



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Elaine Alves de Godoy

Área e Volume: A Transição da Noção de Medida à de Área e de Volume

São José do Rio Preto
2014

Elaine Alves de Godoy

Área e Volume: A Transição da Noção de Medida à de Área e de Volume

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT- Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof^o. Dr. Parham Salehyan

São José do Rio Preto
2014

Elaine Alves de Godoy

Área e Volume: A Transição da Noção de Medida à de Área e de Volume

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT- Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof^o. Dr. Parham Salehyan
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof^a. Dr^a. Ana Claudia Nabarro
Universidade de São Paulo- ICMC

Prof^o. Dr. Jefferson Luiz Rocha Bastos
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
28 de março de 2014

Dedico este trabalho ao meu esposo, Evandro, pelo carinho, compreensão e companheirismo. Aos meus pais que me ensinaram os valores da vida, da honestidade, humildade e do amor. Em especial meu pai que hoje se encontra com Deus, mas sempre estará presente em meu pensamento em todas as fases da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta jornada. Agradeço ao meu esposo, Evandro, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades e por sua capacidade de me trazer alegria na correria de cada semestre. Aos meus pais pela dedicação, simplicidade, exemplo e carinho, fundamentais na construção do meu caráter.

Ao professor e orientador Parham que partilhou as suas idéias e experiências, por seu apoio e inspiração no amadurecimento do meu conhecimento. Estendendo este agradecimento também aos demais professores, que nos transmitiram seus conhecimentos e experiências.

A todos os meus colegas do curso PROFMAT, pelas palavras de incentivo, pelo auxílio e principalmente por estarem comigo nesta caminhada tornando-a mais fácil e agradável.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a construção de quem sou hoje.

RESUMO

O objetivo principal desse trabalho é estudar o conceito de congruência por corte de polígonos e poliedros. Primeiro é apresentado o teorema de Bolyai-Gerwien que afirma a equivalência entre a igualdade de área e congruência por corte de polígonos. No caso de poliedros é apresentado o teorema de Dehn no qual veremos que a congruência por corte e a igualdade de volumes, em geral, não são equivalentes. No final serão apresentadas algumas atividades onde se pode verificar de maneira intuitiva e dedutiva a congruência por corte entre alguns polígonos com a mesma área.

Palavras-chave: Área. Volume. Congruência por corte.

ABSTRACT

The main object of this work is study some elementary concepts in Euclidean geometry. After studying the scissors-congruence between polygons, we prove the Bolayi-Gerwein theorem. We study also this concept for polyhedra and we see the Dehn theorem which claims that in the case of polyhedra the equality between the volume and the scissors-congruence are not equivalent in general. Finally, we present some activities where it is possible to check by an intuitive and a deductive manner the congruence by cutting between some polygons with the same area.

Keywords: Area. Volume. Congruence by cutting.

Sumário

INTRODUÇÃO	8
1. TRANSIÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA PARA O CONCEITO DE ÁREA.....	9
1.1 Medida e Área	9
1.2 Área	12
1.3 Área de Polígonos Congruentes por Corte	16
1.4 Alguns comentário sobre a área de outas figuras planas	19
2.VOLUMES.....	24
2.1 Congruência por corte e o Teorema de Dehn.....	25
2.2.1. Funções Aditivas	26
2.2.2. Invariantes.....	27
2.3 Solução do Terceiro Problema de Hilbert: Teorema de Dehn	31
3. ATIVIDADES	34
REFERÊNCIAS:.....	39

INTRODUÇÃO

O primeiro objetivo desse trabalho é definir os conceitos de área e volume e mostrar a existência e unicidade das funções área e volume no conjunto de polígonos e poliedros respectivamente.

Introduziremos o conceito de congruência por corte entre os polígonos e os poliedros, no caso de congruência por corte entre os polígonos observamos que a igualdade de área de dois polígonos é equivalente aos mesmos serem congruentes por corte, mas precisamente iremos provar o Teorema de Bolyai-Gerwien: Se dois polígonos possuem a mesma área, então são congruentes por corte. Ao demonstrar esse teorema naturalmente surge a seguinte pergunta: se dois poliedros possuem o mesmo volume, serão congruentes por corte? Em outras palavras se existe um teorema do tipo Bolyai-Gerwien para os poliedros. Essa pergunta é o terceiro problema apresentado pelo matemático alemão Hilbert no congresso internacional de matemáticos em 1900, quando ele apresentou uma lista de vinte e três problemas em aberto. Em 1902 um dos seus alunos chamado Max Dehn deu a resposta negativa a esta pergunta, de fato ele mostrou que um cubo e um tetraedro regular de mesmo volume não são congruentes por corte. O ponto chave na demonstração de Dehn é construir invariantes e mostrar que se dois poliedros são congruentes por corte então possuem invariantes iguais. Essa demonstração será apresentada no capítulo 2 desse trabalho.

Finalmente serão apresentadas algumas atividades onde se pode verificar de maneira intuitiva e dedutiva a congruência por corte entre alguns polígonos com a mesma área. Através dessas atividades algumas fórmulas para calcular a área de polígonos podem ser definidas e compreendidas.

Capítulo 1

Transição da Noção de Medida Para o Conceito de Área

1.1 Medida e Área

A noção de “tamanho” de uma figura apareceu a mais de 5000 anos, na época das antigas civilizações agrícolas, eles precisavam saber o tamanho das propriedades e compará-los.

No Egito antigo, a civilização agrícola floresceu na bacia do rio Nilo. Segundo o livro “História” escrito pelo antigo historiador grego Heródoto, o governante do Egito teve de distribuir a terra entre os agricultores de seu reino. Com as inundações anuais do rio Nilo desapareciam as divisas das propriedades agrícolas. Assim, todos os anos, era necessário o trabalho do homem para medir e calcular, isso contribuiu para o desenvolvimento de técnicas mais elaboradas de medição, e, como resultado, a geometria nasceu.

Além disso, no Egito antigo as pessoas tinham de pagar impostos com base na quantidade de sua colheita, o que, na maioria das vezes, depende do tamanho da terra que foi cultivada. Determinar se a propriedade de um vizinho era menor ou maior deve ter sido uma questão de grande importância. Se um dos pedaços de terra é menor do que o do outro, mas o tributo é o mesmo, o vizinho com a menor propriedade pode-se sentir injustiçado e provavelmente irá reclamar. Por outro lado, se as parcelas de terreno pertencentes a estes dois agricultores têm exatamente a mesma forma, eles concordam que o tamanho também é o mesmo. Os dois fazendeiros, então, aceitariam sem reclamar o fato de que eles deveriam pagar tributos iguais.

Vamos imaginar a seguinte situação: No Egito antigo há dois agricultores cada um possuindo uma parcela de terra. Suponhamos que eles quisessem saber se suas propriedades possuem a mesma medida. Poderíamos dividir os terrenos em triângulos de modo que cada porção triangular de um terreno correspondesse a uma porção triangular do outro terreno. Na geometria duas figuras que possuem a mesma forma e tamanho são chamadas de congruentes. Se as condições de congruência de triângulos forem usadas para o levantamento, é possível determinar se os dois lotes de terreno que estamos medindo são congruentes. Sabemos que as condições de congruência de triângulos são dadas por LAL (lado, ângulo, lado), ALA (ângulo, lado, ângulo), LLL (lado, lado, lado) e LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto). Na

realidade, as porções de terra são comparadas através de um método chamado de levantamento triangular, na qual a terra é decomposta em muitos triângulos.

Se as duas partes em questão têm formas diferentes, devido às variações na geografia local, o problema de comparar as duas parcelas torna-se difícil de resolver.

Considere dois lotes de formas diferentes, mas com o mesmo tamanho, como ilustrado na figura 1.1

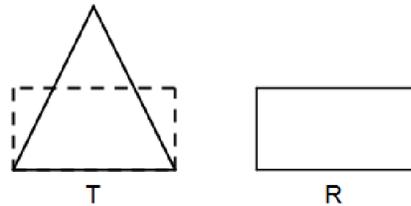


Figura 1.1

Suponha que os agricultores não saibam que o tamanho de suas propriedades é o mesmo. Para demonstrar isso aos proprietários de terra, vamos considerar o triângulo T e o retângulo R . Além disso, seja a a base do triângulo e o comprimento do retângulo, seja h a altura do triângulo e $h/2$ a largura do retângulo, observe a figura 1.2.

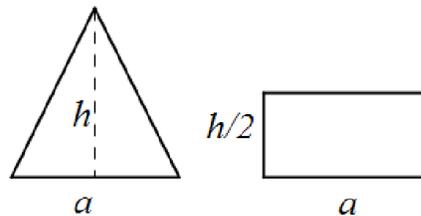


Figura 1.2

Para os que conhecem a fórmula para calcular a área de um triângulo e de um retângulo é evidente que as áreas são iguais, pois:

$$\text{Área de } T = \frac{a \cdot h}{2} = a \cdot \left(\frac{h}{2} \right) = \text{Área de } R.$$

Por outro lado, como podemos convencer os dois proprietários que não conhecem as fórmulas que possuem terrenos de mesmo tamanho? Precisamos encontrar outro método de convencê-los.

Vamos decompor as figuras em partes iguais, como na figura 1.3, de tal modo que cada uma das partes de T corresponda à uma parte de R .

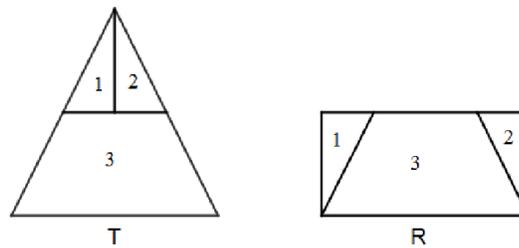


Figura 1.3

Este método convence as pessoas que não conhecem a fórmula, que os tamanhos dos lotes de terra são idênticos. Mesmo as porções de terra com formato mais complicado podem ser decompostas em partes menores de modo que cada uma das partes de uma figura tenha o mesmo tamanho e forma que uma parte correspondente da outra.

Quando podemos decompor dois polígonos em polígonos menores, dois à dois congruentes, isto significa que os dois polígonos podem ser decompostos igualmente, e por isto são chamados de "polígonos congruentes por corte".

Definição. Duas figuras K_1 e K_2 são chamadas de congruentes se tiverem ângulos e medidas correspondentes idênticos, neste caso escremos $K_1 \equiv K_2$.

Terminologia. Se um polígono K pode ser decomposto em n polígonos $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ (figura 1.4), então escrevemos: $K = K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n$

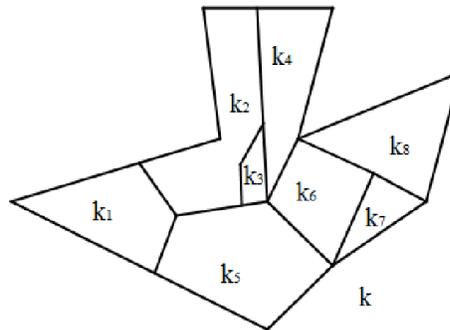


Figura 1.4

Definição. Dois polígonos L e M são congruentes por corte e escrevemos $L \sim M$, se um deles pode ser decomposto num número finito de polígonos de tal forma que estes possam reconstruir o outro polígono. Mas precisamente,

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n, \quad M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n$$

e

$$L_i \equiv M_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

O próximo resultado fornece um exemplo de polígonos congruentes por corte.

Teorema 1.1. Todo triângulo é congruente por corte a um retângulo.

Demonstração: Dado um triângulo ABC , construa um retângulo com base igual a um dos lados do triângulo (por exemplo, BC) e o lado DF paralelo à base passando pelos pontos médios H e E dos outros lados (AB e AC). Trace o segmento AG perpendicular a HE , observe a figura 1.5. Os dois triângulos AGH e AGE são congruentes aos triângulos BHD e CFE respectivamente.

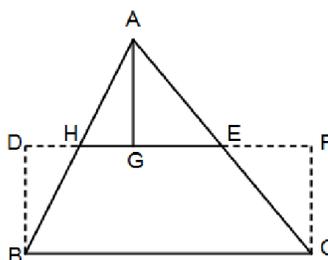


Figura 1.5

Portanto o triângulo ABC e o retângulo $BCED$ são congruente por corte.

1.2 Área

Pelo que foi visto anteriormente, o conceito de congruência por corte pode ser utilizado para comparar o tamanho dos polígonos. Por outro lado observamos que o mesmo pode não ser muito prático e levar muito tempo para fazer comparações de tamanhos de polígonos. Então faz sentido procurarmos outro método. A seguir explicaremos como associar um número a cada polígono, ou seja, definir uma função real no conjunto de polígonos.

Seja P o conjunto de todos os polígonos no plano Euclidiano. Uma função real m definida em P é chamada de *função área* se satisfaz as seguintes propriedades:

- I. $m(K) > 0$ (Positividade).
- II. Se K_1 e K_2 são congruentes por corte, então $m(K_1) = m(K_2)$ (Invariância).
- III. Se $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$, então $m(K) = m(K_1) + m(K_2) + \dots + m(K_n)$ (Aditividade).
- IV. Para o quadrado padrão K de lado medindo 1 unidade, $m(K) = 1$.

É natural perguntarmos se existe uma função que satisfaça tais propriedades. A resposta é positiva e mais ainda é única, o que faremos a seguir.

Para demonstrar a existência e a unicidade da função área, iremos considerar um polígono K decomposto em n polígonos K_1, K_2, \dots, K_n . Pela propriedade III (aditividade) temos, $m(K) = m(K_1) + m(K_2) + \dots + m(K_n)$.

Uma vez que cada polígono no plano pode ser decomposto em triângulos e retângulos a área do polígono será determinada se primeiro determinarmos a área dos triângulos e dos retângulos.

Considerando m_1 e m_2 duas funções de área. Se um polígono é decomposto em triângulos $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$, então

$$m_1(K) = m_1(K_1) + m_1(K_2) + \dots + m_1(K_n) = m_2(K_1) + m_2(K_2) + \dots + m_2(K_n) = m_2(K)$$

Assim, m_1 e m_2 são iguais.

Considerando $K(a,b)$ um retângulo de largura a e comprimento b . Vamos mostrar a unicidade da função de área $K(a,b)$. Isto é, vamos mostrar que $m(K(a,b)) = ab$ como esperado.

Seja $m(K(a,b)) = f(a,b)$ uma função de duas variáveis a e b , teremos:

- Se $K(a,b) = K(b,a)$ então $f(a,b) = f(b,a)$.

- Se $K(a,b)$ é decomposto em $K(a_1,b)$ e $K(a_2,b)$, em que $a_1 + a_2 = a$, aplicando a propriedade II (invariância) obtemos $f(a,b) = m(K(a,b)) = m(K(a_1,b)) + m(K(a_2,b)) = f(a_1,b) + f(a_2,b)$.

Isso mostra que a função $f(a,b)$ satisfaz as seguintes condições:

I'(positividade) $f(a,b) > 0$ ($a, b > 0$)

II'(invariância) $f(a,b) = f(b,a)$

III'(aditividade) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$ ($a_1, a_2, b > 0$)

IV' $f(1,1) = 1$

Teorema 1.2. Se uma função f satisfaz as condições I', II', III' e IV', então, $f(a,b) = ab$ para todo a e b .

Demonstração: Demonstraremos este teorema em quatro etapas.

1ª. Primeiro vamos mostrar que $f(m,n) = mn$ para os números m e n naturais.

Se m e n são números naturais, então, pela propriedade da aditividade, temos

$$f(ma, nb) = mnf(a, b)$$

pois, $f(ma, nb) = f(\underbrace{a + \dots + a}_m, nb) = mf(a, nb) = mf(nb, a) = mnf(b, a) = mnf(a, b)$

Uma vez que $f(1,1) = 1$, temos $f(m, n) = mn$.

2ª. Vamos mostrar que se a e b são números racionais, então $f(a,b) = ab$

Seja $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ para p, q, r e s números naturais. Então:

$$f(a,b) = f\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = pr f\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{s}\right).$$

Por outro lado,

$$f(1,1) = f\left(q\frac{1}{q}, s\frac{1}{s}\right) = qs f\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{s}\right).$$

Consequentemente,

$$f(a,b) = \frac{pr}{qs} f(1,1) = ab$$

3ª. Vamos demonstrar que se $a \leq a'$ e $b \leq b'$ então $f(a,b) \leq f(a',b')$

- Se $a = a'$ e $b = b'$, então o resultado é óbvio.
- Se $a < a'$ e $b = b'$, então $f(a', b) = f(a + (a'-a), b) = f(a, b) + f(a'-a, b) > f(a, b)$
- Se $a = a'$ e $b < b'$, então $f(a, b') = f(b', a) > f(b, a) = f(a, b)$
- Se $a < a'$, $b < b'$, então $f(a', b') > f(a, b') > f(a, b)$

4ª. Demonstraremos que se a e b são números reais positivos, então $f(a,b) = ab$.

Sejam a e b números reais positivos, para cada número positivo ϵ , existem números racionais a_1, a_2, b_1, b_2 , tais que:

$$a - \epsilon < a_1 \leq a \leq a_2 < a + \epsilon \text{ e } b - \epsilon < b_1 \leq b \leq b_2 < b + \epsilon$$

Logo $f(a_1, b_1) \leq f(a, b) \leq f(a_2, b_2)$ e $(a - \epsilon)(b - \epsilon) < a_1 b_1 \leq f(a, b) \leq a_2 b_2 < (a + \epsilon)(b + \epsilon)$

Portanto, $ab - \epsilon < f(a, b) < ab + \epsilon$

Como ϵ pode ser qualquer número positivo pequeno, tendendo ϵ a 0, obtemos: $f(a, b) = ab$.

Pelo resultado anterior, se uma função de área existe, então a área de um retângulo é igual ao produto das medidas de seu comprimento e largura.

Como todo triângulo é congruente por corte a um retângulo, onde as bases são iguais e a altura do retângulo é a metade da altura do triângulo, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.3. Se uma função de área m existe, então a área de um triângulo é dada por $(\text{base} \cdot \text{altura}) / 2$.

Devemos observar que a área de um triângulo não depende da escolha da base, para isso considere o triângulo ABC (observe a figura 1.6) e as alturas AH_1 , BH_2 e CH_3 do triângulo ABC, verificaremos que $AB \times CH_3 = AC \times BH_2 = BC \times AH_1$. Temos que os triângulos ABH_2 e ACH_3 são semelhantes e $\frac{AB}{BH_2} = \frac{AC}{CH_3}$, portanto $AB \times CH_3 = AC \times BH_2$. O

mesmo pode ser verificado com as outras igualdades.

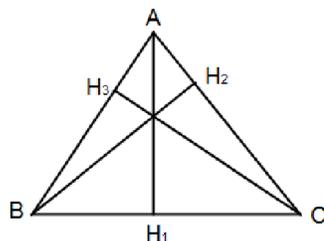


Figura 1.6

Portanto, pela aditividade. Para duas funções de área m_1 e m_2 , temos $m_1(K) = m_2(K)$ para todo triângulo K . Como cada polígono pode ser decomposto em triângulos e retângulos a função de área existe e pode ser determinada de forma exclusiva. Assim, a unicidade de uma função foi provada.

Devemos observar também que a área de um polígono não depende da triangulação escolhida. Iremos demonstrar este fato para um quadrilátero convexo.

Considere o quadrilátero $ABCD$. É evidente que $ABCD$ pode ser decomposto em dois triângulos de duas maneiras: pela diagonal BD e pela diagonal AC . Considerando E o ponto de intersecção das diagonais, o quadrilátero será decomposto em quatro triângulos, como na figura 1.7.

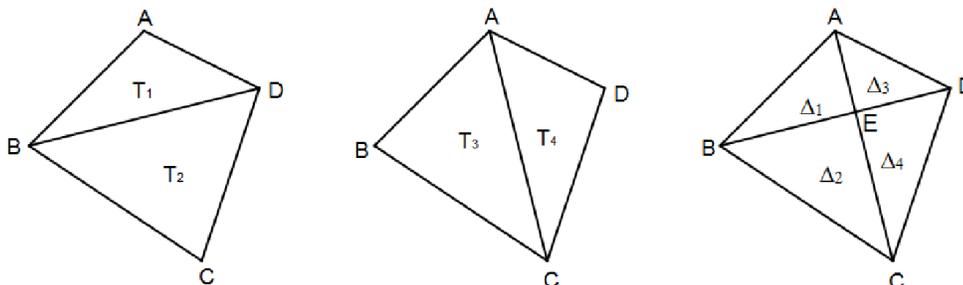


Figura 1.7

Temos que $T_1 = \Delta_1 + \Delta_3$, $T_2 = \Delta_2 + \Delta_4$, $T_3 = \Delta_1 + \Delta_2$ e $T_4 = \Delta_3 + \Delta_4$.

Devemos demonstrar que $m(T_1) + m(T_2) = m(T_3) + m(T_4)$, podemos escrever esta igualdade da seguinte maneira:

$$m(\Delta_1) + m(\Delta_3) + m(\Delta_2) + m(\Delta_4) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2) + m(\Delta_3) + m(\Delta_4).$$

Portanto a área de um quadrilátero não depende da sua decomposição. A demonstração desse fato para os demais polígonos é feita de maneira semelhante.

Para demonstrar a existência da função área temos de verificar se a função m definida satisfaz as propriedades de positividade, invariância, aditividade e $m(K) = 1$ para o quadrado padrão.

A positividade e a invariância de m são evidentes a partir da definição. Como para o quadrado K , que é designado como o quadrado padrão, é evidente que a área é $m(K) = 1$ temos que demonstrar apenas a propriedade de aditividade. Admita que um polígono K é decomposto em K_1, K_2, \dots, K_n . Temos $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$. Se cada K_i ($i = 1, \dots, n$) é decomposto adicionalmente em triângulos e é expresso por $K_i = K_{i1} + K_{i2} + \dots + K_{im}$, temos o conjunto de triângulos K_{ij} com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$ como sendo uma triangulação de K portanto,

$$\begin{aligned} m(K) &= m(K_{11}) + m(k_{12}) + \dots + m(k_{1m_1}) \\ &\quad + m(K_{21}) + m(K_{22}) + \dots + m(k_{2m_2}) + \dots \\ &\quad + m(K_{n1}) + m(k_{n2}) + \dots + m(k_{nm_n}) = m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + \dots + m(K_n) \end{aligned}$$

Demonstramos assim a propriedade da adição.

Assim, a função de área $m(K)$ para um K polígono é definida. Como visto anteriormente, não há nenhuma outra função de área. Assim, demonstramos a existência e a unicidade da função área.

1.3 Área de Polígonos Congruentes por Corte

Pela invariância e aditividade da função área, se dois polígonos são congruentes por corte então possuem a mesma área. Será que vale a recíproca? A resposta é positiva. De fato em 1832 Farkas Wolfgang Bolyai e mais tarde, em 1833, P. Gerwien provaram o seguinte teorema:

Teorema 1.4. (Bolyai-Gerwien) Se dois polígonos possuem a mesma área, então são congruentes por corte.

A demonstração desse teorema é elementar, mas antes precisamos provar alguns lemas. *Lema 1.1.* Sejam K e L polígonos, $K = K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n$ e $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ decomposições de K e L , respectivamente. Se para todo $i=1, \dots, n$, K_i e L_i são congruentes por corte então K e L são congruentes por corte.

A demonstração é baseada na definição de congruência por corte.

Lema 1.2. A congruência por corte é uma relação de equivalência.

Demonstração. As propriedades de simetria e reflexividade são claras. Demonstraremos apenas a transitividade.

Admita K, L, M polígonos tais que $K \sim L, L \sim M$ mostremos que $K \sim M$.

Considere L_1, L_2, \dots, L_m uma decomposição de L , de modo que $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$ e um polígono K que pode ser construído usando K_1, K_2, \dots, K_m que são congruentes com as peças de L_1, L_2, \dots, L_m da decomposição de L . Então $K = K_1 + K_2 + \dots + K_m$, com $K_i \equiv L_i$ ($i=1,2,3,\dots,m$)

Considere L'_1, L'_2, \dots, L'_n como sendo outra decomposição de L de modo que $L=L'_1+L'_2+\dots+L'_n$ e o polígono M que pode ser construído utilizando peças M_1, M_2, \dots, M_n que são congruentes com as peças L'_1, L'_2, \dots, L'_n da decomposição de L . Então $M=M_1+M_2+\dots+M_n$ com $L'_j \equiv M_j$ ($j = 1,2,\dots,n$).

Considere a decomposição de L obtida pela combinação das duas decomposições de L mencionada acima, ou seja, L será formada pelas partes $L_{ij} = L_i \cap L'_j$ ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$).

Considere o índice i de L_{ij} como uma constante e variando o índice j do outro, obtemos uma nova decomposição de L_i . Para esta decomposição de L_i há uma decomposição correspondente de K_i . Desta maneira, obtemos um refinamento $\{K_{ij}\}$ da decomposição $\{K_i\}$ de K .

Por outro lado, considerando o índice j de L_{ij} como uma constante e variar o índice i , obtém-se uma decomposição de L'_j . Para esta decomposição de L'_j corresponde uma decomposição de M_j . Desta maneira, obtém-se um refinamento $\{M_{ij}\}$ da decomposição $\{M_i\}$ de M .

Portanto $K_{ij} \equiv M_{ij}$ e os K e M são congruentes por corte.

Lema 1.3. Um paralelogramo é congruente por corte a um retângulo: o comprimento horizontal do retângulo é igual ao comprimento da base do paralelogramo e o comprimento vertical igual à altura do paralelogramo .

Demonstração: Considere um paralelogramo $ABCD$ e um retângulo $A'B'C'D'$ de base $D'C'$ igual a base DC e altura $A'D'$ igual a altura DH (observe a figura 1.8).

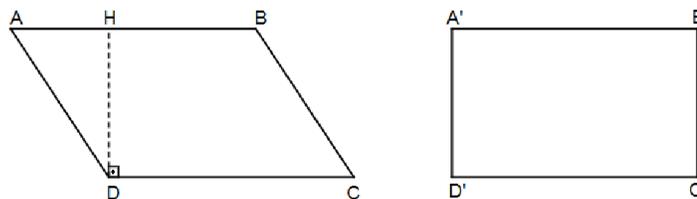


Figura 1.8

Vamos mostrar que $ABCD$ é congruente por corte com $A'B'C'D'$. Para isso basta mover o triângulo ADH de tal maneira que AD coincida com BC formando o retângulo $HH'CD$ que será congruente ao retângulo $A'B'C'D'$, pois DC é congruente a $D'C'$ e HD é

congruente a $A'D'$. Portanto o paralelogramo $ABCD$ é congruente por corte ao retângulo $A'B'C'D'$.

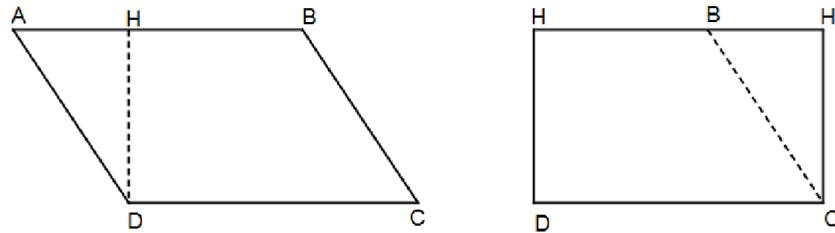


Figura 1.9

O próximo lema é fundamental na demonstração do teorema Bolyai-Gerwien e de fato é um caso particular do teorema.

Lema 1.4. Dois retângulos com áreas iguais são congruentes por corte.

Em particular, qualquer retângulo é congruente por corte a um retângulo, cujo comprimento horizontal igual a 1.

Prova. Sejam $ABCD$ e $EFGH$ retângulos com áreas iguais e AB o maior lados dos dois. Construa um lado através do alongamento desde H e escolha o ponto L tal que o comprimento de LE é igual ao de AB (ver figura 1.10).

Pelo lema 1.3, o paralelogramo $EFKL$ é congruente por corte com $EFGH$. Uma vez que a área do retângulo $ABCD$ é igual ao do paralelogramo $EFKL$ e o comprimento horizontal do $ABCD$ é igual ao comprimento da base de $EFKL$, as alturas do $ABCD$ e $EFKL$ são iguais. Portanto, pelo lema 1.2 $ABCD$ e $EFGH$ são congruentes por corte.

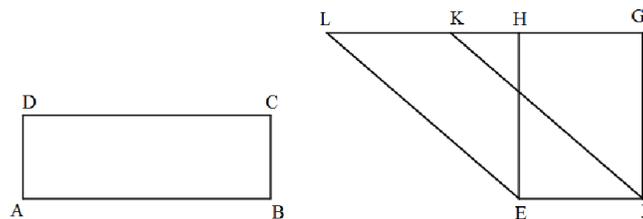


Figura 1.10

Agora demonstraremos o Teorema de Bolyai e Gerwien.

Sejam K_1 e K_2 dois polígonos tais que $m(K_1) = m(K_2)$. Claramente K_1 pode ser decomposto em $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, ou seja, $K_1 = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$. Pelo teorema 1.1, cada triângulo Δ_i ($i = 1, \dots, n$) é congruente por corte com um retângulo R_i , então $K_1 = R_1 + R_2 + \dots + R_n$.

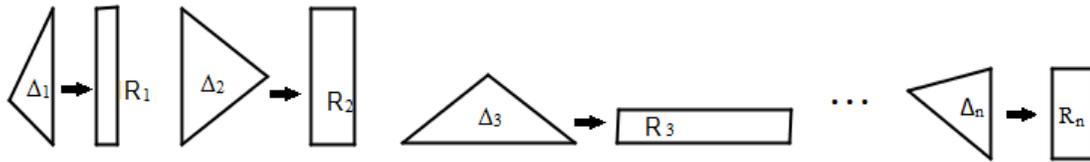


Figura 1.11

Pelo *Lema 1.4* cada R_i é congruente por corte a R_i^0 de medidas 1 e $m(R_i)$. Unindo horizontalmente todos os retângulos R_i^0 ($i = 1, 2, \dots, n$), construímos o retângulo K_1^0 com comprimento vertical igual a 1. Pelo lema 1.1 K_1 e K_1^0 são congruentes por corte. Note que o comprimento horizontal de K_1^0 é $m(R_1)$. Observe a figura 1.12. Então $m(K_1) = m(K_1^0)$.

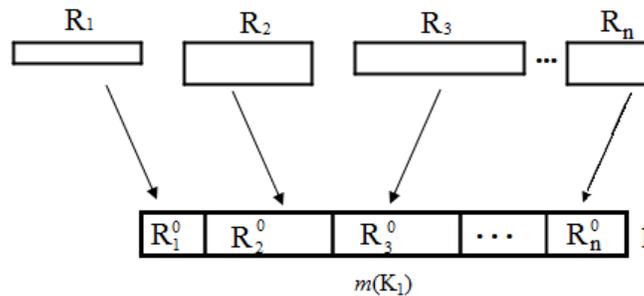


Figura 1.12

Aplicando o mesmo procedimento para K_2 , construímos o retângulo K_2^0 que é congruente por corte a K_2 e possui comprimento vertical igual a 1. Então $m(K_2) = m(K_2^0)$.

Como $m(K_1) = m(K_2)$ e o comprimento horizontal de K_1^0 é igual ao comprimento horizontal de K_2^0 , concluímos que $K_1^0 \equiv K_2^0$ e pelo lema 1.1, K_1 e K_2 são congruentes por corte.

1.4 Alguns comentário sobre a área de outras figuras planas

Até agora, nossas discussões têm sido limitadas a áreas de polígonos. Por outro lado, como podemos definir a área de outras figuras planas?

Por exemplo, qual foi o método usado pela primeira vez para encontrar a área de um círculo? Mesmo antes que a fórmula para a área de um círculo fosse estabelecida, Hipócrates

de Chios, em suas tentativas de quadrar o círculo, foi capaz de calcular a área de lúnulas, figuras geométricas limitadas por dois arcos circulares de raios distintos. Observe a figura 1.13 que foi construída através dos seguintes passos:

1. Constrói-se o triângulo retângulo ABC.
2. Com centro em O (ponto médio de AB) traça-se um semicírculo de raio $AO = OB$.
3. Com centro em D (ponto médio de AC) traça-se o semicírculo de raio $AD=DC$.
4. Com centro em E (ponto médio de BC) traça-se o semicírculo de raio $CE=EB$.

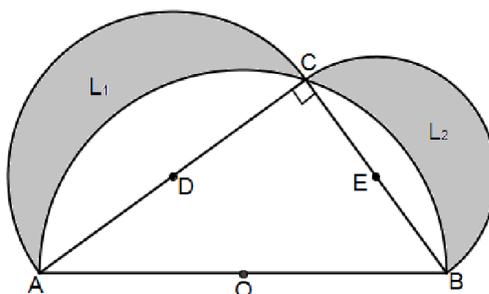


Figura 1.13

Na figura temos duas lúnulas de áreas L_1 e L_2 .

A área das lúnulas $L_1 + L_2$, é igual à do triângulo retângulo ABC. De fato, observe que a soma das áreas das lúnulas pode ser obtida somando-se as áreas dos dois semicírculos de diâmetros AC e CB e do triângulo ABC e subtraindo-se do resultado a área do semicírculo de diâmetro AB.

$$L_1 + L_2 = (\text{semicírculo AC}) + (\text{semicírculo CB}) + (\Delta ABC) - (\text{semicírculo AB})$$

Mas a soma das áreas dos semicírculos de diâmetros AC e BC é igual à área do semicírculo de diâmetro AB (teorema de Pitágoras, por construção o triângulo ABC é retângulo, AC e CB são catetos e AB é a hipotenusa). Logo:

$$L_1 + L_2 = (\text{semicírculo AB}) + (\Delta ABC) - (\text{semicírculo AB}) = (\Delta ABC)$$

Observação: nesta demonstração os $()$ representam área.

No método de Hipócrates para determinar a área de lúnulas foi usada relação entre semelhança e área (a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança).

É interessante notar que, sem conhecer a fórmula para determinar a área de um círculo, a área de uma figura em forma de lúnula poderia ser obtida com precisão e transformada por construção (usando uma régua e um compasso) em um polígono. Na verdade, os gregos acreditavam ser um mistério o fato de que a área de uma figura curva pode ser obtida usando

a área de uma figura delimitada por linhas retas e isso contribuiu por muito tempo para que os gregos acreditassem que era possível construir um quadrado cuja área é igual à do círculo, usando apenas uma régua sem marcas e um compasso. Se eles estivessem certos, então seria possível encontrar a área de um círculo sem utilizar a ideia de limite. A constatação de que este problema é de fato insolúvel foi finalmente obtido no século 19. Uma das razões por que levou tanto tempo para lidar com este problema é porque era necessário primeiro entender claramente a natureza do número π (número irracional).

Estamos acostumados com o método para calcular a área de um círculo, como mostrado na figura 1.14. O círculo é dividido em setores circulares. Colocando uma metade do círculo sobre a outra teremos uma figura próxima a um paralelogramo. À medida que usamos setores cada vez menores, a base do paralelogramo se aproxima da metade do comprimento da circunferência e a altura do paralelogramo se aproxima da medida do raio do círculo. E desse modo, temos que a área de um círculo de raio r é πr^2 .

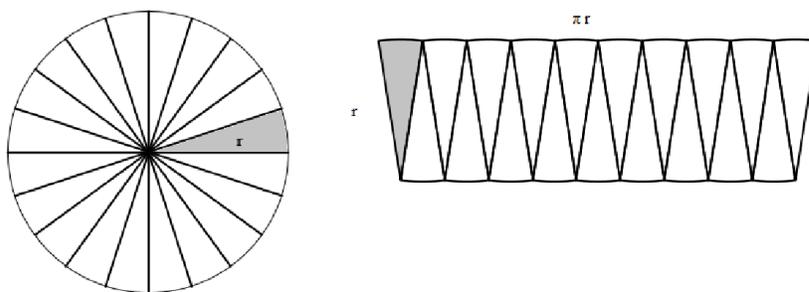


Figura 1.14

Existem outros métodos para calcular a área de um círculo, por exemplo, inscrever um polígono regular de n lados no círculo (figura 1.15).

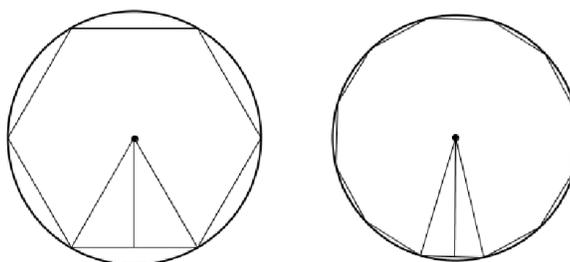


Figura 1.15

Podemos notar que quanto maior o número de lados do polígono regular mais próximo ele fica da circunferência. Então a circunferência pode ser vista como um polígono regular de infinitos lados. Como o polígono inscrito na circunferência pode ser dividido em n triângulos

congruentes de base b e altura a , calculando a área (A_p) desse polígono regular de infinitos lados (ou seja, n lados), obtemos:

$$A_p = n \cdot \frac{b \cdot a}{2}.$$

Mas $n \cdot b$ é o perímetro (P) do polígono, portanto:

$$A_p = \frac{P \cdot a}{2}$$

Dado um círculo, de raio r , considerando os polígonos regulares inscritos nesse círculo, com o crescimento do número de lados as áreas dos polígonos (A_p) se aproximam da área do círculo (A_c), assim como os seus perímetros se aproximam do comprimento da circunferência e as alturas dos triângulos se aproximam do raio do círculo. Portanto:

$$\text{Se } n \rightarrow \infty \begin{cases} P \rightarrow 2\pi r \\ a \rightarrow r \\ A_p \rightarrow A_c \end{cases}$$

Assim

$$A_c = \lim_{n \rightarrow \infty} A_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P \cdot a}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

Então

$$A_c = \pi \cdot r^2$$

Arquimedes calculou a área de um círculo inscrevendo dentro do círculo um polígono regular e depois circunscrevendo o círculo com um polígono similar, observe a figura 1.16.

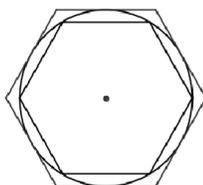


Figura 1.16

Ele utilizava dois hexágonos e, através da duplicação de seus lados e da repetição do processo, finalmente, chegou a um polígono de 96 lados. Em seguida, calculava a área do polígono interno que estabelecia o limite inferior da área do círculo e a área do polígono externo que estabelecia o limite superior. Através desse processo, ele chegou a um valor aproximado para a área do círculo que estava, rigorosamente, entre esses dois limites.

Quando tentamos encontrar a área exata de um círculo a ideia de limite se faz necessária. O matemático grego Eudoxo foi o primeiro matemático que aplicou o processo de limite para tentar encontrar a área de um círculo. O Método de Eudoxo é chamado de o método da exaustão. Ele tentou encontrar não só a área de um círculo, mas também o volume de cones e pirâmides.

Capítulo 2

Volumes

A ideia intuitiva que temos de volume está baseada em cubos. Um cubo com aresta igual a uma unidade é tomado como padrão e consideramos o volume desse cubo como sendo 1. Se um sólido pode ser decomposto em n cubos padronizados, temos que o volume desse sólido é o valor numérico n . Isso conduz diretamente para a fórmula do cálculo do volume de blocos retangulares, por exemplo, se consideramos um bloco retangular de comprimento a , largura b e altura c (a , b e c números naturais) será decomposto em abc cubos padrão, portanto o volume de blocos retangulares será abc .

Mas como fazemos para calcular o volume de sólidos que não podem ser decompostos em cubos padrão?

A civilização egípcia já calculava, há milhares de anos, o volume de alguns sólidos. Os celeiros egípcios tinham a forma de um cilindro circular reto, eles calculavam o volume de um cilindro como fazemos hoje: como o produto da área da base pela altura.

Segundo Arquimedes, Demócrito foi o primeiro a anunciar que o volume de um cone é $1/3$ do de um cilindro com base e altura iguais, e que o volume da pirâmide é $1/3$ do volume de um prisma com a mesma base e mesma altura. A demonstração dessas duas afirmações foi atribuída Eudóxio, que se apoiou no método da exaustão.

No Ensino Médio o estudo de volume de poliedros está baseado no Princípio de Cavalieri: Sejam A e B sólidos e α um plano horizontal. Se planos paralelos à α determinam nos sólidos figuras planas cuja razão entre as áreas é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. Mas para demonstrar o volume de uma pirâmide vamos utilizar o seguinte método: Seja A a área da base de uma pirâmide e h a sua altura. Considere n prismas obtidos dividindo a altura em n subintervalos (todos com o mesmo comprimento) e com base paralela a base da pirâmide, observe a figura 2.1.

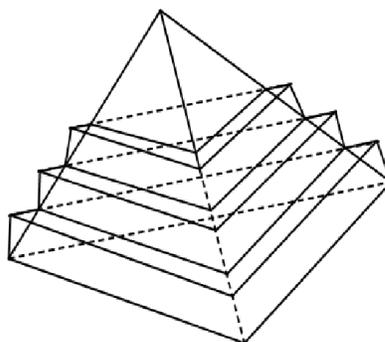


Figura 2.1

A área da base dos prismas obtidos e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{k \frac{h}{n}}{h} = \frac{k}{n}$, onde k é a quantidade de subintervalos n obtidos do topo da pirâmide até a base do prisma. Já sabemos que a razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Então, temos que o volume de cada um dos prismas será:

$$V_p = \frac{h}{n} A \left(\frac{k}{n} \right)^2$$

Por conseguinte, a soma V_n total dos volumes desses prismas é

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{h}{n} A \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right) \\ &= \frac{h}{n^3} A (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ &= \frac{h}{n^3} A \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Quando n aumenta ($n \rightarrow \infty$), vemos que V_n se aproxima de

$$\frac{1}{3} hA \quad (V_n \rightarrow \frac{1}{3} hA).$$

Portanto temos:

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{3}$$

2.1 Congruência por corte e o Teorema de Dehn

O conceito de congruência por corte para poliedros é definido de forma semelhante à congruência por corte para polígonos. A função volume para poliedros também é definida com propriedades semelhantes a da função área, ou seja, positividade, invariância e aditividade, e, além disso, o volume do cubo padrão é definido como 1 unidade de volume.

Novamente pela invariância e aditividade concluímos que dois poliedros congruentes por corte possuem o mesmo volume. Neste capítulo verificaremos se a recíproca vale, ou seja, se existe um teorema do tipo de Bolyai Gerwien para poliedros.

Esta pergunta surgiu pela primeira vez em meados do século XIX por Gauss e em 1900 foi apresentado por Hilbert no Congresso Internacional de Matemáticos e é chamado de terceiro problema de Hilbert. Um de seus alunos, chamado Max Dehn, no mesmo ano deu resposta negativa a esta pergunta. Mais precisamente, Dehn provou o seguinte teorema:

Teorema 2.1. (Dehn) Um tetraedro regular de volume 1 e o cubo padrão não são congruentes por corte.

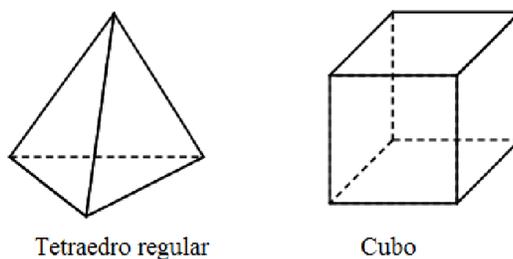


Figura 2.2

A prova do teorema de Dehn é baseada na utilização de uma classe de invariantes. Estes invariantes são definidos por meio de funções aditivas. Inicialmente faremos uma revisão sobre as funções aditivas e suas propriedades elementares.

2.2.1. Funções Aditivas

Definição: Seja \mathbf{R} o conjunto dos números reais. Uma função $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, é chamada de uma função aditiva se para todo $x, y \in \mathbf{R}$ $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Proposição 2.1: Seja f uma função aditiva. Então $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, para todo número racional α e real x .

Demonstração: Inicialmente observamos que $f(0) = 0$, de fato tomando $x = y = 0$:

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Além disso, $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, ou, $f(0) = f(x) + f(-x)$, portanto $f(-x) = -f(x)$. Então basta mostrar a proposição para $\alpha > 0$. Primeiro faremos a demonstração para α natural. Faremos a prova por indução finita. O primeiro passo da indução é óbvio. Seja $f(kx) = kf(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Então $f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x)$.

Como queríamos demonstrar. Por outro lado $f(x) = f\left(n \frac{1}{n}x\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x)$

$\forall n \in \mathbf{N}$. Para finalizar, seja $\alpha = \frac{m}{n}$, onde m e n são números naturais,

$$f(\alpha x) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m \frac{1}{n}f(x) = \frac{m}{n}f(x).$$

Corolário 2.1: Existe $a \in \mathbf{R}$ tal que $f(a\alpha) = a\alpha$ para todo α racional.

Demonstração: Basta utilizar a proposição anterior para $x = 1$. Concluímos que $f(\alpha) = \alpha f(1)$. Então basta tomar $a = f(1)$.

O teorema a seguir será utilizado na demonstração do teorema de Dehn.

Teorema 2. 2. Sejam θ_1, θ_2, a_1 e $a_2 \in \mathbf{R}$, tais que $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ é um número irracional. Então

existe uma função f aditiva de tal forma que $f(\theta_1) = a_1$ e $f(\theta_2) = a_2$.

A função encontrada no teorema acima não é necessariamente linear. Por exemplo, sejam $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = \sqrt{2}$, como $\sqrt{2}$ é um número irracional, então existe uma função aditiva tal que $f(1) = 0$ e $f(\sqrt{2}) = 1$. Esta função não é linear, pois supondo $f(x) = ax$,

$$a = f(1) = 0 \text{ e } a\sqrt{2} = f(\sqrt{2}) = 1.$$

Que é uma contradição.

Não existe um método explícito para construir uma função aditiva que satisfaça as propriedades acima. No entanto, a função, de fato, existe.

2.2.2. Invariantes

Nesta seção definiremos os invariantes a serem utilizados na demonstração do teorema de Dehn. Esses invariantes são definidos de tal forma que respeitam a congruência por corte de poliedros, ou seja, se dois poliedros são congruentes por corte, então possuem invariantes iguais.

Antes disso definiremos o conceito de ângulo diedro. Sejam α_1 e α_2 planos e L a intersecção de α_1 e α_2 . O ângulo de intersecção construído por um plano ortogonal ao L com

α_1 e α_2 é chamado de ângulo diedro (ver figura 2.3). Se θ é um ângulo diedro, então seu ângulo complementar é também um ângulo diedro.

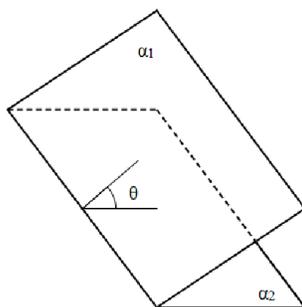


Figura 2.3

Dado um poliedro, existem ângulos diedros entre as faces que se interceptam em uma aresta do mesmo. O ângulo diédrico a ser considerado é sempre o ângulo interno do poliedro.

Sejam K um poliedro, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ seus ângulos diedros e a_1, a_2, \dots, a_n os comprimentos das arestas correspondentes a estes ângulos diedros. Considere uma função aditiva f e defina: $\chi_f(K) = \chi(K) = a_1 f(\theta_1) + a_2 f(\theta_2) + \dots + a_n f(\theta_n)$.

Teorema 2.3. (Hadwiger). Se uma função aditiva f satisfaz $f(\pi) = 0$, então χ_f é um invariante, isto é, dado um poliedros K e sua decomposição $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$, temos $\chi_f(K) = \chi_f(K_1) + \dots + \chi_f(K_n)$ para qualquer função aditiva f tal que $f(\pi) = 0$.

Demonstração: Primeiro iremos demonstrar a propriedade aditiva. Seja $K_0 = K$. Considere todas as arestas das partes de K_0, K_1, \dots, K_n . Sejam $L_j(i), j = 1, 2, 3, \dots, n_i$, arestas de um poliedro $K_i, i = 1, 2, \dots, n$, onde n_i é o número de arestas de K_i . Em cada segmento, pode haver outros vértices do poliedro K_i ou pontos de intersecção com o interior das arestas de poliedros diferentes de K_i . Iremos decompor $L_j(i)$ por esses pontos como segue:

$$L_j(i) = L_{j1}(i) + L_{j2}(i) + \dots + L_{jn_{ij}}(i)$$

O n_{ij} é o número de vértices no interior da aresta $L_j(i)$, ou o número de pontos de intersecção com o interior das bordas de outros poliedros de K_i . Chamaremos estes pequenos segmentos $L_{jk}(i) = (i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n_i; k = 1, 2, \dots, n_{ij})$ de cadeias. Escolhendo uma cadeia $L_{jk}(i)$ sobre uma aresta do poliedro K_i . Sejam $a_{jk}(i)$ o comprimento de $L_{jk}(i)$ e $\theta_{jk}(i)$ o ângulo diedro correspondente a aresta $L_{jk}(i)$ pertencentes ao poliedro K_i . Se $a_j(i)$ e $\theta_j(i)$ são o comprimento de $L_j(i)$ e a medida do ângulo diedro da aresta $L_j(i)$, respectivamente, então $a_j(i)$ e $\theta_j(i)$ são representados como se segue:

$$\theta_j(i) = \theta_{jk}(i), k = 1, 2, 3, \dots, n_{ij},$$

$$a_j(i) = a_{j1}(i) + a_{j2}(i) + \dots + a_{jn_{ij}}(i).$$

Agora, considere todas as cadeias nas arestas do poliedro K_i e o valor de cada cadeia. A soma total dos pesos é, obviamente, igual a $\chi_f(K_i)$ pelo seguinte cálculo:

$$\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} a_{jk}(i) \cdot f(\theta_{jk}(i)) = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} a_{jk}(i) \cdot f(\theta_j(i)) = \sum_{j=1}^{n_i} a_j(i) \cdot f(\theta_j(i)) = \chi_f(K_i)$$

Em seguida, temos de provar que

$$\sum_{i=1}^N = \sum_{j=1}^{n_i} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} a_{jk}(i) \cdot f(\theta_{jk}(i)) = \chi(K_0). \quad (*)$$

Uma vez que esta igualdade é provada, teremos

$$\sum_{i=1}^N \chi_f(K_i) = \chi_f(K_0),$$

que irá completar a prova.

A ideia é provar usando a propriedade $f(\pi) = 0$, isso irá demonstrar que as cadeias dentro do poliedro em nada contribuem para os valores.

Vamos concentrar nossa atenção em uma cadeia L . Seja a o comprimento de L .

Na soma (*), vamos considerar os termos da série que corresponde a L , isto é, todos os termos que possuem (i, j, k) , de tal forma que $L = L_{jk}(i)$ ($1 \leq i \leq N$) e denotar os (i_1, j_1, k_1) , (i_2, j_2, k_2) , ..., (i_s, j_s, k_s) para cada (i, j, k) . Aqui, a cadeia L está contida nas arestas dos poliedros K_{i_1} , K_{i_2} , K_{i_3} , ..., K_{i_s} . A soma parcial da série (*) no que diz respeito aos termos descritos acima é dada por:

$$\begin{aligned} & a_{j_1 k_1}(i_1) \cdot f(\theta_{j_1 k_1}(i_1)) + a_{j_2 k_2}(i_2) \cdot f(\theta_{j_2 k_2}(i_2)) + \dots + a_{j_s k_s}(i_s) \cdot f(\theta_{j_s k_s}(i_s)) \\ & = a \{ f(\theta_{j_1 k_1}(i_1)) + f(\theta_{j_2 k_2}(i_2)) + \dots + f(\theta_{j_s k_s}(i_s)) \} \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, vamos deixar

$$\theta_{j_1 k_1}(i_1) = \alpha_1, \theta_{j_2 k_2}(i_2) = \alpha_2, \dots, \theta_{j_s k_s}(i_s) = \alpha_s$$

Agora, vamos examinar o que acontece em torno de uma cadeia de L , para isso, iremos considerar três casos

(I) o primeiro caso é quando a cadeia L está no interior de K_0 (sem pontos em seus extremos), nesta situação, há dois casos a serem considerados:

(a) No caso em que não existem outros poliedros que K_{i_1} , K_{i_2} , K_{i_3} , ..., K_{i_s} , $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq N$, que contêm L nas suas arestas. Se o poliedro K_0 é cortado por um plano ortogonal a cadeia L , temos a seção resultante em o poliedro ilustrado na figura 2.4.

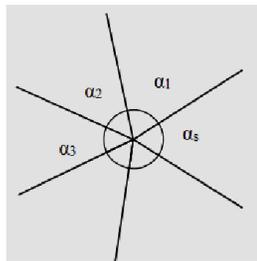


Figura 2.4

Portanto, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = 2\pi$ e $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = 2f(\pi) = 0$

(b) Se existem outros poliedros diferentes de $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_s}$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq N$, contendo L nas suas extremidades (ver figura 2.5) a cadeia está contida em uma face de um poliedro que a soma dos ângulos diedros é dada por $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = \pi$.

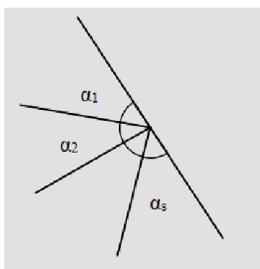


Figura 2.5

Portanto, $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = f(\pi) = 0$

(II) No segundo caso, o local onde a cadeia L está é sobre uma face do poliedro K_0 , mas não na sua extremidade (ver a figura 2.6). Neste caso, é o mesmo que a situação (b) em (I). Assim, $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = f(\pi) = 0$

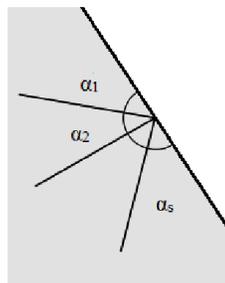


Figura 2.6

(III) No terceiro caso, a cadeia L está sobre a aresta $L_j(0)$ de K_0 . Neste caso, existe K tal que $l = l_{jk}(0)$. Portanto, um $a = a_{jk}(0)$. Há duas situações a considerar:

(a) Se, na adição de K_0 , não há poliedros diferentes $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_s}, 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq N$, que contêm L nas suas extremidades (observe a figura 2.7).

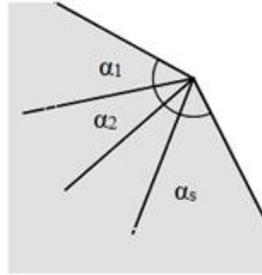


Figura 2.7

Por isso, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = \theta_j(0) = \theta_{jk}(0)$. Consequentemente $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = f(\theta_{jk}(0))$

(b) Se, na adição de k_0 , existem outros poliedros que $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_s}, 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq N$ que contêm L sobre as arestas (observe a figura 2.8).

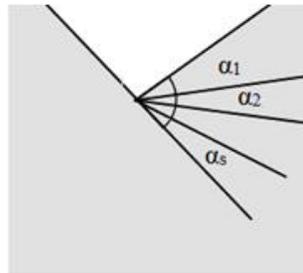


Figura 2.8

Portanto $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = \theta_j(0) = \theta_{jk}(0)$. Consequentemente, $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = f(\theta_{jk}(0))$

Portanto, os termos da soma (*) que apareceram apenas no caso (III), isto é, cada termo não nulo será $a_{jk}(0) \cdot f(\theta_{jk}(0))$.

Uma vez que os demais termos da soma (1) são iguais a 0, temos

$$\sum_{j=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{n_{0j}} a_{jk}(0) \cdot f(\theta_{jk}(0)) = x_f(K_0).$$

Portanto, a propriedade aditiva da definição de invariante é verdadeira.

2.3 Solução do Terceiro Problema de Hilbert: Teorema de Dehn

Uma vez que todos diedros de um tetraedro regular ABCD são iguais, denotamos este ângulo diedro por θ . Para determinar a medida de θ , desenhamos uma perpendicular do vértice D de ABCD para base ABC. Seja E a base desta perpendicular e baricentro do

triângulo equilátero ABC, o ponto de intersecção da linha de AE e a borda BC é o ponto médio de BC e o segmento DF é a mediana do triângulo BCD. O comprimento do segmento de EF é de 1/3 da mediana AF (= DF) (ver figura 2.9).

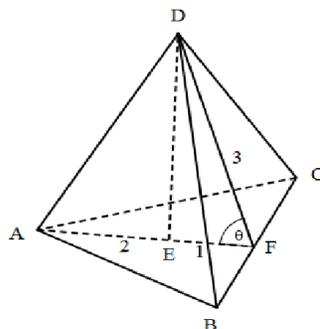


Figura 2.9

Portanto, $\cos\theta = \frac{1}{3}$

Lema 2.1. Se θ é o ângulo diedrico do tetraedro regular e m é um número natural, então $\cos m\theta = \frac{q}{3^m}$, onde o q é um número inteiro não divisível por 3.

Prova. Usaremos a prova por indução finita. Para $m = 1$, a afirmação é verdadeira ($q=1$). Agora vamos supor que a afirmação é verdadeira para todo número natural menor ou igual a m . Então, $\cos m\theta = \frac{a}{3^m}$ e $\cos (m-1)\theta = \frac{b}{3^{m-1}}$, onde a e b não são divisíveis por 3. Queremos mostrar que a afirmação é verdadeira para $m+1$. Utilizando as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}\cos (m+1)\theta &= \cos (m\theta+\theta) = \cos m\theta \cos \theta - \sin m\theta \sin \theta \\ \cos (m-1)\theta &= \cos (m\theta-\theta) = \cos m\theta \cos \theta + \sin m\theta \sin \theta\end{aligned}$$

obtemos

$$\cos (m+1)\theta + \cos (m-1)\theta = 2 \cos m\theta \cos \theta,$$

ou,

$$\cos (m+1)\theta = 2 \cos m\theta \cos \theta - \cos (m-1)\theta.$$

Usando a hipótese de indução,

$$\cos (m+1)\theta = 2 \cdot \frac{a}{3^m} \cdot \frac{1}{3} - \frac{b}{3^{m-1}}$$

$$\cos (m+1) \theta = \frac{2a - 9b}{3^{m+1}}$$

Pelo hipótese a não é divisível por 3, portanto $2a - 9b$ também não é. Portanto, pela indução finita, a afirmação é verdadeira para todo m natural.

Lema 2.2. Se θ é o ângulo diedrico do tetraedro regular, π/θ é um número irracional.

Prova. Suponhamos que $\frac{\pi}{\theta} = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros. Então $m\theta = n\pi$.

Consequentemente $\cos m\theta = \cos n\pi = \pm 1$, o que é absurdo pelo *Lema 2.1*.

Agora podemos provar o Teorema de Dehn. Pelo teorema 2.2 e lema 2.2, existe uma função f aditiva de tal que

$$f(\pi) = 0 \text{ e } f(\theta) = 1.$$

Pelo teorema 2.3, χ_f é um invariante de poliedros. Para um cubo o valor deste invariante é igual a zero, uma vez que todos os ângulos diedricos são iguais a $\pi/2$. Por outro lado, para um tetraedro regular T ,

$$\chi_f(T) = 6 a f(\theta) = 6 a \neq 0,$$

onde a é o comprimento das arestas de T . Então o cubo e o tetraedro regular possuem invariantes diferentes, portanto pelo teorema 2.3 não podem ser congruentes por corte, mesmo tendo volumes iguais. Isto finaliza a demonstração do Teorema Dehn.

Capítulo 3

Atividades

O objetivo geral das atividades é verificar de maneira intuitiva e dedutiva o Teorema de Bolyai-Gerwien: Se dois polígonos possuem a mesma área, então eles são congruentes por corte. Para desenvolver o teorema vamos, passo a passo, construir, recortar e reorganizar figuras. São atividades que podem ser desenvolvidas no final do ensino fundamental.

Para a abordagem intuitiva iremos utilizar os seguintes conceitos: triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios, ponto médio, retas perpendiculares e retas paralelas. O desenho geométrico com régua e compasso será de extrema importância, pois a precisão das figuras é fundamental na montagem.

Na abordagem dedutiva iremos trabalhar as demonstrações que nos garantem que as peças se encaixam perfeitamente na composição das figuras. Para isto utilizaremos as propriedades de ângulos e paralelismo, de congruência de figuras planas e semelhança de triângulos, de comprimento e área.

Atividade 1: Verificar que todo triângulo é congruente por corte com um retângulo.

Objetivos: Verificar que um triângulo é congruente por corte com um retângulo de mesma medida da base e metade da medida da altura e definir a fórmula para a área do triângulo.

Desenvolvimento:

- Construir um triângulo ABC qualquer;
- Construir um retângulo com a mesma medida da base e com metade da medida da altura do triângulo ABC;
- No triângulo traçar a reta DE que passa pelos pontos médios dos lados AB e AC e o segmento AF perpendicular à reta DE;

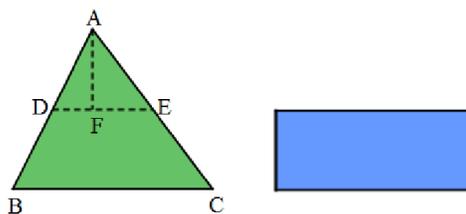


Figura 3.1

- Recortar o retângulo ABC e verificar que as peças se encaixam perfeitamente na composição do retângulo;

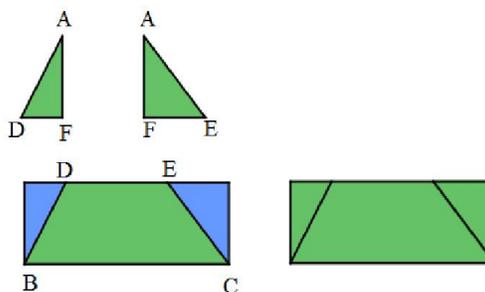


Figura 3.2

- Mostrar que as regiões triangulares T_1 e T_2 do retângulo são congruentes aos triângulos ADF e AEF que compõem o triângulo ABC;

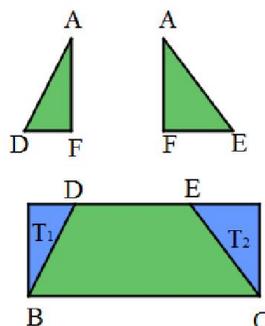


Figura 3.3

- Definir a fórmula para a área do triângulo a partir da área do retângulo (base x altura).

Atividade 2: Verificar que todo paralelogramo é congruente por corte com um retângulo

Objetivo: Verificar que todo paralelogramo é congruente por corte com um retângulo de mesmas medidas de base e de altura e definir a fórmula para a área do paralelogramo.

Desenvolvimento:

- Construir um paralelogramo ABCD qualquer;
- Construir um retângulo com as mesmas medidas de base e altura do paralelogramo ABCD;
- No paralelogramo traçar a reta AE perpendicular ao lado CD;

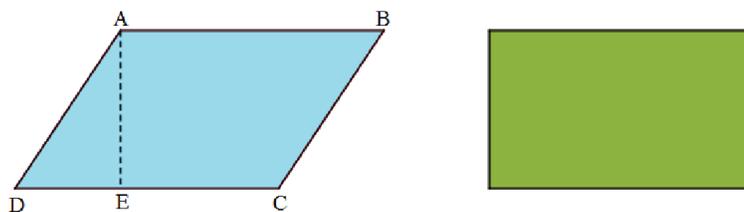


Figura 3.4

- Recortar o paralelogramo e verificar que as peças se encaixam perfeitamente na composição do retângulo.

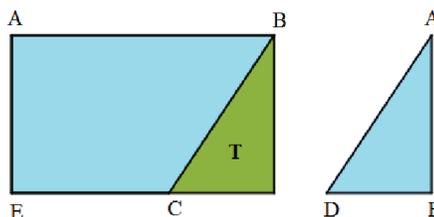


Figura 3.5

- Mostrar que a região triangular T retângulo é congruente ao triângulo AED que compõem o paralelogramo ABCD.
- Definir a fórmula para a área do paralelogramo a partir da área do retângulo.

Atividade 3: Verificar que todo trapézio é congruente por corte com um retângulo

Objetivo: Transformar um trapézio em um retângulo e definir uma fórmula para a área do trapézio a partir da área do retângulo.

Desenvolvimento:

- Construir um trapézio ABCD qualquer;
- Traçar a reta EF que passa pelos pontos médios dos lados AD e BC e os segmentos DG e CH perpendiculares a reta EF;

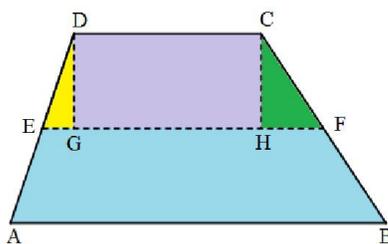


Figura 3.6

- Recortar o trapézio e construir um retângulo com a mesma área;

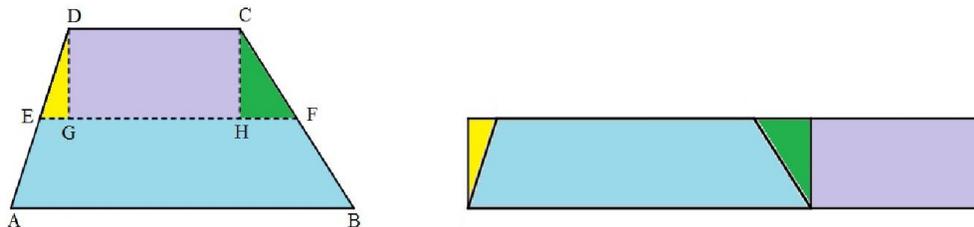


Figura 3.7

- Sobre o trapézio ABCD construa um retângulo com base igual à soma das bases do trapézio e o lado paralelo passando pelos pontos médios AD e BC;

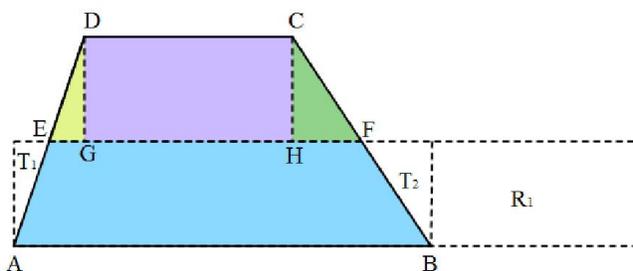


Figura 3.8

- Mostrar que os triângulos DEG e CHF do trapézio são congruentes aos triângulos T_1 e T_2 do retângulo e mostrar que o quadrilátero CDGH do trapézio é congruente ao retângulo R_1 .
- Definir a fórmula para a área do trapézio a partir da área do retângulo.

Atividade 4: Verificar que todo losango é congruente por corte com um retângulo

Objetivo: Transformar um losango em um retângulo e definir uma fórmula para a área do losango a partir da área do retângulo.

Desenvolvimento:

- Construir um losango ABCD qualquer;
- Traçar as diagonais AB e CD, essas diagonais irá dividir o losango em quatro triângulos, recortar os triângulos e formar o retângulo com a mesma área do retângulo;

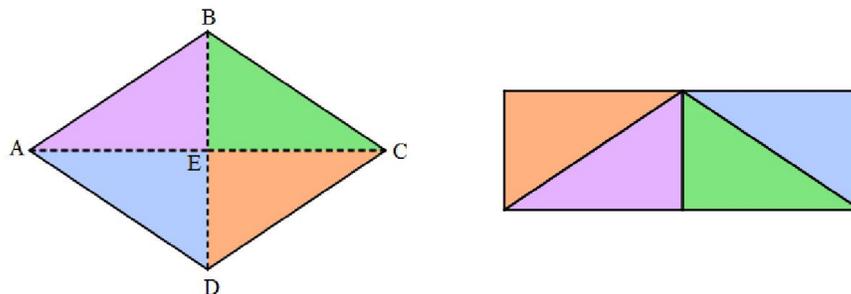


Figura 3.9

- Mostrar que as regiões triangulares ABE' e BCE'' que completam o retângulo obtido a partir do losango são congruentes aos triângulos ADE e CDE do losango .

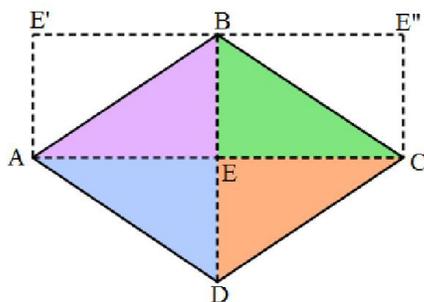


Figura 3.10

- Definir a fórmula para a área do losango a partir da área do retângulo.

Referências:

BATISTA, E. **Áreas, volumes e equidecomponibilidade**. Florianópolis: Ed. UFSC, 2004. Notas. Disponível em < <http://www.bienasbm.ufba.br/M51.pdf> >. Acesso em: 15 jul. 2013.

HOFFMANN, D. S.; GRAVINA, M. A. **Polígonos equidecomponíveis**. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ26/CabriJava/ativ26.htm#atividades>. Acesso em 27 agos. 2013.

KAGOIKI, F. Y. **Figuras equidecomponíveis**. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2001.

LIMA, E. L.; WAGNER, E.; MARGADO, A.C. **A matemática do ensino médio**, Volume 1. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, E. L.; WAGNER, E.; MARGADO, A.C. **A matemática do ensino médio**, Volume 2. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

PATERLINI, R. R. **Os “ teoremas” de Cavalieri**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n.72, maio. 2010. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/conteudo/72/cavalieri.pdf>>. Acesso em: 8 agos. 2013.

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. **O terceiro problema de Hilbert** . São Paulo: Ed. UNESP, v.3, n.5, p.41-59, 2003.

SHIGA, K; SUNADA, T. **A mathematical gift, III: The Interplay Between Topology, Functions, Geometry, and Algebra**. AMS, 1996.

TOMAZ, M. **Área do Círculo**. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/matematica/area-do-circulo>>. Acesso em 7 agos. 2013.