UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLAUDIO SALDAN

Equações e inequações trigonométricas: uma abordagem com o aplicativo de matemática dinâmica *GeoGebra.*

Maringá – PR
2014

CLAUDIO SALDAN

Equações e inequações trigonométricas: uma abordagem com o aplicativo de matemática dinâmica *GeoGebra.*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

Maringá – PR
2014

FOLHA DE APROVAÇÃO

RESUMO

A trigonometria está presente na vida do homem há milênios, possuindo aplicação na geodésia, na astronomia, nas medições, nas construções, na física e na própria matemática. É comum que os alunos de faculdades e universidades apresentem dificuldades quando é necessário o uso da trigonometria. Propomos, então, neste trabalho uma alternativa ao estudo da trigonometria para o ensino médio, usando como instrumento adicional para aprendizagem o *software* de matemática *GeoGebra*. Abordamos, inicialmente, equações e inequações para após trabalharmos as funções trigonométricas. Neste trabalho, ainda, apresentamos a relação estreita entre a trigonometria e o movimento harmônico, conceito importante da física.

Palavras chave: Trigonometria. Equações. Inequações. Funções. Ensino Médio. *Software*.

Trigonometric equations and inequalities: an approach to the application of dynamic mathematics *GeoGebra*.

ABSTRACT

The trigonometry is present in human life for millennia, with application in geodesy, astronomy, measurements, in buildings, in physics and in mathematics itself. It is common students for colleges and universities present difficulties when the use of trigonometry is required. We propose then, in this paper an alternative to the study of trigonometry for high school, using as an additional instrument for learning the software of mathematics GeoGebra. Approached initially equations and inequalities and after this we are dealing to trigonometric functions. This paper also presents the close relationship between the trigonometry and harmonic motion, an important concept of physics.

Keywords: Trigonometry. Equations. Inequalities. Functions. High School. Software.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 6

A TRIGONOMETRIA NA HISTÓRIA 8

PRÉ-REQUISITOS 10

2.1. Ângulos 10

2.2. Círculo 12

2.3. Plano cartesiano 14

2.4. Trigonometria no triângulo retângulo 15

2.5. Funções trigonométricas 17

O CICLO E AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS 19

3.1. Círculo e plano cartesiano 19

3.2. Círculo orientado 23

3.3. As razões trigonométricas no ciclo 28

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 36

4.1. Equações trigonométricas 36

4.1.1. Solução geral de uma equação trigonométrica 38

4.2. Inequações trigonométricas 40

APLICAÇÃO A FÍSICA 43

5.1 O MHS e o movimento circular uniforme 43

CONCLUSÃO 45

REFERÊNCIAS 46

APÊNDICE 48

INTRODUÇÃO

Neste trabalho pretendemos desenvolver o tema de equações e inequações trigonométricas de forma um pouco diferente do que abordam as apostilas e os livros didáticos adotados por várias escolas, independentemente de serem da rede pública ou privada. A diferença está na ordem com que abordaremos o assunto dentro da trigonometria. Sugerimos que o tema seja desenvolvido antes das funções trigonométricas. Quando os alunos se deparam com as funções polinomiais de primeiro ou segundo graus, eles já sabem resolver as equações e inequações, assim, com esta perspectiva desenvolveremos o assunto.

Por outro lado faremos a abordagem do assunto utilizando como instrumental o *software* matemático *GeoGebra*, pois introduz uma dinâmica ao assunto da trigonometria que, do nosso ponto de vista, é muito importante para sua compreensão. Ainda podemos salientar que com o uso do *software* o aluno interessado pode construir suas próprias conjecturas, testar suas hipóteses, confirmar resultados, entre outros.

Não é nada difícil encontrarmos entre os estudantes do ensino médio aqueles que têm muita dificuldade com o assunto em questão. Esta lição foi comprovada pela experiência pessoal de lecionar em cursos preparatórios e no ensino médio há pelo menos 17 anos. Nosso objetivo é apresentar ferramentas apropriadas e fundamentadas para que professores e alunos logrem êxito com o desenvolvimento, entendimento e aplicação dos temas propostos, tanto na resolução de problemas relativos ao ensino médio (processos seletivos, provas e vestibulares) quanto na vida acadêmica que porventura almejem.

O aluno deve conhecer as relações trigonométricas no triângulo retângulo, alguns conceitos de geometria euclidiana (ponto, reta, ângulos, arcos e círculo), deve ainda conhecer o plano cartesiano com o entendimento da bijetividade entre a reta e os números reais. Por darmos um foco maior ao assunto usaremos um conjunto de axiomas e definições que poderá ser utilizado como uma revisão de estudos, pois são tópicos abordados no ensino fundamental, antes da abordagem do tema principal *equações* e *inequações trigonométricas*. Este conjunto é apresentado no Capítulo 2 e aproveitamos estes resultados para conciliar a revisão dos pré-requisitos com o aprendizado da manipulação e utilização do *software GeoGebra*, para tanto podemos destacar, entre outros, [4], [13] e [14], que tratam desses assuntos com a utilização do *software*.

A parte da trigonometria, quando abordada, é feita em algumas grades curriculares do ensino médio na 1ª série e, em outras, na 2ª série. Não há uma unificação em relação às grades curriculares das instituições de ensino, conforme informa a Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação, secretaria que responde pela educação infantil, ensino fundamental e médio do país, veja [11]. Atualmente, os documentos que norteiam a educação básica são a Lei 9.394, que estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica e o Plano Nacional de Educação para os anos 2011-2020 (aprovado pelo Senado em 1-12-2013 e encaminhado a Câmara dos deputados).

Entendemos que uma alternativa para a exploração do conteúdo de trigonometria é que ele seja apresentado na primeira série do ensino médio, dado que nesta série o aluno entra em contato mais efetivamente com os conceitos de função, tendo visto recentemente, nos últimos anos do ensino fundamental, as relações trigonométricas no triângulo retângulo e os primeiros conceitos de relações, funções e o plano cartesiano. A trigonometria ainda deve ser abordada novamente quando da apresentação do tópico sobre os números complexos e o início da geometria analítica, como uma revisão e/ou aprofundamento do assunto.

No Capítulo 3 desenvolvemos a construção do que acreditamos ser a base necessária para que o estudante aprofunde o estudo da trigonometria fora do triângulo retângulo e dos ângulos agudos, com o auxílio do *GeoGebra* estabelecemos o conceito de ciclo trigonométrico, ferramenta para a resolução de equações e inequações trigonométricas que dá título a este trabalho e se desenvolve no Capítulo 4.

Apresentamos, no Capítulo 5, uma aplicação do tema na Física, de tal forma que o aluno possa reconhecer uma aplicação prática do ciclo trigonométrico e das equações trigonométricas. Mais especificamente, introduzimos o MHS (Movimento Harmônico Simples) e o MCU (Movimento Circular Uniforme).

Por fim, apresentamos, no Apêndice, dois planos de aula relativo à construção do ciclo trigonométrico e a resolução de inequações com o uso do *GeoGebra*.

CAPÍTULO 1

A TRIGONOMETRIA NA HISTÓRIA

A trigonometria ainda é usada como nos tempos dos surgimentos de suas ideias primordiais (ou fundamentais), mas outras aplicações a esta “ferramenta” foram atribuídas, durante o tempo, até nossos dias. A palavra que atribui a esta “ferramenta” corpo próprio dentro da matemática só foi cunhada e adotada nos termos de hoje no século XVI de nossa era.

O foco da trigonometria quando do seu surgimento estava voltada para uma matemática mais prática (ou mecânica) nas construções de edificações, mensurações geográficas e astronômicas, por exemplo, abusando da linguagem uma trigonometria mais parecida com a geometria. Relacionar ângulos e medidas foi uma grande solução para resolver muito dos problemas e responder várias questões que se impunham então.

Devido à escassez de registros, seja pela forma como eram feitos, podemos citar os papiros que não possuem grande resistência às ações do tempo, ou pelas tradições de transmissão de ideias de forma oral, ou ainda porque simplesmente não foram encontrados, a história da trigonometria fica restrita a poucos documentos e conjecturas (e elucubrações).

Ao vislumbrar a história sob o ponto de vista das divisões políticas (pela predominância de uma língua em determinadas regiões) um registro muito citado, talvez por ser o mais extenso registro matemático egípcio conhecido, o Papiro de Ahmes (Papiro de Rhind), traz em seu interior relações entre os lados de um triângulo numa pirâmide regular. Em um contexto diferente, primeiro os babilônios e, posteriormente, os gregos desenvolveram conceitos fundamentais da trigonometria. Há ainda indícios fortes de atividades sob o tema em textos chineses e hindus. Para os babilônios e gregos o foco principal era a astronomia. Construções de calendários com bom grau de precisão para a época demandavam bons métodos e muitos cálculos. Para isto, listas de números tabelados surgem para relacionar ângulos e comprimentos de arcos. De especial destaque neste período, no que tange a trigonometria, citamos o trecho a seguir:

> “Klaudius Ptolemaios, ou Ptolomeu, viveu e trabalhou em Alexandria em torno de 150 d.C. Embora as datas e detalhes precisos de sua vida nos sejam desconhecidos seu trabalho principal, hoje geralmente

> chamado o *Almagesto*, fornece testemunhos que permitem datá-lo dos meados do século dois, pois neste trabalho ele cita suas próprias observações de eventos astronômicos identificáveis.” (AABOE, 2002, p. 129)

Em sua *Coleção Matemática* (*Almagesto*), Ptolomeu aborda o assunto da trigonometria, entre outros, e apresenta uma tabela de cordas e como esta pode ser calculada. Para a construção da tabela, os métodos empregados nos remetem às fórmulas de obtenção do seno de uma soma e da diferença, entre outras relações.

Muito foi incorporado e acrescentado ao estudo da trigonometria para que atingisse o patamar em que se encontra. Podemos citar alguns textos hindus com contribuições significativas: *Surya Siddhanta* que define *jiva* como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa; *Varahamihira* onde é possível ver a demonstração de algumas identidades trigonométricas. Além disso, *Al Battani* (príncipe da Síria) ao qual se atribui a introdução do círculo de raio unitário; Nasîr Ed-dên AL-Tûsî, astrônomo persa que apresenta um primeiro trabalho no qual a trigonometria plana aparece como ciência; *Regiomontanus* em seu *Tratado sobre triângulos*; *Viète* dando um tratamento analítico à trigonometria; *Pitiscus* onde o termo trigonometria aparece em título num livro seu; *John Wallis* apresenta fórmulas usando equações em vez de proporções, além de trabalhos com séries infinitas. Para mais detalhes, veja [1] e [5].

Segundo Costa, em [7], a trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número.

CAPÍTULO 2

PRÉ-REQUISITOS

O objetivo deste Capítulo é dar sustentação teórica para o estudante e auxiliá-lo no estudo das funções trigonométricas. Apresentamos uma série de axiomas e definições que sustentarão as argumentações que se sucederão. Tais definições e axiomas serão referenciados quando de sua apresentação no trabalho. Também, devemos observar que usamos os axiomas da geometria euclidiana que não são elencados neste trabalho. No entanto, tais axiomas podem ser encontrados em [3].

2.1. Ângulos

Iniciamos esta seleção de conteúdos, assumindo o conceito geométrico (qualitativo) de ângulo e posteriormente, um tratamento quantitativo de ângulo.

Definição 1: *Ângulo é a figura formada por duas semirretas com a mesma origem.*

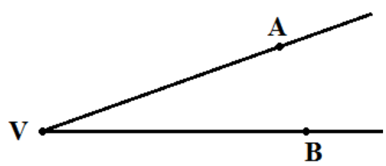


Figura 1: Ângulo formado pelas semirretas VA e VB, onde
V, A e B são pontos de um plano.

Na Figura 1, as semirretas VA e VB são chamadas *lados* do ângulo e o ponto V, comum as duas, é dito *vértice* do ângulo. É importante observarmos que na Figura 1 existem dois ângulos formados pelas semirretas, assim, para uma diferenciação é comum usarmos um sinal gráfico, conforme mostra a figura abaixo, para deixar claro de que ângulo estamos nos referindo.

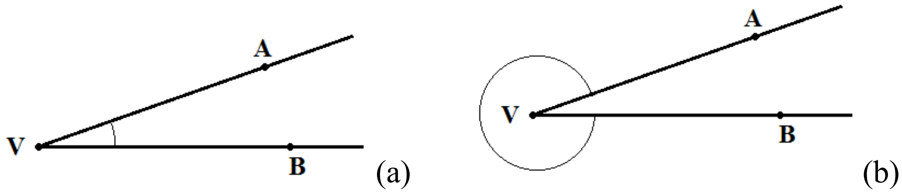


Figura 2: Dois ângulos formados pelas mesmas semirretas.

O primeiro axioma assegura que podemos medir ângulo e que este terá medida maior ou igual a zero.

Axioma 1: *Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes.*

O *grau* é a unidade de medida de um ângulo no contexto geométrico.

Tomemos um círculo de raio *r* e centro *O*. Definimos o ângulo de 1^o (um grau) tomando o círculo e o dividindo em 360 arcos de mesmo tamanho, assim, cada uma das partes em que foi divido o círculo $\left(\frac{1}{360}\right)$ é o equivalente a 1^o.

Ressaltamos que não há nenhuma relação entre o tamanho (medida) do raio *r* do círculo e a medida de grau.

Não se tem certeza quanto à escolha do valor de 360^o para uma volta completa, mas especula-se que tenha surgido naturalmente das observações astronômicas, dado que a duração de um ano terrestre é de aproximadamente 360 dias, além de possuir vários divisores. Podemos, ainda, apontar sobre o sistema de numeração babilônico (sistema sexagesimal) como motivo, provável, da adoção da medida de 360º (=6x60) para uma volta completa, pois, temos que cada grau dividido por 60 resulta em um minuto e cada minuto dividido por 60 gera o segundo.

Utilizamos as seguintes nomenclaturas para as medidas de ângulo: *raso (ou meia volta)* para o ângulo de 180^o; *reto* para o ângulo de 90^o; *agudo* para um ângulo menor que 90^o, por exemplo, o que vemos na Figura 2 (a); *obtuso* para um ângulo maior que 90^o e menor que 180^o; *convexo* para um ângulo menor que 360^o e maior que 180^o, como na Figura 2 (b).

2.2. Círculo (no sentido de circunferência)

Vamos definir o círculo no plano, para isso, lançaremos mão de mais dois axiomas:

Axioma 2: *A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes*.

Axioma 3: *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes*.

Sejam A e B pontos sobre uma reta *t*, chamamos de *coordenada do ponto* o número que se refere o Axioma 3. Sejam *a* e *b* números reais, são as coordenadas de A e B, respectivamente, a *distância entre A* e *B* (ou o *comprimento do segmento AB*) é dada pelo módulo da diferença entre a e b, ou seja, $AB = |b - a|$.

A unidade de medida referente ao comprimento de um segmento depende do contexto em que se está inserido, assim dizemos apenas *unidade de comprimento* quando a unidade de medida é irrelevante aos nossos propósitos.

Definição 2: *Sejam A um ponto do plano e r > 0. O círculo de centro A e raio de medida r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que a distância de A a B é r.*

O termo círculo é ambíguo, ora quer dizer curva, ora região por ela limitada. Quando nos referirmos à região por ela limitada devemos usar a palavra “disco”, veja [8].

O *comprimento* de um círculo (ou *perímetro*) pode ser encontrado partindo das aproximações do círculo por uma poligonal. O comprimento C do círculo é dado por $C = 2\pi R$, onde R é a medida do raio. Para mais detalhes, consulte [3].

Tomando dois pontos A e B, não coincidentes, sobre um círculo de centro O, o segmento que os une é chamado de *corda* e cada porção do círculo, que fica dividido pelos pontos A e B, é chamado *arco*. Uma corda que passa pelo centro do círculo é denominada *diâmetro*.

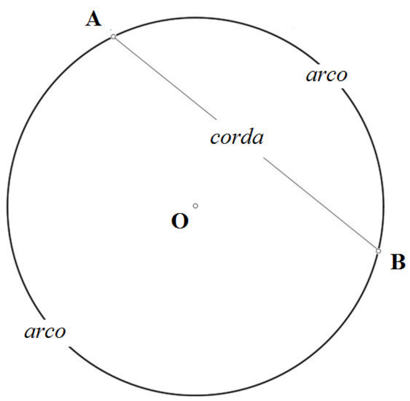


Figura 3: *Corda* e *arcos* determinados pelos pontos A e B.

Observemos que, tomado qualquer ponto C entre os pontos A e B sobre o círculo em um dos arcos, em um destes o raio OC intercepta a corda AB, e no outro não. Denotaremos o primeiro de arco menor e o segundo de arco maior. No caso da corda ser diâmetro não há, evidentemente, esta distinção.

Agora usamos as seguintes definições, que podem ser encontradas em [4], e introduzimos a medida de ângulo em *radianos*.

Definição 3: *Um ângulo central de um círculo é um ângulo cujo vértice é o centro do círculo.*

Definição 4: *A medida em graus de um arco de um círculo é a medida em graus do ângulo central correspondente.*

Usando as Definições 3 e 4, definimos radianos, conforme citado em [6].

Definição 5: *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo central e o raio do círculo.*

Observamos, assim, das Definições 4 e 5, a seguinte relação: *dado um semicírculo de raio R, vale*

$$180^{\circ} = \frac{\pi R}{R} = \pi \text{ radianos}.$$

Da Definição 5, podemos afirmar ainda que a medida de um ângulo em radianos não depende da unidade de comprimento considerada. Quando o raio do círculo é igual a 1, a medida do ângulo coincide com o comprimento do arco.

2.3. Plano cartesiano

Quando fixamos um par de eixos ortogonais, contidos em um mesmo plano e com mesma origem, dizemos que temos um *sistema de coordenadas* (*cartesianas*) *retangulares*. Este sistema de coordenadas divide o plano em quatro regiões denominadas *quadrantes*. Através do sistema de coordenadas estabelecemos uma correspondência biunívoca, que faz corresponder a cada ponto P do plano um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onde x e y são as coordenadas do ponto P relativamente ao sistema de coordenadas cartesianas, e são chamados, respectivamente, *abscissa* e *ordenada* de P.

Chamamos de *eixo* a uma reta orientada na qual se fixa um ponto, dito *origem*, e cuja coordenada é arbitrariamente igual à zero. Temos ainda que uma *reta orientada* é a reta em que se escolhe um sentido como sendo positivo. Enquanto que, o sentido inverso será negativo.

Estabelecidos a origem (digamos o ponto O) e o sentido positivo para a reta, então um ponto P da reta tem coordenada p real igual à distância de O a P, se P estiver à direita de O, caso contrário terá coordenada $-p$. Devemos entender "um ponto A estar à direita de um ponto B" se, partindo de B para A, estivermos no sentido positivo da reta.

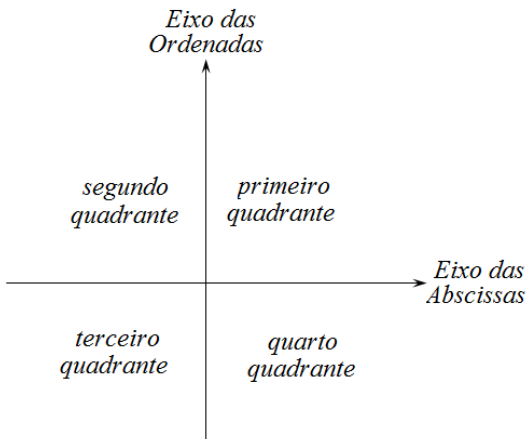


Figura 4: Sistema de coordenadas cartesianas retangulares (*plano cartesiano*) e a ordenação de seus quadrantes e eixos.

Para encontrarmos o par ordenado associado a um ponto P no plano cartesiano, traçamos as perpendiculares ao eixo das abscissas (eixo x) e ao eixo das ordenadas (eixo y) que passam por P, anotando os pontos de intersecção das perpendiculares com os eixos coordenados. Assim, por exemplo, se o ponto P coincidir com o ponto O (origem) será representado pelo par ordenado (*0, 0*), pois as perpendiculares aos eixos traçadas passando por P, neste caso em particular, coincidem com os eixos x e y e interceptam os eixos coordenados exatamente sobre a origem destes dois eixos. Para mais detalhes, consulte [10].

2.4. Trigonometria no triângulo retângulo

Conforme podemos ver em [9], a semelhança de triângulos é a base de sustentação da trigonometria. Definiremos as relações seno, cosseno e tangente da seguinte forma:

Definição 6: *Dado um triângulo retângulo de hipotenusa* c *e catetos* a *e* b*, denotamos os ângulos agudos* α *e* β *opostos, respectivamente, a* a *e a* b. *Definimos:*

$$sen(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad e \quad tg(\alpha) = \frac{a}{b}.$$

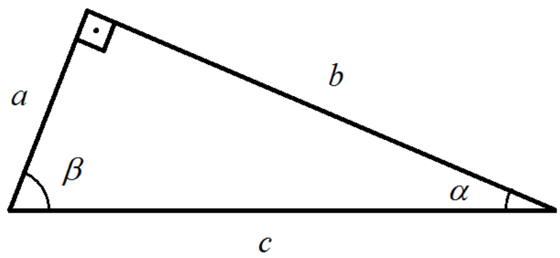


Figura 5: Triângulo retângulo de lados *a, b* e *c*.

Analogamente, temos $$sen(\beta) = \frac{b}{c}, \quad cos(\beta) = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad tg(\beta) = \frac{b}{a}.$$

Podemos ainda obter, conforme vemos em [6] relações (funções) trigonométricas auxiliares. Tais relações são números inversos das relações seno, cosseno e tangente, e as chamaremos, respectivamente, de cossecante (cossec), secante (sec) e cotangente (cotg).

Assim, da Definição 6, temos

$$\operatorname{cossec}(\alpha)=\frac{c}{a}; \qquad \sec(\alpha)=\frac{c}{b}; \qquad cotg(\alpha)=\frac{b}{a}.$$

Ressaltamos que neste tópico os conceitos são particularizados para α (ou β) ângulos agudos, ou seja, ângulos compreendidos no intervalo aberto $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (em radianos). No próximo capítulo, introduziremos conceitos que nos auxiliarão na definição de seno e cosseno de ângulos quaisquer.

Tomando o triângulo retângulo descrito na Definição 6 obteremos a Relação Fundamental: $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$. De fato, pelo Teorema de Pitágoras, vem que

$$a^2+b^2=c^2.$$

Como c é lado do triângulo, podemos dividir a igualdade acima por c^2, obtendo:

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}\Rightarrow\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

Da Definição 6, vem que

$$sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1.$$

Agora, mostramos a definição de tangente como razão entre seno e cosseno. Da Definição 6, $tg(\alpha)=\frac{a}{b}$. Dividindo o numerador e o denominador por c, obtemos: $tg(\alpha)=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$.

Novamente da Definição 6, concluímos que $tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$.

Finalmente, listamos as relações auxiliares em função de seno e cosseno:

$$\operatorname{cossec}(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}; \qquad \sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}; \qquad cotg(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)}.$$

2.5. Funções trigonométricas

Um dos conceitos mais úteis em matemática é o conceito de função. É comum definir uma função como uma associação, ou correspondência, que para cada elemento de um determinado conjunto *A* está relacionado um único elemento de um conjunto *B*. Por exemplo, sejam *A* o conjunto dos ângulos θ, agudos, de um triângulo retângulo e *B* o conjunto dos números reais, se fizermos corresponder a cada elemento θ de *A* ao valor da razão entre os catetos adjacente e oposto, de θ, no triângulo retângulo, estaremos definindo uma função de *A* em *B*.

Definiremos uma função da seguinte forma:

Definição 7: *Uma função f de um conjunto A em um conjunto B é uma correspondência que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B. O elemento y é chamado imagem de x pela f, e se denota por f(x). O conjunto A é o domínio da função.*

Conforme [9], "...com a criação do Cálculo Infinitesimal [...], surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável real."

As funções trigonométricas são chamadas de *transcendentes* (assim como as funções exponenciais e logarítmicas), em oposição às funções *algébricas* que podem ser expressas em termos de somas, diferenças, produtos, quocientes ou raízes de funções *polinomiais*. Uma função f é chamada polinomial se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ para todo x, onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são números reais e os expoentes são inteiros e não negativos.

A seguir, apresentamos a definição de funções trigonométricas que usa a noção de círculo unitário que apresentaremos com detalhes no Capítulo 3. Nesta seção utilizarmos o círculo unitário $C = \{(x, y) \in IR; x^2 + y^2 = 1\}$, isto é, C é a circunferência de centro (0, 0) e raio 1.

Definição 8: *Se t é um número real e P(x, y) é o ponto do círculo unitário C correspondente a t, então*

$$sen(t) = y \qquad\qquad cos(t) = x$$

$$cossec(t) = \frac{1}{y} \quad (\text{se } y \neq 0) \qquad\qquad sec(t) = \frac{1}{x} \quad (\text{se } x \neq 0)$$

$$tg(t) = \frac{y}{x} \quad (\text{se } x \neq 0) \qquad\qquad cotg(t) = \frac{x}{y} \quad (\text{se } y \neq 0)$$

Fazemos a correspondência do número real t a um ponto P do círculo da seguinte forma: seja A o ponto de coordenadas (1,0), se t é um número entre 0 e 2π, então existe precisamente um ponto $P \in C$, tal que o comprimento do arco AP, medido no sentido anti-horário a partir de A, é t. Se $t > 2\pi$, devemos continuar a percorrer o círculo, no sentido anti-horário, dando tantas voltas quantas forem necessárias. Se $t = 0$, P coincide com A. Se t é real negativo, de modo análogo, obtemos o ponto P medindo-se a distância $|\, t \,|$ a contar de A, no sentido horário, em C. Como o comprimento de C é igual a 2π o ponto correspondente a t é de forma geral dado por $t + 2k\pi$, com k um número inteiro.

Assim, definidas as funções seno e cosseno, observamos ainda que:

$$\text{sen}(t + 2k\pi) = \text{sen}(t) \qquad \text{e} \qquad \cos(t + 2k\pi) = \cos(t).$$

CAPÍTULO 3

O CICLO E AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste Capítulo, sugerimos como apresentar os conceitos de seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante expandidos para ângulos quaisquer, utilizando diretamente o *software GeoGebra*.

Utilizamos neste trabalho o *GeoGebra* 4.4.10.0. O *software GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone* que possui distribuição livre e pode ser encontrado em http://www.geogebra.org/.

Para cumprir a tarefa de expandir os conceitos das razões trigonométricas para ângulos quaisquer (Seção 3.3), necessitamos construir o que aqui chamaremos de *ciclo trigonométrico*, que definiremos como a seguir e o construiremos nas Seções 3.1 e 3.2.

Definição 9: *O ciclo trigonométrico é o círculo orientado de raio unitário e com centro na origem do plano cartesiano*.

3.1. Círculo e plano cartesiano

Para iniciarmos a construção do ciclo trigonométrico, traçamos um círculo de raio unitário no plano cartesiano de tal forma que o seu centro coincida com a origem do plano cartesiano.

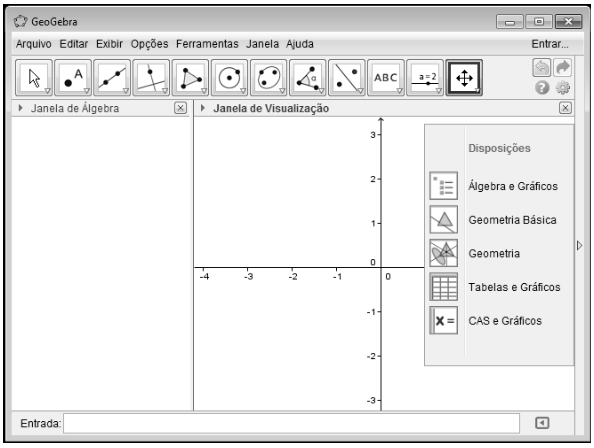
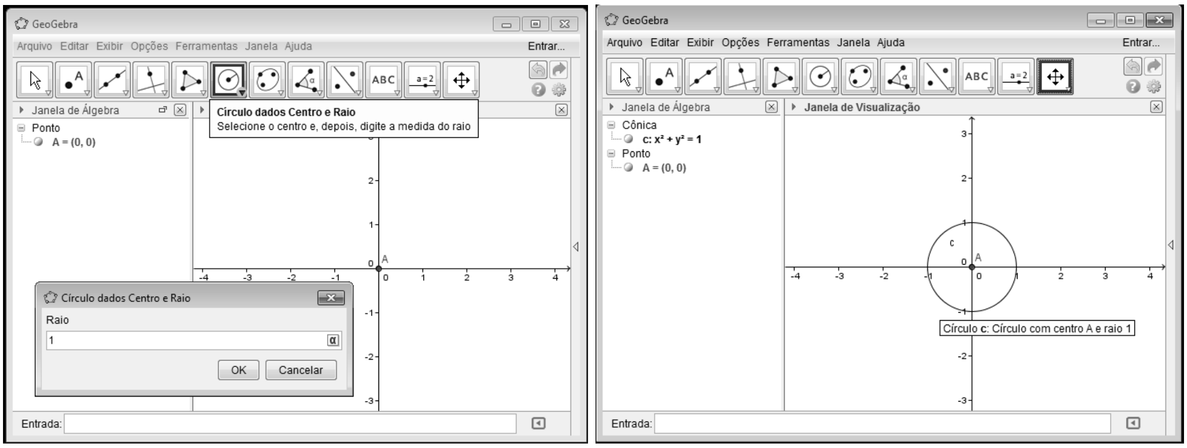


Figura 6: Tela de inicialização do *software.*

Como podemos observar na Figura 6, o plano cartesiano é um dos "panos" de fundo do *GeoGebra*, assim, fica fácil nosso trabalho, basta que tracemos um círculo de raio igual a um localizando o centro na origem do plano cartesiano. Na figura abaixo temos o procedimento necessário para tal construção.



(a) (b)

Figura 7: (a) Em destaque: o ícone para a construção de círculo com centro em A e raio 1. (b) Resultado obtido.

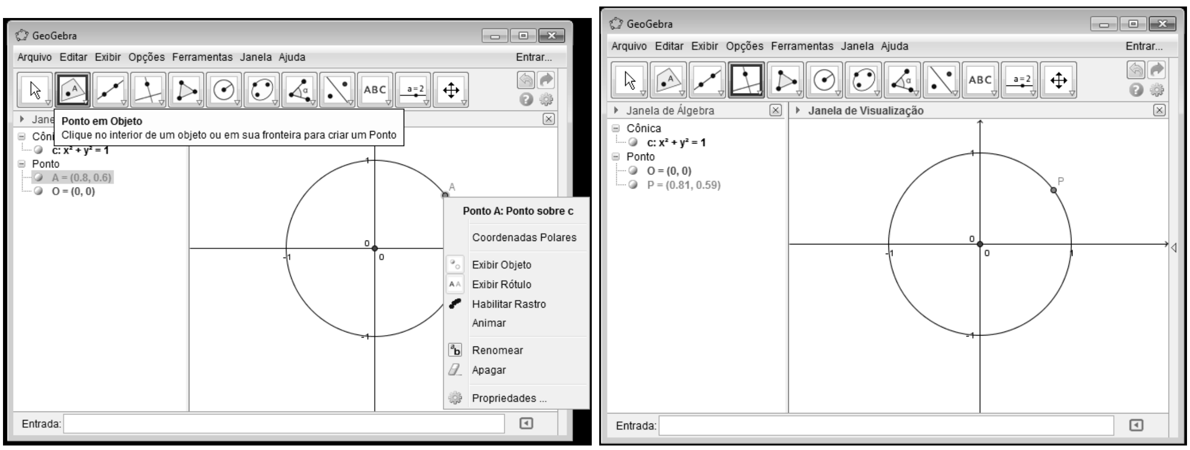
A seguir, destacamos que:

(i) Na *janela de álgebra* aparecem as coordenadas do centro, que é automaticamente nomeado por A e a equação da cônica (circunferência). A equação é mais interessante para o aluno quando ele está estudando as cônicas em geometria analítica, por enquanto, neste trabalho não nos valeremos desta ferramenta;

(ii) Na *janela de visualização*, com ajuda do efeito de aumentar e diminuir o *zoom* é possível observar a magnitude do círculo ante o plano cartesiano, visualizando os pontos de intersecção dos eixos ordenados e o círculo, projetar os intervalos de valores (com mínimos e máximos) para *x* e *y* limitados ao círculo, o que nos leva a discutir acerca da imagem das funções seno e cosseno.

Para fins de padronização de nomenclatura, renomeamos o centro do círculo com a letra O e ocultaremos seu rótulo. Também ocultaremos o rótulo *c* atribuído, automaticamente, ao círculo.

O próximo passo será colocar um ponto sobre o círculo e determinar o par ordenado que o representa. Nesta etapa reforçamos o item (ii) das observações anteriores, ressaltando os valores obtidos com os elementos geométricos. O *GeoGebra* permite que escolhamos o número de casas decimais para a representação do ponto (*Opções* + *Arredondamentos*), assim, podemos encontrar as coordenadas com boas aproximações, no entanto, o limite é de 15 casas decimais.



(a) (b)

Figura 8: (a) Em destaque: ícone para criar ponto sobre objeto e janela para renomear objeto. (b) Resultado obtido.

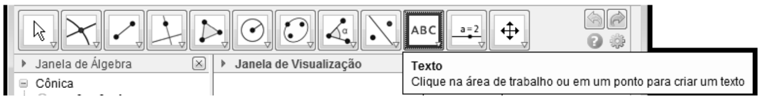
Na *janela de álgebra* visualizamos as coordenadas do ponto P. Basta que arrastemos o ponto P para que os valores das coordenadas sejam visualizados.

Para a visualização geométrica das coordenadas, traçamos as projeções do ponto sobre os eixos. Destacamos, assim, os segmentos perpendiculares aos eixos coordenados e os valores da abscissa e ordenada, intersecções com os eixos. Descrevemos, a seguir, tais procedimentos.

(a)

(b)

(c)



(d)

(e)

Figura 9: (a) Em destaque: ícone para traçar as retas perpendiculares;
(b) Em destaque: ícone para determinar o ponto de intersecção das retas perpendiculares com os eixos ordenados;
(c) Em destaque: ícone de segmento, ponto P e os pontos em (b);
(d) Em destaque: ícone para representação na figura da abscissa e da ordenada;
(e) Em destaque: caixa de diálogo para configuração do texto.

O conjunto de ações anteriores resulta no que podemos observar na Figura 10, a seguir.

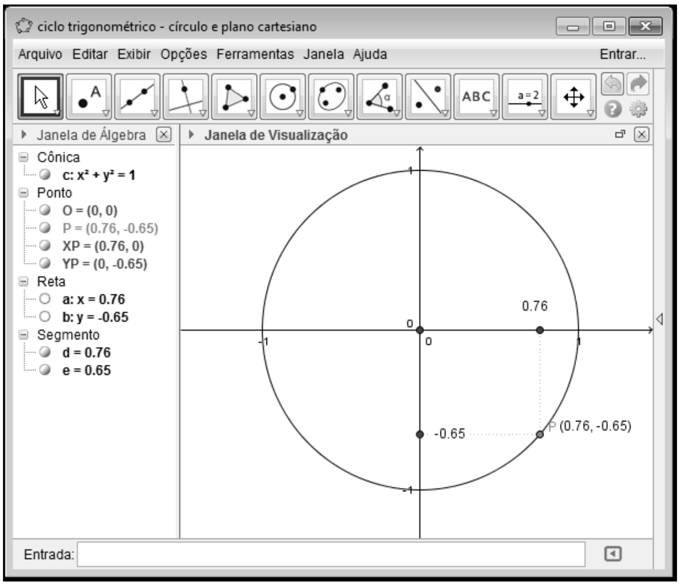


Figura 10: Ponto sobre círculo e suas coordenadas cartesianas.

Na *janela de álgebra* podemos verificar os pontos de interseção das perpendiculares ao eixo das abscissas (ponto XP) e ao eixo das ordenadas (ponto YP) que passam por P, os segmentos *d* e *e* relativos as medidas das distâncias de XP a O e de YP a O, respectivamente, e as equações das retas *a* e *b*.

Na *janela de visualização* podemos fazer o ponto percorrer o círculo, e assim, observar as variações no eixo das abscissas e das ordenadas introduzindo um texto para visualizar as alterações que o movimento do ponto sobre o círculo promove. Podemos, ainda, explorar a relação entre a posição do ponto nos quadrantes e os sinais das abscissas e ordenadas.

3.2. Círculo orientado

Dado um ponto P = $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, localizado sobre o círculo de centro na origem e raio unitário, como o construído na Seção anterior, se desejamos percorrer com este ponto, por exemplo, um arco de $\pi/4$ radianos (aproximadamente 0,79 radianos, da Definição 5 este arco tem aproximadamente 0,79 unidades de comprimento) encontramos diversas formas distintas de realizar a tarefa, dado que não possuímos informações sobre a localização inicial de P ou qual sentido de orientação devemos seguir.

Para que não restem dúvidas quanto à localização de um arco, devemos definir um sentido e um ponto de início para a medição dos arcos, tradicionalmente, utilizamos o sentido anti-horário para valores positivos e fixamos no círculo unitário, agora orientado, o ponto A = (1, 0), chamando-o de *origem dos arcos*. Passamos a chamar de *medida algébrica* de um arco AP deste círculo ao comprimento do arco AP associado a um sinal positivo se o sentido for anti-horário e negativo se o sentido for horário. Para mais informações, veja [6].

Construamos o círculo orientado utilizando o *GeoGebra*.

Observamos, inicialmente, que o *software* permite que trabalhemos com ângulos em graus ou em radianos, para as nossas pretensões é conveniente que usemos a unidade radianos, embora não seja necessário adotarmos tal procedimento. Para fazer a mudança de unidade de medida devemos usar o comando (*Preferências* + *Avançado*).

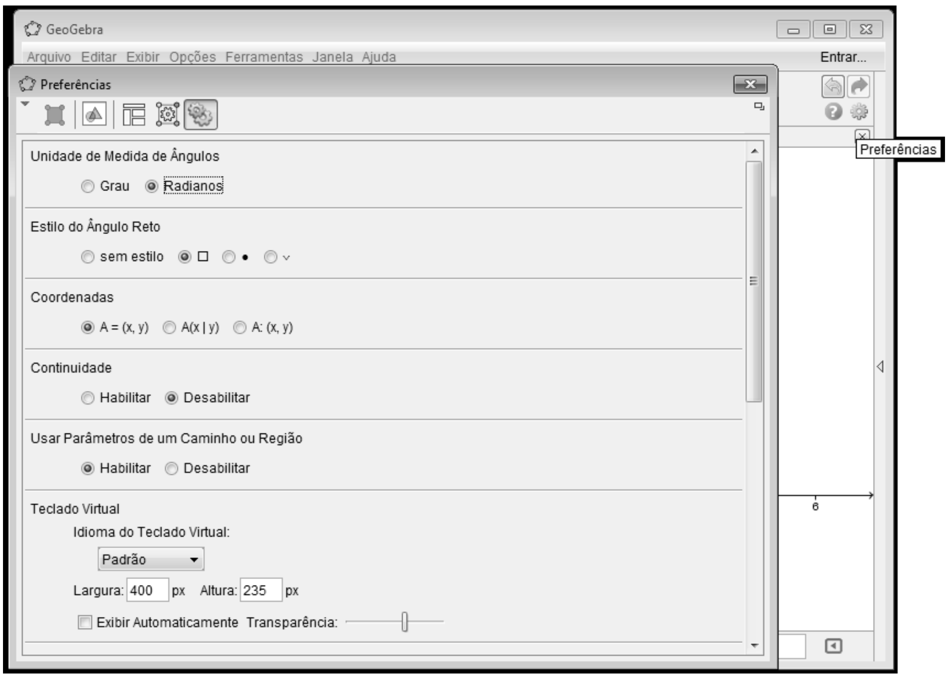


Figura 11: Em destaque: a janela para mudança de unidade de medida e outras preferências.

Utilizando a construção descrita na Seção 3.1 (Figura 7) introduzimos àquela construção o ponto A = (1, 0).

No *software* podemos reforçar a situação de que o ponto A está na intersecção entre o círculo e o eixo das abscissas.

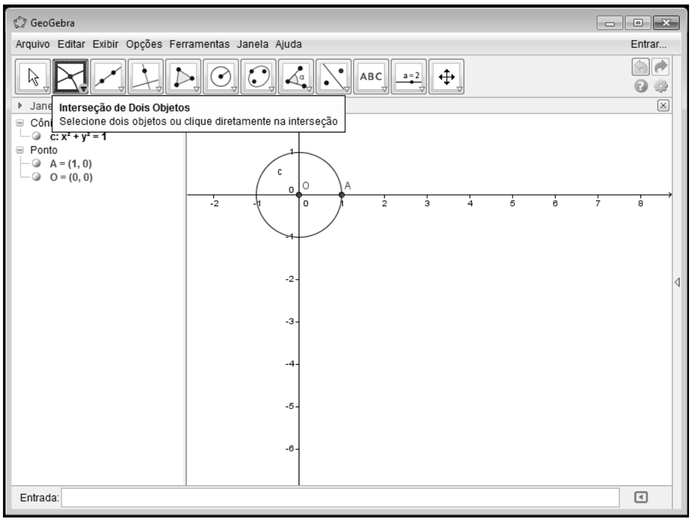
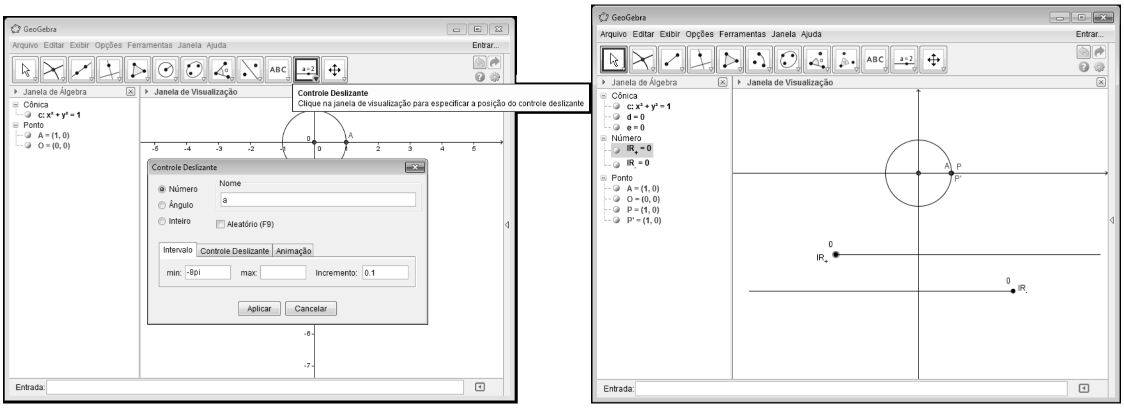


Figura 12: Ponto A, intersecção entre o círculo e o eixo das abscissas.

Da Definição 5, podemos relacionar um ponto da reta ao comprimento de um arco. Assim se queremos encontrar os números reais, por exemplo, 2 e –2, sobre o círculo, devemos encontrar os arcos AP que, em valor absoluto, medem duas unidades de comprimento, mas que se diferenciam, a menos de seu sinal, no sentido tomado a partir de A (–2 se horário e 2 se anti-horário). Assim, do exemplo, 2 será representado por um ponto, sobre o círculo, no 2º quadrante enquanto –2 será representado por um ponto, sobre o círculo, no 3º quadrante.

No *GeoGebra* faremos a representação da reta real por meio do comando "*Controle Deslizante*" para representarmos a variação dos valores reais x na reta. O controle deslizante permitirá relacionar a variação de x à variação, no círculo unitário, do arco de comprimento correspondente a este valor com o ângulo de medida x radianos. Devemos, contudo atribuir um intervalo ao seletor de controle deslizante, e embora possamos lhe atribuir valores muito grandes, escolhemos o intervalo $[-8\pi, 8\pi]$, suficiente para que possamos observar a relação entre número real, comprimento de arco e ângulo, sem perda de generalidade. Tomamos esta medida para que sejam mais facilmente observáveis os deslocamentos realizados. Desta maneira será possível para o estudante "movimentar" um valor qualquer (dentro dos limites do intervalo tomado) na reta dos números reais (controle deslizante) e observar concomitantemente o arco descrito no círculo, inclusive verificando o sentido empregado. Dividimos a reta real em duas semirretas de forma que tomemos os valores não negativos e não positivos separadamente. Tomamos esta providência a fim de identificar com maior clareza os valores dos arcos com os sentidos adotados (horário ou anti-horário).



(a) (b)

Figura 13: (a) Em destaque: o ícone para a inclusão de um *Controle Deslizante* e sua janela de definições. (b) Resultado obtido.

Ao deslizar o ponto sobre a semirreta que representa os números reais não positivos, denotado por $\mathbb{R}_-$, devemos observar que o ponto P’ percorre o círculo unitário, a partir de A, no sentido horário, e quando deslizamos o ponto sobre a semirreta que representa os números reais não negativos, denotado por $\mathbb{R}_+$, o ponto P desloca-se, a partir de A, no sentido anti-horário sobre o círculo unitário. Quando o valor sobre as semirretas são iguais à zero os pontos P’ e P encontram-se sobre A, isto é, descrevem o arco nulo. Devemos deixar claro que preferencialmente, nesta atividade, devemos movimentar os pontos sobre um semi-eixo de cada vez para que não haja confusão quanto ao arco formado. Podemos ainda identificar por cores os arcos se tomados em um sentido ou em outro.

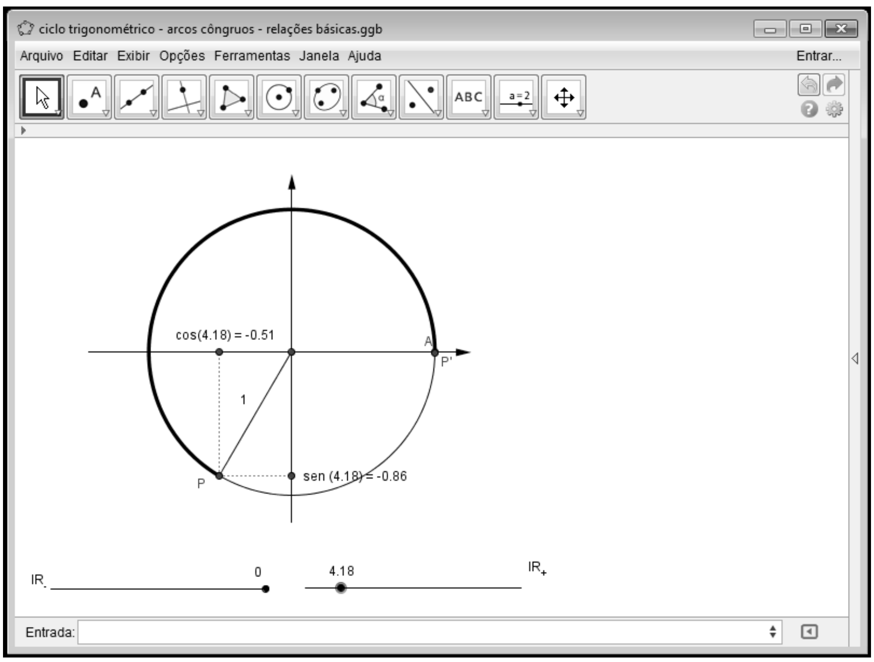


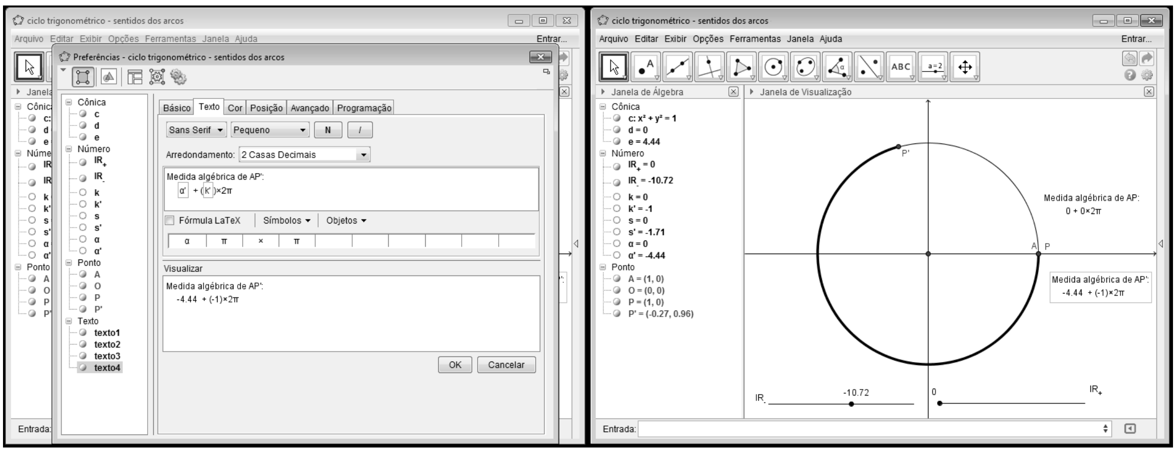
Figura 14: Janela de visualização – ciclo trigonométrico.

No *GeoGebra,* ao fundir em uma só construção o círculo unitário de centro na origem do plano cartesiano (Seção 3.1) e o círculo orientado (Seção 3.2) obtemos um ciclo trigonométrico dinâmico, passível de manipulações.

De posse do ciclo trigonométrico vamos verificar a medida algébrica do arco estabelecendo suas determinações, isto é, contamos o número de “voltas completas” percorridas por P (ou P’), para tal tomamos o valor do arco e o dividimos por 2π, a parte inteira do quociente representa o número de voltas completas, vamos denotá-la por *k*, e, digamos α, a parte decimal do quociente multiplicada por 2π representa um arco inferior a uma volta completa. Desta forma podemos escrever um arco AP (ou AP’) de forma geral como: **α + *k*.2π**, onde *k* é um número inteiro.

No *GeoGeobra*, na caixa de entrada criamos um *número* auxiliar para encontrar os valores de α e *k*, vamos chamá-lo de *s*. Este número representa o número de voltas completas em torno do círculo unitário a partir do ponto A. Para a expressão geral desejamos que *k* seja um número inteiro, assim usaremos a opção *floor* na caixa de entrada, esta opção retorna o *maior inteiro menor ou igual* a um número dado, este número será o nosso *k*. Por fim, definamos o número α como sendo a diferença entre *s* e *k* multiplicado por 2π. Quando *k* é igual a zero diremos que α é a menor (ou primeira) determinação positiva do arco AP.

Em relação à medida algébrica do arco AP’ procedemos a uma alteração em relação ao descrito anteriormente, devemos substituir a opção *floor* pela opção *ceil* na caixa de entrada, pois esta opção retorna o *menor inteiro maior ou igual* a um número dado, todos os demais passos não se alteram, usamos α’ e *k’* para diferenciação de *k* e *α* do sentido anti-horário.



(a) (b)

Figura 15: (a) Em destaque: janela para inserção de texto. (b) Resultado obtido.

3.3. As razões trigonométricas no ciclo

Para motivar a definição que faremos adiante nesta seção, usamos a seguinte construção geométrica: traçamos um círculo *c* de centro *O* e raio *R*; traçamos por *O* uma reta *r*; traçamos a perpendicular a *r* passando por *O*, vamos chamá-la de *s*; fixamos um ponto *P* sobre *c* e tracemos as retas perpendiculares às retas *r* e *s* passando por *P*; chamamos de *B* e *C* os pontos de intersecção das perpendiculares traçadas com as retas *r* e *s*, respectivamente.

Desta primeira construção, Figura 16 (a), podemos utilizar as definições da Seção 2.4, assim, $sen(\alpha)=\dfrac{PB}{OP}$ e $\cos(\alpha)=\dfrac{OB}{OP}$. Observemos que se o raio R do círculo for igual a uma unidade de medida, o seno e o cosseno do ângulo α ficam reduzidos aos comprimentos dos segmentos *PB* e *OB*.

Da primeira construção, encontramos os pontos P', P_1' e P_2', de tal forma que sejam os simétricos de *P*, respectivamente em relação à reta *s*, ao ponto *O* e à reta *r* (Figura 16 (b)). Traçamos as projeções destes pontos sobre as retas *r* e *s*, também os segmentos OP', OP_1' e OP_2', raios do círculo, conforme a Figura 16 (c), de onde observamos a construção de quatro triângulos congruentes: BOP, DOP', DOP_1' e BOP_2'. Podemos concluir que, independentemente do quadrante em que se localizam as razões seno e cosseno não se alteram. Observemos que:

$$sen(\alpha)=\frac{PB}{OP}=\frac{P'D}{OP'}=\frac{P_1'D}{OP_1'}=\frac{P_2'B}{OP_2'} \qquad \text{e} \qquad cos(\alpha)=\frac{OB}{OP}=\frac{OD}{OP'}=\frac{OD}{OP_1'}=\frac{OB}{OP_2'}$$

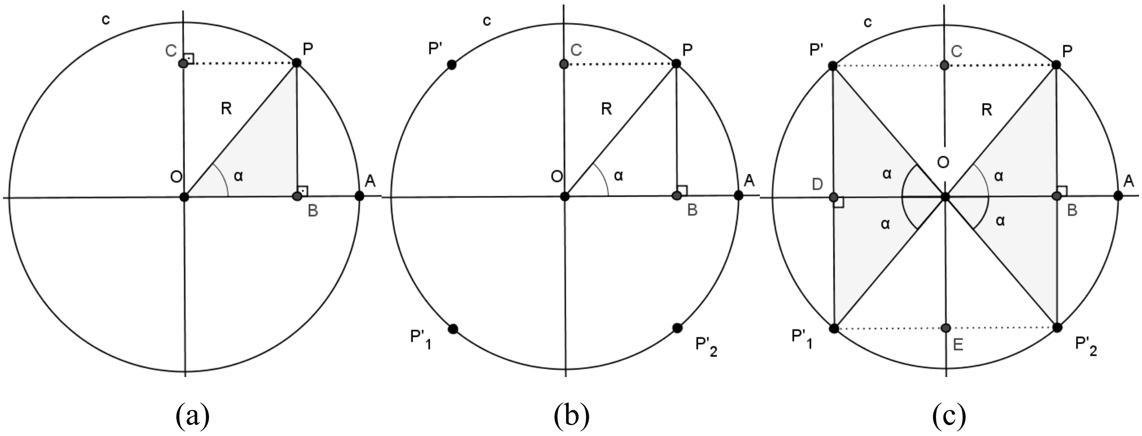


Figura 16: Sequência da construção de triângulos congruentes em um círculo de raio R

Definamos, a seguir, uma função real E. Consulte também [6].

Definição 10: *Sejam $t \in I\!R$ e $P=(x, y) \in c$, onde c é o ciclo trigonométrico, definimos a função E dada por:*

$$\begin{aligned} E : IR &\to c \\ t &\mapsto P = \big(\cos(t), sen(t)\big). \end{aligned}$$

Esta definição combina as *coordenadas de um ponto* e o *ciclo trigonométrico* e esta combinação fornece um valioso instrumento para o estudo da trigonometria. Conforme Definição 10, um ponto P = (x, y) sobre o ciclo trigonométrico pode ser visto como um ângulo, à medida que é o extremo do arco AP, e como o ponto cujas coordenadas fornecem, respectivamente, os valores do cosseno e do seno do ângulo que representam. Assim, por exemplo, se $t = \pi/3$, então $P = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Consequentemente, construímos as razões e relações trigonométricas para o intervalo de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal como apresentamos na Seção 2.4. Naquele momento, contudo, ainda era possível dizer se elas continuariam válidas para qualquer número real.

Utilizando as ferramentas do *GeoGebra* e com vistas as construções iniciais desta seção (Figura 16) verificamos que as razões e relações trigonométricas podem ser estendidas para todo o conjunto dos números reais. Detalharemos tais procedimentos a seguir.

Devemos confirmar que, quando tomamos as coordenadas do ponto P, conforme a função E na Definição 10, a abscissa de P = cos(t) e a ordenada de P = sen(t), a relação fundamental continuará válida. Grosso modo, queremos verificar se o resultado de [(ordenada de P)^2 + (abscissa de P)^2] é igual a 1, independentemente do valor de t.

Figura 17: Detalhe da caixa de Entrada e Janela de Álgebra com o resultado da relação fundamental.

No ciclo trigonométrico construído no *GeoGebra* , atribuímos a um objeto a expressão (ordenada de P)^2 + (abscissa de P)^2 = 1, e visualizamos na Janela de álgebra o resultado obtido (Figura 17). Para que a construção fique mais aparente incluiremos uma caixa de texto e os objetos relacionados para que sejam visualizados de melhor forma os resultados (Figura 18).

Os detalhes, na Figura 18, referem-se à obtenção da relação para t ≤ 0. Para t > 0, os comandos são os mesmos, alterando-se apenas o ponto sobre o ciclo para P, na ilustração o ponto considerado é P'.

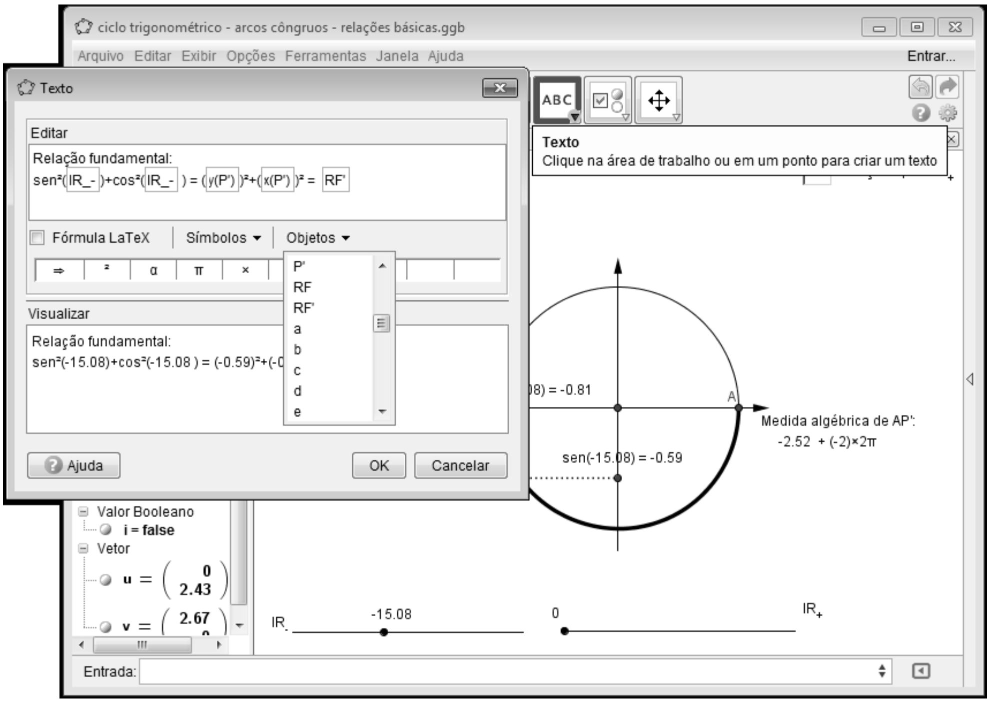


Figura 18: No detalhe ícone de inclusão de Texto e caixa de propriedades de texto e objetos relacionados.

Incluamos uma caixa para ocultar os objetos a fim de melhorar a visualização. Façamos isto usando o ícone *Caixa para Exibir/Esconder objetos*.

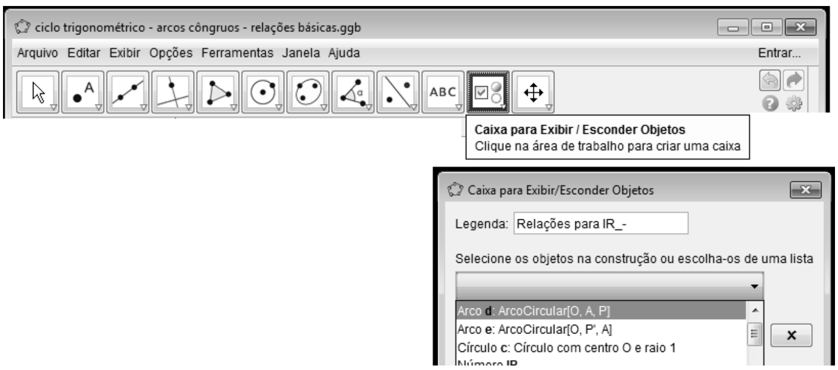
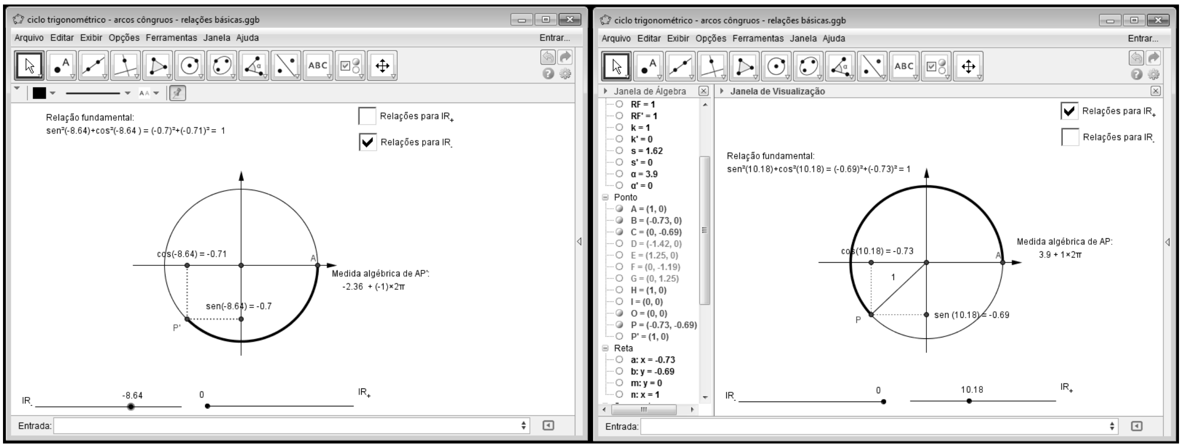


Figura 19: Em destaque: ícone para ocultar/exibir objetos e sua caixa de propriedades.

Na figura a seguir verificamos a aparência final após todas as operações realizadas para mostrarmos a validade da relação fundamental para quaisquer valores reais.



(a) (b)

Figura 20: (a) Relação fundamental para valores reais não positivos. (b) Relação fundamental para valores reais não negativos, com Janela de Álgebra visível.

Assim com o uso do *GeoGebra,* podemos constatar de maneira clara que as razões trigonométricas seno e cosseno são de fato funções definidas em todo conjunto dos números reais.

De maneira geral, podemos estender as definições de tangente, secante, cotangente e cossecante. Considerando t um número real e k um número inteiro, definimos:

(i) *tangente e secante:* $tg(t)=\dfrac{sen(t)}{cos(t)}$ *e* $\sec(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}$, *onde* $t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ *;*

(ii) *cotangente e cossecante:* $cotg(t)=\dfrac{\cos(t)}{sen(t)}$ *e* $\text{cossec}(t)=\dfrac{1}{sen\left(t\right)}$, *onde* $t\neq k\pi$.

Para a construção das relações, em (i) e (ii) da definição anterior, utilizando o *GeoGebra*, tomamos como base uma construção semelhante à obtida na Seção 3.1 (Figura 7) promovendo algumas pequenas alterações. Para que mantenhamos certa padronização, consideramos A = (1, 0), ponto fixo; P um ponto sobre o círculo tal que possamos movimentá-lo; C e S, pontos que representam as projeções perpendiculares de P sobre os eixos das abscissas e ordenadas, respectivamente; e finalmente, α a medida do arco AP.

Ressaltamos ainda que usaremos a semelhança entre triângulos para mostrar a veracidade de cada afirmação.

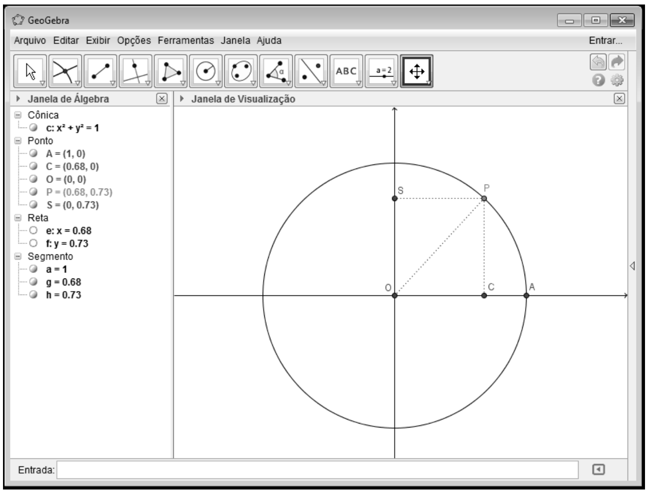


Figura 21: Base para obtenção das relações tangente, cotangente, secante e cossecante.

<u>Tangente</u>

Traçamos a reta perpendicular ao eixo das abscissas no ponto A, tangente ao círculo, e a reta OP. Marcamos o ponto de intersecção destas duas retas e o chamamos de T. A ordenada de T é a tangente do arco AP.

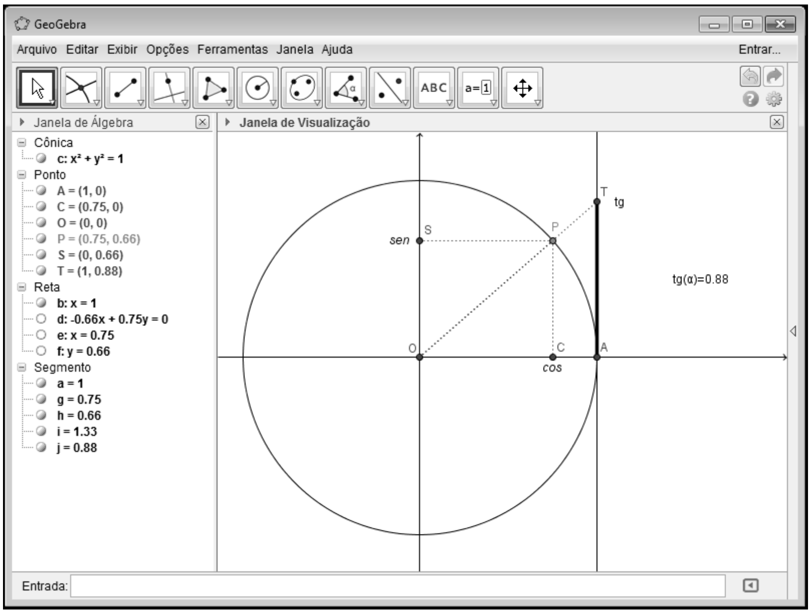


Figura 22: Tangente no ciclo trigonométrico.

Usando a construção obtida (Figura 22) observamos que os triângulos OPC e OTA são semelhantes, independentemente do quadrante em que P se encontra. Observamos ainda que, se P está sobre um dos eixos coordenados não existem triângulos para comparar.

Da semelhança, temos que, $\frac{CP}{AT} = \frac{OC}{OA}$. Mas, $CP=OS=sen(\alpha)$, $OC=cos(\alpha)$ e $AO=1$. Fazendo as substituições mencionadas e isolando AT obtemos $AT = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$. De ($i$) temos, portanto que $AT = tg(\alpha)$, desde que P não seja (0, 1) ou (0, –1).

Observemos que para que a visualização seja mais elucidativa (Figura 22) ocultamos a reta OP e introduzimos os segmentos de retas OP e AT, destacados com o comando (*Propriedades+Preferência+Estilo*). Para que possamos remeter aos valores que os pontos C, S e T, representam no ciclo trigonométrico, os nomeamos de *cos, sen* e *tg*, respectivamente, e por fim incluímos uma caixa de texto para a indicação do valor da tangente do arco AP, relacionando-o com a ordenada do ponto T.

Cotangente

Traçamos uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas no ponto B = (0, 1), tangente ao círculo, e a reta que passa por O e P. Marcamos o ponto de intersecção destas duas retas e o chamamos de T'. A abscissa de T' é a cotangente do arco AP.

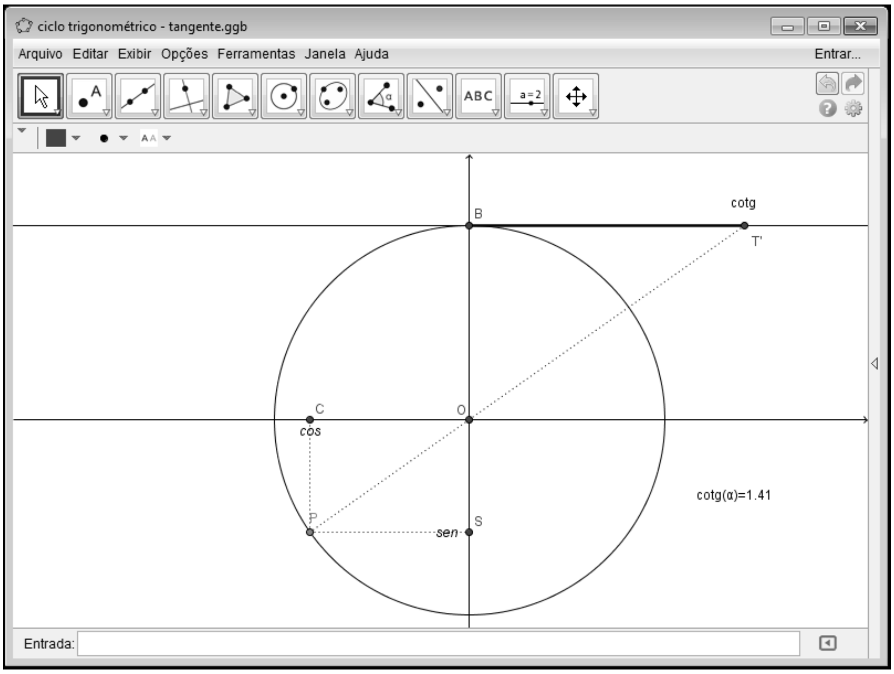


Figura 23: Cotangente no ciclo trigonométrico.

Usando a construção obtida acima (Figura 23) observamos que os triângulos OCP e OBT' são semelhantes, independentemente do quadrante em que P se encontra. Observamos ainda que, se P está sobre um dos eixos coordenados não existem triângulos para comparar.

Da semelhança, temos que, $\frac{CP}{OB}=\frac{CO}{BT'}$. Mas, $CP=OS=sen(\alpha)$, $CO=cos(\alpha)$ e $OB=1$.

Fazendo as substituições mencionadas e isolando BT' obtemos $BT'=\frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$. De (*ii*) temos, portanto que $BT' = cotg(\alpha)$, desde que P não seja (1, 0) ou (–1, 0).

Como feito para a tangente, para que a visualização seja mais elucidativa (Figura 23) ocultaremos a reta OP, introduzimos os segmentos de retas OP e BT' e incluímos uma caixa de texto para a indicação do valor da cotangente do arco AP, relacionando-o com a abscissa do ponto T'.

Secante e Cossecante

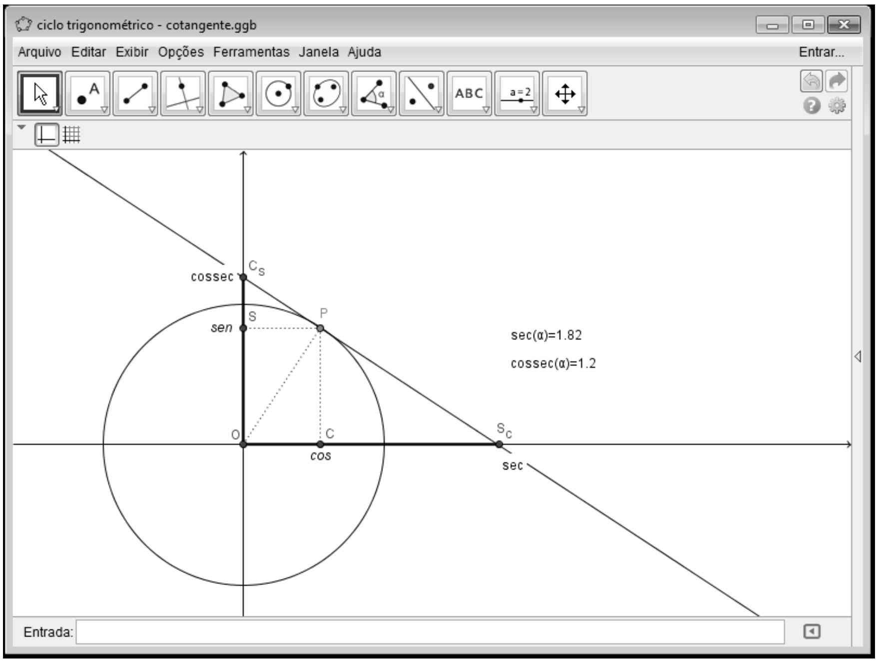


Figura 24: Secante e Cossecante no ciclo trigonométrico.

Para a obtenção das relações secante e cossecante traçamos a reta tangente à circunferência no ponto P, prolongando-a até que intercepte os eixos coordenados. Denotando por S_C e C_S as interseções ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas, respectivamente, temos que a secante tem valor igual à abscissa do ponto S_C e a cossecante tem valor igual à ordenada do ponto C_S.

Da construção no *GeoGebra* (Figura 24) constatamos que o triângulo OPC é semelhante aos triângulos OPS_C e OPC_S, independentemente do quadrante em que P se encontra. Observamos ainda que, se P está sobre um dos eixos coordenados não existem triângulos para comparar.

Da semelhança de OPC e OPS$_C$ temos que $\frac{OP}{OS_C} = \frac{OC}{OP}$ Mas, OC=$cos(\alpha)$ e OP=1.

Fazendo as substituições mencionadas e isolando OS_C obtemos $OS_C = \frac{1}{cos(\alpha)}$. De ($i$) temos, portanto que $OS_C = sec(\alpha)$, desde que P não seja (0, 1) ou (0, –1).

Da semelhança de OPC e OPC$_S$ temos que $\frac{OP}{OC_S} = \frac{CP}{OP}$ Mas, CP=$sen(\alpha)$ e OP=1.

Fazendo as substituições mencionadas e isolando OC_S obtemos $OC_S = \frac{1}{sen(\alpha)}$. De ($ii$) temos, portanto que $OC_S = cossec(\alpha)$, desde que P não seja (1, 0) ou (–1, 0).

Desta forma podemos colocar em uma só construção todas as seis relações trigonométricas conforme a figura abaixo.

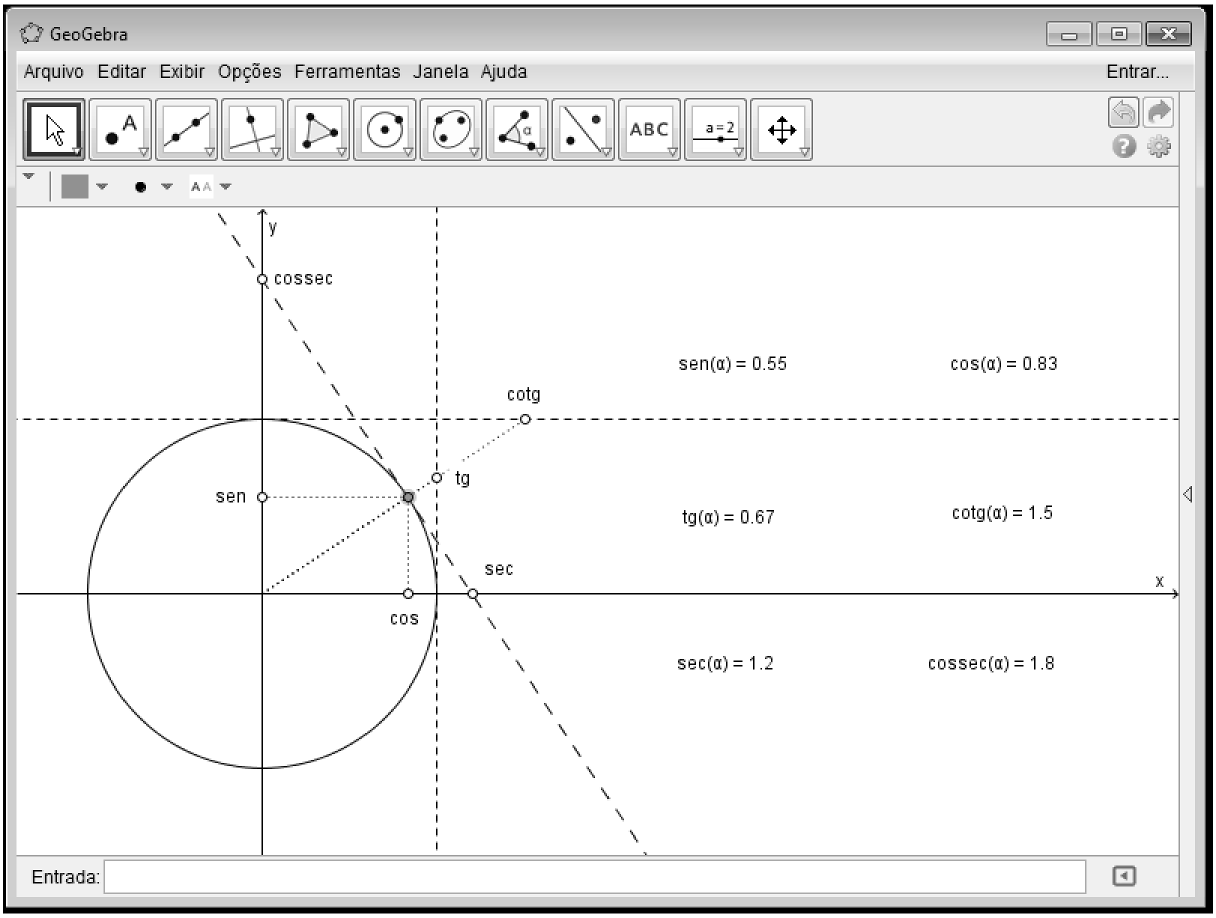


Figura 25: Relações trigonométricas no ciclo.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

4.1. Equações trigonométricas

Uma equação trigonométrica é uma igualdade que encerra uma ou várias funções (razões trigonométricas) de arcos desconhecidos, a qual se verifica apenas para certos valores desses arcos (veja [19]).

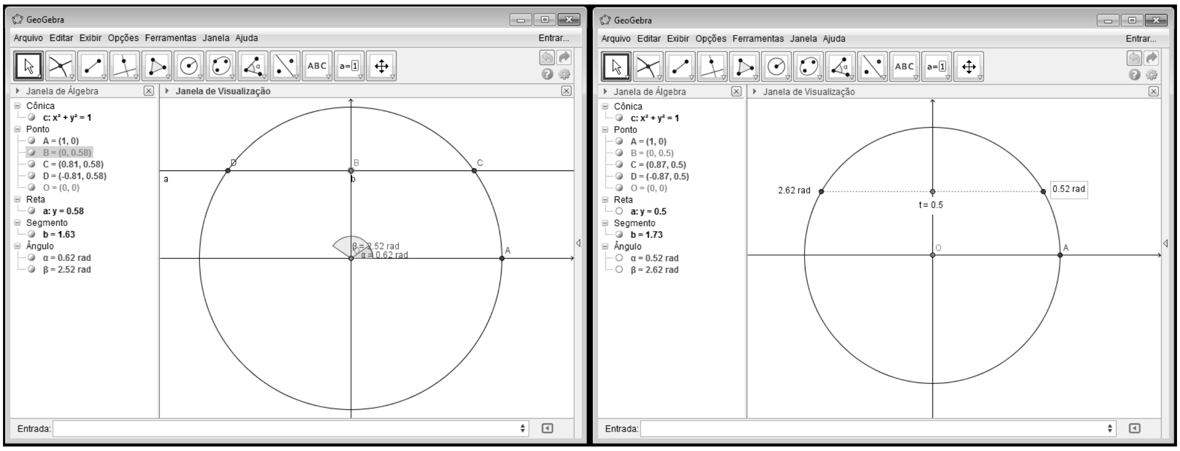
Resolver uma equação trigonométrica a uma incógnita, portanto, é encontrar os valores do arco desconhecido que tornam iguais os dois membros. Ora, não há diferença fundamental na resolução de uma equação trigonométrica ou de outra qualquer, basta que respeitemos as regras algébricas e geométricas que a natureza da equação nos impõe. No caso das equações trigonométricas as regras estão postas aqui e podemos nos orientar através do ciclo trigonométrico para encontrarmos as devidas soluções.

Neste Capítulo, apresentaremos a construção, no *GeoGebra*, de forma a obter a solução de equações trigonométricas mais elementares ($\text{sen}(x) = t$ e $\cos(x) = t$). Acreditamos que após isto poderemos tratar de questões mais amplas como a discussão relativa às funções que envolvam de alguma forma o seno e o cosseno, tais como: domínio, imagem, paridade, translações, etc; de uma forma mais natural.

Ressaltamos ainda que as soluções apresentadas são referentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, estaremos considerando apenas as soluções na primeira volta positiva do ciclo trigonométrico.

Para a apresentação de todas as soluções sem restrições ao intervalo numérico devemos utilizar a noção de arcos côngruos como fizemos no final da Seção 3.2 e que ao final desta Seção retomaremos com uma breve apresentação.

Para a solução da equação $\text{sen}(\alpha) = t$, onde $t \in \mathbb{R}$, encontramos t no eixo das ordenadas e o relacionamos com os respectivos arcos sobre o ciclo trigonométrico. No *GeoGebra* seguimos os seguintes passos: marcamos um ponto B sobre o eixo das ordenadas; deste ponto só nos interessa o valor de sua ordenada, e assim, usando uma caixa de texto, chamamos *t* este valor; encontramos a reta perpendicular a y que passa por B; marcamos com os pontos C e D os pontos de intersecção da reta perpendicular e o círculo; introduzimos o segmento CD, para fins ilustrativos; com a ferramenta de medida de ângulos encontramos as medidas dos arcos AC e AD que representam os valores de α, soluções da equação. Movimentando o ponto B podemos observar soluções particulares ou ainda a não existência de solução para $t > 1$ ou $t < -1$.



(a) (b)

Figura 26: (a) Elementos utilizados para construção da equação sen(α) = *t*; (b) Resultado obtido.

Para a construção da equação cos(α) = t, procedemos da mesma forma que para a equação anterior, contudo o ponto B estará sobre o eixo das abscissas e portanto devemos traçar uma perpendicular ao eixo x passando por B. O resultado final da operação podemos observar na Figura 27.

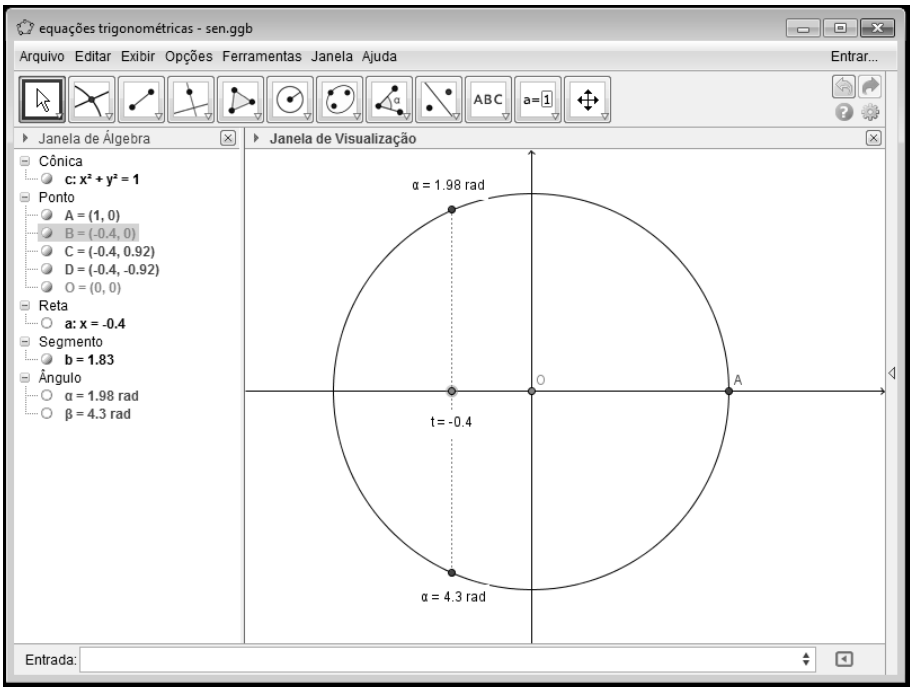


Figura 27: Resultado obtido para cos(α) = *t*.

Conforme podemos observar nas Figuras 26(b) e 27, a forma clara com que o resultado é apresentado para a equação e sua simples construção pode levar o aluno, como dito anteriormente, a motivar-se a conjecturar suas hipóteses e a testá-las.

4.1.1. Solução geral de uma equação trigonométrica

Para a apresentação da solução de uma forma geral das equações trigonométricas precisamos da noção de arcos côngruos. Dois arcos são ditos côngruos se possuem a mesma extremidade no ciclo trigonométrico, assim um arco *AP* de π radianos, por exemplo, é côngruo a um arco *AP'* de 11π radianos, pois ambos têm como origem o ponto (1, 0) e extremidade o ponto (–1, 0) e $11\pi = \pi + 5.2\pi$. A expressão geral para os arcos côngruos, para um número de voltas completas no ciclo trigonométrico, é da forma: $AP' = AP + k.2\pi$, onde *k* é um número inteiro.

De modo geral, tomamos a medida do arco *AP'* e efetuamos a divisão deste por 2π. O quociente *k* representa o número de voltas completas no ciclo trigonométrico e o resto

$AP \in [0, 2\pi[$, será chamado de *primeira determinação positiva* dos arcos côngruos a *AP'*. De outra forma, se *AP'* é um arco de valor negativo é necessário que, ao encontrarmos o resto *AP,* adicionemos a este 2π (uma volta completa no sentido anti-horário) para encontrarmos a primeira determinação positiva do arco. Consideremos, por exemplo, o arco de *AP'* de -5π radianos, efetuando a divisão mencionada, obtemos k = 2 e AP = $-\pi$, e assim temos: $-5\pi = -\pi - 2.2\pi = \mathbf{2\pi} - \pi - 2.2\pi - \mathbf{2\pi} = \pi - 3.2\pi$.

Dos resultados obtidos nos exemplos acima temos que -5π, 11π e π são todos arcos côngruos. Escrevendo cada um destes arcos como $AP' = AP + k.2\pi$, temos:

$$-5\pi = \pi - 3.2\pi, \text{ com } k = -3,$$

$$11\pi = \pi + 5.2\pi, \text{ com } k = 5,$$

$$\pi = \pi + 0.2\pi, \text{ com } k = 0.$$

Sempre que possível, devemos optar por deixar as soluções das equações com um número mínimo de expressões. Tomemos a seguinte equação, como ilustração: $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$.

Para resolvê-la, extraímos a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade, obtendo:

$$|\text{sen}(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Assim, os valores de x que satisfazem a equação, na primeira volta positiva, são: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Para generalizar a solução, temos que, S o conjunto solução da equação é dado por: $S = \left\{ x \in IR; x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z \right\}$, considerando que $\frac{\pi}{4}$ é o menor valor positivo que satisfaz a equação e os demais arcos estão, cada um, a um comprimento de $\frac{\pi}{2}$ da solução imediatamente anterior, tanto no sentido horário quanto anti-horário.

4.2. Inequações trigonométricas

Ao resolvermos uma inequação expressamos a solução em forma de conjuntos. É possível que a inequação não tenha solução, e então, representaremos a “solução” com o conjunto vazio, também podemos encontrar um número finito de elementos que satisfaçam a inequação, ou ainda, por fim, a solução pode conter um intervalo, limitado ou não, de elementos.

Discutiremos as soluções, por meio de construções utilizando o *GeoGeobra*, das inequações trigonométricas $\text{sen}(x) < t$ posto que as demais ($\cos(x) > t$, $\text{sen}(x) > t$, $\cos(x) < t$, $\text{sen}(x) \geq t$, $\cos(x) \geq t$, $\text{sen}(x) \leq t$ e $\cos(x) \leq t$) são de construção semelhante às abordadas, diferenciando-se apenas pela forma de apresentação das soluções. Devemos ressaltar ainda que, as soluções das inequações que apresentaremos limitam-se ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Para a construção das soluções das inequações, com uma interpretação geométrica, tomamos como base o ciclo trigonométrico. Podemos iniciar a construção das soluções de uma inequação com os procedimentos adotados quando do estudo das equações trigonométricas. O que faremos é imprimir a inequação com a “cara” de uma equação e com esta resolvida nos dedicaremos a fazer a interpretação geométrica das possíveis soluções.

Usamos as notações de ponto “aberto” e ponto “fechado” para a delimitação das soluções, isto é, se a inequação apresenta sinal gráfico $<$ ou $>$ representaremos o intervalo de soluções usando um ponto sem preenchimento, caso contrário, se o sinal gráfico é $\geq$ ou $\leq$ usaremos um ponto com preenchimento.

Assim, como queremos encontrar as soluções da inequação $\text{sen}(x) < t$, tomaremos a construção da Figura 20 (a), pois esta representa a solução da equação $\text{sen}(x) = t$ e a partir daí passamos a construção das soluções, assim podemos proceder para as demais inequações trigonométricas. Primeiramente, redefinimos os pontos sobre o eixo das ordenadas e os das intersecções da reta perpendicular com o círculo deixando-os “abertos”, para isso basta atribuirmos mesma cor de fundo para o ponto, no nosso caso branco. Introduzimos o ponto $(0, -1)$, dado que o seno não apresenta solução para valores menores que -1 (a discussão sobre os limites do seno já foram abordados na Seção 4.1) e traçamos o segmento de reta BF pondo-o em destaque, pois representa o intervalo de pertinência dos valores de $t \in [-1, 1]$.

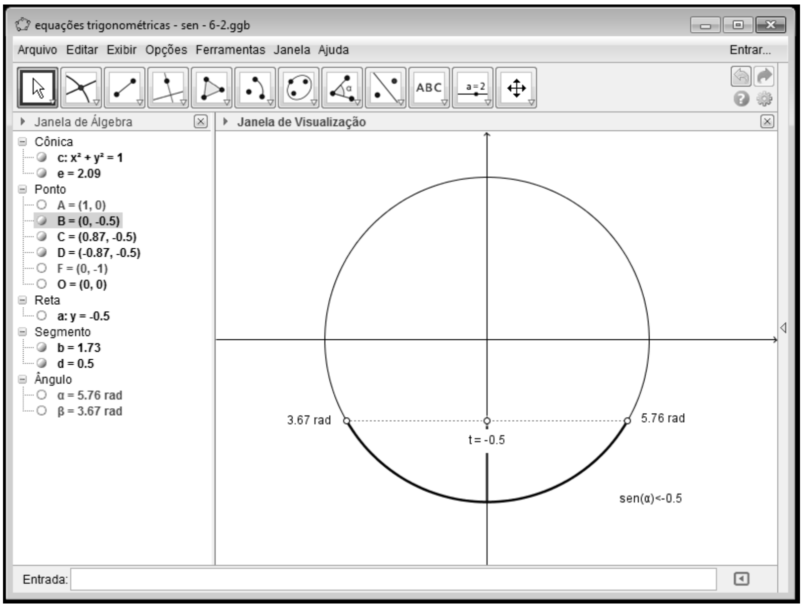


Figura 28: sen(x) < t e suas soluções.

Para escrevermos o conjunto solução S da inequação sen(x) < t, temos quatro casos a considerar, tendo como arcos AC = α e AD = β ($\alpha \leq \beta$) (conforme vimos na Figura 26 (a)):

(i) Se $0 < t < 1$ então S = $]0, \alpha[\cup]\beta, 2\pi[$;

(ii) Se $-1 \leq t \leq 0$ então S = $]\alpha, \beta[$;

(iii) Se $t \geq 1$ então S = $[0, 2\pi]$;

(iv) Se $t < -1$ então S = ϕ;

Para exemplificarmos, vamos considerar valores de t e exibiremos o conjunto solução dentro do intervalo de $[0, 2\pi]$.

a) sen(x) < 0,5.

Temos que sen(x) = 0,5 para x = $\pi/6 \cong 0,52$ ou x = $5\pi/6 \cong 2,62$. Marcamos os arcos AC (0,52) e AD (2,62) no ciclo trigonométrico, conforme Figura 29 (a seguir) e escrevemos o conjunto solução da inequação, conforme (i), como o intervalo S = $]0, \pi/6 [\cup]5\pi/6, 2\pi[$.

b) sen(x) < –0,5.

Temos que sen(x) = –0,5 para x = $7\pi/6 \cong 3,67$ ou x = $11\pi/6 \cong 5,76$. Marcamos os arcos AC (3,67) e AD (5,76) no ciclo trigonométrico, conforme Figura 28 (supra) e escrevemos o conjunto solução da inequação, conforme (ii), como o intervalo S = $]7\pi/6, 11\pi/6[$.

c) sen(x) < 1,2.

A solução é imediata, pois, $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, portanto conforme (iii), S = [0, 2π]. Podemos observar a solução conforme Figura 30.

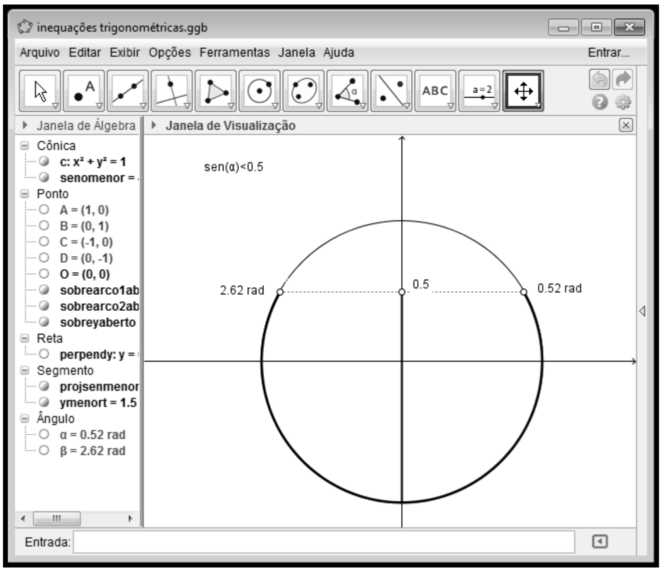


Figura 29: sen(x) < 0,5 e suas soluções.

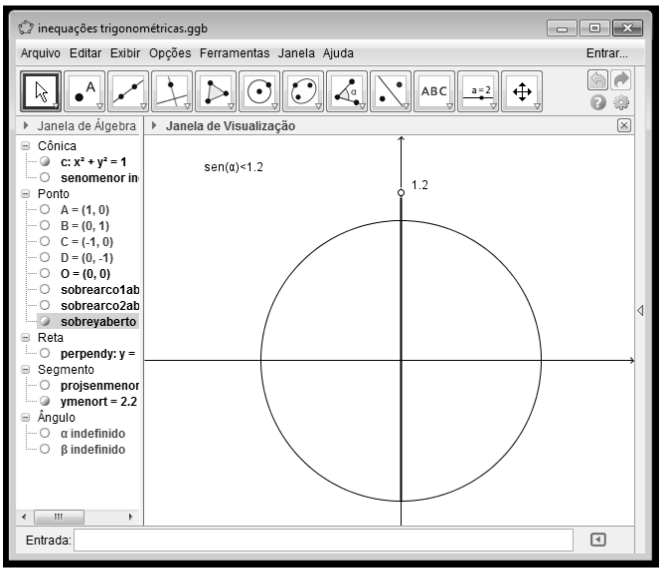


Figura 30: sen(x) < 1,2 e suas soluções.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO A FÍSICA

Uma função *f*, real, é periódica quando existe um número T ≠ 0 tal que f(*t* +T) = f(*t*) para todo *t* real. Se isto ocorre, então f(*t* + *k*T) = f(t) para todo *t* real e todo k inteiro. Chamamos de *período* o menor número T positivo para o qual a igualdade anterior é verdadeira.

Definição 11: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, definimos as funções *f* e *g* dadas por:

$$\begin{array}{ll} f : IR \to IR & \qquad g : IR \to IR \\ \quad x \mapsto y = f(x) = sen(x) & \qquad \quad x \mapsto y = g(x) = cos(x) \end{array}$$

É possível verificar que as funções *f* e *g* acima definidas são periódicas, conforme Seção 2.5. A periodicidade das funções trigonométricas está intimamente ligada ao conceito de periodicidade de um fenômeno físico. Um fenômeno é periódico quando se repete, identicamente, em intervalos de tempo iguais. Em particular diz-se que um ponto material efetua um *movimento harmônico simples linear* (MHS) quando, numa trajetória retilínea, oscila periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio sob a ação de uma força cuja intensidade é proporcional à distância do ponto à posição de equilíbrio. São exemplos de oscilações os pêndulos, cordas de instrumentos musicais e colunas de ar em instrumentos de sopro, a corrente elétrica alternada, sendo que as oscilações da corrente em circuitos elétricos têm inúmeras aplicações importantes (para mais esclarecimentos, veja [9], [12], [15]).

5.1 O MHS e o movimento circular uniforme

O MHS e o MCU (Movimento Circular Uniforme) estão relacionados de tal forma que um pode ser estudado através do outro e, este estudo, permite que encontremos às *equações* *cinemáticas* (equações que descrevem o movimento dos corpos sem se preocupar com suas causas) do MHS.

Observemos a figura a seguir para descrever o MCU.

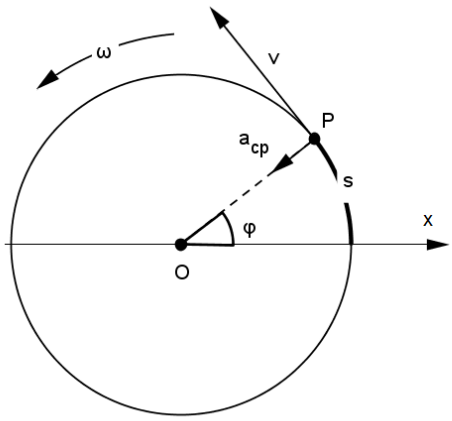


Figura 31: P ponto animado de MCU.

Seja P o ponto animado de MCU em um círculo de raio R. Os espaços *s* (arcos) são medidos no próprio círculo (Figura 29) e os espaços angulares φ são os ângulos centrais que determinam os arcos *s*. O móvel descreve o círculo com velocidade escalar *v* e angular ω; a aceleração centrípeta a_{cp} é orientada para o centro. Se os ângulos estão em radianos, temos:

$$s = \varphi R$$

$$v = \omega R$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \quad \text{ou} \quad a_{cp} = \omega^2 R\,.$$

Considerando que no instante inicial $t = 0$, o espaço inicial seja s_0 e o espaço angular correspondente seja φ_0, a função horária do MCU é:

$$s = s_0 + vt \quad \text{ou (na forma angular) } \varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (*)$$

Se considerarmos o ponto *Q*, projeção ortogonal de *P* no eixo orientado *Ox*, vemos que enquanto o ponto *P* percorre o círculo em MCU, o ponto *Q* se move num e noutro sentido do diâmetro horizontal orientado, tal qual o que foi abordado no Capítulo 3. Então, fazendo $x = \text{R}.\cos(\varphi)$ (Definição 6) e substituindo $\text{R} = a$ e (*), obtemos: $x = a.\cos(\varphi_0 + \omega t)$, dita *Função horário do MHS*.

Para uma demonstração mais refinada, usando derivadas, recomendamos [12].

CONCLUSÃO

A forma sistemática de apresentação do conteúdo da trigonometria, fugindo do modelo padrão de giz e quadro, pode trazer benefícios duradouros quanto à compreensão do tema, além de estimular professores e estudantes a procurar novos meios para a aprendizagem.

É evidente o declínio da educação, em particular da matemática, para a maioria dos estudantes, dado as baixas notas obtidas nos testes padronizados de aprendizagem que se tem realizado no Brasil. Quando a comparação é feita entre vários países os resultados são ainda mais desoladores.

Esperamos que de alguma forma este trabalho possa atingir o leitor e o inspirar a rever seus procedimentos e formas de abordagem dos conteúdos, não só da trigonometria, mas de outros temas.

REFERÊNCIAS

[1] AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

[2] AYRES JR, F. *Trigonometria: plana e esférica*. Rio de janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1974.

[3] BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: 10. ed., coleção do professor de matemática, SBM, 2003.

[4] BARROS, R. M. de O.; FRANCO, V. S.; GERÔNIMO, J. R.; *Geometria euclidiana plana: um estudo com o software GeoGebra*. Maringá: Eduem, 2010.

[5] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. São Paulo: 2. ed., Blucher, 2012.

[6] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria – Números complexos*. Rio de Janeiro: 1. ed., coleção do professor de matemática, SBM, 1999.

[7] COSTA, N. M. L. da. A história da trigonometria. *Educação matemática em revista*, São Paulo, v. 10, n. 13, p. 60-69, 2003.

[8] LIMA, Elon L.; *Meu professor de matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[9] LIMA, Elon L.et al. *A matemática do ensino médio – Vol 1*.

[10] LIMA, Elon L.et al. *A matemática do ensino médio – Vol 3*.

[11] MEC – Ministério da Educação e Cultura / SEB – Secretaria de Educação Básica. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=293&Itemid =809>. Acesso em: 19 de janeiro de 2014.

[12] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica 2: fluidos - oscilações e ondas - calor*. São Paulo: Blücher, 1983.

[13] OLIVEIRA, H. *Descobrindo as razões trigonométricas no triângulo retângulo*. 2013. 75 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2013.

[14] QUINTANEIRO, W. *Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio*. 2010. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2010.

[15] RAMALHO JUNIOR, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. de T.; *Os fundamentos da física 2*. São Paulo: 6. Ed., Moderna, 1994.

[16] ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[17] SILVA, C. P. da. *A matemática no Brasil: história de seu desenvolvimento*. São Paulo: 3. ed. revista, Blücher, 2003.

[18] SIMONETTI, D. *Um estudo sobre a equação da circunferência utilizando o GeoGebra*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. XI. Curitiba. Disponível em <http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3411_1824_ID.pdf>. Acesso em: 07 de novembro de 2013.

[19] TRIGONOMETRIA elementar – FTD, 1928.

APÊNDICE

PLANOS DE AULA

I.

Tema: **Construção do ciclo trigonométrico**
Objetivo: Encontrar um dispositivo geométrico que permita a observação da dinâmica da inter-relação entre ângulos e pontos do plano cartesiano de forma dinâmica e conceitual.
Conteúdo programático
- Elementos de geometria plana: Círculo; Arcos; Ângulos.
- Elementos básicos do plano cartesiano: Reta orientada; Pontos.
Estratégias e recursos didáticos
Com o uso do *software GeoGebra,* devemos construir, com base em definições (conforme descrito nas Seções 3.1 e 3.2), o ciclo trigonométrico.
Lançar questionamentos sobre os resultados obtidos para motivar e criar condições para introdução de questões futuras quanto ao estudo das funções trigonométricas além da expansão dos conceitos já estudados.
Duração
40 minutos. (Se já existir conhecimento prévio do *software* por parte do aluno)

II.

Tema: **Construção da solução de inequação trigonométrica**
Objetivo: Verificar geometricamente as soluções de uma inequação.
Conteúdo programático
- Ciclo trigonométrico.
- Inequações.
Estratégias e recursos didáticos
Com o uso do *software GeoGebra,* devemos determinar as soluções de inequações (conforme descrito na Seção 4.2), utilizando como base o ciclo trigonométrico.
Propor que ao fim da resolução de algumas inequações o aluno crie suas próprias inequações e incentivar o uso das relações auxiliares (secante, cossecante, etc)
Duração
40 minutos.