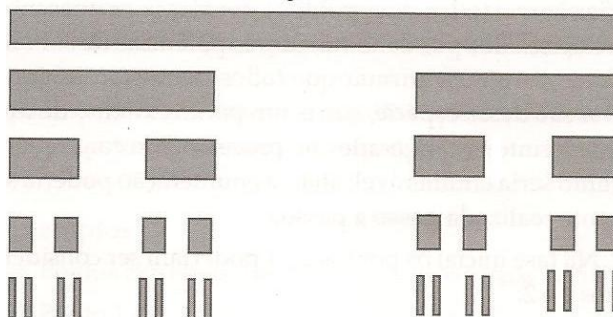


Figura 17. Conjunto de Cantor  
fonte: Barbosa, 2005, p. 25

Considerando uma figura inicial, o intervalo fechado  $I_0=[0,1]$  podemos dividi-lo em três partes congruentes, onde se despreza o terço médio e surge a união disjunta de dois intervalos fechados  $I_1=[0,1/3] \cup [2/3,1]$ , e cada um com comprimento  $1/3$ .

Temos, então, a união disjunta de dois intervalos e aplicamos esse processo aos intervalos de extremos 0 e 1/3; 2/3 e 1, promovendo sua divisão em três partes, e novamente, desprezando o terço médio. Assim, obtemos a fórmula:  $I_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$  com quatro intervalos congruentes medindo 1/3 cada um. O processo para quatro intervalos quando continua dá lugar a 8 intervalos de comprimento 1/27 cada um. E repetimos indefinidamente o processo, até se obter  $I_N$  que é a união disjunta de  $2^N$  intervalos fechados de  $1/3^N$  de comprimento cada um.

Se o valor de N aumenta, infinitamente, o comprimento de cada segmento tende à zero, na construção numérica isto significa que o intervalo tende a um ponto, donde a denominação, “poeira de Cantor”.

Para calcular a dimensão fractal da poeira de Cantor, perceba que a cada iteração cada segmento é trisseccionado e retira-se o segmento central. Assim, a cada iteração, obtemos dois novos segmentos de cada segmento da iteração anterior. Logo,  $n = 2$ . O coeficiente de redução é  $r = 1/3$ . Logo, a dimensão fractal da poeira de Cantor será dada por  $d = \log N / \log (1/r) = \log 2 / \log 3$ , ou seja,  $d$  é aproximadamente 0,63.

#### 1.4 Fractais Aleatórios

Fractais aleatórios são aqueles gerados por computadores, e resultam de iterações operadas por um sistema que não é linear e que são recorrentes. Eles permitem visualizar imagens impressionantes que parecem aplicações artísticas.

Segundo Rinaldi e Menezes, (2007):

“A tecnologia dos computadores auxilia nas tarefas de diversas áreas. Os programas gráficos são capazes de solucionar problemas de projeto, pois criam em seus ambientes de trabalho os produtos que estão sendo desenvolvidos e antecedem seu aspecto final. Os erros de projeto podem, no entanto, ser facilmente visualizados e algumas etapas previstas sem dificuldade. Há programas específicos voltados para a geometria e alguns acompanham livros educacionais.”

Rinaldi e Menezes (2007), utilizaram em seu trabalho programas computacionais acessíveis e de custo baixo, como o Geometricks (versão 2.37), de



origem dinamarquesa; Nfract desenvolvido no Brasil e o Cabri-Géomètre II, desenvolvido na França.

As Figuras 18 e 19 abaixo apresentam imagens de fractais feitos por programas de computadores.

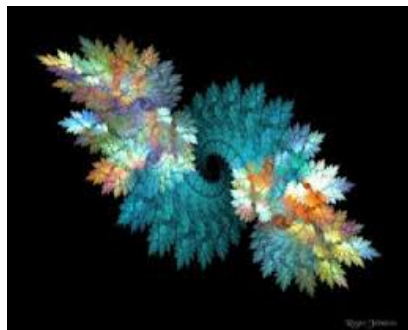


Figura 18. Fractal feito por computador  
 fonte:[http://adilugosi.blogspot.com.br/2010\\_12\\_01\\_archive.html](http://adilugosi.blogspot.com.br/2010_12_01_archive.html)

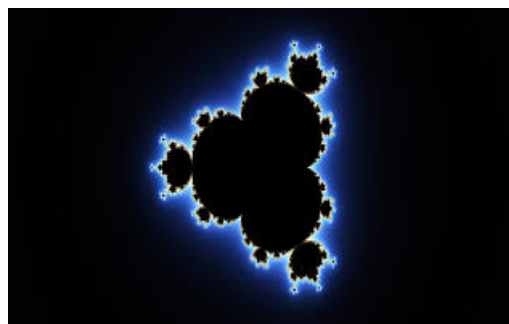


Figura 19. Fractal feito por computador  
 fonte:<http://www.profedigleyalexandre.com/2011/11/criando-wallpapers-fractal-hd-em-linux.html>

#### 1.4.1 Fatou e Julia

Do período da primeira grande guerra, dois franceses Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Julia (1893-1978) merecem ser lembrados pelos seus trabalhos, ainda que em pesquisas não conjuntas. Seus resultados forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desenvolve-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot e os famosos Conjuntos de Julia, pois esses estavam completamente esquecidos.

Em particular, é digno de se narrar que Julia, servindo como soldado, infelizmente, foi gravemente ferido, perdendo seu nariz. Consta que sua pesquisa foi desenvolvida quando internado num hospital, resultando no seu principal trabalho publicado de 199 páginas, apenas com 25 anos.

A contribuição se deu em sistemas dinâmicos complexos, como o estudo de iterações de funções.

Em resumo, estudaram o que acontece com a imagem no plano complexo quando se aplica iteradamente a função  $f(z) = z^2 + c$ , para um  $z$  complexo inicial e  $c$ ,

complexo constante. Permitimo-nos lembrar ao leitor, para seu melhor entendimento, que se iniciando com um  $z_0 = a_0 + ib_0$ , cada iteração corresponde a partir de um  $z_n$  ( $n=0,1,2,3,\dots$ ) determinar o seguinte  $z_{n+1}$  dado por  $z_{n+1}=(z_n)^2 + c$ . Assim, se  $z_n = a_n + ib_n$  e  $c = c_1 + ic_2$ , a iteração, com  $i^2 = -1$ , equivale a determinar  $a_{n+1} = (a_n)^2 - (b_n)^2 + c_1$  e  $b_{n+1} = 2a_nb_n + c_2$ . Esse estudo cuida principalmente das chamadas órbitas e pontos fixos atratores e repulsores.

### 1.4.2 Iterações com funções e o Conjunto de Mandelbrot

Com o intuito de tentar esclarecer um pouco o leitor não familiarizado com processos iterativos, discorreremos, a seguir, um pouco sobre iterações com funções de variável complexa, tentando dotá-lo pelo menos de uma pequena ideia para entender melhor o Conjunto de Mandelbrot.

Seja  $f: C \rightarrow C$  uma função contínua de variável complexa  $z$ . Vamos instituir um processo que produza uma sequência de pontos  $z_k \in C$  a partir de um ponto  $z_0$  arbitrariamente escolhido. Cada ponto é obtido do precedente pela aplicação da função  $f$ , ou, dizendo de outro modo, cada ponto é a imagem do precedente pela função  $f$ :

$z_0$  (ponto inicial)

$$z_1 = f(z_0) = f^1(z_0)$$

$$z_2 = f(z_1) = f \circ f(z_0) = f^2(z_0)$$

$$z_3 = f(z_2) = f \circ f \circ f(z_0) = f^3(z_0)$$

.....

$$z_k = f(z_{k-1}) = f \circ f \circ \dots \circ f(z_0) = f^k(z_0).$$

Esse é tipicamente um processo iterativo, ou repetitivo. O ponto  $z^k$ , da sequência é obtido através de  $k$  iterações, anotando-se  $z_k = f^k(z_0)$  indicando o índice  $k$  a  $k$ -ésima iteração da função  $f$ .

Um processo dessa natureza constitui um sistema dinâmico. O termo se justifica pelo fato de que em muitos processos físicos, biológicos ou financeiros, o estado do sistema é determinado a intervalos regulares de tempo pelas iterações de

certa função. Se esses intervalos forem infinitos, o sistema será *discreto*. Se forem intervalos diferenciais de tempo, o sistema dir-se-á *contínuo*. Podemos, é claro, dissociar completamente o tempo do processo iterativo envolvido na formação de um fractal, mas conservamos, por analogia, o qualificativo *dinâmico*. Restringir-nos-emos ao estudo dos sistemas dinâmicos discretos de uma função  $f(z)$ , doravante designados simplesmente como sistemas *dinâmicos complexos*.

A sequência de pontos  $\{z_k\}$  obtidos a partir de um ponto inicial  $z_0$  pela aplicação iterativa da função  $f$  constitui a *órbita progressiva* do ponto  $z_0$ . A órbita progressiva de  $z_0$  constitui, desse modo, o conjunto das imagens de  $z_0$  obtidas pela aplicação iterativa da função  $f$ . Podemos, igualmente, gerar uma *órbita regressiva* do ponto  $z_0$  formada pela sequência de pontos  $\{z_{-k}\}$  que são as pré-imagens de  $z_0$ :

$z_0$  (ponto inicial)

$z_{-1}$  é um ponto de  $C$  tal que  $f(z_{-1}) = z_0$

$z_{-2}$  é um ponto de  $C$  tal que  $f(z_{-2}) = z_{-1}$  ou  $f^2(z_{-2}) = z_0$

.....

$z_{-k}$  é um ponto de  $C$  tal que  $f(z_{-k}) = z_{-(k-1)}$  ou  $f^k(z_{-k}) = z_0$ .

A *órbita total* será a união das órbitas progressiva e regressiva. Quando não houver possibilidade de confusão, usaremos simplesmente o termo *órbita* com o sentido de órbita progressiva.

Ao construir a órbita progressiva de um ponto  $z_0$  pela aplicação iterativa da função  $f$ , obtemos a partir de cada ponto  $z_k$  da órbita um único ponto  $z_{k+1} = f(z_k)$ . O mesmo não se pode dizer com respeito à órbita regressiva: dependendo da função  $f$ , pode haver duas ou mais pré-imagens de cada ponto da órbita. Se  $f$  for uma função polinomial de grau  $m \geq 2$ , haverá  $m$  pontos  $z_{-k}$  que são pré-imagens de  $z_{-(k-1)}$ , isto é, para qualquer um desses  $m$  pontos prevalecem a relação  $f(z_{-k}) = z_{-(k-1)}$  de modo que  $f^k(z_{-k}) = z_0$  ou, equivalente,  $f^k(z_0) = z_{-k}$ .

Isso significa que, partindo-se de um ponto  $z_0$ , obtêm-se, após  $k$  iterações,  $m^k$  pontos: a órbita regressiva ramifica-se como uma árvore, cada ponto da órbita representando um nó que dá origem a  $m$  outros nós. Esse processo de ramificações se

estende ilimitadamente quando  $k \rightarrow \infty$ , formando, em geral, um conjunto infinito e aberto de pontos no plano  $C$ .

A questão fundamental dos sistemas dinâmicos complexos reside na investigação de suas órbitas. A geometria dos fractais gerados por tais sistemas baseia-se, em consequência, na geometria daquelas órbitas.

Para uma função  $f$ , dizemos que  $x_0$  é um ponto fixo se  $f(x_0) = x_0$  e dizemos que  $x_0$  é um ponto periódico de período  $n$  se  $f^n(x_0) = x_0$  e  $n$  é o menor natural que isso ocorre.

Se  $x_0$  é um ponto fixo para  $f$ , então dizemos que  $x_0$  é:

1. Atrator se todas as órbitas de pontos próximos a  $x_0$  tendem para  $x_0$ ;
2. Repulsor se todas as órbitas de pontos próximos a  $x_0$  se afastam de  $x_0$ .

A seguir, listamos alguns exemplos.

(1) Consideremos a função  $f(x) = \sqrt{x}$ . ( $x \geq 0$ )

Considere o valor inicial  $x_0 = 81$ . Então,  $f(81) = \sqrt{81} = 9$ ; e calculando a imagem do resultado de 81, encontramos  $f^2(81) = f[f(81)] = f(9) = \sqrt{9} = 3$ , e sucessivamente  $f^3(81) = f\{f[f(81)]\} = f(3) = 1,732050\dots = 1,732050\dots$ . Continuando essa “*iteração*” (processo repetitivo) temos, sucessivamente,  $f^4(81) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}} = 1,316074\dots$ ,  $f^5(81) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}} = 1,147202\dots$ ,  $f^6(81) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}}} = 1,071075\dots$ ,  $f^7(81) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}}} = 1,034927$ ,  $f^8(81) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}}} = 1,017313\dots$ ,  $f^9(81) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}}} = 1,008619\dots$ ,  $f^{10}(81) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}}} = 1,004300\dots$  etc, valores que se aproximam cada vez mais de 1. Analogamente, se iniciamos com 0,1, por exemplo, temos os valores das iterações por  $f(0,1) = 0,316227\dots$ ,  $f^2(0,1) = 0,561234\dots$ ,  $f^3(0,1) = 0,749893\dots$ , ...  $f^{10}(0,1) = 0,997753\dots$ ,  $f^{11}(0,1) = 0,9988775\dots$ ,  $f^{12}(0,1) = 0,999437\dots$ , etc, aproximando-se também de 1. Desde que  $f(1) = \sqrt{1} = 1$ . Então,  $x = 1$  é ponto fixo, e pelos resultados anteriores que é ponto fixo *atrator*. As duas sucessões de valores recebem o nome de órbitas, respectivamente, de 81 e de 0,1.

(2) Função  $g(x) = 2x - 1$  ( $x$  real).

Para ponto fixo deve-se ter necessariamente  $2x - 1 = x$  de onde a existência do ponto fixo  $x = 1$ . Considere, então, o valor inicial  $x = 1,1$ , perto e maior que o ponto fixo.

Temos  $g(1,1) = 1,2$ ,  $g^2(1,1) = g(1,2) = 1,4$ ,  $g^3(1,1) = g(1,4) = 1,8$ ,  $g^4(1,1) = 2,6$ ,  $g^5(1,1) = 4,2, \dots$ ,  $g^8(1,1) = 26,6, \dots$ , que mostra que limite de  $g^n(1,1)$  é igual a  $\infty$ , quando  $n$  tende a  $\infty$ ; dizemos então que o ponto fixo 1 é *repulsor* para  $x > 1$ .

Analogamente, o limite de  $g^n(0,9)$  é igual a  $-\infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ ; ou que, novamente o ponto fixo é *repulsor* para  $x < 1$ .

(3) Função  $h(x) = (x+1)/2$  ( $x$  real).

Encontramos novamente o ponto fixo único  $x = 1$ , entretanto ele será um ponto atrator.

(4) Função da forma quadrática  $w(x) = x^2 + c$  ( $x$  real,  $c$  constante).

Observe que  $x$  será um ponto fixo de  $w(x)$  se, e somente, se  $x^2 - x + c = 0$ . Então,  $\Delta$  será igual a  $1 - 4c$ . Vamos analisar os possíveis valores de  $\Delta$ .

(4.1) Se  $c > 1/4$ , então  $\Delta < 0$ . Neste caso,  $w(x)$  não terá um ponto fixo.

(4.2) Se  $c = 1/4 = 0,25$ , então  $\Delta = 0$ . Neste caso,  $w(x)$  tem um único ponto fixo  $x = 1/2 = 0,5$ . Seja, por exemplo, então  $w(x) = x^2 + 0,25$ . Considere o valor inicial  $x = 0,8 > 0,5$ . Sucessivamente, encontra-se  $w(0,8) = 0,89$ ,  $w^2(0,8) = 1,0421$ ,  $w^3(0,8) = 1,33\dots$ ,  $w^4(0,8) = 2,03\dots$ ,  $w^5(0,8) = 4,46\dots$ , que nos indica ser limite de  $w^n(0,8)$  é  $\infty$ , para  $n \rightarrow \infty$ ; ou que o ponto fixo é repulsor para  $x > 0,5$ . O mesmo acontece para  $x < 0,5$ .

(4.3) Se  $c < 1/4$ , quando  $\Delta > 0$ , que nos dá dois pontos fixos de  $w(x)$ . Considere, para exemplificar,  $w(x) = x^2 - 2$ , de raízes  $-\sqrt{2}$  e  $+\sqrt{2}$ . Deve-se ter para ponto fixo de  $x^2 - x - 2 = 0$ , dois pontos, a saber,  $x = -1$  e  $x = 2$ . Tome o valor inicial  $x = 2,1 > 2$ . Daí,  $w(2,1) = 2,41$ ,  $w^2(2,1) = 3,8081$ ,  $w^3(2,1) = 9,48\dots$ , que mostra que limite de  $w^n(2,1)$  é  $\infty$ , para  $n \rightarrow \infty$ , portanto, para  $x > 2$  o ponto fixo  $x = 2$  é repulsor.

Considere, agora, um valor inicial  $x < 2$ , por exemplo,  $x = 1,5$ . Daí,  $w(1,5) = 0,25$ ,  $w^2(1,5) = -1,93\dots$ ,  $w^3(1,5) = 1,72\dots$ ,  $w^4(1,5) = 0,95\dots$ ,  $w^5(1,5) = -1,09\dots$ ,  $w^6(1,5) = -0,81\dots$ ,  $w^7(1,5) = -1,34\dots$ . Contudo, agora, não é tão simples tirar alguma

conclusão. Represente essa sucessão de valores no gráfico cartesiano, acrescentando também o gráfico de  $y = x$ . Para cada ponto  $x$ , represente o ponto em  $w$ , em seguida com horizontal determine na reta  $y = x$  o ponto correspondente de  $x = y$ . O leitor observará que a sucessão alternada de pontos na parábola e teta  $y = x$  rodeia o ponto fixo  $(-1, -1)$  com um redemoinho em sifão. É importante observar que as órbitas para pontos do intervalo  $-2 < x < 2$  estão nele inteiramente contidas, de onde se pode dizer que as órbitas são *prisioneiras*.

Para ponto inicial  $x = -2$ ,  $w(-2) = 2$ , e sucessivamente,  $w^i(-2) = 2$  ( $i > 1$ ), ou que  $x = -2$  é ponto *aparentemente fixo* ou *eventualmente fixo*.

Para  $x < -2$ , por exemplo,  $x = -2,2$ ,  $w(-2,2) = 2,84$ ,  $w^2(-2,2) = 6,06\dots$ ,  $w^3(-2,2) = 36,78\dots$ , e de novo  $\lim w^n(-2,2) = \infty$ , para  $n \rightarrow \infty$ . Diz-se que para pontos  $x < -2$  as órbitas são fugitivas; elas fogem, escapam para o infinito.

Uma pergunta surge: e o caso complexo  $f(z) = z^2 + c$ ? Em geral, tomando um valor inicial qualquer par  $z$  e uma constante complexa  $c$ , a sucessão dos valores complexos obtidos se afasta cada vez mais da origem e sem se aproximar de um ponto fixo.

Analogamente, ao estudo da função de variável real  $f(x) = x^2 + c$  pode ser realizado para a função complexa. Felizmente, uma propriedade básica existe. Se o complexo obtido por uma iteração tem módulo maior que dois, a órbita será fugitiva, escapando para o infinito. Essa propriedade é aplicada como teste, repetidamente um determinado número grande de vezes, e se sempre o módulo não supera o valor 2, podemos considerar órbita prisioneira.

### 1.4.3 Previsão do Tempo e o conjunto de Mandelbrot

Quando o homem souber mais sobre o conjunto de Mandelbrot, saberá prever o tempo com maior precisão. É isto que conclui um artigo muito interessante da revista “Cálculo, matemática para todos”, veja [8].

A seguir, apresentamos alguns trechos deste artigo que relaciona o conjunto de Mandelbrot com situações reais do nosso mundo.

O estudante (vamos chamá-lo de Kichiya) já viu muitas vezes a imagem deste fractal famoso. Há filmes sobre ele na internet; os filmes mostram que, se alguém amplia um pedacinho da borda do fractal, vê que a ampliação é igualzinha ao fractal original, e se amplia um pedacinho da ampliação é igualzinha ao fractal original, e assim por diante ao infinito. (Ao infinito mesmo: não é força de expressão). O nome do fractal é “conjunto de Mandelbrot”, pois foi descoberto por Benoit Mandelbrot (1924-2010), o sujeito que inventou essa história toda de geometria fractal. A primeira vez que Mandelbrot viu uma imagem de seu conjunto gerada por computador foi em 1980, num centro de pesquisas da IBM nos Estados Unidos; é a imagem da Figura 20.

Hoje, os computadores fazem imagens mais precisas e bonitas.

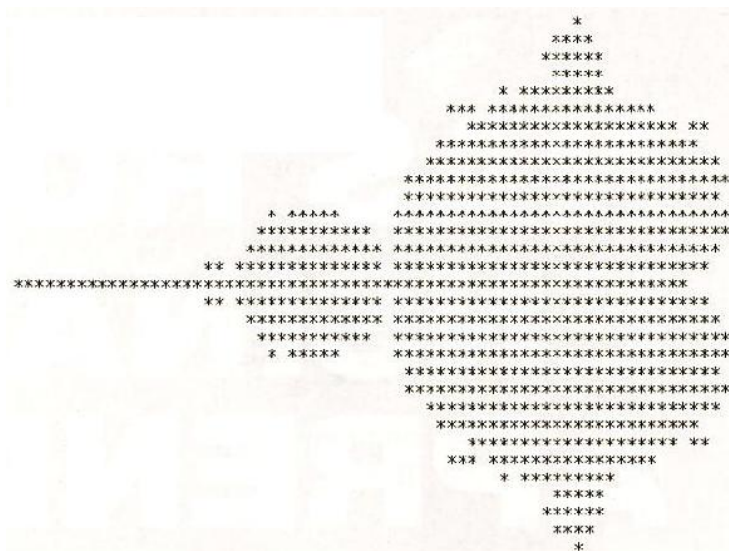


Figura 20. Conjunto de Mandelbrot  
fonte: Revista Cálculo- Edição 21, p. 19

Por que Kichiya deve estudar objetos como o conjunto de Mandelbrot? Isso é mais ou menos como perguntar: por que deve estudar romance? Timothy Gowers (matemático britânico) explica a analogia assim: o conjunto dos números naturais  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  “não é lá muito interessante”; mas um subconjunto desse conjunto, o subconjunto dos números primos, contém segredos valiosos. O primeiro matemático a descobrir a lógica dos números primos será capaz de explicar a essência de todos os números inteiros, e fará a matemática avançar de modo como nunca avançou até hoje.

“Essa é a vantagem de separar um subconjunto de um conjunto”, diz Gowers. “Muitas vezes o subconjunto contém informações tais que nos permitem revelar o funcionamento do conjunto todo.” Kichiya estuda romances, escritos por um subconjunto da humanidade (os romancistas), porque os romances contêm informações relevantes sobre a humanidade. E Kichiya deve estudar o conjunto de Mandelbrot porque ele contém informações importantes sobre o plano (que os matemáticos chamam de  $\mathfrak{R}^2$ , pois todo ponto do plano pode ser localizado com a ajuda de duas linhas de números reais, e eixo x e o eixo y).

O conjunto de Mandelbrot sai de uma fórmula bem simples, que Kichiya põe no papel assim:  $f(z) = z^2 + c$ .

Nessa função  $f$ , tanto  $z$  como  $c$  são números complexos (na forma  $a + bi$ , em que  $i^2 = -1$ ; Kichiya faz uma anotação no caderno: “os números reais são um subconjunto dos complexos, então  $z$  e  $c$  podem assumir valores com 2 ou -7 ou 0”). Kichiya pode atribuir um valor qualquer para  $z_0$ , e depois pode encher um conjunto seguindo o seguinte método: acha o valor de  $f(z_0)$ , que chama de  $z_1$  ( $f(z_0) = z_1$ ); daí acha o valor de  $f(z_1)$ , que chama de  $z_2$  ( $f(z_1) = z_2$ ); daí acha o valor de  $f(z_2)$ , que chama de  $z_3$  ( $f(z_2) = z_3$ ); daí acha o valor de  $f(z_3)$ , que chama de  $z_4$  ( $f(z_3) = z_4$ ), e assim por diante. Ao repetir a aplicação de  $f$ , Kichiya enche um conjunto de números complexos:  $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\} / z_n = f(z_{n-1})$ .

Às vezes, ele obtém uma sequência de números que tende ao infinito. Por exemplo, quando escolhe  $c = 2$  e  $z_0 = 1$ , a sequência se transforma em 1, 3, 11, 123, 15 131, etc. Mas, às vezes, essa sequência fica a uma distância fixa do ponto (0,0); Kichiya usa a expressão técnica “sequência limitada por  $k$ ”, querendo dizer “todos os números da sequência estão tão ou mais perto de (0,0) do que  $k$ ”. Por exemplo, quando escolhe  $c = 2$  e  $z_0 = (1/2) \cdot (1 - i\sqrt{7})$ , descobre que:  $z_1 = ((1/2) - (i\sqrt{7}/2))^2 + 2 = (1/2) - (i\sqrt{7}/2) = z_0$ .

Nesse caso, Kichiya enche seu conjunto com uma sequência ilimitada por  $z_0$ , pois todos os termos da sequência são iguais a  $z_0$ . Neste ponto, Kichiya já pode entender a primeira definição técnica relacionada ao conjunto de Mandelbrot.



O conjunto de Julia, associado à constante  $c$ , é o conjunto de todos os números complexos  $z_0$  para os quais a aplicação repetida de  $f$  produz uma sequência limitada.

De acordo com a definição, pensa Kichiya, o número complexo  $(1/2).(1-i\sqrt{7})$  faz parte do conjunto de Julia associado à constante  $c = 2$ . Então Kichiya se pergunta: se eu escolher um valor fixo para  $z_0$ , e puser num conjunto todos os valores possíveis da constante  $c$  tal que a aplicação repetida de  $f$  produza uma sequência limitada? Foi essa pergunta que levou Benoit Mandelbrot a descobrir o conjunto de Mandelbrot, e com essa informação Kichiya já compreende uma definição mais precisa.

O conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os valores da constante  $c$  tais que a aplicação repetida de  $f$  produza uma sequência limitada quando  $z_0 = 0$ . (Quase sempre esse conjunto é chamado de  $M$ ).

Para entender essa definição, Kichiya a converte em substantivo e verbos mais visuais, mais concretos: “Para montar um conjunto de Mandelbrot”, ele escreve no caderno, “devo fixar o valor de  $z_0$  em 0, e devo por no conjunto  $M$  todos os valores de  $c$  para os quais a aplicação repetida de  $f$  produz uma sequência limitada. Se eu fizer isso, encheri o conjunto  $M$  de números complexos, que posso plotar num plano  $\mathfrak{R}^2$ , visto que um número complexo é um ponto no plano.” Para desenhar o fractal que todos conhecem como conjunto de Mandelbrot, Kichiya manda o computador pintar de preto os valores válidos de  $c$  e deixar os outros valores em branco; o computador produz a Figura 21.

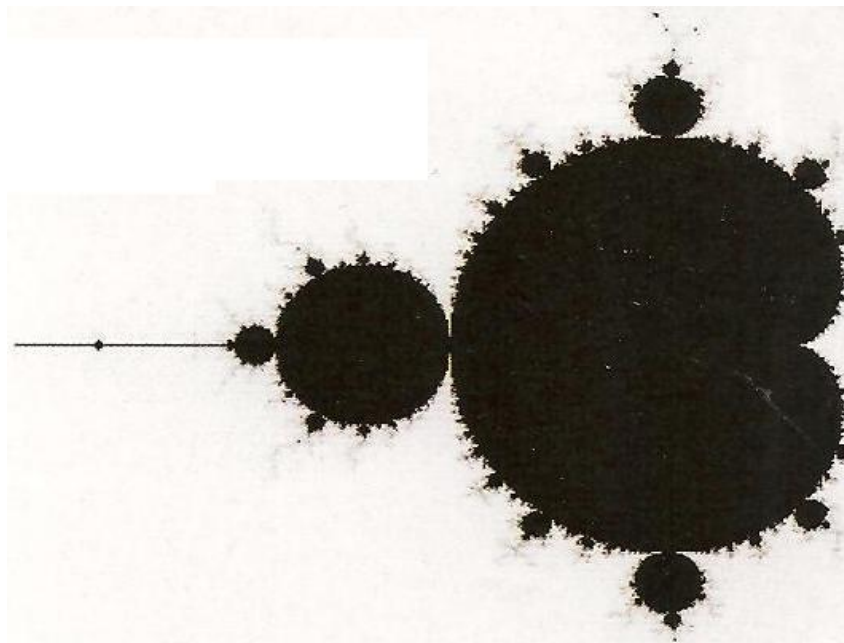


Figura 21. Conjunto de Mandelbrot  
 fonte: Revista Cálculo- Edição 21, p. 19

O conjunto de Mandelbrot, que é um subconjunto de  $\mathfrak{R}^2$ , produz dezenas de hipóteses e conjecturas importantes. Quando os matemáticos puderem resolvê-las, saberão muito mais sobre, por exemplo, sistemas dinâmicos. Kichiya entende o que isso significa: quanto mais o homem conhece o conjunto de Mandelbrot, melhor prevê o tempo.

O conjunto de Mandelbrot (1924-2010), Figura 13, resulta da submissão dos números complexos (números do tipo  $a + ib$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  é a constante imaginária) a um processo iterativo. Quando se aplica o processo de forma repetitiva, obtém-se uma sequência de números.

Ao aplicar este processo repetidamente, obtém-se uma sequência de números  $u_n$ , cuja distância à origem (ou seja, o módulo  $|u_n|$ ) se mantém finita ou tende para infinito. Esta fronteira, entre o finito e o infinito é o que define o conjunto de Mandelbrot.

A construção do conjunto de Mandelbrot parte da atribuição de uma cor ao número complexo  $a + ib$  que vai ser desenhado como um ponto  $(a, b)$  no plano.

Seja  $z = a + bi$ , onde  $a$  e  $b \in \mathfrak{R}$ . Submete-se o número  $z$  ao seguinte processo iterativo:  $z_{n+1} = z_n^2 + w$ , em que  $w$  é um número complexo constante. Observando o

comportamento de  $z_{n+1}$ , ou seja, do seu módulo  $|z_{n+1}|$ , temos as seguintes possibilidades:

- $|z_n|$  se mantém sempre finito, então atribui-se a cor preta a  $z$ .
- $|z_n|$  tende para infinito, então, atribui-se diferentes cores a  $z$ , dependendo do comportamento de  $|z_n|$ . A classificação é definida por quem desenha o fractal.

Um ponto é marcado neste fractal não quando satisfaz a equação, mas sim segundo um certo tipo de comportamento. Um comportamento possível pode ser um estado estacionário; outro pode ser a convergência para uma repetição periódica de estados; e outro ainda pode ser um corrida descontrolada para o infinito.

Este comportamento de convergência para uma repetição periódica de estados é passível de ser observada e, depois, todos nos podemos interrogar se o resultado é infinito ou não.

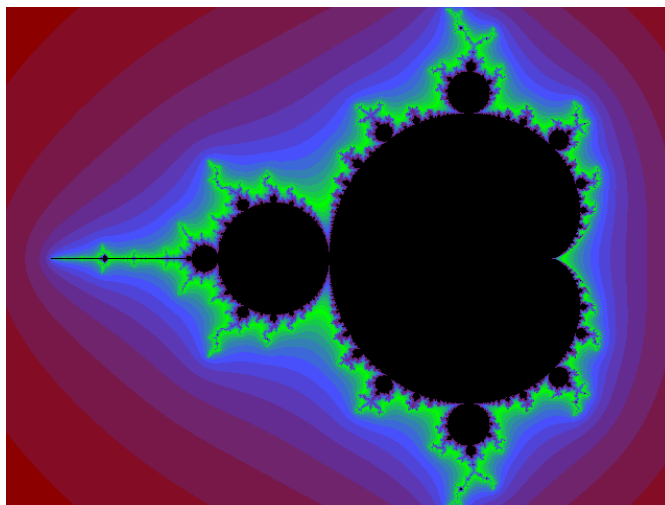


Figura 22. Conjunto de Mandelbrot  
fonte: gerado pelo Nfract

## CAPÍTULO 2

---

# FRACTAIS GERADOS POR PROGRAMAS GRÁFICOS

---

## 2.1 Software Nfract

Existem vários programas capazes de gerarem fractais, tais como Cabri-geómetre II, Geometricks e o Geogebra. A seguir, apresentamos os softwares Nfract 1.0 e o SuperLogo.

O Nfract 1.0 foi desenvolvido por Francesco Artur Perrotti, da FATEC - Taquaritinga (SP). O livro “Descobrimdo a Geometria Fractal”, escrito por Barbosa em 2005, vem com um CD contendo o programa.

Este programa é fácil e rápido, e as imagens geradas são muito bonitas, com formas e cores diferenciadas.

Os comandos no Nfract 1.0 são poucos e fáceis de usar. O programa possui uma boa interface e está ainda em sua versão inicial.

É bem provável que o Nfract 1.0 seja o único software desse gênero criado no Brasil. O software calcula e gera fractais por meio de uma equação de sétimo grau. Os coeficientes podem ser ajustados aleatoriamente e gerar imagens únicas. Vale ressaltar que o cálculo será mais rápido ao utilizar números compreendidos entre -1 e 1.

De acordo com o autor, Francesco Artur Perrotti, o programa Nfract implementa um polinômio (variável complexa) de sétimo grau, calcula e produz as imagens fractais geradas por ele. Os coeficientes do polinômio podem ser ajustados para qualquer valor desejado, permitindo a geração de infinitas imagens. O famoso conjunto de Mandelbrot está incluído no polinômio. Para gerá-lo basta zerar todos os coeficientes, com exceção do coeficiente de segundo grau, que deve ser ajustado para o valor 1 (opção default do programa).

As imagens são calculadas utilizando a técnica de “tempo de fuga”. Esta técnica verifica quantas iterações são necessárias para que determinado ponto “escape” de um círculo de raio 2 no plano complexo. A posição do ponto é fornecida como parâmetro para a equação e o resultado realimenta a equação na próxima iteração. O campo *profundidade* do programa indica o número máximo de iterações que o programa calcula para cada ponto da imagem. Quando o ponto escapa do círculo, ou quando o número máximo de iterações é atingido, o valor obtido é usado como índice em um mapa de cores para obter a cor do ponto. O programa fornece uma boa variedade de mapa de cores e ainda permite a criação de novos mapas.

A equação descrita no programa apresenta-se na seguinte fórmula:

$$Az^7 + Bz^6 + Cz^5 + Dz^4 + Ez^3 + Fz^2 + Gz + H.$$

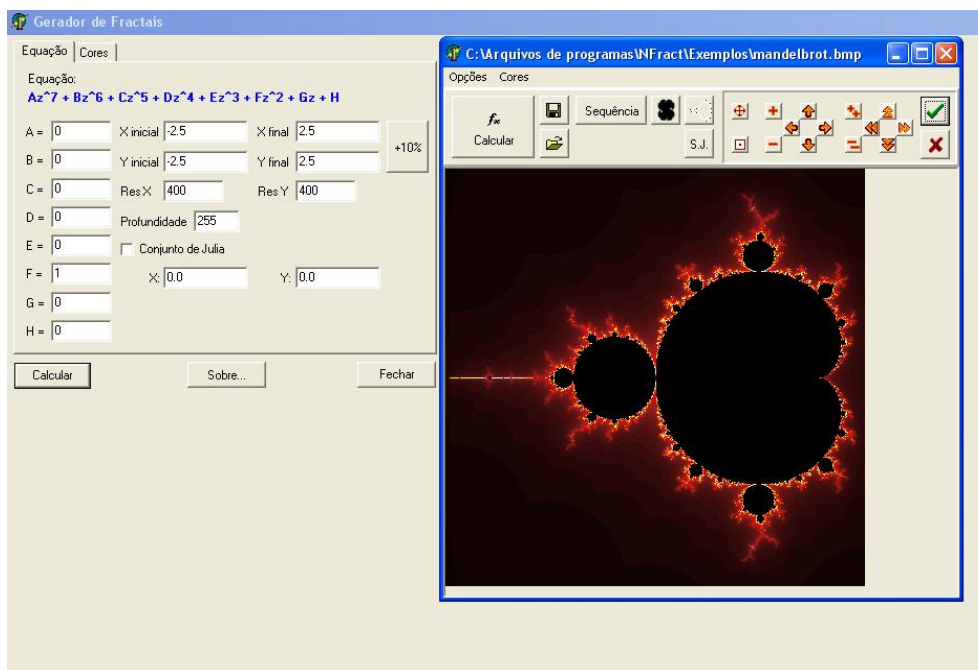


Figura 23. Imagem de fractal gerada pelo Nfract 1.0

## 2.2 Software SuperLogo

Para atividades no laboratório de computação, também sugerimos o software SuperLogo 3.0 (2000), que foi desenvolvido pela equipe conduzida pelo professor e pesquisador sul-africano Seymour Papert (1928), no Massachusetts Institute of Technology (MIT), Boston, Estados Unidos, durante o final dos anos 60, princípio dos anos 70. A linguagem de programação do SuperLogo esteve desde sempre ligada às problemáticas do ensino-aprendizagem, da comunicação com máquinas em linguagem natural e de inteligência artificial.

A versão utilizada neste trabalho foi desenvolvida pelo Núcleo de Informática Aplicada a Educação (NIED), Unicamp. Pode-se obter este software, pela internet, no endereço: <http://www.nied.unicamp.br/publicacoes>.

O SuperLogo contém aspectos gráficos e de manipulação de símbolos. A parte gráfica, que é considerada a porta de entrada ao SuperLogo, permite a aquisição de uma série de conceitos espaciais, numéricos e de programação através da construção de desenhos. Entretanto, o SuperLogo não deve ser identificado somente com este tipo de atividade (desenho). Com ele pode-se realizar atividades de manipulação simbólica (uso de palavras e listas), como por exemplo, definir procedimentos para construir gráficos, produzir poemas e jogos.

O programa é constituído por duas janelas, uma janela gráfica onde aparece uma tartaruga chamada, carinhosamente, de Tat. Ela é um cursor gráfico que a partir de comandos específicos, movimenta-se na tela permitindo a construção de desenhos, e a outra janela é a de comandos que nos permite dar instruções à Tat para fazer o que se deseja.

A seguir, listamos alguns comandos básicos do programa e sempre após inserir um comando na caixa de entrada é preciso dar um *enter* ou clicar no botão executar. Existem quatro comandos básicos: *parafrente n° (pf n°)*, *paratrás n° (pt n°)*, esses comandos fazem a Tat andar e os comandos para direita *n° (pd n°)*, para esquerda *n° (pe n°)*, fazem a Tat girar. Nos dois primeiros comandos é necessário indicar o número de passos que a Tat deve andar e nos outros dois a medida do grau do

giro. Observe que os comandos possuem uma forma abreviada, isso acontece com a maioria dos comandos.

Ao iniciar o programa SuperLogo, aparecerá a seguinte tela:

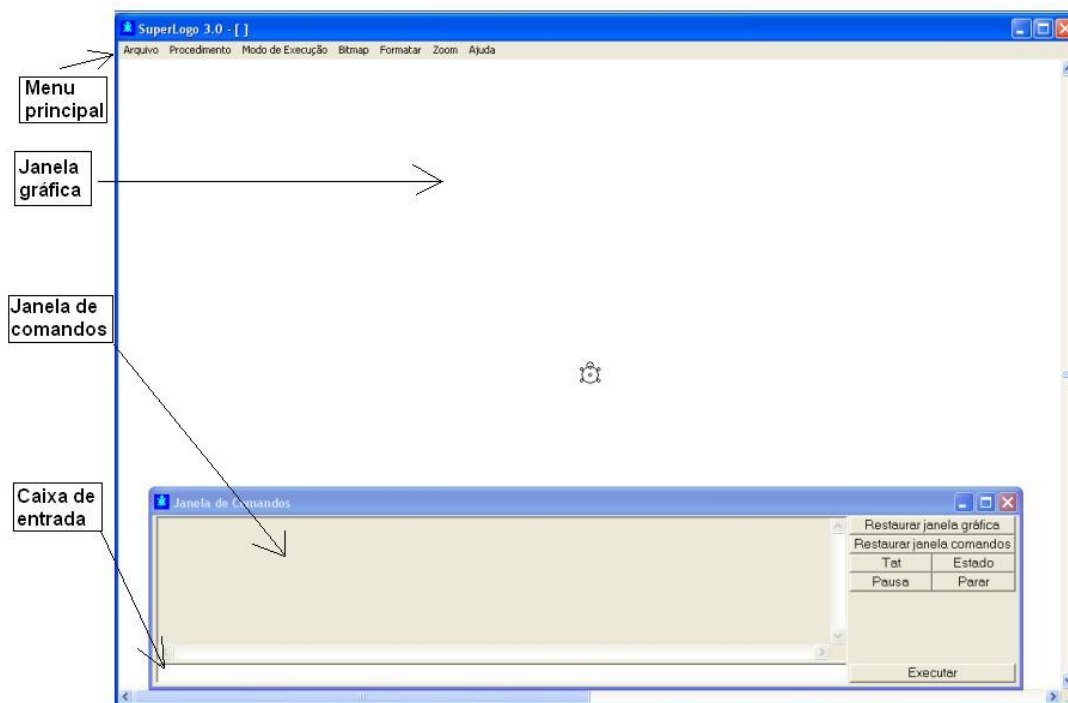


Figura 24. Tela inicial

A posição da Tat é definida por um sistema de coordenadas  $(x, y)$ , cuja posição inicial é o ponto  $(0, 0)$ , que é o centro da janela gráfica.

Ao executarmos, por exemplo, os seguintes comandos *pf 200 pd 90 pf 100 pd 120 pf 100*, a figura formada será:

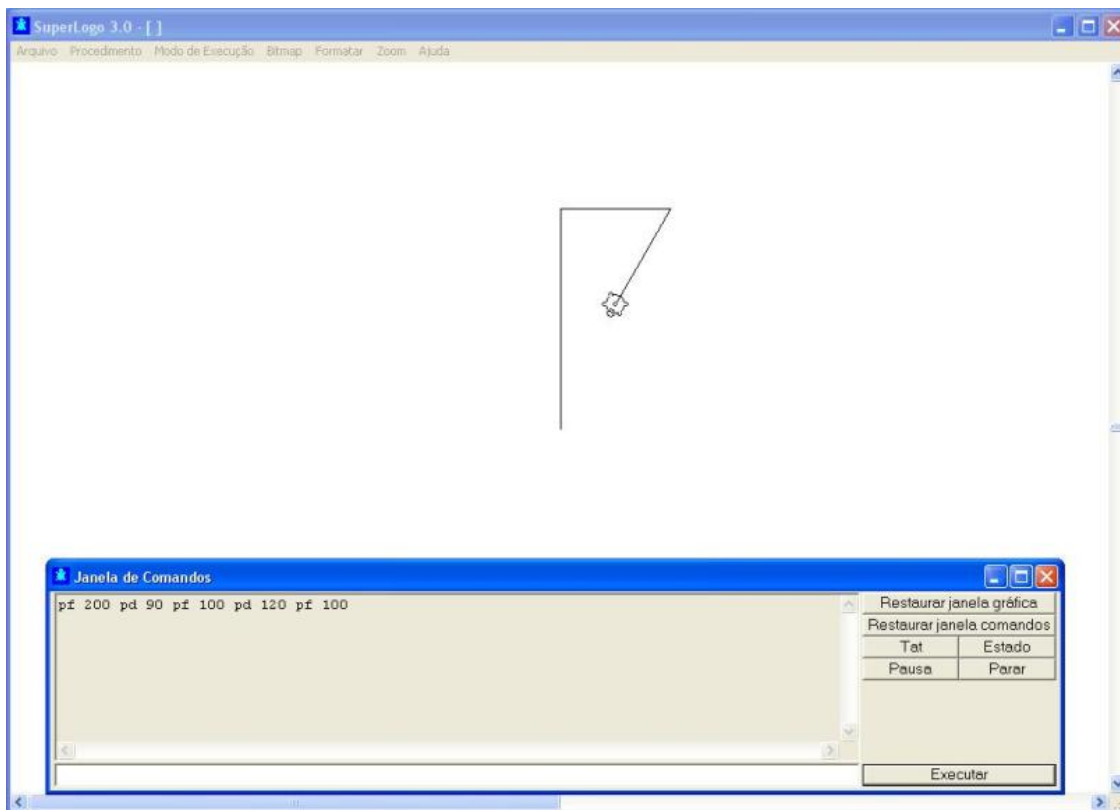


Figura 25. Figura formada

A tabela, a seguir, mostra outros comandos do SuperLogo:

Comando	Significado
ul	Use lápis
ub	Use borracha
un	Use nada
ljc	Limpe janela de comandos
pc	Movimenta a tartaruga para o centro sem alterar a sua direção
dt	Desapareça Tat
at	Apareça Tat
ad	Apaga todos os desenhos deixados na janela gráfica sem modificar a direção da tartaruga
tat	Apaga todos os desenhos deixados na janela gráfica e coloca a tartaruga na posição inicial

Podemos mudar a cor do traço da Tat, modificando a cor do lápis, para isso executamos o comando *mudecl n°*, e também podemos mudar a cor do fundo executando *mudecf n°*, cada número indica uma cor pré-estabelecida. As cores resultam da combinação das tonalidades das cores: vermelha, verde e azul, e são representadas de três maneiras:



lista: [0 0 0]; número: 0 ou nome: preta.

Algumas cores:

LISTA	NÚMERO	NOME
[0 0 0]	0	preta
[0 0 128]	1	azul
[0 128 0]	2	verde
[0 128 128]	3	ciano
[255 0 0]	4	vermelho
[128 0 128]	5	roxo
[128 64 0]	6	marron
[192 192 192]	7	cinzaclaro
[128 128 128]	8	cinzaescuro
[128 255 255]	9	verdeágua
[0 255 0]	10	verdecclaro
[0 255 255]	11	cianoclaro
[128 0 0]	12	vermelhoescuro
[255 0 255]	13	rosachoque
[255 255 0]	14	amarelo
[255 255 255]	15	branco

Um comando muito utilizado na linguagem Logo é o *repita*, que é usado quando precisamos de uma sequência de comando repetidos. Por exemplo, para desenharmos um triângulo equilátero, o comando será: *repita 3[pf 100 pd 120]*. O desenho formado será conforme a figura seguinte.

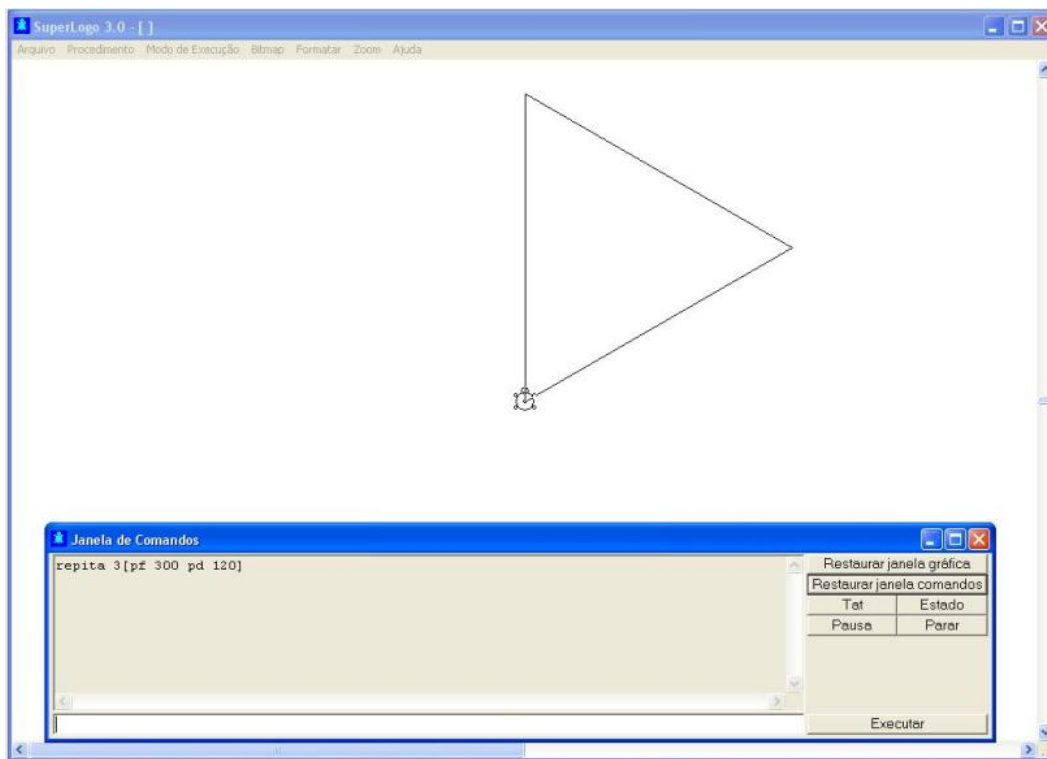


Figura 26. Figura formada

Além dos comandos básicos podemos ensinar à Tat outros comandos. No menu principal, ao clicarmos em procedimento, abrirá uma janela como da Figura 27.

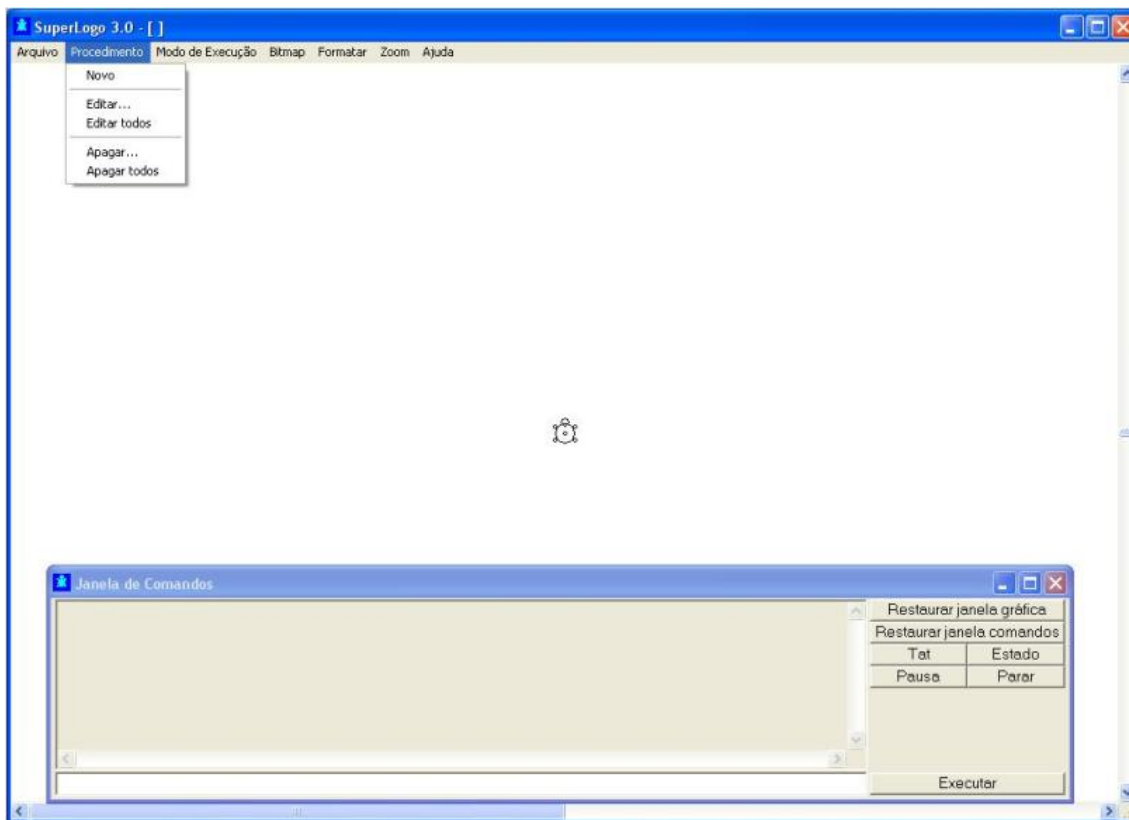


Figura 27. Procedimento

Em seguida, clicamos no botão *Novo*, abrirá uma tela como a da Figura 28. Você deverá dar um nome ao seu procedimento e escrever a sequência de comandos desejada, no término escreva *fim*.

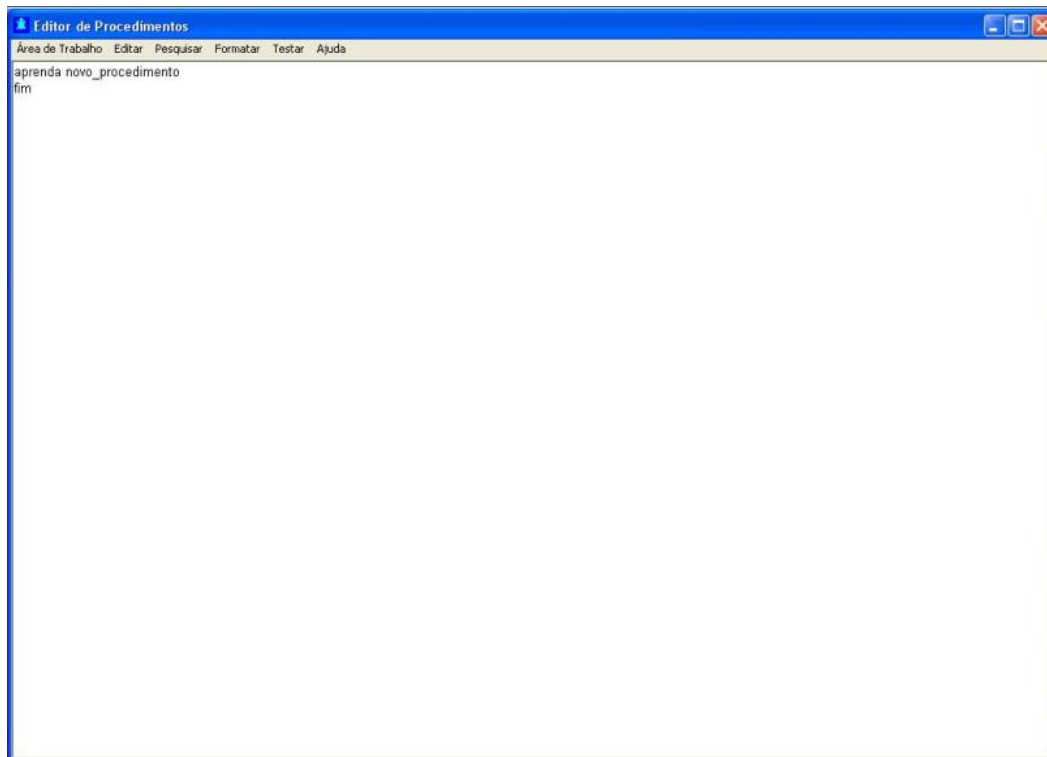


Figura 28. Novo Procedimento

Experimente:

*aprenda quadrado*

*repita 4[pf 100 pd 90]*

*fim*

Feito isso vamos ao menu principal e clicamos em Área de Trabalho, em seguida, em Atualizar.

Para testarmos nosso novo procedimento, digitamos na caixa de entrada a palavra quadrado e damos um *enter*.

O comando quadrado poderá ser usado sempre que desejamos fazer um quadrado de lado 100, mas para desenharmos quadrados com outras medidas de lado devemos criar outros procedimentos, então, neste caso é muito importante usarmos um parâmetro. Veja o exemplo abaixo:

*aprenda quadrado: x*

*repita 4[pf x pd 90]*

*fim*

Podemos testar este novo procedimento escrevendo na caixa de entrada quadrado 100, quadrado 200, quadrado 300, e assim por diante.

Além dos comandos citados, o SuperLogo dispõe de vários outros recursos.

## CAPÍTULO 3

---

# PLANO DE AULA

---

**TEMA: APRENDER GEOMETRIA UTILIZANDO FRACTAIS.**

**1. Escola** – E. E. de Mirante do Paranapanema

**2. Classe:** 9º ano do Ensino Fundamental, idade média 14 anos. A turma não tem deficiente visual.

**3. Período:** Manhã

**4. Assunto:** Fractais

**5. Duração:** 4 aulas (200 minutos)

**6. Objetivo:** Motivar o interesse do aluno pelo estudo da Geometria, despertando sua curiosidade através de uma didática diferenciada com a utilização do software SuperLogo.

**7. Conteúdo:**

7.1 Ângulo, Perímetro e Área.

7.2 Fractais Geométricos.

**8. Recursos:** Software, caderno, quadro e data show.

**9. Procedimentos:** Serão formados grupos de quatro alunos e as atividades serão divididas em 3 momentos:

**Primeiro momento: Conhecendo o SuperLogo** – Tempo previsto 1 aula (50 minutos)

Este primeiro momento será para a ambientação com o Software SuperLogo, serão desenvolvidas atividades do tipo:

- Faça Tat andar 50 passos para frente.
- Gire a Tat 90 graus para direita.
- Faça a Tat desaparecer.

- Faça a Tat aparecer.
- Mude a cor do rastro da Tat.
- Limpe a janela gráfica.
- Limpe a janela de comandos.
- Use o comando adequado e apague o que você fez até agora.
- Desenhe a letra L.
- Limpe a janela de comandos.
- Movimente a tartaruga sem deixar rastro.

Neste primeiro momento, o professor poderá pedir outras atividades que julgar necessárias para a exploração dos comandos do Programa.

**Segundo momento:** Desenhando figuras – Tempo Previsto: 1 aula (50 minutos)

Serão desenvolvidas atividades de construção de figuras geométricas regulares ou não, e outros desenhos. Neste momento será pedido aos alunos que desenhem: triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, trapézio, hexágonos, e figuras como casa, carro, estrela e etc.

Aqui vale lembrar que o professor poderá realizar outras atividades explorando o conhecimento prévio dos alunos sobre Geometria.

**Terceiro momento:** Construindo Fractais Geométricos – Tempo Previsto 2 aulas (100 minutos)

Este momento terá como objetivo a utilização do SuperLogo para a construção de alguns Fractais Geométricos. Para cada Fractal Geométrico será pedido para que os alunos construam alguns Fractais até a terceira iteração, fazendo iteração por iteração, e logo, em seguida, será mostrado para eles a solução usando o processo de recursão.

Atividade 1: Utilizando o SuperLogo para a construção das três primeiras iterações do Conjunto de Cantor – (Poeira de Cantor).

Após os alunos mostrarem suas soluções e explicarem suas estratégias, o professor lhes pedirá para que editem o seguinte procedimento:

```

aprenda cantor :x :y
se :y=0 [pf :x pare]
cantor :x/3 :y-1
um pf :x/3 ul
cantor :x/3 :y-1
fim

```

Em seguida, será pedido para aos alunos que, testem o novo procedimento substituindo os parâmetros  $x$  e  $y$  por valores que desejarem. O parâmetro  $x$  indica o comprimento inicial da curva e o parâmetro  $y$  indica o número de iterações.

Na figura abaixo temos o exemplo para  $x = 300$  e  $y = 3$ .

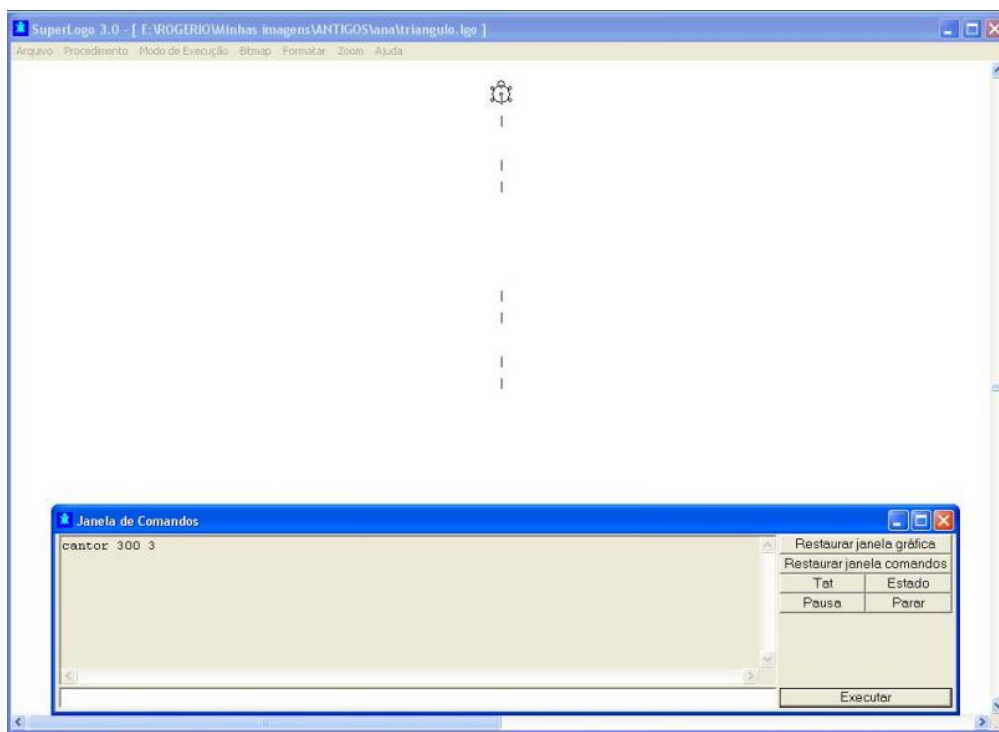


Figura 29. Conjunto de Cantor – (Poeira de Cantor)

Atividade 2: Utilizando o SuperLogo para a construção das duas primeiras iterações da Curva de Koch.



Após os grupos mostrarem suas soluções explicando seus procedimentos ao professor, eles deverão criar o seguinte procedimento:

```

aprenda koch :x :y
se :y=0 [pf :x pare] koch :x/3 :y-1 pe 60
koch :x/3 :y-1 pd 120
koch :x/3 :y-1 pe 60
koch :x/3 :y-1
fim

```

Feito isso será pedido para que testem o novo procedimento trocando o valor do parâmetro x e y por valores que eles desejarem. O parâmetro x indica o comprimento inicial da Curva e o y o número de iterações desejadas.

Na figura abaixo temos o exemplo para  $x = 300$  e  $y = 3$ .

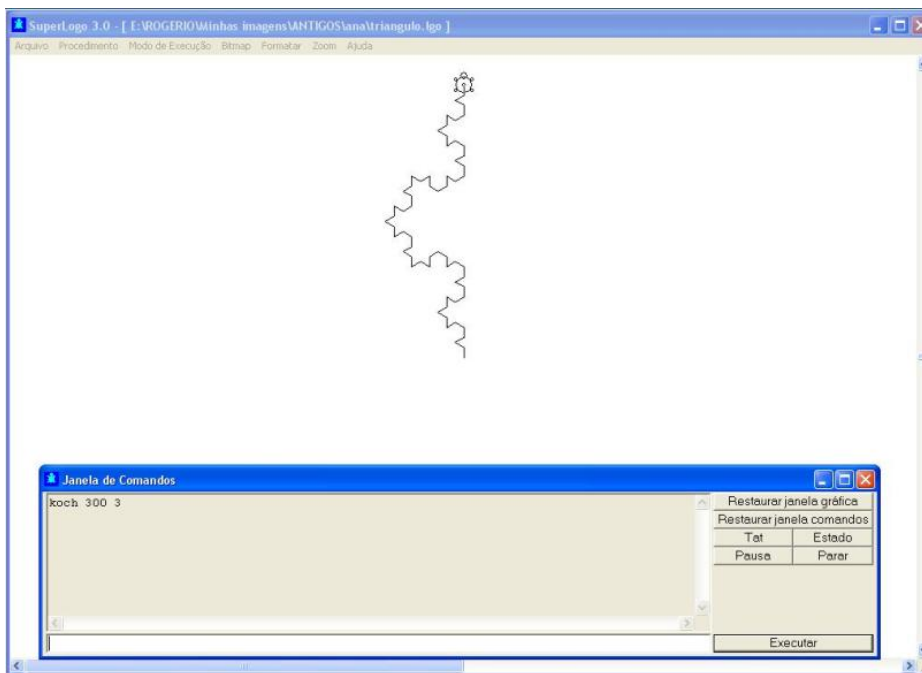


Figura 30. Curva de Koch

Atividade 3: Utilizando o SuperLogo para a construção das duas primeiras iterações da Ilha de Koch (Floco de Neve).

Após os grupos demonstrarem suas soluções explicando seus procedimentos ao professor, eles deverão criar o seguinte procedimento:

*aprenda ilha3 :x :y*

*ad dt*

*repita 3[koch :x :y pd 120]*

*fim*

Feito isso é pedido para que eles testem o novo procedimento trocando o valor do parâmetro x e y por valores que eles desejarem. Neste caso o professor deverá orientar os alunos que o parâmetro x indica o comprimento inicial da Ilha e o y o número de iterações desejadas.

Na figura abaixo temos o exemplo para  $x = 320$  e  $y = 2$ .

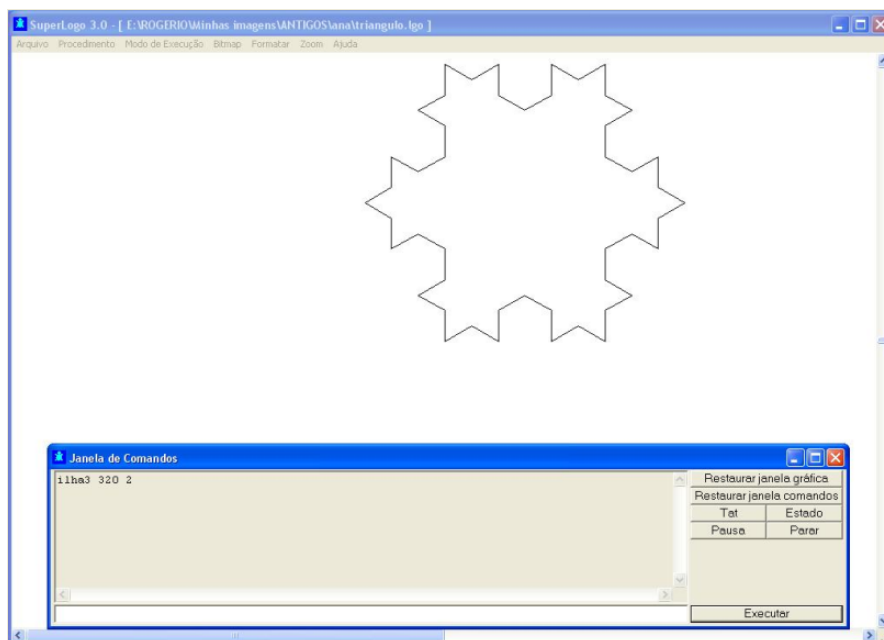


Figura 31. Ilha de Koch – (Floco de Neve)

Atividade 4: Utilizando o SuperLogo para a construção das duas primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski.

Após os grupos mostrarem suas soluções explicando suas estratégias o professor lhes pedirá que criem e salem o seguinte procedimento:

*aprenda tri :x*

*se :x < 3 [pare] repita 3 [tri :x/2 pf :x pd 120]*

*fim*

Feito isso será pedido que testem o novo procedimento trocando o valor do parâmetro x por valores que eles desejarem.

Na figura abaixo temos o exemplo para x = 300.

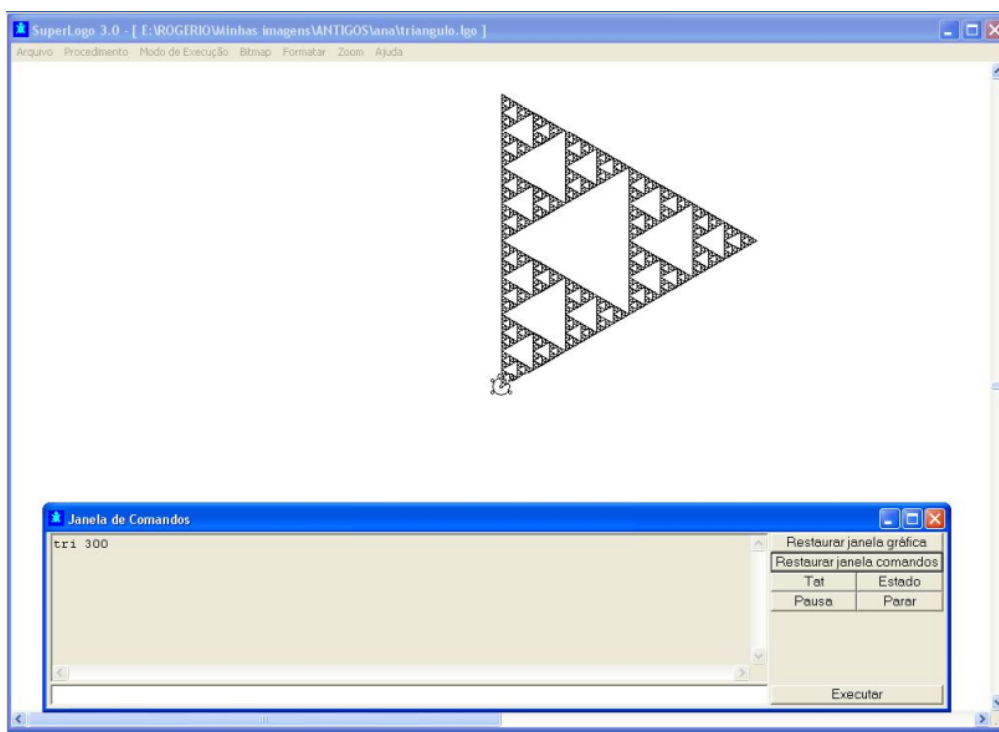


Figura 32. Triângulo de Sierpinski

Com o SuperLogo o professor será capaz de explorar uma série de figuras e comandos. A seguir listamos alguns exemplos.

1. Para desenhar uma samambaia o procedimento será:

*aprenda samb3 :tam*

*mudecl "verde*

*se :tam < 5 [pare]*

*pf :tam / 20*

*pe 80 samb3 :tam \* 0.3*

*pd 82 pf :tam / 20*

*pd 80 samb3 :tam \* 0.3*

```

pe 78 samb3 :tam * 0.9
pe 2 pt :tam / 20
pe 2 pt :tam / 20
dt
fim

```

Testando o novo procedimento para o parâmetro tam = 400 a figura formada será:

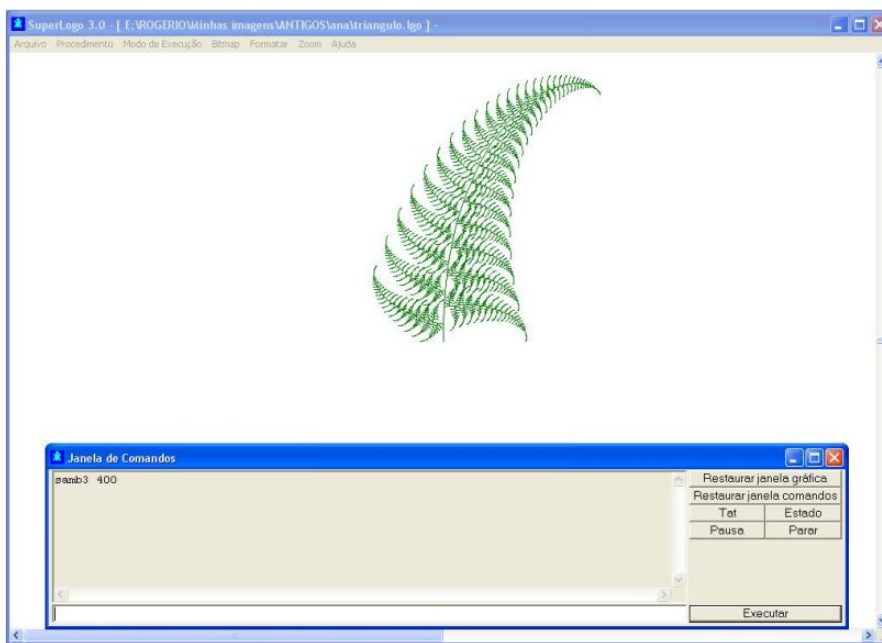


Figura 33. Samambaia

2. Para desenhar uma árvore o procedimento será:

```

aprenda arvore :x
mudecl "verde
se :x<1 [pare]
pf :x
pe 20
arvore :x/1.5
pd 40
arvore :x/1.5
pe 20
pt :x
dt
fim

```

Testando o novo procedimento para o parâmetro x = 100 a figura formada será:

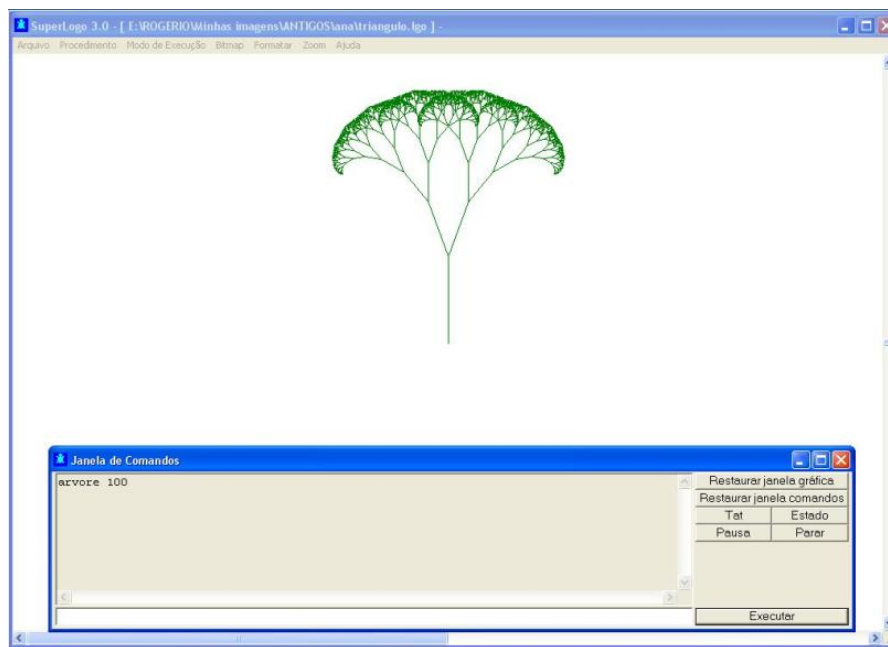


Figura 34. Árvore

### 11. Utilização da experiência prévia dos alunos

Os alunos já possuem conhecimento do uso do computador e de jogos diversos.

### 12. Contextualização

Buscar na Internet diferentes formas, e figuras existentes no seu cotidiano, na arte e na arquitetura que possuem características de fractais.

Pedir para que os alunos tragam fractais presentes na natureza, por exemplo, samambaias, couve-flor, brócolis, e outros.

Aplicar os conhecimentos prévios na aprendizagem do programa Superlogo.

### 13. Trabalho de Pesquisa

Os alunos em duplas e com a orientação do professor deverão desenvolver o trabalho de Pesquisa:

Criar um trabalho artístico e ou arquitetônico com o uso dos fractais, aprendidos com a utilização do programa Superlogo.

### 14. Situação Problema

Propor aos alunos que confeccionem um painel em que retrate situações usando o conhecimento de construção de fractais estudado.

### **15. Desenvolvimento das atividades**

No laboratório de informática, com os alunos dispostos em duplas à frente do computador orientados pelo professor.

### **16. Apresentação dos Trabalhos**

Na quarta aula, as duplas ordenadas farão a apresentação e exposição dos trabalhos realizados para a apreciação do professor e demais alunos.

### **17. Avaliação**

A avaliação será contínua, durante a realização das atividades. Tendo como objetivo avaliar sugestões de procedimentos, empenho dos alunos, estratégias de resolução, trabalho individual e em equipe. O professor deverá fazer um relatório durante as aulas, registrando no diário de classe o desenvolvimento das atividades, avanços e aprendizagem de cada aluno. Também será recomendada, aos alunos, no final do conteúdo, a elaboração de um relatório onde eles deverão descrever o que acharam das atividades. Farão uma avaliação das aulas, das atividades e do próprio aprendizado.

E na culminância (trabalho realizado) em função dos objetivos propostos.

### **18. Bibliografia básica para o professor**

BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula. Coleção Tendências em Educação matemática. 3ª Edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BARROS, Kleber Napoleão Nunes de O; SILVA, Cleibson José; GOMES, Jacqueline Oliveira de Melo. ABORDAGEM ALGÉBRICA, GEOMÉTRICA E COMPUTACIONAL DA CONSTRUÇÃO DOS FRACTAIS.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: 2002.

BRASIL, PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Fundamental – Bases Legais, v.1. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica.1997.

### **19. Referência básica para o aluno**

Internet e o próprio software SuperLogo.

## CAPÍTULO 4

---

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Ao propormos a inserção da geometria fractal no currículo de matemática do Ensino Fundamental também levamos em conta uma metodologia que integrasse vários aspectos da matemática, da arte, da ciência e, principalmente, do uso dos recursos tecnológicos (computador e o software SuperLogo), o que implicou no aumento do interesse dos alunos pela Geometria e na percepção dos mesmos com relação a importância da matemática como conhecimento útil a vida de muitas formas.

Examinamos algumas ponderações que foram realizadas por pesquisadores de softwares específicos para construção de fractais, concluimos que, atualmente os programas são excelentes auxiliares no processo de ensino e aprendizagem de matemática e em especial da geometria.

Também estudamos de forma sintética os principais conjuntos desenvolvidos por Cantor (1845-1918), Koch (1870-1924), Peano (1858-1932), Hilbert (1862-1943) e Mandelbrot (1924-2010) e outros grandes matemáticos que foram apresentados de maneira simplificada, que nos reforçou a ideia de como os softwares educacionais são pertinentes didaticamente à aprendizagem da matemática em sala de aula.

No curso do trabalho, buscamos apresentar as formas intermediárias e finais dos fractais, tanto desenhos geométricos quanto desenhos gerados por computação.

Com este trabalho concluimos que a geometria fractal é um ramo da matemática ainda em desenvolvimento, que é uma geometria que possui grande aplicação na Biologia, na Medicina e Artes. Esperamos que o ensino de fractais nas escolas conecte a Matemática com o mundo fora da sala de aula, quebrando a ideia de

que a Matemática é uma ciência pronta, mostrando que tem aplicações práticas e de fácil compreensão.

Concluimos que, em relação ao uso do computador para o ensino dos fractais, é necessário que os professores, mesmo em condições facilitadas de acesso a computadores e programas especiais para construir fractais, realizem antes o preparo dos alunos para a compreensão dos processos básicos de construções, dos diferentes princípios expostos nas teses dos estudiosos e dos resultados apresentados até o momento.



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] ALMEIDA, Arlete Aparecida Oliveira. Os fractais na Formação Docente e sua Prática em Sala de Aula. Dissertação de Mestrado. PUC de São Paulo, 2006.
- [2] ADAMI, Paulo Sérgio. Fractais No Ensino Médio: Uma Sequência Didática. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos 2013.
- [3] BALDOVINOTTI, Nilson Jorge. Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista – Campus de Rio Claro, 2011.
- [4] BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula. Coleção Tendências em Educação matemática. 3ª Edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.
- [5] BARROS, Kleber Napoleão Nunes de O; SILVA, Cleibson José; GOMES, Jacqueline Oliveira de Melo. Abordagem Algébrica, Geométrica e Computacional da Construção dos Fractais.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: 2002.
- [7] BRASIL, PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Fundamental – Bases Legais, v.1. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica.1997.
- [8] CÁLCULO, São Paulo: Segmento, 2012.
- [9] HOLLANDA, Aurélio Buarque. Dicionário Aurélio. Versão CD Room. 7ª. Edição. Rio de Janeiro: Editora Positivo, 2011.
- [10] MIRANDA, Dimas Felipe de; MOTTA, Marcelo Souza. Geometria da Tartaruga. Contribuições do SuperLogo ao Ensino de Geometria. Belo Horizonte: Do Autor, 2008.
- [11] OLIVEIRA, Dejanir de. A Geometria Fractal no Ensino Fundamental. Tese de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Presidente Venceslau – FAFIPREVE, 2008.
- [12] RABAY, Yara Silvia Freire. Estudo e Aplicações da Geometria Fractal. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- [13] RINALDI, Ricardo Mendonça; MENEZES, Marizilda dos Santos. Geometria Fractal: análise de softwares gráficos educacionais. Paraná: Graphica, 2007.

[14] SERRA, Celso Penteadó; KARAS, Elizabeth Wegner. Fractais Gerados por sistemas dinâmicos complexos. Curitiba: Champagnat, 1997.

[15] SOUZA, Rodrigo Silva de. Fractais Geométricos. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Alfenas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

---

## NOTAS

---

CANTOR, Georg (1845-1918), foi um matemático russo que desenvolveu trabalhos ligados a Teoria dos Conjuntos. São denominados Conjunto de Cantor.

FATOU, Pierre Joseph Louis (1878 – 1929), foi matemático e astrônomo francês que trabalhou no campo da dinâmica complexa.

WILLIAM, Timothy Gowers é um matemático britânico. É professor da Cátedra Rouse Ball de Matemática desde 1998.

HAUDORFF, Felix (1868 – 1942), foi matemático alemão. Ele nasceu em Breslau, hoje Wrocław, na Polônia, é considerado um dos fundadores da topologia moderna e contribuiu de maneira significativa para a teoria dos conjuntos, a teoria da medida, a teoria da função e a análise funcional.

HILBERT, David (1862-1943), matemático alemão que criou o fractal Curva de Hilbert.

JULIA, Gaston Maurice (1893 – 1978), Julia nasceu na Argélia e faleceu em Paris, aos 85 anos. Ganhou certa popularidade por seu trabalho matemático, publicado em 1918, na revista *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, intitulado Memória sobre as interações de funções racionais<sup>13</sup> nesse artigo discutia a interação de função racional, pelo qual recebeu o Grande Prêmio da Academia de Ciências da França.

KOCH, Helge Von (1870-1924), matemático sueco que criou o fractal conhecido hoje como a Curva de Koch.

MANDELBROT, Benoit (1924 – 2010), matemático, de origem polonesa, estudou na Escola Politécnica de Paris. Mudou-se da França em 1948, para estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos. O conjunto de Mandelbrot é o seu fractal mais famoso, ele é constituído por um conjunto de números complexos definidos a partir de uma função dinâmica.

PAPERT, Seymour (Pretória, 1 de Março de 1928) é um matemático e proeminente educador estadunidense nascido na África do Sul. Leciona no Massachusetts Institute of Technology (MIT). Ele é o teórico mais conhecido sobre o uso de computadores na educação, um dos pioneiros da inteligência artificial e criador da linguagem de programação LOGO (em 1967), inicialmente para crianças, quando os computadores eram muito limitados, não existia a interface gráfica e muito menos a internet. O uso do computador é defendido como auxiliar no processo de construção de conhecimentos, uma poderosa ferramenta educacional, adaptando os princípios do construtivismo cognitivo de Jean Piaget a fim de melhor aproveitar-se o uso de tecnologias.

PEANO, Giuseppe (1858-1932) matemático italiano, que em 1890 descreveu a primeira curva (Curva de Peano).

SIERPINSKI, Waclaw Sierpinski (1882-1969) matemático polonês que criou em 1916 o fractal que recebeu o seu nome Triângulo de Sierpinski.

VILENKIN, Alexander (1949): Um físico teórico que tem vindo a trabalhar no campo da cosmologia por 25 anos, Vilenkin escreveu mais de 150 artigos e é responsável pela introdução das ideias de inflação eterna e a criação quântica do universo a partir de um vácuo quântico . Seu trabalho em cordas cósmicas tem sido fundamental.