



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto



João Evangelista Brito da Silva

**Teorema de Pitágoras: algumas extensões/generalizações
e atividades com o Software GeoGebra**

São José do Rio Preto
2014

João Evangelista Brito da Silva

**Teorema de Pitágoras: algumas extensões/generalizações e
atividades com o Software GeoGebra**

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

São José do Rio Preto
2014

Silva, João Evangelista Brito da.

Teorema de Pitágoras : algumas extensões/generalizações e atividades com o Software GeoGebra / João Evangelista Brito da Silva. -- São José do Rio Preto, 2014

152 f. : il.

Orientador: Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Pitágoras, Teorema de - Estudo e ensino. 3. Tecnologia educacional. 4. Ensino auxiliado por computador. I. Fanti, Ermínia de Lourdes Campello. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

João Evangelista Brito da Silva

**Teorema de Pitágoras: algumas extensões/generalizações e
atividades com o Software GeoGebra**

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof^a. Dr^a. Evelin Menegusso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Tomas Edson Barros
UFSCAR – Universidade Federal de São Carlos

São José do Rio Preto
2014

Dedico este trabalho a minha esposa Jô e aos meus estimados filhos,
Gabriel e Jordana.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, sempre a Deus, que nos brindou com saúde para a realização deste. Por sempre estar presente, iluminando o nosso caminho.

À minha esposa e filhos, pelo apoio, incentivo nos momentos difíceis e que, pacientemente, souberam dividir o nosso precioso tempo com este projeto. A toda minha família, que mesmo à distância, sempre incentivou e torceu pelo sucesso deste trabalho.

À Prof^a. Dr^a. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pela tranquilidade e paciência que conduziu a orientação deste trabalho. Muito obrigado pelas sábias sugestões e ensinamentos, sem os quais seria impossível a conclusão deste trabalho.

Especialmente ao Prof. Hermes Antonio Pedroso, que colaborou efetivamente na realização deste. Muito obrigado por sua característica paciência, por indicar os caminhos e por todas as sugestões, principalmente as de História da Matemática. Sem você este trabalho não seria o mesmo.

Aos membros da banca, pelas sugestões que tornaram este trabalho mais completo.

À Coordenação do PROFMAT e a todos os docentes do Departamento de Matemática envolvidos neste importante projeto. À CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

A todos os colegas de curso, pela amizade, incentivo, exemplo e determinação. Ao Fábio Maia, pelo companheirismo nos incontáveis sábados e domingos de estudos e preparação para o ENQ. Ao amigo Leonardo, sempre presente, não nos deixando desanimar nos momentos ruins e pelos palpites nas figuras. Ao amigo João Paulo Vani, pelas excelentes e valiosas dicas na formatação do texto. À amiga e Prof. Célia Regina Barbieri, pelo apoio na aplicação da atividade proposta na sala de informática. Aos Professores Eurípides Alves da Silva e Adalberto Spezamiglio, pela atenção dispensada.

A todos, que direta ou indiretamente, fizeram parte deste belíssimo e importante momento de minha vida.

“A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo.”

Nelson Mandela

*“Há uma força motriz mais poderosa que o vapor, a eletricidade e a energia atômica:
a vontade.”*

Albert Einstein

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é estudar algumas extensões de um dos teoremas mais importantes e divulgados da matemática elementar: o Teorema de Pitágoras, que tem suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. A princípio é realizado um breve resgate histórico da vida de Pitágoras, o surgimento do teorema e suas aplicações. Por possuir mais de 400 demonstrações, elencamos algumas delas e as reproduzimos. Algumas demonstrações podem ser feitas de maneira lúdica, em forma de quebra-cabeça e outras que se tornaram famosas ao longo da história. São feitas várias extensões do teorema, para polígonos regulares, polígonos semelhantes e figuras não retilíneas. A generalização de Polya também é enunciada e demonstrada, situação em que o padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido para quaisquer tipos de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, sendo o Teorema de Pitágoras um caso particular, bem como a generalização de Pappus. Com o uso do software GeoGebra, foram propostas e desenvolvidas atividades em sala de informática, explorando o Teorema de Pitágoras e algumas de suas extensões. Por fim, é analisado como o Teorema de Pitágoras e o seu ensino são abordados em certos documentos oficiais de ensino no Brasil (PCNs, Currículo do Estado de São Paulo, matrizes de referências do SARESP, SAEB e ENEM).

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, Extensões e generalizações do Teorema de Pitágoras, Generalização de Polya, Generalização de Pappus, Ensino de Matemática; Software Geogebra.

ABSTRACT

The main objective of this work is to study some extensions of one of the most important and published elementary mathematics theorem: the Pythagorean Theorem, which has applications in many areas of knowledge. We begin with a brief historical review of the life of Pythagoras, the emergence of the theorem and its applications. From over 400 existing proofs, we list some of them and reproduce. Some proofs can be made in a playful manner, as shaped puzzle and others have become famous throughout the history. Several extensions of the theorem are presented for regular polygons, similar polygons and non-rectilinear figures. The generalization of Polya is also stated and demonstrated, in which the Pythagorean pattern (area ratio) is valid for any kind of similar figures constructed on the sides of a right triangle, being the Pythagorean theorem a particular case, as well as the generalization of Pappus. By using the GeoGebra software, we proposed and developed activities in a computer lab, exploring the Pythagorean Theorem and some of its extensions. Finally, it is analyzed how the Pythagorean Theorem and its teaching are cited in some official documents concerning education in Brazil (PCNs, Curriculum of São Paulo, matrices of references SARESP, SAEB and ENEM) .

Keywords: *Pythagorean Theorem, extensions and generalizations of the Pythagorean Theorem, Generalization of Polya, Generalization of Pappus, Teaching of Mathematics, Software Geogebra.*

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 1 – UM POUCO DE HISTÓRIA	13
1.1. Pequena biografia de Pitágoras	13
1.2. Teorema de Pitágoras: alguns dados históricos	16
1.3. Importância e aplicações do Teorema de Pitágoras	19
CAPÍTULO 2 – O TEOREMA DE PITÁGORAS – ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES	21
2.1. O Teorema de Pitágoras no livro “Os Elementos” de Euclides.....	21
2.2. Outras demonstrações do Teorema de Pitágoras	27
2.2.1. O enunciado do Teorema de Pitágoras	27
2.2.2. A demonstração clássica: uma prova experimental	28
2.2.3. Mais uma prova experimental: decomposição em 5 polígonos.....	30
2.2.4. A prova tradicional: a demonstração que usa semelhança	33
2.2.5. A demonstração de Bhaskara.....	34
2.2.6. A demonstração do presidente	35
2.2.7. A demonstração de Perigal	36
2.2.8. A demonstração de Leonardo da Vinci	38
2.3. A recíproca do Teorema de Pitágoras	39
CAPÍTULO 3 – TEOREMA DE PITÁGORAS: EXTENSÕES E GENERALIZAÇÕES	42
3.1. Extensões do Teorema de Pitágoras para polígonos:	42
3.1.1. Triângulos obtidos a partir dos quadrados dos catetos e hipotenusa..	42
3.1.2. Triângulos equiláteros	43
3.1.3. Triângulos semelhantes	45
3.1.4. Hexágonos regulares	48
3.1.5. Polígonos regulares: caso geral	49
3.1.6. Polígonos semelhantes	50
3.2. Algumas extensões retilíneas	52
3.3. Extensões não retilíneas	56
3.3.1. Círculos inscritos nos quadrados	56
3.3.2. Semicírculos com diâmetros iguais aos lados	57
3.3.3. Quadrantes de círculos	57
3.3.4. Setores angulares	58
3.3.5. Arcos ogivais	59
3.3.6. Outras extensões não retilíneas.....	61
3.4. Lúnulas de Hipócrates e algumas extensões do Teorema de Pitágoras	67
3.4.1. Construção geométrica de uma lúnula	68
3.4.2. Aplicação: as lúnulas no triângulo retângulo	68
3.4.3. As lúnulas e uma extensão do Teorema do Pitágoras para triângulo retângulo isósceles	70
3.4.4. As lúnulas e mais uma extensão do Teorema de Pitágoras	71
3.5. Uma extensão elíptica	74
3.6. A generalização de Polya	77
3.6.1. Um pouco sobre George Polya	77

3.6.2. A generalização de Polya e o Teorema de Pitágoras.....	77
3.7. A generalização de Pappus	82
3.7.1. Um pouco sobre Pappus	82
3.7.2. A generalização de Pappus e o Teorema de Pitágoras	82
CAPÍTULO 4 – PROPOSTA DE ATIVIDADE EM SALA DE INFORMÁTICA COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA	86
4.1. Parte I: atividades propostas para alunos que já tiveram contato com o Teorema de Pitágoras, a partir da 8ª série/9ºano	88
4.2. Parte II: atividade proposta para alunos da 6ª série/7ºano, que ainda não tiveram contato com o Teorema de Pitágoras	95
4.3. Relato de experiência	98
4.4. Dificuldades encontradas	101
CAPÍTULO 5 – O TEOREMA DE PITÁGORAS EM ALGUNS DOCUMENTOS OFICIAIS DE ENSINO	103
5.1. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e o Teorema de Pitágoras. 103	
5.1.1. Um pouco sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Fundamental	103
5.1.2. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática no Ensino Fundamental (5ª série/6º ano à 8ª série/9º ano) e o Ensino do Teorema de Pitágoras	105
5.2. O ensino do Teorema de Pitágoras de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo	108
5.2.1. Um pouco sobre o Currículo do Estado de São Paulo	108
5.2.2. O Currículo de Matemática e suas Tecnologias e o ensino do Teorema de Pitágoras	109
5.3. O Teorema de Pitágoras nas Matrizes de Referência para avaliação do SARESP	116
5.3.1. Um pouco sobre o SARESP	116
5.3.2. Matrizes de Referência para a avaliação	117
5.4. As avaliações do SAEB e o Teorema de Pitágoras	120
5.4.1. Um pouco sobre o SAEB	120
5.4.2. A Matriz de Referência de Matemática do SAEB e o Teorema de Pitágoras	121
5.5. O Teorema de Pitágoras na Matriz de Referência para o ENEM	122
5.5.1. Um pouco sobre o ENEM	122
5.5.2. A matriz de referência para o ENEM	123
Apêndice I	126
Apêndice II	132
Considerações finais	147
Referências bibliográficas	148

INTRODUÇÃO

O tema deste trabalho é um dos teoremas mais importantes e conhecidos na Matemática: o Teorema de Pitágoras. Este é considerado um dos alicerces da Matemática, pois possui inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento. Nosso objetivo principal foi estudar e demonstrar várias extensões do teorema, finalizando com as generalizações de George Polya e de Pappus de Alexandria, nas quais o Teorema de Pitágoras é um caso particular. Também foram realizadas atividades em sala de informática, aplicadas a alunos de uma escola pública, com o uso do software GeoGebra.

O trabalho ficou dividido em cinco capítulos e dois apêndices.

No Capítulo 1, é feita uma breve pesquisa histórica sobre a vida de Pitágoras, importância e aplicações do Teorema.

No Capítulo 2, são apresentadas diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, como a demonstração que consta no livro *Os Elementos*, de Euclides, um dos primeiros registros históricos da demonstração do teorema (Proposição 2.4). Constam também algumas demonstrações que se tornaram famosas ao longo do tempo, como a que foi feita por Ozanam, utilizando uma decomposição adequada em 5 polígonos (Proposição 2.6), e a de Perigal (Proposição 2.10), demonstrações estas que podem ser exploradas de maneira lúdica com a construção de quebra-cabeças. Demonstrações de pessoas ilustres, como a de Bhaskara, Leonardo da Vinci e até uma de um ex-presidente dos Estados Unidos também são realizadas neste capítulo.

No Capítulo 3 são estudadas e demonstradas diversas “extensões” do teorema, para polígonos regulares, polígonos semelhantes e figuras retilíneas. Também foram realizadas várias extensões com figuras não retilíneas, figuras formadas por arcos de circunferências e/ou segmentos de reta. É apresentada e demonstrada a generalização de Polya, mostrando que o padrão pitagórico (relação entre áreas) continua válido para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, independente de suas formas geométricas. Por fim, é feita a generalização de Pappus, onde é possível construir paralelogramos sobre os lados de um triângulo qualquer de modo que os mesmos preservam a

relação entre as áreas (padrão pitagórico), sendo o Teorema de Pitágoras um caso particular.

No Capítulo 4, é apresentada uma proposta de atividades em sala de informática com o uso do software GeoGebra. Nessas atividades são explorados o Teorema de Pitágoras e algumas de suas extensões, com a construção de alguns polígonos e também figuras circulares sobre os lados do triângulo retângulo, levando os alunos a verificarem que o padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido também para outros tipos de figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo e não somente para quadrados.

No Capítulo 5, é analisado como o Teorema de Pitágoras e o seu ensino são abordados em certos documentos oficiais de ensino (PCNs, Currículo do Estado de São Paulo, Matrizes de Referências do SARESP, SAEB e ENEM).

Finalizando o trabalho, nos Apêndices I e II, são realizadas as demonstrações das extensões retilíneas e não retilíneas apresentadas no Capítulo 3, e que não tinham sido provadas

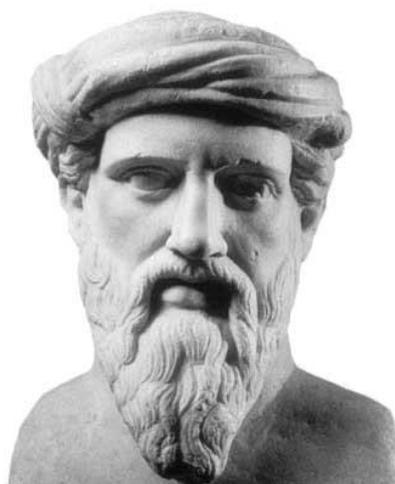
Vale ressaltar que as duas referências principais para o desenvolvimento do Capítulo 3 foram LOURENÇO; SILVA (1992) e BARBOSA (1998) e que a maioria das figuras foram baseadas nestas referências e reconstruídas pelo próprio autor com o uso do software GeoGebra.

CAPÍTULO 1 – UM POUCO DE HISTÓRIA

1.1. PEQUENA BIOGRAFIA DE PITÁGORAS

Pitágoras nasceu em Samos, uma ilha grega na costa marítima do que hoje é a Turquia, por volta de 570 a.C. Como todos os documentos da época se perderam, a doutrina e a vida de Pitágoras está envolta de muitos mistérios, nada pode ser afirmado com muita certeza. Tudo que se sabe sobre Pitágoras veio através de referências de outros autores que viveram séculos depois. Sua morte se deu em Crotona, cidade da Itália meridional, provavelmente, por volta de 500 a.C., com a destruição de sua Escola Pitagórica e o seu possível assassinato. Porém, não existe certeza sobre a data de sua morte, alguns dizem que Pitágoras conseguiu fugir para Metaponto, sul da Itália, onde permaneceu até o fim de sua vida.

Figura 1 – busto de Pitágoras.



Fonte: Site “*Mundo da Filosofia*”¹

Pitágoras, que quando criança já se revelava prodigioso, até os 18 anos teve como mestre Hermodamas, de Samos. Posteriormente, foi aluno de Tales, em Mileto, e depois foi ouvinte das conferências de Anaximandro, onde provavelmente recebeu instrução matemática e filosófica.

Em todas as fontes sobre a vida de Pitágoras, relata-se que realizou inúmeras viagens e peregrinações. Permaneceu cerca de 25 anos no Egito, onde,

¹ Disponível em: < <http://www.mundodafilosofia.com.br/page10.html> > Acesso em jul. 2013.

provavelmente, extraiu os conhecimentos matemáticos e filosóficos que fundamentariam o seu ensinamento futuro.

Encontrou-se com o faraó Amasis que o admitiu nos templos iniciáticos do Egito. Existem ainda indícios de que teria sido discípulo de Zoroastro (profeta e sacerdote persa), e que talvez tenha ido até à Índia.

Pitágoras teria voltado para Samos com 56 anos, com a intenção de ali fundar uma escola iniciática. Seus ensinamentos atraíram a atenção de muitos discípulos, mas também provocou a inimizade de Policrates, tirano de Samos. Partiu então para Crotona, reunindo ali um grupo de discípulos e iniciando-os nos conhecimentos de Matemática, Música e Astronomia. Estava fundada então a Escola Pitagórica, uma instituição religiosa e intelectual, cujos principais conceitos eram:

- Prática de rituais religiosos na crença de que as almas se transmigram de um corpo a outro após a morte;
- Lealdade entre os membros;
- Total entrega da mente ao estudo de Geometria, Aritmética, Música e Astronomia.

Com o passar do tempo e devido às ideias da Escola Pitagórica, Pitágoras foi colecionando vários inimigos. Um deles, que não foi aceito em sua Escola, começou a persegui-lo e, através de falsos testemunhos, colocou o povo da cidade de Crotona contra Pitágoras. A Escola então foi destruída. Como a Escola Pitagórica era secreta, Pitágoras não deixou nenhum registro escrito, e provavelmente, todos os que existiam foram perdidos com a morte de seus discípulos, e a aniquilação dos pitagóricos.

Pitágoras foi uma das personalidades retratadas no famoso afresco “*A Escola de Atenas*”, uma das mais famosas pinturas do renascentista italiano Rafael Sanzio (1483 – 1520) e representa a Academia de Platão. Foi pintada entre 1509 e 1510 na *Stanza della Segnatura* sob encomenda do Vaticano.

Figura 2 – “A Escola de Atenas”, de Rafael Sanzio - Stanza della Segnatura, Vaticano.



Fonte: Museu Vaticano²

No detalhe, na figura abaixo, a imagem de Pitágoras que foi representada no afresco pintado por Rafael.

Figura 3 – Pitágoras, no detalhe de “A Escola de Atenas”



Fonte: Museu Vaticano²

Além da grande contribuição para a Matemática, Pitágoras teve um importante papel na Música. A ele é atribuída a descoberta dos intervalos musicais, que quando dividimos uma corda ao meio, aumentamos o som em uma oitava.

² Disponível em: < http://mv.vatican.va/2_IT/pages/x-Schede/SDRs/SDRs_03_02_020.html > Acesso em dez. 2013.

Na Astronomia, Pitágoras elaborou ideias revolucionárias para a época, como a tese de que a Terra e os outros planetas eram esféricos e que giravam ao redor do fogo central. Além disso, previu que os planetas possuíam órbitas com diferentes velocidades, e que existe uma ordem no Universo.

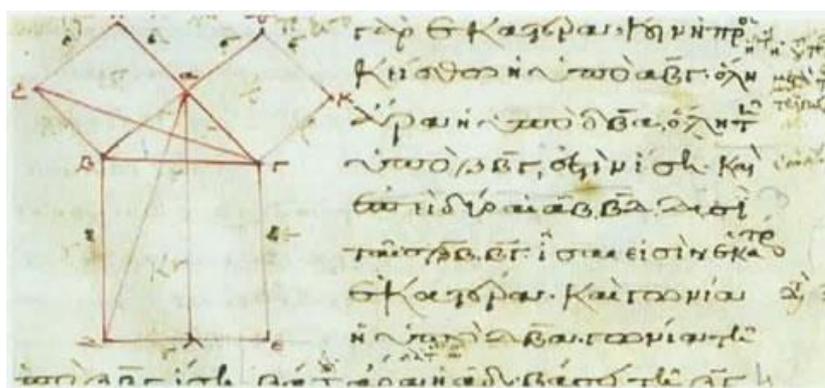
No ramo da Filosofia, Pitágoras foi o primeiro a pensar na justiça, elaborando uma premissa a qual denominou de "*justiça aritmética*", em que, para cada ato, o indivíduo deveria receber uma punição ou um ganho proporcional ao ato cometido.

1.2. TEOREMA DE PITÁGORAS: ALGUNS DADOS HISTÓRICOS

"Num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".

Essa importante relação entre os três lados de um triângulo retângulo, ficou conhecida na Geometria Euclidiana como Teorema de Pitágoras. Mas séculos antes da existência de Pitágoras, o teorema já era conhecido por babilônios, egípcios e chineses, que utilizavam o resultado na resolução de problemas.

Figura 4 – Ilustração do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Site "Grandes Matemáticos"³

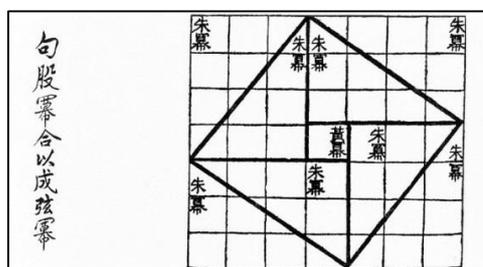
Em seu livro "*Was Pythagoras Chinese?*" (1977), o autor Frank Swetz relata que o teorema já era conhecido pelos chineses e que pode ser encontrado no livro

³ Disponível em: <<http://grandesmatematicas-os.blogspot.com.br/p/p4.html>> Acesso em dez. 2013.

chinês "*Zhoubi Suanjing*", que data de 1100 a.C., embora haja alguns autores que datam o mesmo livro de 300 a.C. Esse livro reuniu 246 problemas muito antigos e, entre eles está o "*Gou Gu*", o equivalente chinês do Teorema de Pitágoras, como pode ser visto na figura a seguir.

A Figura 5, abaixo, contém uma demonstração do teorema de Pitágoras usando áreas. Estimativa de historiadores é que ela seja da dinastia Han, cerca de 1100 a. C. Como é certo que nenhuma publicação chinesa da antiguidade chegou ao ocidente, podemos concluir que dois povos distintos, com alguns séculos de diferença, descobriram o mesmo teorema.

Figura 5 – Gou Gu.



Fonte: Site Cultura Científica⁴

Alguns acreditam que a utilização do teorema é mais antiga ainda e há provas concretas que os babilônios antigos conheciam o Teorema de Pitágoras. Muitos dos tabletes de barro, que datam de 1800 a 1600 a. C., que foram encontrados e decifrados evidenciam este fato. Um deles, que se chama Plimpton 322, e se encontra atualmente na Universidade de Columbia, contém uma tabela de 15 linhas e 3 colunas, contendo ternos pitagóricos, ou seja, com medidas dos três lados de um triângulo retângulo. A tábua babilônica BM 85196, datada de 1200 a.C., contém problemas que são resolvidos usando o Teorema de Pitágoras.

Figura 6 – Placa Plimpton 322.



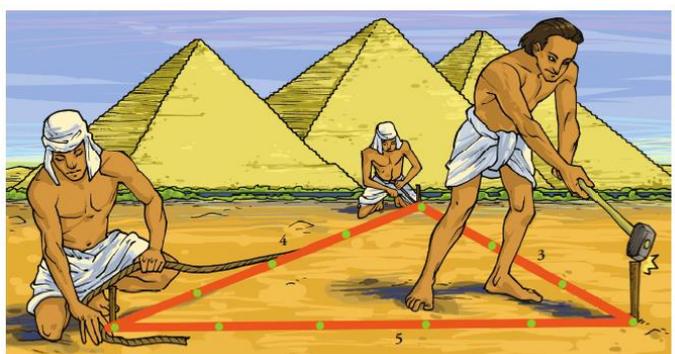
Fonte: Universidade Columbia⁵

⁴ Disponível em: <<http://culturacientifica.com/2013/05/22/cultura-pitagorica-arte/>> Acesso em jul. 2013.

⁵ Disponível em: <<http://www.columbia.edu/cu/lweb/eresources/exhibitions/treasures/html/158.html>> Acesso em jul. 2013.

Também é muito conhecida a história de que, por volta de 4000 a.C., os egípcios, para obterem um ângulo reto, utilizavam uma corda com 13 nós equidistantes, delimitando assim 12 unidades de comprimento. Uniam o 1º com 13º, fixando com estacas no solo o 4º e o 8º nó, obtendo assim um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Nesse triângulo, o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo reto.

Figura 7 – Ilustração de egípcios usando a corda com 13 nós.



Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 43.

O papiro Cairo, do século III a.C., primeiro documento escrito em demótico (escrita egípcia para documentos) contém problemas que são resolvidos aplicando o Teorema de Pitágoras.

O primeiro documento escrito no Egito, em grego, que se conhece e que trata do Teorema de Pitágoras são “*Os Elementos*”, de Euclides (360 – 295 a.C.). Trata-se da Proposição I-47. No Capítulo 2, enunciaremos tal proposição e faremos a demonstração realizada por Euclides, que envolve áreas.

É importante observar que, como nenhum dos escritos originais chegou até os nossos dias, não podemos afirmar com absoluta certeza se Pitágoras apresentou ou não uma prova do teorema que leva seu nome. Como a Escola Pitagórica, além de secreta era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas pertenciam a todos, pode ser que algum de seus discípulos tenha demonstrado e tenha dado o crédito ao mestre, conforme as normas da comunidade. É certo que Pitágoras não inventou o teorema, mas é possível que leve o seu nome por acreditar-se que ele tenha sido o primeiro a se preocupar em dar uma demonstração

(geral). Também não se sabe qual foi a demonstração original feita pelos Pitagóricos, mas historiadores acreditam que deve ter sido alguma usando áreas.

Hoje sabemos que existem mais de 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, algumas feitas por personalidades como Bháskara e Leonardo da Vinci e até mesmo um presidente dos Estados Unidos (em 1871), James Abram Garfield (1831 – 1881). O clássico livro *The Pythagorean Proposition*, do professor norte-americano Elisha Scott Loomis (1852 – 1940), contém uma compilação de 370 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras.

1.3. IMPORTÂNCIA E APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras é muito útil na resolução de problemas cotidianos. É de grande importância para a análise geométrica em diferentes áreas do conhecimento.

Na Geometria Euclidiana é a base para as definições de distância. Através de triangulações, é possível fazer levantamentos topográficos. Tem várias aplicações em muitos outros ramos da Matemática como na Trigonometria, Geometria Analítica e Geometria Espacial (Poliedros). Na Física, também são inúmeras as situações em que são aplicadas o Teorema de Pitágoras. O grande físico, matemático e um dos maiores astrônomos da história, Galileu Galilei (1564 - 1642) usou o Teorema de Pitágoras para determinar a extensão de algumas montanhas lunares.

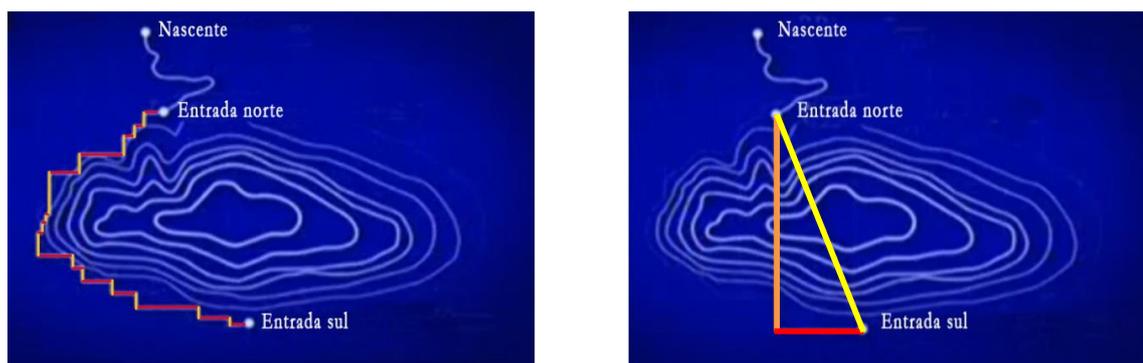
Historicamente, em diversos momentos aparecem aplicações do Teorema de Pitágoras. Os mesopotâmicos, por exemplo, usaram o Teorema de Pitágoras na arquitetura para resolverem problemas referentes às construções de moradias.

Utilizando o Teorema de Pitágoras, os povos antigos conseguiam calcular áreas e distâncias; dessa forma, foram elaborando e aprimorando cada vez mais as relações dos poliedros, por exemplo, até chegar no nível de conhecimento que temos atualmente.

Uma ilustração interessante sobre aplicações desse resultado é relatada no seguinte episódio, extraído do documentário *“The Tunnel of Eupalinos”* (History Channel), conhecido como *“O Túnel de Samos”*.

Por volta de 540 a.C. Samos era governada pelo tirano Policrates. Com o aumento da população era preciso resolver um problema que atormentava muitas cidades no clima mediterrâneo: a falta de água potável. Havia água potável numa nascente abundante que ficava do outro lado da montanha, mas construir um aqueduto em volta da montanha não era uma boa opção. Policrates consultou então o engenheiro Eupalinos, que sugeriu que fosse construído um túnel que atravessasse o Monte Castro, mas este projeto despendia de muito tempo e assim ser bem elaborado. Eupalinos dividiu a escavação do túnel em duas partes, uma de cada lado da montanha, para que se encontrassem no meio. Para se ter certeza que isso acontecesse, ele teria que certificar que cada túnel começasse na mesma altura nos dois lados da montanha e também teriam que se coincidir no plano horizontal. Sem grandes equipamentos topográficos, Eupalinos simulou um caminho da fonte para a cidade através de linhas perpendiculares (vide Figura 8, abaixo). As linhas horizontais e verticais se transformaram então em dois lados de um triângulo retângulo. Com dois lados do triângulo retângulo, a hipotenusa seria o comprimento do túnel através da montanha, que depois de construído, ficou do tamanho de 1066 metros. Um segundo túnel que serviu como aqueduto foi cavado adjacente e abaixo do túnel principal e com um leve declive que pudesse levar a água potável da nascente até a cidade.

Figura 8 – Esquema da construção do túnel de Samos.



Fonte: Print Screen do documentário “The Tunnel of Eupalinos”, modificado pelo autor⁶.

Este episódio nos dá uma pequena ideia da importância do Teorema de Pitágoras.

⁶ Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=4l4Z8qkvSUc>>. Acesso em julho de 2013.

CAPÍTULO 2 – O TEOREMA DE PITÁGORAS: ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES

Como foi citado no Capítulo 1, existem mais de 400 demonstrações do Teorema de Pitágoras. Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) era realmente um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e as organizou num livro, ao qual chamou “*The Pythagorean Proposition*” (*A Proposição de Pitágoras*). A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, este número foi aumentado para 370 demonstrações. O Professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas “algébricas”, baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos e provas “geométricas”, baseadas em comparações de áreas.

Neste capítulo veremos algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, algumas clássicas e outras que ficaram “famosas” ao longo do tempo.

2.1. O TEOREMA DE PITÁGORAS NO LIVRO “OS ELEMENTOS” DE EUCLIDES

Um dos primeiros registros históricos que se tem do Teorema de Pitágoras foi no livro “*Os Elementos*” de Euclides (Euclides, 2009). Neste livro, os teoremas são citados como proposições e o hoje conhecido como Teorema de Pitágoras é a Proposição I–47, a qual será enunciada e demonstrada no final desta seção. Para isso, se faz necessário alguns resultados (proposições) que serão úteis na demonstração da Proposição I–47, de Euclides.

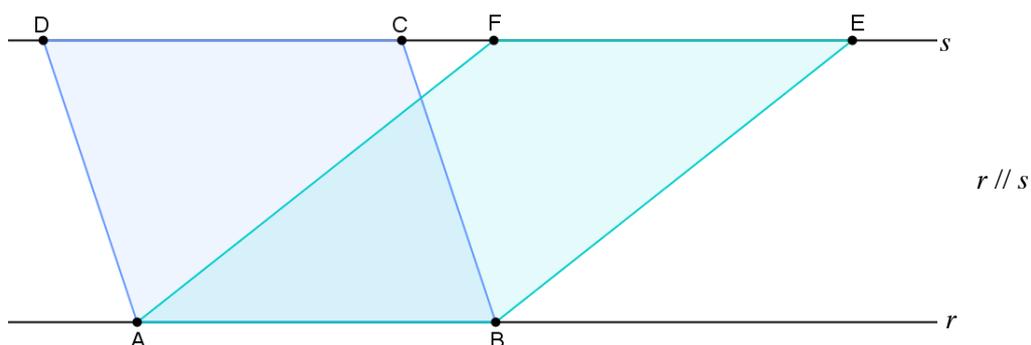
Observação: Usaremos as seguintes notações:

- AB para o segmento de extremidades A e B ;
- \overline{AB} para a medida do segmento AB ;
- $\mathcal{A}_{(ABC)}$ para a área do triângulo ABC e $\mathcal{A}_{(ABCD)}$ para a área do quadrilátero $ABCD$;

- Por um abuso de linguagem, a congruência entre dois segmentos será indicada pelo sinal de igualdade.

Proposição 2.1 (Proposição I–35 de *Os Elementos*): Dois paralelogramos com a mesma base, e situados entre duas retas paralelas, tem a mesma área.

Figura 9 – Paralelogramos entre duas retas paralelas.



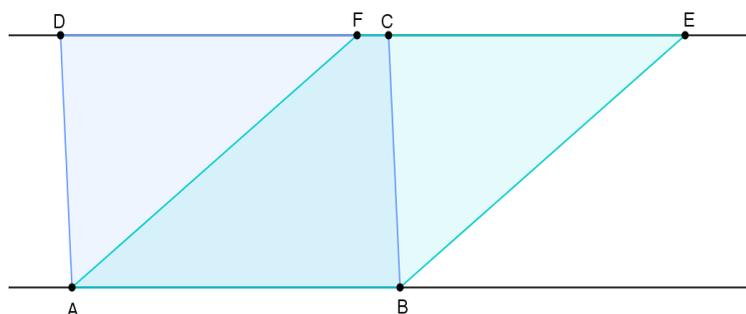
Demonstração:

Devemos mostrar que os paralelogramos ABCD e ABEF tem a mesma área.

Para isso, vamos analisar os 3 casos possíveis:

1º caso: Os segmentos DC e EF têm mais de um ponto em comum.

Figura 10 – Ilustração do 1º caso.

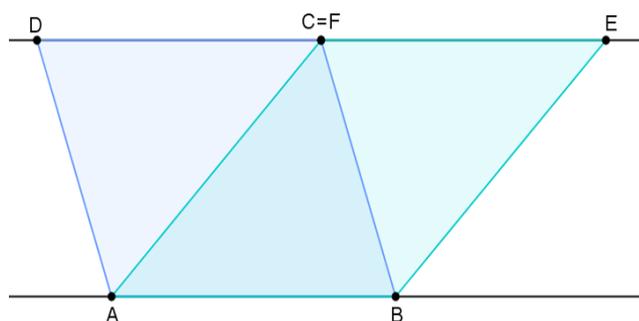


Temos que $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(ADF)} + \mathcal{A}_{(ABCF)}$ e $\mathcal{A}_{(ABEF)} = \mathcal{A}_{(BCE)} + \mathcal{A}_{(ABCF)}$. Como $AD = BC$, $AF = BE$ e $\widehat{DAF} = \widehat{CBE}$, temos, pelo caso L.A.L. (*Lado, Ângulo, Lado*) que

os triângulos ADF e BCE são congruentes. Daí, considerando que o trapézio ABCF é comum aos dois paralelogramos, segue que $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(ABEF)}$.

2º caso: Os segmentos DC e FE tem um único ponto em comum, ou seja, os pontos C e F são coincidentes.

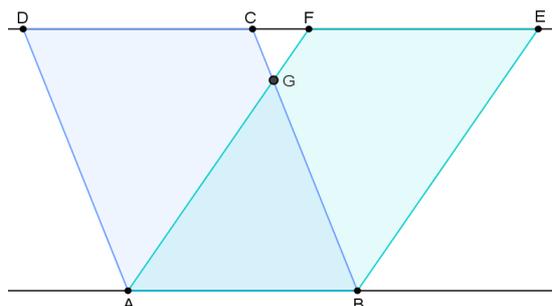
Figura 11 – Ilustração do 2º caso.



Semelhante ao 1º caso, temos que os triângulos ADC e BCE são congruentes, logo $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(ABEF)}$, pois $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(ADC)} + \mathcal{A}_{(ABC)}$ e $\mathcal{A}_{(ABEF)} = \mathcal{A}_{(BCE)} + \mathcal{A}_{(ABC)}$.

3º caso: Os segmentos DC e EF não têm pontos em comum.

Figura 12 – Ilustração do 3º caso.



Temos que os triângulos ADF e BCE são congruentes pelo caso L.L.L. (*Lado, Lado, Lado*), pois $AD = BC$, $AF = BE$ são lados opostos do paralelogramo e $DF = CE$ ($DF = DC + CF$ e $CE = CF + FE$ e $DC = FE$).

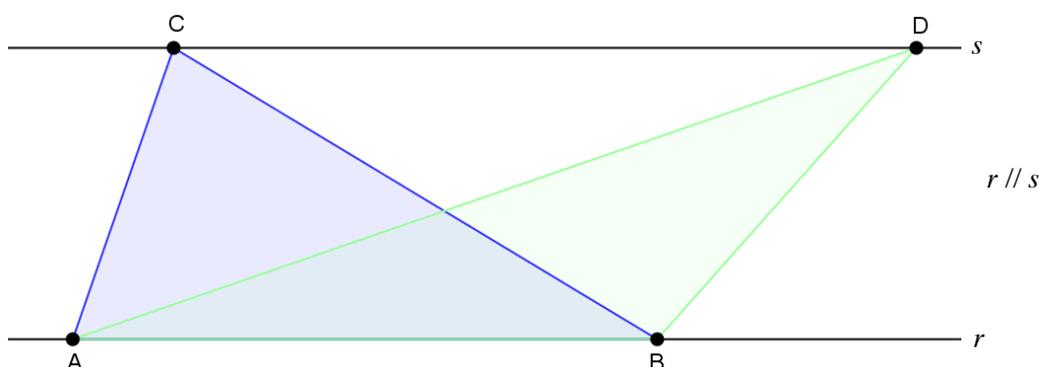
Seja G o ponto de intersecção dos segmentos AF e BC. Logo, $\mathcal{A}_{(AGCD)} = \mathcal{A}_{(BGFE)}$, pois, como os triângulos ADF e BCE são congruentes, temos que $\mathcal{A}_{(ADF)} = \mathcal{A}_{(BCE)}$.

$= \mathcal{A}_{(BCE)} \Rightarrow \mathcal{A}_{(AGCD)} + \mathcal{A}_{(CFG)} = \mathcal{A}_{(BGFE)} + \mathcal{A}_{(CFG)} \Rightarrow \mathcal{A}_{(AGCD)} = \mathcal{A}_{(BGFE)}$. Como $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(ABG)} + \mathcal{A}_{(AGCD)}$ e $\mathcal{A}_{(ABEF)} = \mathcal{A}_{(ABG)} + \mathcal{A}_{(BGFE)}$, temos que $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(ABEF)}$.

■

Proposição 2.2 (Proposição I–37 de *Os Elementos*): Triângulos que tem a mesma base e estão entre retas paralelas tem a mesma área.

Figura 13 – Triângulos entre duas retas paralelas r e s .

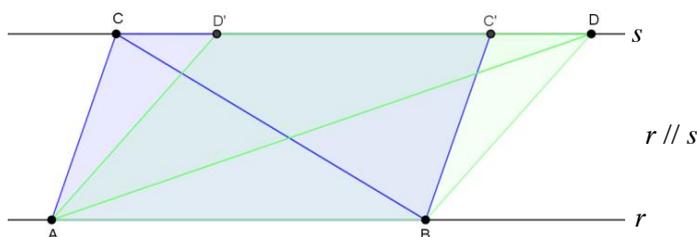


Demonstração:

Sendo $r \parallel s$, devemos provar que os triângulos ABC e ABD tem a mesma área.

Seja C' um ponto em s tal que $BC' \parallel AC$, como na Figura 14, a seguir. Assim, temos que $ABC'C$ é um paralelogramo e o triângulo ABC é congruente ao triângulo $C'CB$ pelo caso L.A.L, pois $\overline{AB} = \overline{C'C}$, $\widehat{BAC} = \widehat{CC'B}$ e $\overline{AC} = \overline{BC'}$. Como o paralelogramo $ABC'C$ é decomposto em dois triângulos congruentes, ABC e $C'CB$, podemos concluir que o triângulo ABC tem a metade da área do paralelogramo $ABC'C$. Analogamente, se tomarmos $D' \in s$, tal que $AD' \parallel BD$, teremos que o triângulo ABD tem a metade da área do paralelogramo $ABDD'$.

Figura 14 – Ilustração para a demonstração a Proposição 2.2.

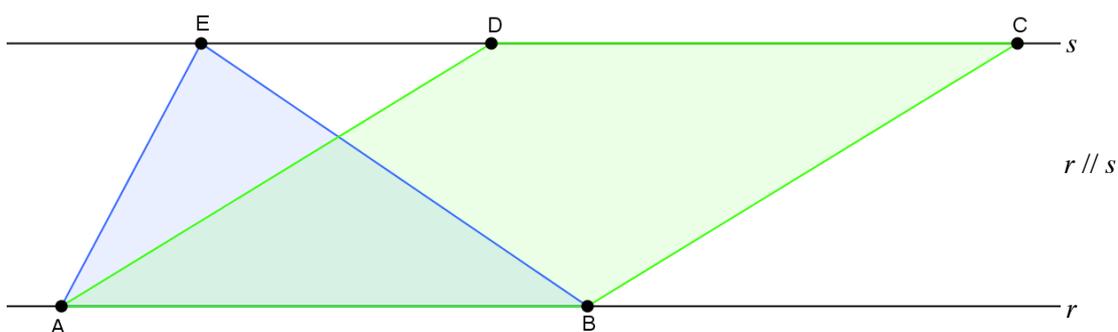


Como $ABC'C$ e $ABDD'$ são paralelogramos com a mesma base, e situados entre retas paralelas, pela Proposição 2.1, eles tem a mesma área. Mas os triângulos ABC e ABD tem cada um, a metade da área desses paralelogramos, logo podemos concluir que eles têm a mesma área.

■

Proposição 2.3 (Proposição I-41 de *Os Elementos*): Se um paralelogramo e um triângulo tem a mesma base e estão situados entre duas paralelas dadas, então o paralelogramo tem duas vezes a área do triângulo.

Figura 15 – Triângulo e paralelogramo entre duas retas paralelas

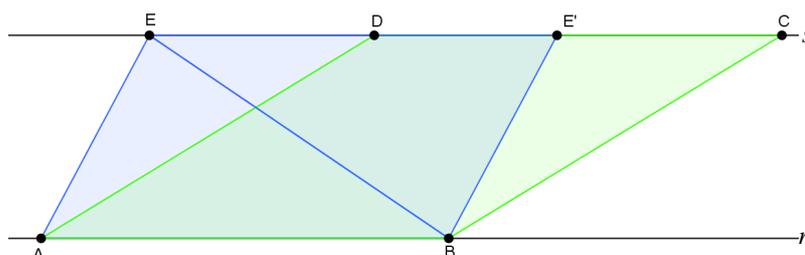


Demonstração:

Sejam r e s retas paralelas, como na figura acima. Sendo $r \parallel s$, devemos provar que o triângulo ABE tem a metade da área do paralelogramo $ABCD$.

A demonstração desta proposição segue um raciocínio análogo à demonstração da proposição anterior.

Figura 16 – Ilustração para a demonstração da Proposição 2.3.



Seja E' um ponto da reta s tal que $BE' \parallel AE$. Como visto na proposição anterior, temos que o triângulo ABE tem a metade da área do paralelogramo $ABE'E$ e este, por sua vez, pela Proposição 2.2, tem área igual ao paralelogramo $ABCD$, já que são paralelogramos de mesma base e situados entre duas retas paralelas. Portanto, o triângulo ABE tem a metade da área do paralelogramo $ABCD$. ■

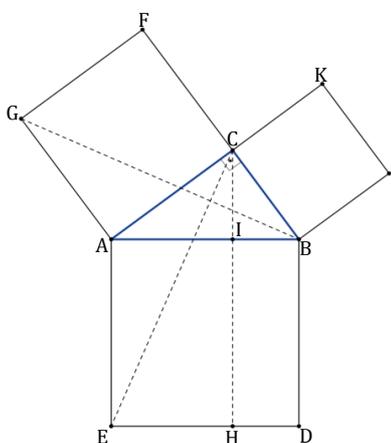
Enunciaremos agora o Teorema de Pitágoras, exatamente como feito por Euclides, em *Os Elementos*.

Proposição 2.4 (Teorema de Pitágoras. Proposição I–47 de *Os Elementos*): Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo retângulo, reto em C . Sobre os três lados deste triângulo, construímos os quadrados $ABDE$, $ACFG$ e $BCKJ$ (vide Figura 17, abaixo). Considerando os segmentos BG e CE , temos, pelo caso L.A.L., que os triângulos ACE e AGB são congruentes, pois $\overline{AC} = \overline{AG}$, $\widehat{GAB} = \widehat{CAE}$ e $\overline{AB} = \overline{AE}$. Sejam H o ponto do segmento DE tal que CH seja paralelo ao lado AE e I o ponto de intersecção entre CH e AB .

Figura 17 – Ilustração da demonstração de Euclides.



Observemos que o triângulo ACE e o retângulo AEHI tem a mesma base AE e estão situados entre duas retas paralelas. Logo, pela Proposição 2.3, $\mathcal{A}_{(ACE)} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{(AEHI)}$. Da mesma forma, temos que $\mathcal{A}_{(AGB)} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{(ACFG)}$, pois o triângulo ABG e o quadrado ACFG cumprem com as hipóteses da Proposição 2.3. Como os triângulos ACE e AGB são congruentes (vide Figura 18), temos que $\mathcal{A}_{(ACFG)} = \mathcal{A}_{(AEHI)}$ (*). Analogamente, construindo os segmentos AJ e CD (Figura 19), mostra-se que $\mathcal{A}_{(BJKC)} = \mathcal{A}_{(BDHI)}$ (**). Como $\mathcal{A}_{(ABDE)} = \mathcal{A}_{(AEHI)} + \mathcal{A}_{(BDHI)}$, segue, usando as igualdades apresentadas em (*) e (**), que $\mathcal{A}_{(ABDE)} = \mathcal{A}_{(ACFG)} + \mathcal{A}_{(BCKJ)}$.

Figuras 18 e 19 – Equivalência entre as áreas do retângulo e quadrado.

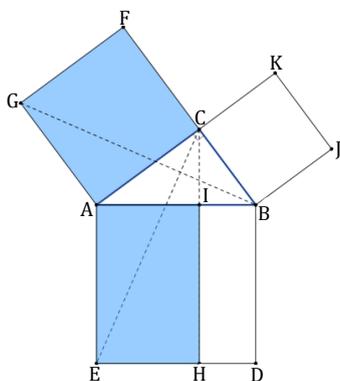


Figura 18

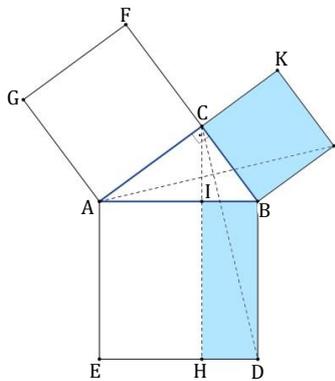


Figura 19

■

2.2. OUTRAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Nesta seção apresentaremos algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras.

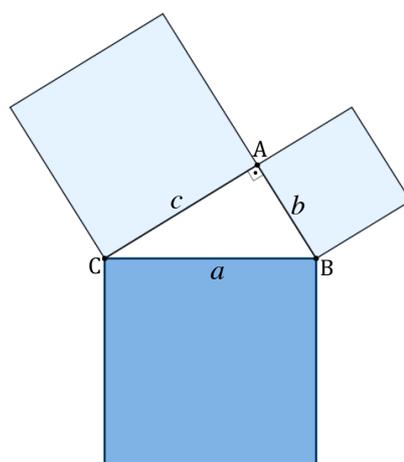
2.2.1. O ENUNCIADO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Atualmente, por motivos didáticos, o Teorema de Pitágoras não é mais enunciado como foi em “*Os Elementos*”, de Euclides. Para facilitar o entendimento do leitor, a maioria dos livros didáticos traz o famoso teorema da seguinte maneira:

“Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos”

No entanto, alguns livros, com a intenção de facilitar a memorização, enuncia o teorema de uma maneira mais simplificada: *“Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”* e é dessa forma que a maioria de nossos alunos “aprende/memoriza” o Teorema de Pitágoras.

Figura 20 – Triângulo retângulo com os quadrados construídos sobre seus lados.



Se a medida da hipotenusa é a e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado é equivalente a:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

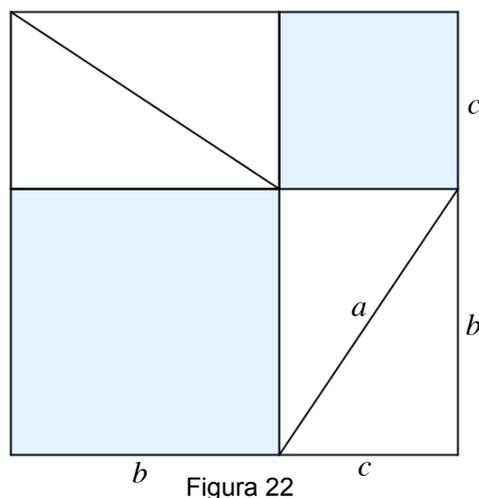
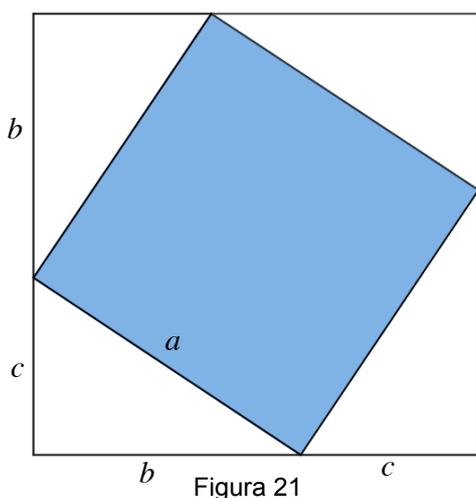
o que pode ser observado na Figura 20, ou seja, o Teorema de Pitágoras afirma que a área sombreada em tom mais escuro é igual à soma das áreas sombreadas em tom mais claro, como já mostrado no Proposição 2.4. (Por um abuso de linguagem referiremos, às vezes, a também como sendo a hipotenusa (lado). Analogamente para b e c).

2.2.2. A DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA: UMA PROVA EXPERIMENTAL

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , vamos considerar o quadrado cujo lado é $b + c$. Agora observe duas situações. Na Figura

21, retirou-se do quadrado de lado $b + c$ quatro triângulos congruentes ao triângulo dado, restando um quadrado de lado a . Já na Figura 22, também do quadrado de lado $b + c$, porém em posições diferentes, foi retirado quatro triângulos congruentes ao dado, restando um quadrado de lado b e outro de lado c . Comparando as duas situações, conclui-se que a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c .

Figuras 21 e 22 – Ilustração da atividade experimental.



Proposição 2.5: A área do quadrado de lado a na Figura 21 é equivalente à soma das áreas dos quadrados de lados b e c , na Figura 22.

Demonstração:

Analisando a área do quadrado de lado $b + c$, tem-se que: a área do quadrado de acordo com a Figura 21 é dada por $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2$, e a área, na Figura 22, é $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2$. Como as duas áreas são iguais, obtém-se $a^2 = b^2 + c^2$.

■

Não se sabe ao certo qual foi a demonstração feita por Pitágoras (ou pelos pitagóricos), mas os historiadores acreditam que foi uma demonstração do tipo “geométrico”, como esta, baseada na comparação de áreas.

Esta demonstração “geométrica” do Teorema de Pitágoras pode ser facilmente trabalhada em sala de aula de maneira lúdica. Basta construir (pode ser em papel cartão) as figuras apresentadas, que são: quatro triângulos retângulos de hipotenusa de medida a e catetos com medidas b e c e quatro quadrados de lados a , b , c e $b + c$. Depois de construídos, se deve dispor as peças conforme a Figura 21, em cima do quadrado de medida $b + c$, pedir para que o aluno retire os quadrados de lados b e c , e em seguida, mova os triângulos retângulos e encaixe o quadrado de medida a , obtendo uma disposição semelhante à Figura 22. O aluno deve concluir que a soma das áreas dos dois quadrados com medidas dos catetos é igual à área do quadrado que tem lado com medida igual à hipotenusa. Tem-se assim uma prova experimental do Teorema de Pitágoras.

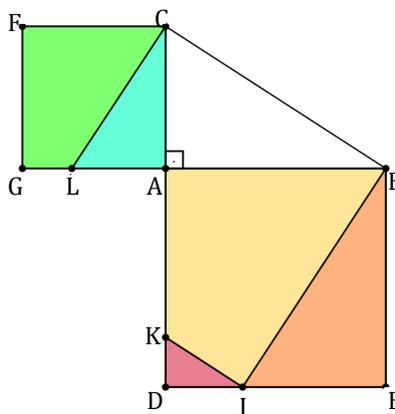
Vale ressaltar que atividades como esta não tem valor demonstrativo do teorema, são úteis para que o aluno raciocine, descubra e interaja com colegas e professores e verifique a veracidade do teorema de uma maneira lúdica, diferente da usual.

2.2.3. MAIS UMA PROVA EXPERIMENTAL: DECOMPOSIÇÃO EM 5 POLÍGONOS

A decomposição a seguir foi feita por Jacques Ozanam (1640 – 1717), um matemático francês que escreveu vários livros, dentre eles um dicionário de matemática e outro sobre recreações matemáticas e físicas, intitulado “*Recreations in Mathematics and Natural Philosophy*”, publicado em 1814.

Seja ABC um triângulo reto em A . Considere os quadrados $ABED$ e $ACFG$ construídos, respectivamente, sobre os catetos AB e AC . Sejam $J \in DE$ tal que $BJ \perp BC$, $K \in AD$ tal que $JK \perp BJ$ e $L \in AG$ tal que $LC \perp BC$. Dessa forma, os quadrados construídos sobre os catetos ficaram decompostos em 5 polígonos, conforme pode ser observado na Figura 23, a seguir.

Figura 23 – Decomposição de Jacques Ozanam.

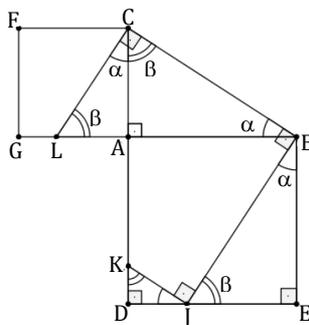


Proposição 2.6: Na decomposição de Ozanam, a soma das áreas dos polígonos EBJ, DJK, ABJK, ACL e CFGL, obtidos a partir dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado que se constrói sobre a hipotenusa.

Demonstração:

Sejam $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{ABC} = \alpha$ e $\widehat{ACB} = \beta$. Primeiramente, observe, com o auxílio da Figura 24, abaixo, que: $\widehat{EBJ} = \widehat{DJK} = \widehat{ACL} = \widehat{ABC} = \alpha$ e $\widehat{EJB} = \widehat{DKJ} = \widehat{ALC} = \widehat{ACB} = \beta$.

Figura 24 – Indicação dos ângulos na decomposição de Ozanam.

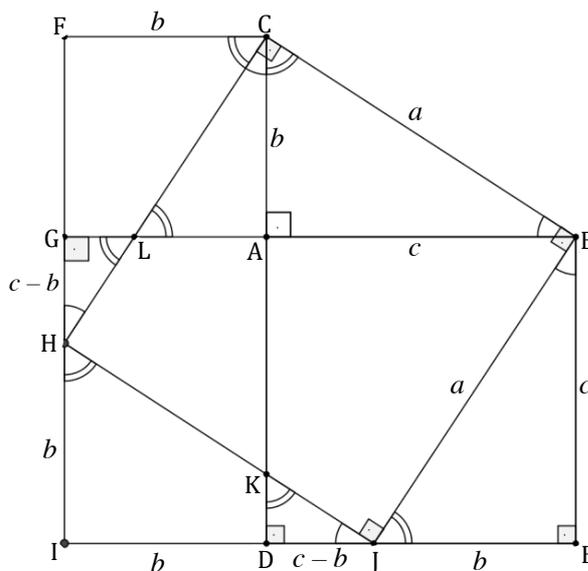


Temos que os triângulos ABC e EBJ são congruentes por A.L.A. (*Ângulo, Lado, Ângulo*), pois $\widehat{JEB} = \widehat{CAB}$ (reto), $EB = AB$ (por construção) e $\widehat{EBJ} = \widehat{ABC}$. Logo $BJ = BC = a$.

Seja H o ponto de intersecção das semirretas \overrightarrow{JK} com \overrightarrow{CL} . Dessa forma, BCHJ é um quadrado de lado a , igual à hipotenusa do triângulo ABC. Como os triângulos ABC e EBJ tem a mesma área, então, basta provarmos que a soma das áreas de DJK e CFGL é equivalente à área de ALHK.

De fato. Seja I o ponto de intersecção das semirretas \overrightarrow{FG} e \overrightarrow{ED} . Note que $\widehat{GHL} = \alpha$ e $\widehat{IHJ} = \beta$. Dessa forma, os pontos G, H e I estão alinhados, pois $\widehat{GHL} + \widehat{LHK} + \widehat{HKI} = 180^\circ$ e o quadrilátero $AGID$ é um retângulo de lados b e c .

Figura 25 – Construções auxiliares na decomposição de Ozanam.



Temos que o triângulo FHC é congruente ao triângulo ABC , por L.A.L. ($FC = AC$, $\widehat{FCH} = \widehat{ACB}$, $CH = BC$). Logo, $FH = c$ e $GH = c - b$. Então, os triângulos GHL e DJK são congruentes por A.L.A.

Note o quadrilátero $HIDK$ é congruente ao quadrilátero $CFGL$, pois $\overline{HI} = \overline{CF} = b$, $\overline{HK} = \overline{CL}$, $\overline{KD} = \overline{LG}$, $\overline{DI} = \overline{GF} = b$ e $\widehat{D\hat{I}H} = \widehat{G\hat{F}C}$, $\widehat{I\hat{H}K} = \widehat{F\hat{C}L}$, $\widehat{H\hat{K}D} = \widehat{C\hat{L}G}$, $\widehat{K\hat{D}I} = \widehat{L\hat{G}F}$.

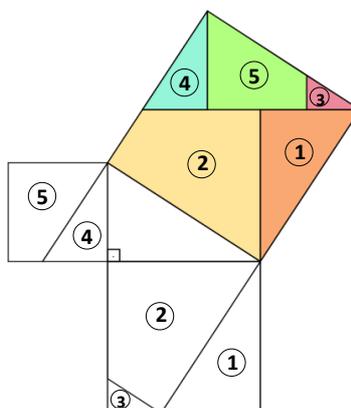
Assim sendo, temos que $\mathcal{A}_{(CFGL)} + \mathcal{A}_{(DJK)} = \mathcal{A}_{(HIDK)} + \mathcal{A}_{(DJK)} = \mathcal{A}_{(HIJ)} = \frac{b \cdot c}{2}$, pois $IJ = c$. Por outro lado, como $\mathcal{A}_{(DJK)} = \mathcal{A}_{(GHL)}$, temos que $\mathcal{A}_{(HIDK)} + \mathcal{A}_{(GHL)} = \frac{b \cdot c}{2}$. Como $\mathcal{A}_{(HIDK)} + \mathcal{A}_{(ALHK)} + \mathcal{A}_{(GHL)} = b \cdot c$, temos que $\mathcal{A}_{(ALHK)} = \frac{b \cdot c}{2}$. Logo $\mathcal{A}_{(DJK)} + \mathcal{A}_{(CFGL)} = \mathcal{A}_{(ALHK)}$.

Portanto, $\mathcal{A}_{(EBJ)} + \mathcal{A}_{(DJK)} + \mathcal{A}_{(ABJK)} + \mathcal{A}_{(ACL)} + \mathcal{A}_{(CFGL)} = \mathcal{A}_{(CBJH)} = a^2$.

■

Na Figura 26, abaixo, apresentamos uma ilustração mostrando como que as peças obtidas nos quadrados construídos nos catetos ficam dispostas no quadrado construído sobre a hipotenusa.

Figura 26 – Disposição das peças no quadrado da hipotenusa.

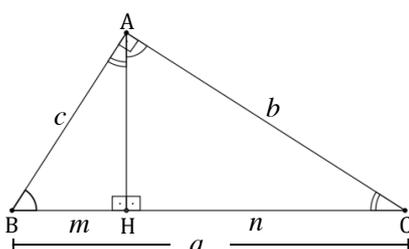


2.2.4. A PROVA TRADICIONAL: A DEMONSTRAÇÃO QUE USA SEMELHANÇA

A demonstração do Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos é uma das mais utilizadas nas escolas, pois é possível, de forma muito simples, além de demonstrar o Teorema, encontrar várias outras importantes relações métricas no triângulo retângulo. Talvez por isso seja uma das demonstrações mais conhecidas. É atribuída a John Wallis (1616 – 1703), um matemático britânico cujos trabalhos sobre o Cálculo foram precursores e de grande importância para Isaac Newton (1642 – 1727).

Proposição 2.7: Seja ABC um triângulo retângulo em A com hipotenusa de medida a e catetos b e c . Temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 27 – Triângulos retângulos semelhantes.



Demonstração:

Seja AH a altura relativa ao vértice A, e m e n , respectivamente, as projeções ortogonais dos catetos AB e AC sobre a hipotenusa BC.

Temos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo BAC, pois $\widehat{BAH} = \widehat{C}$, que é o complemento de \widehat{B} e $\widehat{CAH} = \widehat{B}$, complemento de \widehat{C} . Logo, devido à proporcionalidade entre os lados homólogos, temos que:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

que fornecem as conhecidas relações métricas de Euclides: $c^2 = a \cdot m$ e $b^2 = a \cdot n$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$c^2 + b^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2$$

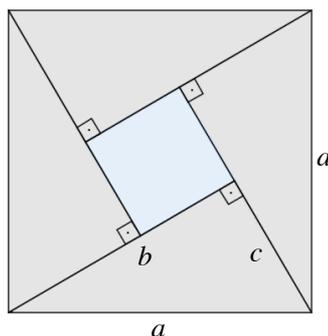
■

2.2.5. A DEMONSTRAÇÃO DE BHASKARA

Bhaskara (1114 – 1185) foi um matemático hindu que ensinou em Ujjain, o maior centro de pesquisas matemáticas e astronômicas da Índia, na época. Foi mais um compilador de trabalhos hindus anteriores. No Brasil é conhecido principalmente pela fórmula resolutive da equação do 2º grau, o que não é adequado, pois problemas de equação do 2º grau já apareciam quase quatro mil anos antes em textos escritos pelos babilônios, nas tábuas cuneiformes. O trabalho mais célebre de Bhaskara foi o manuscrito *Lilavati*, obra elementar dedicada a problemas simples de Aritmética, Geometria Plana (medidas e trigonometria elementar) e Combinatória.

Sobre a sua demonstração do Teorema de Pitágoras, segundo os historiadores, Bhaskara apresentou a figura sem qualquer explicação, apenas uma palavra cujo significado é “Veja” ou “Contemple”.

Figura 28 – Construção de Bhaskara.



Proposição 2.8: Sobre os lados de um quadrado de lado a , são construídos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas b e c , conforme a construção de Bhaskara. Temos então que $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração:

Observe na Figura 28, que no interior do quadrado de lado a , no centro, aparecerá um quadrado de lado $b - c$. Temos, por considerar a área, que:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

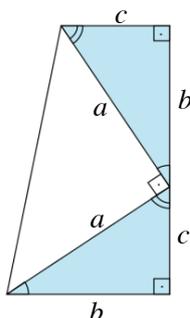
■

2.2.6. A DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE

James Abrahan Garfield (1831 – 1881) foi o vigésimo presidente dos Estados Unidos, por apenas quatro meses, de 4 de março a 19 de setembro de 1881. Era um general e um grande estudioso de Matemática. Em 1876, enquanto estava na Câmara de Representantes, rabiscou num papel uma interessante demonstração do Teorema de Pitágoras. A prova foi publicada em 1882, no *Mathematical Magazine*.

A prova de Garfield também foi por comparação de áreas e é baseada na figura a seguir:

Figura 29 – Construção de Garfield.



Proposição 2.9: Considerando a construção feita por Garfield, temos $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração:

A área T do trapézio é dada por:

$$T = \frac{(b+c)}{2} \cdot (b+c) = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2}{2} + bc + \frac{c^2}{2}.$$

Por outro lado, a área T do trapézio também pode ser calculada pela composição dos três triângulos, ou seja:

$$T = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2}.$$

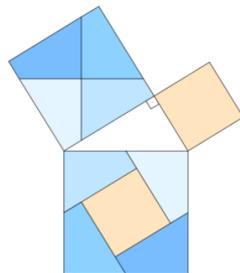
Comparando estas duas expressões e multiplicando-as por 2, temos: $a^2 = b^2 + c^2$.

■

2.2.7. A DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL

Henry Perigal (1801 – 1898), um astrônomo e matemático amador londrino publicou, em 1873, uma curiosa demonstração do Teorema de Pitágoras. Perigal cortou o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro O, uma paralela e outra perpendicular à hipotenusa, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o cateto menor, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa. Essa construção ficou conhecida como *Dissecção de Perigal*.

Figura 30 – Construção de Perigal.



No entanto, apesar da belíssima construção de Perigal ser bastante convincente, devemos provar que a região que fica no interior do quadrado maior, construído sobre a hipotenusa, é realmente congruente ao quadrado menor, construído sobre o menor cateto.

Proposição 2.10: Na construção de Perigal, o quadrilátero formado no interior do quadrado construído sobre a hipotenusa é um quadrado congruente ao quadrado construído sobre o cateto menor.

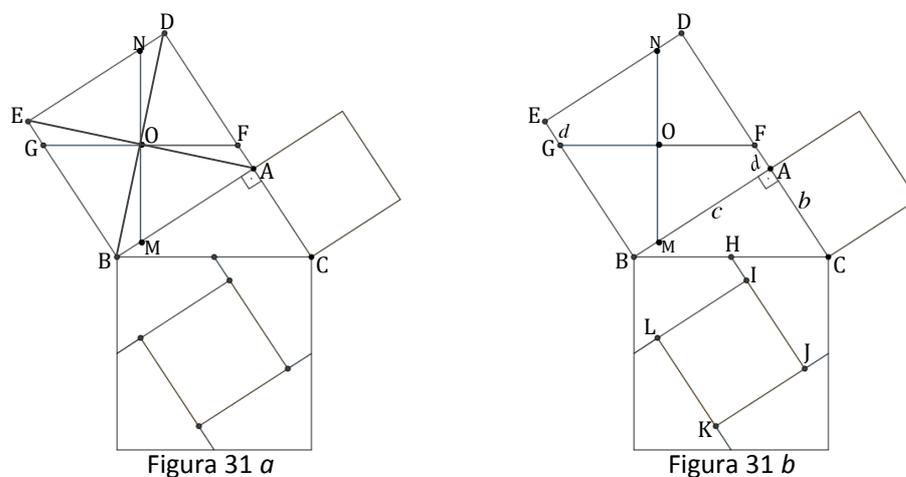
Demonstração:

Considere a Figura 31 (a e b), a seguir, com os pontos em destaque.

Sejam $c = \overline{AB}$ e $b = \overline{AC}$ as medidas dos lados construídos sobre os catetos. Seja também $d = \overline{AF}$. Considerando as diagonais AE e BD e por congruência de triângulos (caso A.L.A.), temos que os triângulos OBM , OAF , ODN e OEG são congruentes (vide Figura 31a), assim como os triângulos OBG , OAM , ODF e OEN . Dessa forma teremos $\overline{OM} = \overline{OF} = \overline{ON} = \overline{OG}$, $\overline{MB} = \overline{FA} = \overline{ND} = \overline{GE}$, $\overline{BG} = \overline{AM} = \overline{DF} = \overline{EN}$ e $\widehat{GOM} = \widehat{MOF} = \widehat{FON} = \widehat{NOG}$, $\widehat{OMB} = \widehat{OFA} = \widehat{OND} = \widehat{OGE}$, $\widehat{BGO} = \widehat{AMO} = \widehat{DFO} = \widehat{ENO}$. Logo, as quatro peças interiores ao quadrado $ABDE$ são congruentes e então, $\overline{EG} = \overline{AF} = d$.

Como, por construção, $BCFG$ é um paralelogramo, temos que $\overline{BG} = \overline{CF} \Rightarrow \overline{BE} - \overline{GE} = \overline{CA} + \overline{AF} \Rightarrow c - d = b + d \Rightarrow b = c - 2d$. Visto que $\overline{JH} = \overline{BG} = c - d$, $\overline{HI} = d$, e $\overline{IJ} = \overline{JH} - \overline{HI}$, teremos $\overline{IJ} = c - d - d = c - 2d = b$. Analogamente, mostra-se que $\overline{IL} = \overline{LK} = \overline{KJ} = b$ e, por construção, $\widehat{HIL} = 90^\circ$, teremos também $\widehat{JIL} = \widehat{ILK} = \widehat{LKI} = \widehat{KJI} = 90^\circ$. Temos então que o quadrilátero $IJKL$ é um quadrado com lado de medida b , portanto é congruente ao quadrado construído sobre o cateto menor.

Figura 31 – Esquema para a demonstração de Perigal.



Perigal era tão orgulhoso do seu feito que tinha a sua dissecção impresso em seus cartões de visita, e deixou encomendado que a mesma fosse lapidada em seu túmulo.

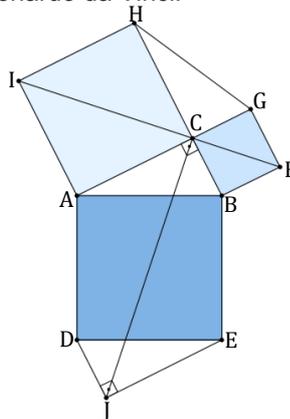
2.2.8. A DEMONSTRAÇÃO DE LEONARDO DA VINCI

Leonardo di Ser Piero da Vinci (1452-1519) foi um dos maiores e mais importantes gênios da humanidade. Foi um dos maiores pintores italianos do Renascimento e seu quadro “*Mona Lisa*” é um dos mais famosos do mundo. Destaca-se também a obra “*A Última Ceia*”, que exerceu poderosa influência sobre geração de vários artistas. Leonardo da Vinci se destacou em várias áreas do conhecimento. Foi músico, inventor, filósofo, engenheiro, arquiteto, escultor, anatomista, entre outras. Também foi um estudioso da Matemática, pesquisando áreas de figuras e o desenho em perspectiva. Ele também brindou a humanidade com uma demonstração do Teorema de Pitágoras, baseada na comparação entre áreas e motivada pela Figura 32, a seguir.

À figura padrão, com o triângulo retângulo ABC e os quadrados apoiados em seus catetos e hipotenusa, Leonardo da Vinci acrescentou no lado oposto do quadrado maior, um triângulo retângulo EDJ congruente ao triângulo ABC. Também acrescentou o segmento GH, obtendo assim o triângulo HGC congruente a ABC e por fim, uniu os dois vértices opostos ao vértice C, comum aos dois quadrados construídos sobre os catetos, obtendo assim o segmento IF, já que os pontos I, C e F

são colineares, pois $\widehat{I\hat{C}H}$, $\widehat{H\hat{C}G}$ e $\widehat{G\hat{C}F}$ são ângulos adjacentes e somam 180° . Considerando os segmentos IB e DC, temos, pelo caso L. A. L. (*Lado, Ângulo, Lado*) que os triângulos CDJ e IBF são congruentes, assim $\overline{CJ} = \overline{IF}$. Dessa forma, os quadriláteros FGHI, FBAI, CBEJ e JDAC são congruentes.

Figura 32 – Construção de Leonardo da Vinci.



Proposição 2.11: Na construção de Leonardo da Vinci, a soma das áreas dos quadrados BCGF e ACHI é igual à área do quadrado ABED.

Demonstração:

Considerando a área de cada dois desses quadriláteros, como na Figura 32, temos $\mathcal{A}_{(FGHI)} + \mathcal{A}_{(FBAI)} = \mathcal{A}_{(CBEJ)} + \mathcal{A}_{(JDAC)} \Rightarrow \mathcal{A}_{(BCGF)} + \mathcal{A}_{(CGH)} + \mathcal{A}_{(ACHI)} + \mathcal{A}_{(ACB)} = \mathcal{A}_{(ACB)} + \mathcal{A}_{(ABED)} + \mathcal{A}_{(JDE)}$.

Como $\mathcal{A}_{(ACB)} = \mathcal{A}_{(CGH)} = \mathcal{A}_{(JDE)}$, temos que $\mathcal{A}_{(BCGF)} + \mathcal{A}_{(ACHI)} = \mathcal{A}_{(ABED)}$.

■

2.3. A RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Num triângulo qualquer, se o quadrado da medida de um lado for a soma dos quadrados das medidas dos outros lados, então o triângulo é retângulo?

Intuitivamente parece ser bem apropriado dizer sim, mas devemos mostrar que isso acontece de fato.

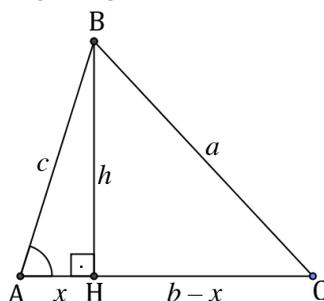
Proposição 2.12: Se a , b e c forem as medidas dos lados de um triângulo tal que $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo de hipotenusa a e catetos b e c .

Demonstração:

Consideremos então um triângulo ABC com $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Vamos inicialmente analisar dois casos:

1º caso: O ângulo A é agudo, ou seja, $\hat{A} < 90^\circ$.

Figura 33 – Triângulo com ângulo agudo.



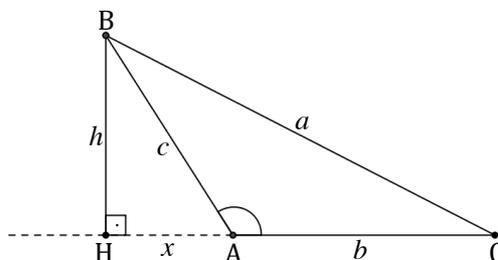
Vamos supor que $c \leq b$. Seja H a projeção de B sobre AC. Observe que H é um ponto interior ao segmento AC. Sejam $x = \overline{AH}$ e $h = \overline{BH}$.

Como o triângulo ABH é retângulo, temos $c^2 = x^2 + h^2$. O triângulo CBH também é retângulo, logo, $a^2 = (b - x)^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$, ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$.

2º caso: O ângulo A é obtuso, ou seja, $\hat{A} > 90^\circ$.

Fazendo as mesmas considerações do 1º caso e observando que agora o ponto H não está no interior do segmento AC, temos que, pelo fato do triângulo ABH ser retângulo, $c^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo BCH também é retângulo, temos: $a^2 = (b + x)^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 2bx + x^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$, ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$.

Figura 34 – Triângulo com ângulo obtuso.



Acabamos de mostrar que se $\hat{A} < 90^\circ$, temos $a^2 < b^2 + c^2$ e, se $\hat{A} > 90^\circ$, $a^2 > b^2 + c^2$. Logo, se $a^2 = b^2 + c^2$, devemos ter $\hat{A} = 90^\circ$. ■

No intuito de se fazer um resgate histórico, vamos enunciar a recíproca do Teorema de Pitágoras exatamente como feito por Euclides, em *Os Elementos*. A demonstração também será de maneira semelhante à contida no livro.

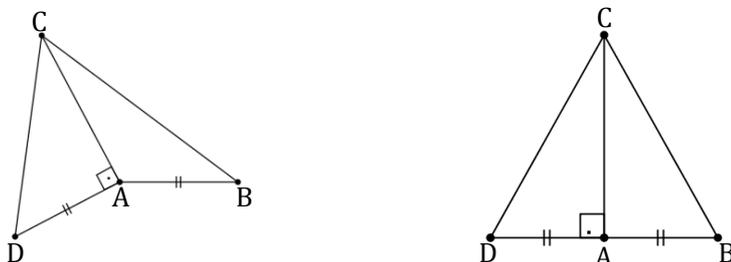
Proposição 2.13 (Proposição I-48 de *Os Elementos*): Caso o quadrado sobre um dos lados de um triângulo seja igual aos quadrados sobre os dois lados restantes do triângulo, o ângulo formado pelos dois lados restantes do triângulo é reto.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo tal que a área do quadrado construído sobre o lado BC seja igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados AB e AC. Devemos mostrar que \widehat{BAC} é reto.

De fato. Seja D um ponto do plano determinado pelo triângulo ABC, tal que DA seja perpendicular a AC e $\overline{DA} = \overline{AB}$. Consideremos também o segmento DC.

Figura 35 – Triângulo ABC que possui quadrados sobre AB e AC equivalente ao quadrado sobre BC, e triângulo ACD (figura “fantasma” e figura real).



Como o triângulo ACD é retângulo, então a soma da área do quadrado construído sobre DA com a área do quadrado sobre AC é igual à área do quadrado sobre DC. Por construção, a área do quadrado sobre DA é igual à área do quadrado sobre AB. Por Pitágoras, a área do quadrado sobre DC é igual à soma das áreas sobre o quadrado DA (ou AB) e AC. Por hipótese a área do quadrado sobre BC é igual à soma das áreas dos quadrados sobre AB e AC. Logo, a área do quadrado sobre DC é igual à área do quadrado sobre BC. Assim temos que $DC = BC$.

Desse modo, pelo caso L.L.L. (pois $AD = AB$, $BC = DC$ e AC é comum), temos que os triângulos ABC e ADC são congruentes. Logo, $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} = 90^\circ$ e portanto, o triângulo ABC é retângulo.

■

CAPÍTULO 3 – TEOREMA DE PITÁGORAS: EXTENSÕES E GENERALIZAÇÕES

No capítulo anterior vimos o Teorema de Pitágoras, que em termos de áreas, nos diz que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Será que esse padrão pitagórico (*relação entre as áreas*) é válido para outras figuras construídas tendo como base um triângulo retângulo, de modo a obter “extensões” do Teorema de Pitágoras? Ainda podemos pensar em trabalhar com um triângulo não retângulo? É o que vamos estudar um pouco neste capítulo.

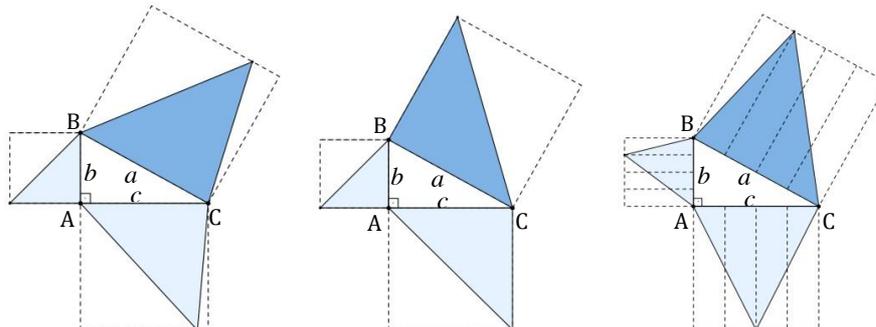
3.1. EXTENSÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS PARA POLÍGONOS:

Em quase todas as situações deste capítulo (excetuando as seções 3.6 e 3.7), consideraremos um triângulo retângulo com hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c e, portanto, válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$, dada pelo Teorema de Pitágoras.

3.1.1. TRIÂNGULOS OBTIDOS A PARTIR DOS QUADRADOS DOS CATETOS E HIPOTENUSA

Consideremos um triângulo ABC, reto em A e os já tradicionais quadrados construídos sobre os catetos b e c e hipotenusa a . Consideremos também, triângulos obtidos nos quadrados, que tenha como base o lado do quadrado e um vértice no lado oposto, por exemplo, dividindo-os por diagonais ou por outros segmentos quaisquer, conforme a Figura 36, abaixo.

Figura 36 – Triângulos obtidos a partir dos quadrados.



Será que a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos? Vamos mostrar que isso ocorre de fato.

Proposição 3.1: Seja ABC um triângulo retângulo e considere quadrados construídos sobre cada um de seus lados. Se em cada um desses quadrados são construídos triângulos de tal forma que a base seja o lado do triângulo retângulo e um vértice está no lado oposto do quadrado, então a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos é igual à área do triângulo construído sobre a hipotenusa.

Demonstração:

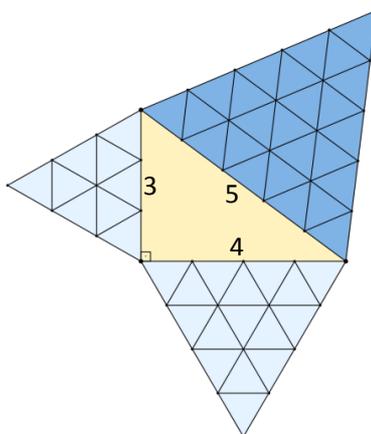
Sejam Q_A , Q_B e Q_C as áreas dos quadrados e T_A , T_B e T_C as áreas dos triângulos construídos sobre a hipotenusa a e catetos b e c , respectivamente. Pela Proposição 2.3, do capítulo anterior, temos que a área de cada triângulo é igual à metade do respectivo quadrado, ou seja, $T_A = \frac{Q_A}{2}$, $T_B = \frac{Q_B}{2}$ e $T_C = \frac{Q_C}{2}$. Assim, $T_B + T_C = \frac{Q_B + Q_C}{2}$. Mas pelo Teorema de Pitágoras, sabe-se que $b^2 + c^2 = a^2$, isto é, $Q_B + Q_C = Q_A$, logo $T_B + T_C = \frac{Q_A}{2} = T_A$, ou seja, a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.

■

3.1.2. TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

Nesta seção vamos verificar o padrão pitagórico, isto é, a relação entre áreas similar à do Teorema de Pitágoras na construção de triângulos equiláteros sobre os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo. Primeiramente, vamos analisar para um caso bem particular, o famoso triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e hipotenusa 5. Porém aqui ao invés de quadricular, como é feito nos quadrados, vamos, por analogia, usar a triangulação. Vamos tomar como unidade de medida um pequeno triângulo equilátero, conforme a Figura 37, a seguir. Assim, uma unidade de área corresponde à área de um triângulo pequeno.

Figura 37 – Triangulação dos triângulos equiláteros de lados 3, 4 e 5.



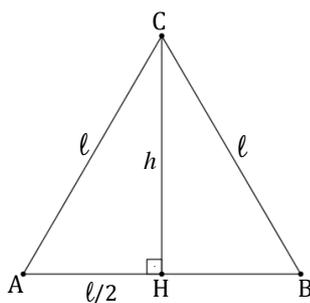
Seja S_a a área do triângulo construído sobre a hipotenusa e S_b e S_c , as áreas dos triângulos construídos sobre os catetos, obtemos $S_a = 25$, $S_b = 16$ e $S_c = 9$, obtendo facilmente a relação $S_a = S_b + S_c$. Isto nos leva a acreditar que o padrão pitagórico é válido para triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo retângulo qualquer.

Vamos mostrar, logo a seguir, que isso realmente ocorre.

Observação: Num triângulo equilátero ABC de lado ℓ , temos:

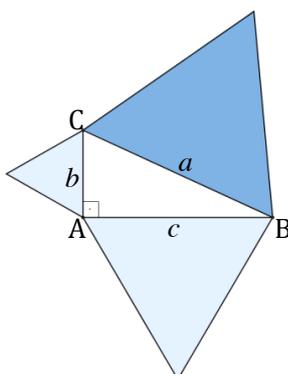
- I. A altura h é dada por $h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$. Isto segue do Teorema de Pitágoras no triângulo AHC, (vide Figura 38, abaixo).
- II. A área do triângulo é dada por $S = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, já que $S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell \sqrt{3}}{2}$, onde $b = \ell$ é a medida da base e h é a medida da altura relativa a esta base.

Figura 38 – Elementos do triângulo equilátero.



Proposição 3.2: A área do triângulo equilátero, construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos deste triângulo.

Figura 39 – Triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.



Demonstração:

Seja ABC um triângulo reto em A, com hipotenusa a e catetos b e c . Sejam S_a , S_b e S_c as áreas dos triângulos equiláteros construídos, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos deste triângulo.

Dessa forma, $S_a = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $S_b = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ e $S_c = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Somando as áreas S_b e S_c , obtemos $S_b + S_c = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = (b^2 + c^2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = S_a$.

Portanto, $S_a = S_b + S_c$.

■

3.1.3. TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Queremos mostrar que o padrão pitagórico (*relação entre áreas*) é válido para triângulos semelhantes construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

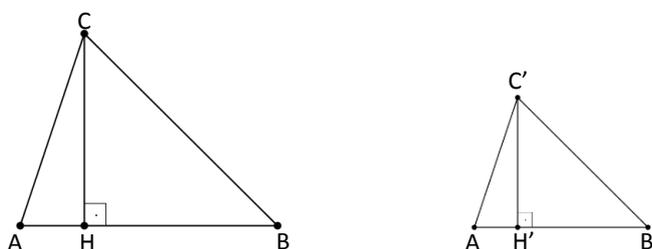
Para isso, antes vamos provar um resultado que será útil na demonstração que desejamos.

Lema 1: Se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão entre os comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer.

Demonstração:

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes, como na Figura 40. Queremos mostrar que $\frac{\mathcal{A}_{(ABC)}}{\mathcal{A}_{(A'B'C')}} = k^2$, onde $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}}$ é a *razão de semelhança*.

Figura 40 – Triângulos semelhantes.



De fato, sendo CH e $C'H'$ as alturas relativas às bases AB e $A'B'$, temos que as áreas dos triângulos são dadas por $\mathcal{A}_{(ABC)} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}$ e $\mathcal{A}_{(A'B'C')} = \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{C'H'}}{2}$.

Dividindo uma expressão por outra, obtemos $\frac{\mathcal{A}_{(ABC)}}{\mathcal{A}_{(A'B'C')}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{C'H'}} = k \cdot k = k^2$. ■

Proposição 3.3: Se construirmos triângulos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos (correspondentes) aos lados dos triângulos semelhantes que os contém, então a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.

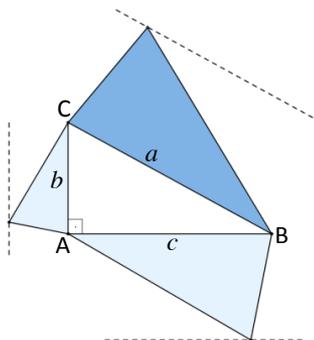
Demonstração:

Sejam T_a , T_b e T_c , respectivamente, as áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre a hipotenusa a e catetos b e c , como na Figura 41, a seguir.

Pelo Lema 1, temos que $\frac{T_b}{T_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ e $\frac{T_c}{T_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$, de onde obtemos $T_b = \frac{b^2}{a^2} \cdot T_a$ e $T_c = \frac{c^2}{a^2} \cdot T_a$.

Somando as duas expressões e usando a relação de Pitágoras, obtemos $T_b + T_c = \frac{(b^2 + c^2)}{a^2} \cdot T_a = \frac{a^2}{a^2} \cdot T_a = T_a$. Portanto, $T_b + T_c = T_a$.

Figura 41 – Triângulos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

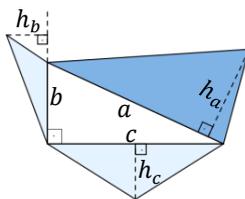


■

Observação: A relação entre as áreas continua válida mesmo que os triângulos não sejam semelhantes, basta que as alturas dos triângulos sejam proporcionais aos respectivos lados do triângulo retângulo.

Justificativa: Sejam h_a , h_b e h_c as alturas relativas e T_a , T_b e T_c , as áreas dos triângulos construídos tendo como bases, respectivamente, a hipotenusa a e catetos b e c , e satisfazendo a hipótese.

Figura 42 – Triângulos com alturas proporcionais aos lados.



Temos que $\frac{h_a}{a} = \frac{h_b}{b} = \frac{h_c}{c}$, de onde obtemos $\frac{b}{a} = \frac{h_b}{h_a}$ e $\frac{c}{a} = \frac{h_c}{h_a}$.

As áreas dos triângulos são dadas por: $T_a = \frac{a \cdot h_a}{2}$, $T_b = \frac{b \cdot h_b}{2}$ e $T_c = \frac{c \cdot h_c}{2}$.

Somando as áreas T_b e T_c e dividindo por T_a , obtemos:

$$\frac{T_b + T_c}{T_a} = \frac{\frac{b \cdot h_b + c \cdot h_c}{2}}{\frac{a \cdot h_a}{2}} = \frac{b \cdot h_b}{a \cdot h_a} + \frac{c \cdot h_c}{a \cdot h_a} = \frac{b \cdot b}{a \cdot a} + \frac{c \cdot c}{a \cdot a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Portanto, $T_b + T_c = T_a$.

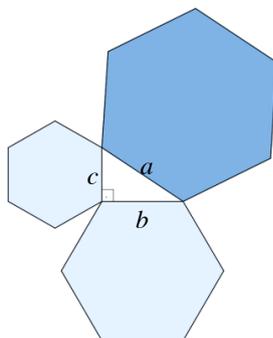
■

3.1.4. HEXÁGONOS REGULARES

Dando sequência em nosso estudo, vamos construir hexágonos regulares sobre os lados de um triângulo retângulo e mostrar que a relação entre as áreas continua válida.

Proposição 3.4: A área do hexágono regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à soma das áreas dos hexágonos regulares construídos sobre seus catetos.

Figura 43 – Hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

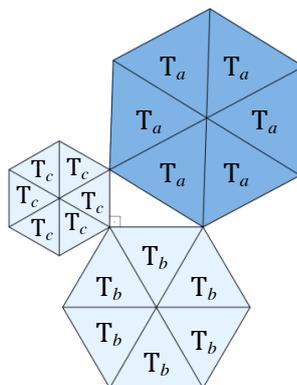


Demonstração:

Sejam S_a , S_b e S_c as áreas dos hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

Observe na Figura 44, abaixo, que um hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros.

Figura 44 – Triangulação dos hexágonos regulares.



Indiquemos por T_a , T_b e T_c a área de qualquer um dos seis triângulos da divisão/decomposição de cada hexágono construído sobre os lados a , b e c do triângulo retângulo, respectivamente.

Temos então que $S_a = 6 \cdot T_a$, $S_b = 6 \cdot T_b$ e $S_c = 6 \cdot T_c$.

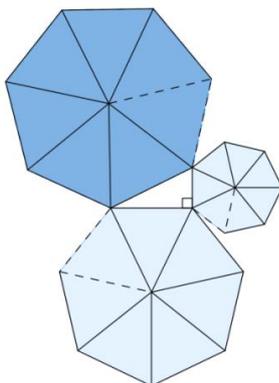
Assim, $S_b + S_c = 6 \cdot (T_b + T_c)$. Como foi visto na Proposição 3.2, $T_b + T_c = T_a$, logo $S_b + S_c = 6 \cdot T_a$ e, portanto $S_b + S_c = S_a$, o que demonstra a proposição. ■

3.1.5. POLÍGONOS REGULARES: CASO GERAL

Já provamos que o padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido para alguns polígonos regulares, mais especificamente nos casos de triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares. No entanto, mostraremos a sua validade para todos os polígonos regulares e a demonstração é semelhante à que foi feita no caso anterior.

Proposição 3.5: A área do polígono regular de n lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos regulares de n lados construídos sobre seus catetos.

Figura 45 – Polígonos regulares de n lados sobre os lados do triângulo retângulo.



Demonstração:

Consideremos um triângulo retângulo em que foram construídos sobre os seus lados polígonos regulares de n lados, conforme a Figura 45. Como no caso anterior, do hexágono regular, vamos dividir esse polígono regular em triângulos

cujos vértices são: dois vértices consecutivos do polígono e o seu centro, que é também o centro das suas circunferências inscrita e circunscrita.

Sendo S_a , S_b e S_c as áreas dos polígonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo, temos $S_a = n \cdot T_a$, $S_b = n \cdot T_b$ e $S_c = n \cdot T_c$, onde T_a , T_b e T_c , são, respectivamente, as áreas de cada triângulo em que foi decomposto o polígono regular, construído sobre a hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c .

Então, $S_b + S_c = n \cdot (T_b + T_c) = n \cdot T_a = S_a$, uma vez que, pela Proposição 3.3 temos $T_b + T_c = T_a$ (já que os triângulos (isósceles) apoiados sobre os lados do triângulo retângulo são semelhantes).

■

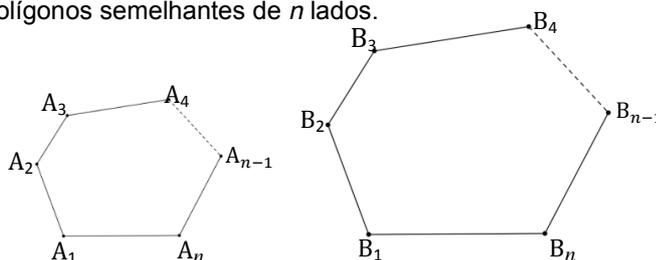
3.1.6. POLÍGONOS SEMELHANTES

Até aqui verificamos que o padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido para polígonos regulares e também para triângulos semelhantes. É indiscutível que se torna natural a seguinte pergunta: “A relação entre as áreas dos polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo poderia ser generalizada para polígonos semelhantes?”

Antes de adentrarmos nesta questão, vamos recordar a definição de polígonos semelhantes e demonstrar um lema (que é uma extensão do Lema 1, p.46).

Definição: Dois polígonos (convexos ou não convexas) $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$ e $B_1B_2B_3B_4\dots B_n$, (onde $A_i, B_i, i = 1, \dots, n$ indicam seus vértices) são *semelhantes*, quando seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes, denominados homólogos, são proporcionais, ou seja, $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1, \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2, \widehat{A}_3 = \widehat{B}_3, \dots, \widehat{A}_n = \widehat{B}_n$ e $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{B_3B_4}} = \dots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{B_{n-1}B_n}} = \frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{B_nB_1}} = k$, onde a constante k é chamada *razão de semelhança*.

Figura 46 – Polígonos semelhantes de n lados.



Lema 2: Se dois polígonos são semelhantes, então eles possuem áreas proporcionais aos quadrados da razão das medidas entre dois lados homólogos quaisquer (razão de semelhança), ou seja, sendo \mathcal{A}_1 a área do polígono $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$ e \mathcal{A}_2 a área de $B_1B_2B_3B_4\dots B_n$, temos que $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = k^2$, com k a razão de semelhança.

Demonstração:

Se os dois polígonos não forem convexos podemos decompô-los de forma a obter vários polígonos convexos mantendo a semelhança nos polígonos correspondentes. A área de cada polígono inicial será a soma das áreas dos polígonos (semelhantes) convexos. Assim é suficiente considerar o caso convexo.

Para mostrar esse resultado, traça-se as diagonais a partir de um mesmo vértice, por exemplo, A_1 e B_1 , nos dois polígonos semelhantes, obtendo os pares de triângulos semelhantes $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$, $A_1A_3A_4$ e $B_1B_3B_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$ e $B_1B_{n-1}B_n$. Pelo Lema 1, apresentado em 3.1.3,

$$\frac{\mathcal{A}_{(A_1A_2A_3)}}{\mathcal{A}_{(B_1B_2B_3)}} = \frac{\mathcal{A}_{(A_1A_3A_4)}}{\mathcal{A}_{(B_1B_3B_4)}} = \dots = \frac{\mathcal{A}_{(A_1A_{n-1}A_n)}}{\mathcal{A}_{(B_1B_{n-1}B_n)}} = k^2.$$

Por propriedades de proporção temos $\frac{\mathcal{A}_{(A_1A_2A_3)} + \mathcal{A}_{(A_1A_3A_4)} + \dots + \mathcal{A}_{(A_1A_{n-1}A_n)}}{\mathcal{A}_{(B_1B_2B_3)} + \mathcal{A}_{(B_1B_3B_4)} + \dots + \mathcal{A}_{(B_1B_{n-1}B_n)}} = k^2$.

Como $\mathcal{A}_{(A_1A_2A_3)} + \mathcal{A}_{(A_1A_3A_4)} + \dots + \mathcal{A}_{(A_1A_{n-1}A_n)} = \mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_{(B_1B_2B_3)} + \mathcal{A}_{(B_1B_3B_4)} + \dots + \mathcal{A}_{(B_1B_{n-1}B_n)} = \mathcal{A}_2$, segue que $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = k^2$.

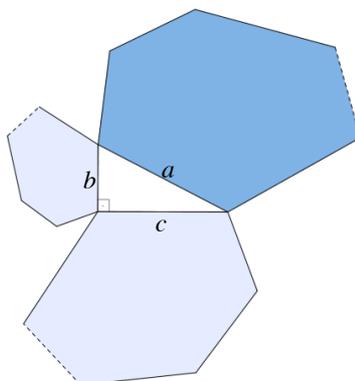
■

Proposição 3.6: Se construirmos polígonos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos (correspondentes) aos lados dos polígonos semelhantes que os contém, então a área do polígono construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos.

Demonstração:

Considerando que os polígonos construídos sobre a hipotenusa e os catetos são semelhantes e S_a , S_b e S_c são suas respectivas áreas, mostraremos que $S_a = S_b + S_c$.

Figura 47 – Polígonos semelhantes de n lados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.



De fato. Como os polígonos são semelhantes e os lados do triângulo são lados correspondentes dos polígonos, podemos escrever, conforme o Lema 2, $\frac{S_b}{S_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ e $\frac{S_c}{S_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$. Somando membro a membro as duas igualdades, obtemos $\frac{S_b}{S_a} + \frac{S_c}{S_a} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$, ou seja, $\frac{S_b + S_c}{S_a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$. Portanto, $S_a = S_b + S_c$.

■

3.2. ALGUMAS EXTENSÕES RETILÍNEAS

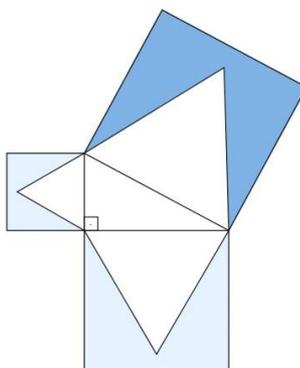
No que segue, apresentamos algumas extensões do Teorema de Pitágoras, para certas figuras “retilíneas”, polígonos construídos a partir do triângulo retângulo, porém não tendo um de seus lados como sendo um dos lados do triângulo retângulo (mas possuem relação com o quadrado que se constrói sobre o lado).

Proposição 3.7: Em todas as situações abaixo, as regiões (figuras coloridas) construídas sobre os lados do triângulo retângulo preservam o padrão pitagórico das áreas, ou seja, a área da região construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das regiões construídas sobre os catetos.

As regiões ou figuras coloridas são caracterizadas do seguinte modo:

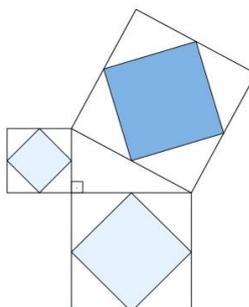
- 1) Complementares dos triângulos equiláteros construídos no interior dos quadrados e tendo como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 48 – Triângulos equiláteros no interior do quadrado.



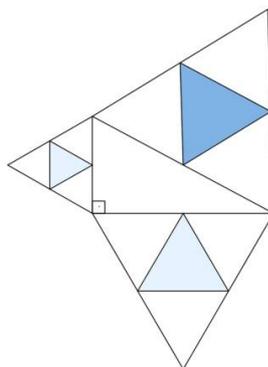
- 2) Quadrados inscritos tomando os pontos médios dos quadrados dos lados do triângulo retângulo.

Figura 49 – Quadrados inscritos nos pontos médios.



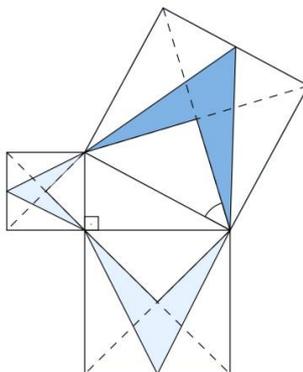
- 3) Triângulos equiláteros inscritos considerando os pontos médios dos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 50 – Triângulos equiláteros inscritos nos pontos médios.



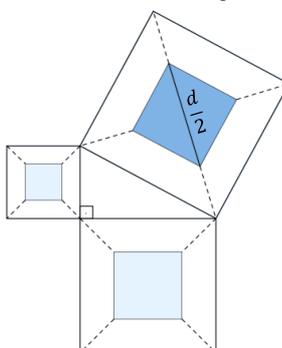
- 4) Quadriláteros não-convexos cujos vértices são: os extremos de um lado do triângulo retângulo, o ponto médio do lado oposto do quadrado que tem como base o lado do triângulo retângulo, e o centro de tal quadrado.

Figura 51 – Quadriláteros não-convexos inscritos nos quadrados.



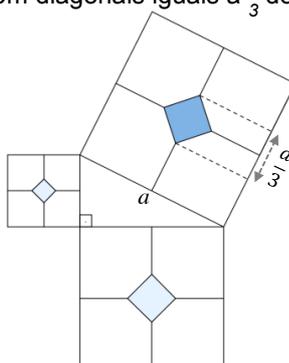
- 5) Quadrados cujos centros coincidem com os centros dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo e suas diagonais têm como medida $\frac{d}{2}$, onde d indica a medida da diagonal do quadrado básico.

Figura 52 – Quadrados com vértices nas diagonais.



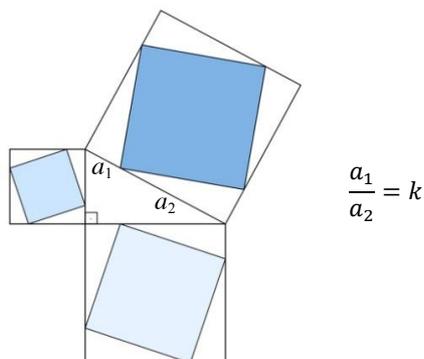
- 6) Quadrados cujos centros coincidem com o centro dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo e suas diagonais têm como medida $\frac{\ell}{3}$, onde ℓ indica a medida do lado do quadrado básico.

Figura 53 – Quadrados com diagonais iguais a $\frac{1}{3}$ do lado.



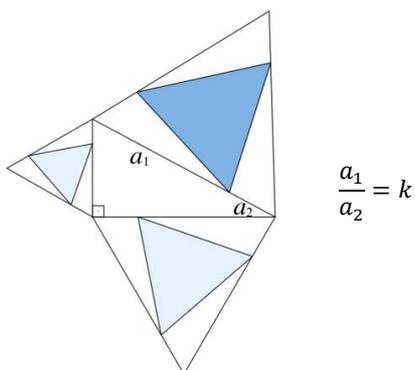
- 7) Quadrados inscritos nos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo em pontos que os dividem na mesma razão k , como ilustra a figura seguinte.

Figura 54 – Quadrados dividindo o lado na razão k .



- 8) Triângulos inscritos nos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo em pontos que os dividem na mesma razão k .

Figura 55 – Triângulos equiláteros dividindo o lado na razão k .



Demonstração:

Vide Apêndice I.

As demonstrações das extensões enunciadas na proposição usam raciocínio parecido com o que foi feito até agora (em geral compara-se a área da região com a do quadrado associado, e o resultado segue como aplicação do Teorema de Pitágoras).

■

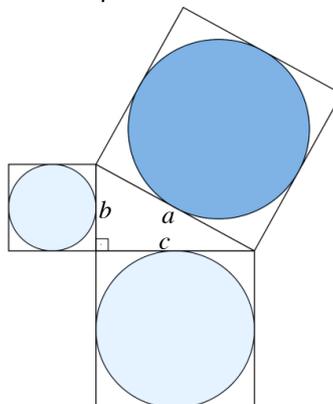
3.3. EXTENSÕES NÃO RETILÍNEAS

Nas seções anteriores apresentamos várias extensões do Teorema de Pitágoras, em termos de equivalência de áreas, mas todas elas com polígonos. Nesta seção, vamos estudar algumas extensões para outros tipos de figuras, não necessariamente polígonos, ou seja, figuras “*não retilíneas*”, formadas por segmentos de retas e/ou por arcos de circunferência, (referidas às vezes como “*figuras curvilíneas*” ou “*mistas*”), mostrando que elas preservam o padrão pitagórico.

3.3.1. CÍRCULOS INSCRITOS NOS QUADRADOS

Proposição 3.8: A área do círculo inscrito no quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos círculos inscritos nos quadrados construídos sobre os catetos.

Figura 56 – Círculos inscritos nos quadrados.



Demonstração:

Sejam C_a , C_b e C_c as áreas dos círculos inscritos nos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

Temos que $C_a = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$, $C_b = \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{4}$ e $C_c = \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{4}$.

Então, usando a relação de Pitágoras, obtemos $C_b + C_c = \frac{\pi b^2}{4} + \frac{\pi c^2}{4} = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{4} = \frac{\pi a^2}{4} = C_a$.

■

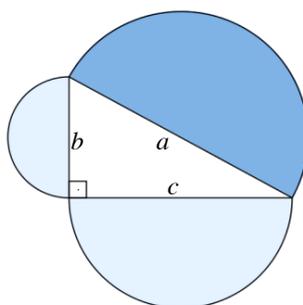
3.3.2. SEMICÍRCULOS COM DIÂMETROS IGUAIS AOS LADOS

Proposição 3.9: A área do semicírculo cujo diâmetro é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos semicírculos cujos diâmetros são os catetos.

Demonstração:

Sejam, S_a , S_b e S_c as áreas dos semicírculos cujos diâmetros são os lados de um triângulo retângulo.

Figura 57 – Semicírculos com diâmetro sobre os lados do triângulo.



Temos que $S_a = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot a^2}{8}$, $S_b = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot b^2}{8}$ e $S_c = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot c^2}{8}$. Então, $S_b + S_c = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{8} = \frac{\pi a^2}{8} = S_a$.

■

3.3.3. QUADRANTES DE CÍRCULOS

Proposição 3.10: A área do quadrante de círculo construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrantes de círculos construídos sobre os catetos.

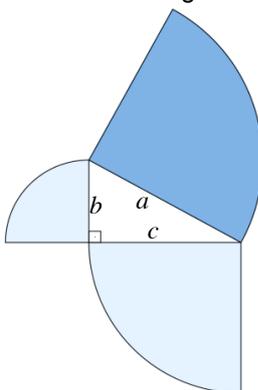
Demonstração:

Sejam, Q_a , Q_b e Q_c as áreas dos quadrantes de círculos construídos, respectivamente, sobre a hipotenusa a e catetos b e c , vide a Figura 58, a seguir.

Temos $Q_a = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2$, $Q_b = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot b^2$ e $Q_c = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot c^2$.

Assim, $Q_b + Q_c = \frac{\pi \cdot b^2}{4} + \frac{\pi \cdot c^2}{4} = \frac{\pi \cdot (b^2 + c^2)}{4} = \frac{\pi \cdot a^2}{4} = Q_a$.

Figura 58 – Quadrantes sobre os lados do triângulo.



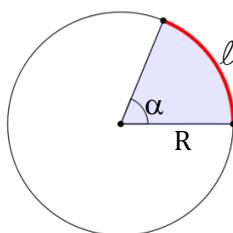
■

3.3.4. SETORES ANGULARES

Definição: Um *setor circular* é a região do círculo limitada por dois raios e um arco, conforme a Figura 59, abaixo. Todo setor circular de raio R tem um arco corresponde ℓ e um ângulo central α , onde a medida de α em radianos é dada por

$$\alpha = \frac{\ell}{R}.$$

Figura 59 – Setor angular.



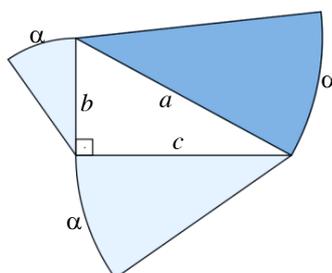
Como o setor circular é uma fração do círculo, a sua área \mathcal{S} é diretamente proporcional ao ângulo central α . O mesmo acontece com o comprimento ℓ do arco

e, devido a essa proporcionalidade com o ângulo α , podemos escrever $\frac{\mathcal{S}}{\pi R^2} = \frac{\ell}{2\pi R}$.

Como $\ell = \alpha \cdot R$, temos então que a área de um setor circular é dada por $\mathcal{S} = \frac{R^2 \cdot \alpha}{2}$.

Proposição 3.11: A área do setor angular de ângulo α construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos setores angulares de ângulo α construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo.

Figura 60 – Setores angulares sobre os lados do triângulo retângulo.



Demonstração:

Sejam S_a , S_b e S_c as áreas de cada um destes setores angulares de ângulo α .

Conforme observado acima, temos que $S_a = \frac{a^2 \cdot \alpha}{2}$, $S_b = \frac{b^2 \cdot \alpha}{2}$ e $S_c = \frac{c^2 \cdot \alpha}{2}$. Dessa

forma, $S_b + S_c = \frac{b^2 \cdot \alpha}{2} + \frac{c^2 \cdot \alpha}{2} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot \alpha}{2} = S_a$. ■

3.3.5. ARCOS OGIVAIS

Definição: Um *arco ogival* é uma figura obtida a partir da reunião de dois arcos simétricos, cujos centros são as extremidades de um segmento AB qualquer. Um arco ogival também é conhecido como *mitra*, uma espécie de chapéu alto e pontudo, usado em solenidades pontificiais.

Figuras 61 e 62 – Arco ogival e Mitra.

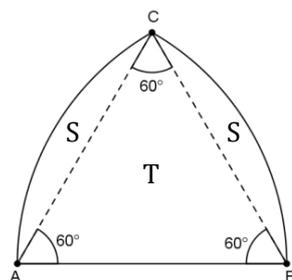


Figura 61 – Arco Ogival



Figura 62 – Papa Francisco usando uma Mitra (fonte: Vaticano⁷).

⁷ Disponível em: < <http://www.photogallery.va/content/photogallery/pt/papi/franciscus.html> > Acesso em ago. 2013.

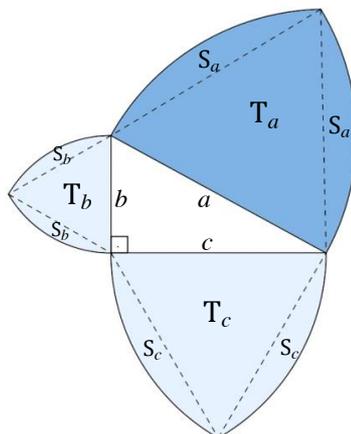
Observação: Um arco ogival é formado por dois segmentos circulares e um triângulo equilátero e sua área é dada por $\mathcal{A} = T + 2S$, onde T é a área do triângulo equilátero e S a área de cada um dos segmentos circulares. Por outro lado, a região formada por um dos segmentos circulares e o triângulo equilátero corresponde a um setor circular com $\alpha = 60^\circ$ e sua área será igual a $\frac{1}{6}$ da área do círculo, ou seja, $T + S = \frac{\pi R^2}{6}$, onde $R = \overline{AB}$. Assim, $S = \frac{\pi R^2}{6} - T$.

Proposição 3.12: A área do arco ogival construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos arcos ogivais construídos sobre os catetos.

Demonstração:

Sejam \mathcal{A}_a , \mathcal{A}_b e \mathcal{A}_c as respectivas áreas de cada arco ogival, T_a , T_b e T_c as áreas dos triângulos equiláteros que compõem os arcos e S_a , S_b e S_c a área de cada um dos dois segmentos circulares que formam cada arco ogival.

Figura 63 – Arcos ogivais construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Temos, usando a observação anterior, que:

$$\mathcal{A}_a = T_a + 2S_a = T_a + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a^2 - T_a \right) = T_a + \frac{\pi a^2}{3} - 2 \cdot T_a \Rightarrow \mathcal{A}_a = \frac{\pi a^2}{3} - T_a.$$

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_b = \frac{\pi b^2}{3} - T_b \text{ e } \mathcal{A}_c = \frac{\pi c^2}{3} - T_c.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_c = \frac{\pi b^2}{3} - T_b + \frac{\pi c^2}{3} - T_c = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{3} - (T_b + T_c).$$

Como $T_b + T_c = T_a$ (Proposição 3.2), e usando a relação de Pitágoras, podemos concluir que $\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_c = \frac{\pi a^2}{3} - T_a = \mathcal{A}_a$.

■

3.3.6. OUTRAS EXTENSÕES NÃO RETILÍNEAS

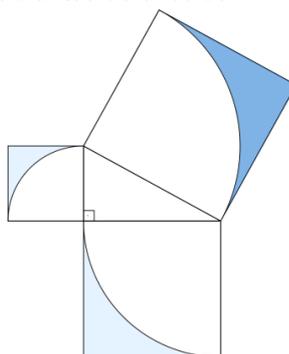
Apresentaremos agora mais algumas extensões não retilíneas, cujas regiões construídas sobre os lados do triângulo retângulo são indicados pelas “figuras coloridas” a seguir.

Proposição 3.13: Em todos os casos a seguir, as regiões (figuras coloridas) construídas sobre os lados do triângulo retângulo preservam o padrão pitagórico das áreas, ou seja, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

As regiões ou figuras coloridas são caracterizadas do seguinte modo:

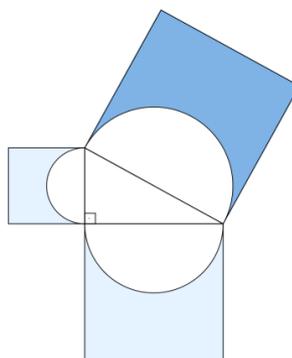
- 1) Exteriores aos quadrantes de círculos e interiores aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 64 – Exteriores aos quadrantes de círculos.



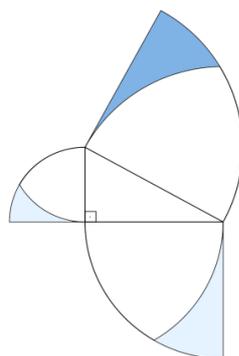
- 2) Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 65 – Exteriores aos semicírculos.



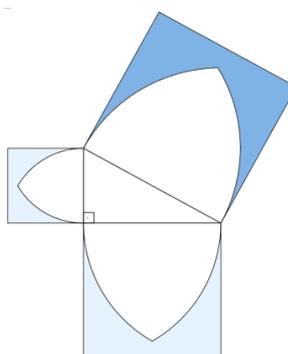
- 3) Exteriores aos arcos ogivais e interiores aos quadrantes de círculo que tem como raio os lados do triângulo retângulo.

Figura 66 – Exteriores às ogivas e interiores aos quadrantes.



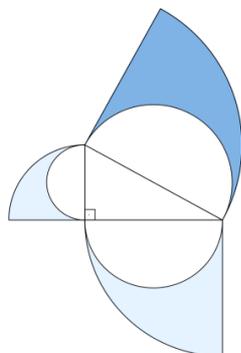
- 4) Exteriores aos arcos ogivais e interiores aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 67 – Exteriores às ogivas e interiores aos quadrados.



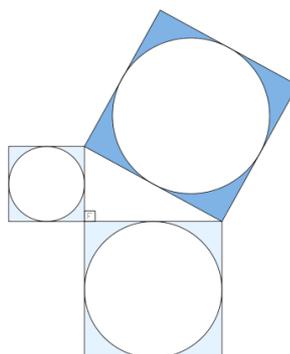
- 5) Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrantes que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 68 – Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrantes.



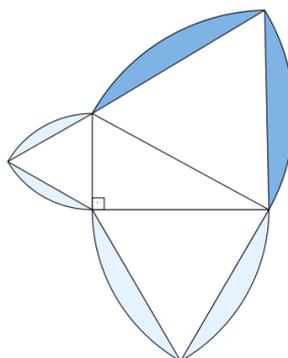
- 6) Interiores aos quadrados e exteriores aos círculos que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 69 – Exteriores aos círculos e interiores aos quadrados.



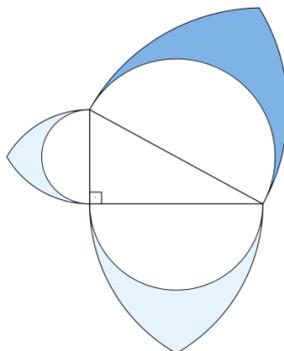
- 7) Exteriores aos triângulos equiláteros e interiores aos arcos ogivais que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 70 – Exteriores aos triângulos e interiores às ogivas.



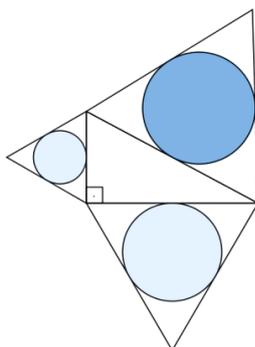
- 8) Exteriores aos semicírculos e interiores aos arcos ogivais que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 71 – Exteriores aos semicírculos e interiores às ogivas.



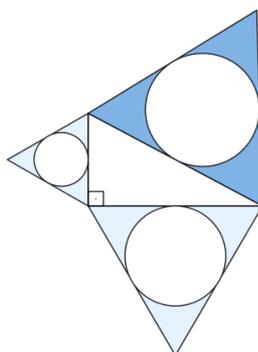
- 9) Círculos inscritos em triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 72 – Círculos inscritos aos triângulos equiláteros.



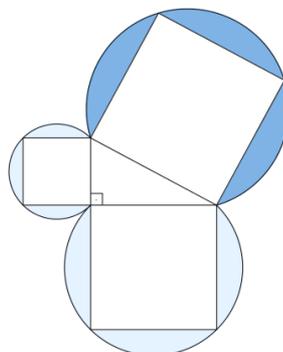
- 10) Interiores aos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo e exteriores aos círculos inscritos nestes triângulos.

Figura 73 – Exteriores aos círculos e interiores aos triângulos.



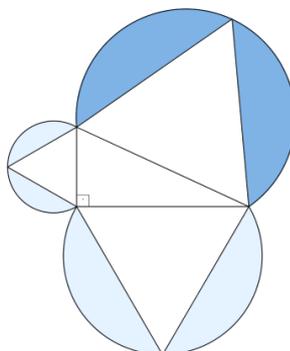
- 11)** Exteriores aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo e interiores aos círculos circunscritos nestes quadrados, exceto as regiões comuns ao triângulo retângulo.

Figura 74 – Exteriores aos quadrados e interiores aos círculos.



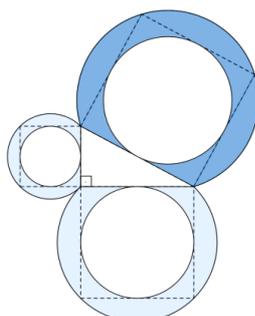
- 12)** Exteriores aos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo e interiores aos círculos circunscritos nestes triângulos, exceto as regiões comuns ao triângulo retângulo.

Figura 75 – Exteriores aos triângulos e interiores aos círculos circunscritos.



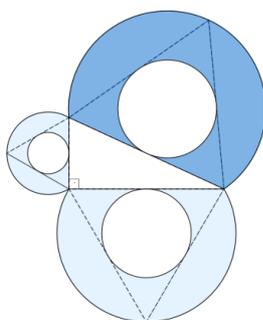
- 13)** Coroas circulares dos círculos inscritos e circunscritos aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo, exceto as regiões comuns ao triângulo retângulo.

Figura 76 – Exteriores aos círculos inscritos e interiores aos círculos circunscritos do quadrado.



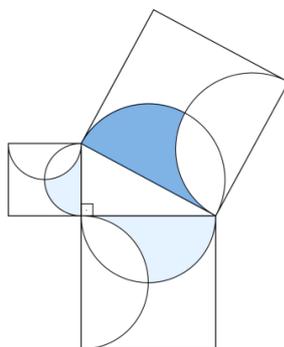
- 14)** Coroas circulares dos círculos inscrito e circunscrito aos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo, exceto as regiões comuns ao triângulo retângulo.

Figura 77 – Exteriores aos círculos inscritos e interiores aos círculos circunscritos do triângulo.



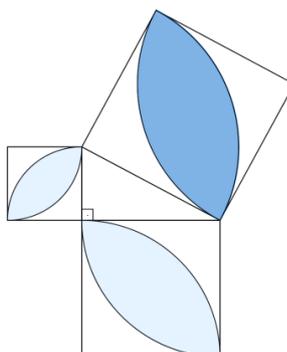
- 15)** Interior a um semicírculo e exterior ao outro cujos centros estão nos pontos médios de dois lados consecutivos dos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 78 – Obtidas de dois semicírculos.



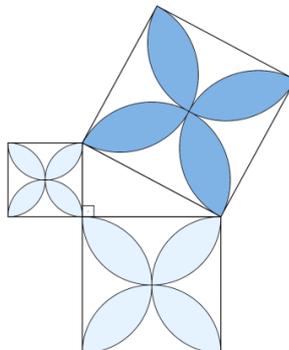
- 16)** Intersecção de setores angulares com centros em vértices opostos dos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 79 – Obtidas de arcos de circunferência.



- 17) Intersecção de semicírculos de centros nos pontos médios dos lados dos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Figura 80 – Obtidas a partir de semicircunferências.



Demonstração:

Vide Apêndice II.

As provas são similares às feitas anteriormente.

■

3.4. LÚNULAS DE HIPÓCRATES E ALGUMAS EXTENSÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

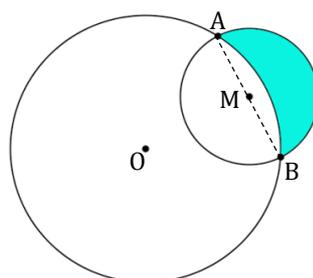
Nesta seção apresentamos uma relação entre o Teorema de Pitágoras e as Lúnulas de Hipócrates. Antes, porém, vamos falar um pouco sobre Hipócrates e como se obtém uma lúnula. Pouco foi registrado sobre a sua vida, mas sabe-se que Hipócrates de Quios (cerca de 470 — 410 a.C) foi um excelente geômetra. Ensinou Geometria em Atenas e dedicou-se aos clássicos problemas da época: *A Quadratura do Círculo* e *Duplicação do Cubo*. Nas tentativas de quadrar o círculo, Hipócrates calculou a área de certas “lúnulas”.

Definição: Uma *lúnula* é uma figura geométrica limitada por dois arcos circulares de raios distintos. Uma lúnula é também popularmente conhecida por “meia-lua” ou apenas “lua”. As lúnulas são, em geral, também referidas como *lúnulas de Hipócrates*.

3.4.1. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA LÚNULA

Consideremos um círculo de centro O , e corda AB . Seja M o ponto médio do segmento AB . Construimos agora, um círculo de centro M e diâmetro AB . A região exterior ao círculo de centro O e interior ao círculo de centro M forma uma lúnula e aparece destacada na Figura 81, abaixo.

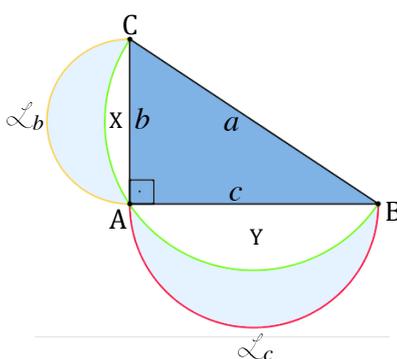
Figura 81– Construção de uma lúnula.



3.4.2. APLICAÇÃO: AS LÚNULAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja ABC um triângulo retângulo, reto em \hat{A} . Usando três semicírculos: o de diâmetro BC (passando por A), o de diâmetro AB e o de diâmetro AC , obtemos as lúnulas \mathcal{L}_b e \mathcal{L}_c sobre os catetos como na Figura 82, a seguir.

Figura 82 – Lúnulas sobre os catetos do triângulo retângulo.

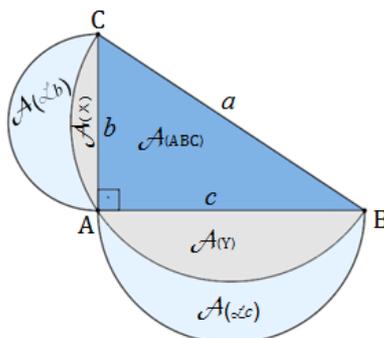


Proposição 3.14: A área do triângulo ABC é igual à soma das áreas das lúnulas \mathcal{L}_b e \mathcal{L}_c , construídas sobre os catetos.

Demonstração:

Sejam X e Y, respectivamente, as regiões delimitadas pelo semicírculo de diâmetro BC e pelos catetos AC e AB, conforme a indicação na Figura 83, a seguir.

Figura 83 – Lúnulas: indicação das áreas de cada região.



Sendo $\mathcal{A}_{(ABC)}$, $\mathcal{A}_{(\sphericalangle b)}$, $\mathcal{A}_{(\sphericalangle c)}$, $\mathcal{A}_{(X)}$ e $\mathcal{A}_{(Y)}$, áreas respectivamente do triângulo, das lúnulas e das regiões X e Y, podemos escrever:

- Área do semicírculo de diâmetro BC: $\mathcal{A}_{(ABC)} + \mathcal{A}_{(X)} + \mathcal{A}_{(Y)} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot a^2$ (1);

- Área do semicírculo de diâmetro AC: $\mathcal{A}_{(\sphericalangle b)} + \mathcal{A}_{(X)} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot b^2$ (2);

- Área do semicírculo de diâmetro AB: $\mathcal{A}_{(\sphericalangle c)} + \mathcal{A}_{(Y)} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot c^2$ (3).

Somando membro a membro as igualdades (2) e (3), obtemos:

$$\mathcal{A}_{(\sphericalangle b)} + \mathcal{A}_{(X)} + \mathcal{A}_{(\sphericalangle c)} + \mathcal{A}_{(Y)} = \frac{\pi}{8} \cdot b^2 + \frac{\pi}{8} \cdot c^2 = \frac{\pi}{8} \cdot (b^2 + c^2).$$

Como o triângulo ABC é retângulo, temos que a , b e c satisfazem a relação dada pelo Teorema de Pitágoras, de modo que a relação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_{(\sphericalangle b)} + \mathcal{A}_{(X)} + \mathcal{A}_{(\sphericalangle c)} + \mathcal{A}_{(Y)} = \frac{\pi}{8} \cdot a^2.$$

Comparando essa última relação com a igualdade (1), obtemos:

$$\mathcal{A}_{(\sphericalangle b)} + \mathcal{A}_{(X)} + \mathcal{A}_{(\sphericalangle c)} + \mathcal{A}_{(Y)} = \mathcal{A}_{(ABC)} + \mathcal{A}_{(X)} + \mathcal{A}_{(Y)},$$

o que nos permite concluir que $\mathcal{A}_{(\sphericalangle b)} + \mathcal{A}_{(\sphericalangle c)} = \mathcal{A}_{(ABC)}$.

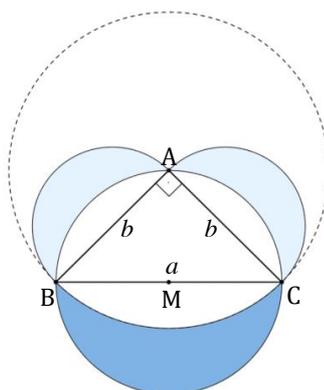
■

3.4.3. AS LÚNULAS E UMA EXTENSÃO DO TEOREMA DO PITÁGORAS PARA TRIÂNGULO RETÂNGULO ISÓSCELES

O resultado que demonstraremos a seguir é consequência imediata da aplicação feita anteriormente e pode ser considerado mais uma extensão do Teorema de Pitágoras.

Proposição 3.15: Seja ABC um triângulo retângulo e isósceles. A área das lúnulas construídas sobre os catetos desse triângulo retângulo (isósceles) é igual à área da lúnula construída sobre a hipotenusa.

Figura 84 – Lúnulas sobre os lados do triângulo retângulo isósceles.

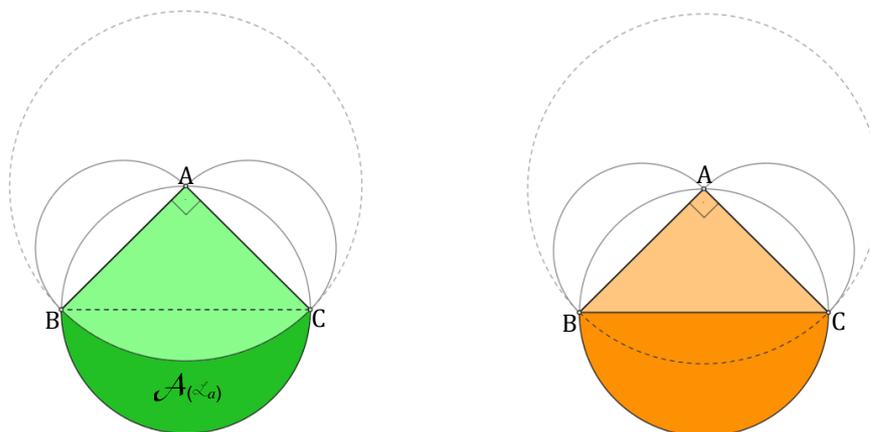


Demonstração: Seja ABC um triângulo retângulo reto em A e isósceles. A lúnula sobre a hipotenusa é assim construída. Considere os seguintes círculos: um com centro em A, e raio AB (que tem a mesma medida de AC) e o outro com centro em M, ponto médio de BC e raio MB (ou MC). A lúnula desejada é a região exterior ao primeiro e interior ao segundo círculo, conforme pode ser observado na Figura 84, acima.

Usaremos as mesmas notações feitas em 3.4.2. para as lúnulas \mathcal{L}_b e \mathcal{L}_c e acrescentaremos \mathcal{L}_a para a lúnula construída sobre a hipotenusa e $\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_a)}$ à sua área. Convém observar agora que o triângulo ABC é isósceles implicando que a lúnula \mathcal{L}_b construída sobre o cateto AB é congruente à \mathcal{L}_c construída sobre AC e, portanto, possuem a mesma área. Primeiramente, vamos mostrar que a área da Lúnula \mathcal{L}_a é igual à área do triângulo ABC.

Observe na Figura 85, abaixo, que a soma das áreas da lúnula \mathcal{L}_a com a do setor circular $B\hat{A}C$ é igual à soma das áreas do semicírculo de diâmetro BC com a área do triângulo ABC.

Figura 85 – Decomposição das regiões.



Considerando que a hipotenusa tem medida a e os dois catetos medem b , temos que $a^2 = 2b^2$ e podemos escrever:

$$\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_a)} + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot b^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot b^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{L}_a)} = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{b^2}{2} - \frac{\pi b^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2b^2}{8} + \frac{b^2}{2} - \frac{\pi b^2}{4}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(\mathcal{L}_a)} = \frac{b^2}{2} = \mathcal{A}_{(ABC)}.$$

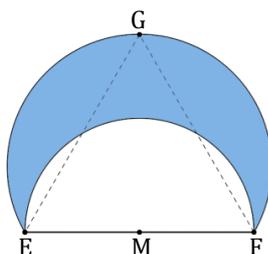
Mas, pela Proposição 3.14, a soma das áreas das lúnulas \mathcal{L}_b e \mathcal{L}_c é também igual à área do triângulo retângulo ABC, assim concluímos que $\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_b)} + \mathcal{A}_{(\mathcal{L}_c)} = \mathcal{A}_{(\mathcal{L}_a)}$.

■

3.4.4. AS LÚNULAS E MAIS UMA EXTENSÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Consideremos a seguinte construção de uma lúnula: dado um segmento EF, sobre esse segmento construímos um triângulo equilátero EFG. O arco circular definido pelos três vértices do triângulo será o arco externo da lúnula e o arco interno é dado pelo arco que tem como centro o ponto M, médio de EF, conforme pode ser observado na Figura 86, a seguir.

Figura 86 – Outro tipo de lúnula.



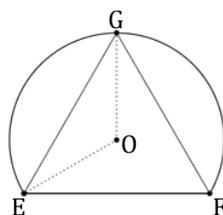
Lema 3: Se ℓ indica a medida de EF, então a área da lúnula \mathcal{L} construída a partir de EF, como acima, é $A_{(\infty)} = \frac{\ell^2 \cdot (7\pi + 6\sqrt{3})}{72}$.

Demonstração:

Observe na Figura 86, acima, que a área da lúnula será dada pela diferença entre as áreas do arco externo e interno.

Para o cálculo da área do arco externo note, na Figura 87, abaixo, que ele pode ser decomposto em 2 segmentos circulares e um triângulo equilátero.

Figura 87 – Decomposição do arco externo.

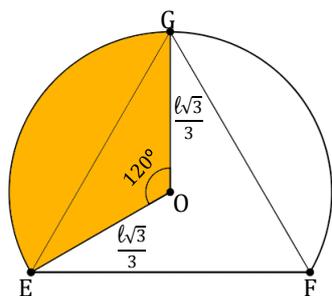


Neste caso, a área de um segmento circular é a diferença entre as áreas do setor circular de 120° e do triângulo isósceles EOG, onde O é o centro do arco externo.

O ponto O é o baricentro do triângulo equilátero, logo $\overline{OG} = \frac{2}{3}h$, onde h é altura do triângulo e, conforme visto em 3.1.2., $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, sendo ℓ a medida de EF. Dessa forma, $\overline{OG} = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$.

Assim, teremos as seguintes áreas, ilustradas a seguir:

Figura 88 – Setor circular e seus elementos.



Área do setor circular:

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi\ell^2}{9}.$$

Figura 89 – Triângulo isósceles e seus elementos.

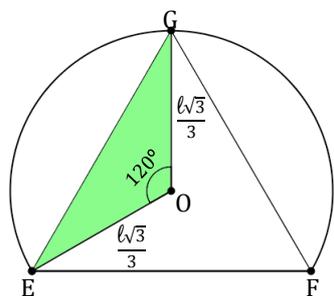
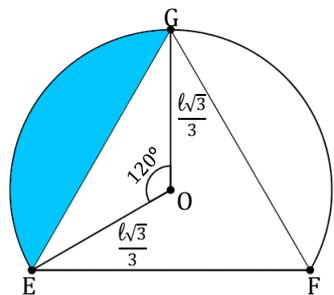


Figura 90 – Segmento circular.



Área do triângulo isósceles OGE:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen } 120^\circ = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Daí, } \mathcal{A}_{(\text{EFG})} = 3 \cdot A_2 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Portanto, a área \mathcal{A}_s do setor de segmento

$$\begin{aligned} \text{será dada por } \mathcal{A}_s &= A_1 - A_2 = \frac{\pi\ell^2}{9} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{12} = \\ &= \frac{\ell^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{36}. \end{aligned}$$

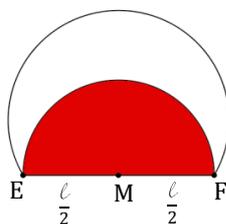
A área \mathcal{A}_E do arco externo é então dada por:

$$\mathcal{A}_E = 2 \cdot \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_{(\text{EFG})} = 2 \cdot \frac{\ell^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{36} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8\pi\ell^2 + 3\ell^2\sqrt{3}}{36} = \frac{\ell^2 \cdot (8\pi + 3\sqrt{3})}{36}.$$

Como o arco interno é delimitado por uma semicircunferência de raio $\frac{\ell}{2}$, a área

$$\mathcal{A}_I \text{ será dada por } \mathcal{A}_I = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\pi\ell^2}{8}.$$

Figura 91 – Arco Interno.



Finalmente, a área $\mathcal{A}_{(\infty)}$ da lúnula será dada por:

$$\mathcal{A}_{(\infty)} = \mathcal{A}_E - \mathcal{A}_I = \frac{\ell^2 \cdot (8\pi + 3\sqrt{3})}{36} - \frac{\pi\ell^2}{8} = \frac{2\ell^2 \cdot (8\pi + 3\sqrt{3}) - 9\pi\ell^2}{72} = \frac{7\pi\ell^2 + 6\sqrt{3}\ell^2}{72}.$$

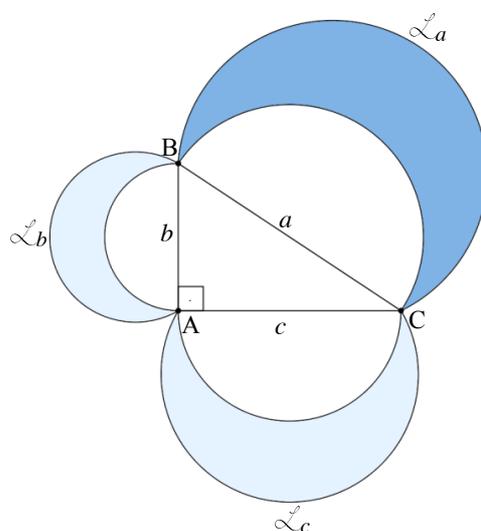
$$\text{Portanto, } \mathcal{A}_{(\infty)} = \frac{\ell^2 \cdot (7\pi + 6\sqrt{3})}{72}.$$

■

Agora, vamos à extensão.

Proposição 3.16: Dado um triângulo retângulo ABC, sobre os lados deste, construa lúnulas de maneira análoga à que foi construída anteriormente sobre o segmento EF. Sejam \mathcal{L}_a , \mathcal{L}_b e \mathcal{L}_c essas lúnulas. Então a área da lúnula \mathcal{L}_a construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das lúnulas \mathcal{L}_b e \mathcal{L}_c construídas sobre os catetos.

Figura 92 – Lúnulas sobre o triângulo retângulo.



Demonstração:

Sejam $\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_a)}$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_b)}$ e $\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_c)}$, respectivamente, as áreas das lúnulas construídas sobre os lados a , b e c do triângulo retângulo. Pelo lema anterior temos que $\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_a)} = \frac{a^2 \cdot (7\pi + 6)}{72}$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_b)} = \frac{b^2 \cdot (7\pi + 6)}{72}$ e $\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_c)} = \frac{c^2 \cdot (7\pi + 6)}{72}$.

Dessa forma, usando a relação de Pitágoras, obtemos:

$$\mathcal{A}_{(\mathcal{L}_b)} + \mathcal{A}_{(\mathcal{L}_c)} = \frac{b^2 \cdot (7\pi + 6)}{72} + \frac{c^2 \cdot (7\pi + 6)}{72} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (7\pi + 6)}{72} = \frac{a^2 \cdot (7\pi + 6)}{72} = \mathcal{A}_{(\mathcal{L}_a)}.$$

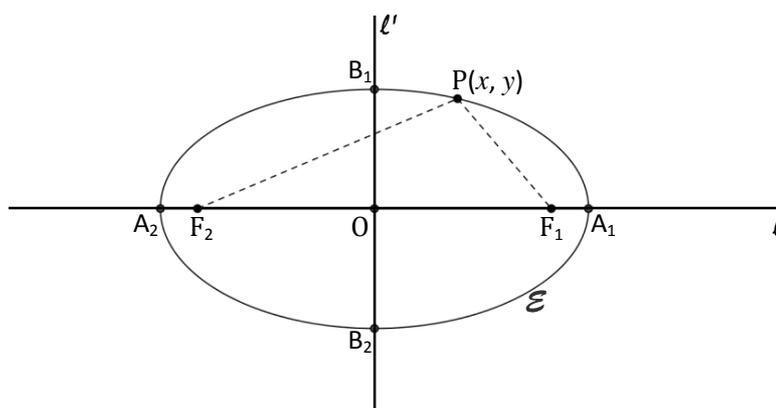
■

3.5. UMA EXTENSÃO ELÍPTICA

Para finalizar, vamos apresentar uma extensão do Teorema de Pitágoras usando elipses. Antes, porém, vamos fazer uma breve recordação dessa cônica.

Definição: Dados dois pontos distintos do plano, F_1 e F_2 , sejam $2c$ a distância entre eles e $a \in \mathbb{R}$, $a > c$. *Elipse* é o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma das distâncias de P a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$ (onde $2a > 2c$).

Figura 93 – Elipse \mathcal{E} e seus elementos.



Um ponto $P(x, y)$ pertence à elipse $\mathcal{E} \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a > 2c$.

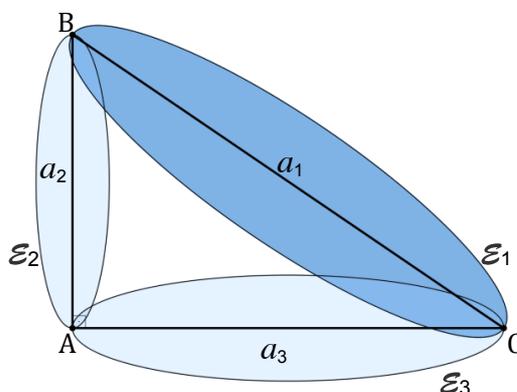
Os elementos da elipse são:

- Os pontos F_1 e F_2 , chamados *focos*.
- A reta l que contém os focos, chamada *reta focal*.
- Os pontos A_1 e A_2 , chamados *vértices sobre a reta focal*, obtidos com a intersecção da elipse com a reta focal l .
- O segmento A_1A_2 de comprimento $2a$, chamado *eixo focal* ou *eixo maior*.
- O *centro* O , ponto médio do eixo focal A_1A_2 .
- A reta l' , perpendicular a l em O , *reta não focal*.
- Os pontos B_1 e B_2 , chamados de *vértices sobre a reta não focal*, dados pela intersecção da elipse com a reta não focal l' .
- O segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ chamado *eixo não focal* ou *eixo menor*.
- O número $e = \frac{c}{a}$, denominado *excentricidade* da elipse. Note que $0 \leq e < 1$.
- A área de uma elipse é dada por $\pi \cdot a \cdot b$, sendo $a = \overline{OA_1}$ e $b = \overline{OB_1}$.

Vejamos então a extensão.

Proposição 3.17: Seja ABC um triângulo retângulo com hipotenusa a_1 e catetos a_2 e a_3 . Sobre os lados desse triângulo, construímos três elipses, cada uma tendo como seu eixo maior (eixo focal) exatamente um dos lados do triângulo. Assim, a_1 , a_2 e a_3 são as medidas dos eixos maiores e sejam b_1 , b_2 e b_3 as medidas dos eixos menores (não focais) tais que $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = k$, ou seja, as elipses são semelhantes. Então, a área da elipse construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das elipses construídas sobre os catetos.

Figura 94 – Elipses sobre os lados do triângulo retângulo.



Demonstração:

Sejam \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 e \mathcal{E}_3 as elipses construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a_1 e os catetos a_2 e a_3 . Sejam também $\mathcal{A}_{(\mathcal{E}_1)}$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{E}_2)}$ e $\mathcal{A}_{(\mathcal{E}_3)}$ as suas áreas.

Temos que:

$$\mathcal{A}_{(\mathcal{E}_1)} = \pi \cdot \frac{a_1}{2} \cdot \frac{b_1}{2} = \frac{\pi \cdot a_1 \cdot b_1}{4}, \quad \mathcal{A}_{(\mathcal{E}_2)} = \pi \cdot \frac{a_2}{2} \cdot \frac{b_2}{2} = \frac{\pi \cdot a_2 \cdot b_2}{4} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{(\mathcal{E}_3)} = \pi \cdot \frac{a_3}{2} \cdot \frac{b_3}{2} = \frac{\pi \cdot a_3 \cdot b_3}{4}.$$

Como $b_1 = a_1 \cdot k$, $b_2 = a_2 \cdot k$ e $b_3 = a_3 \cdot k$ temos: $\mathcal{A}_{(\mathcal{E}_1)} = \frac{\pi \cdot a_1^2 \cdot k}{4}$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{E}_2)} = \frac{\pi \cdot a_2^2 \cdot k}{4}$ e $\mathcal{A}_{(\mathcal{E}_3)} = \frac{\pi \cdot a_3^2 \cdot k}{4}$. Logo, usando a relação $a_1^2 = a_2^2 + a_3^2$, tem-se:

$$\mathcal{A}_{(\mathcal{E}_2)} + \mathcal{A}_{(\mathcal{E}_3)} = \frac{\pi \cdot a_2^2 \cdot k}{4} + \frac{\pi \cdot a_3^2 \cdot k}{4} = \frac{\pi \cdot (a_2^2 + a_3^2) \cdot k}{4} = \frac{\pi \cdot a_1^2 \cdot k}{4} = \mathcal{A}_{(\mathcal{E}_1)}.$$

■

3.6. A GENERALIZAÇÃO DE POLYA

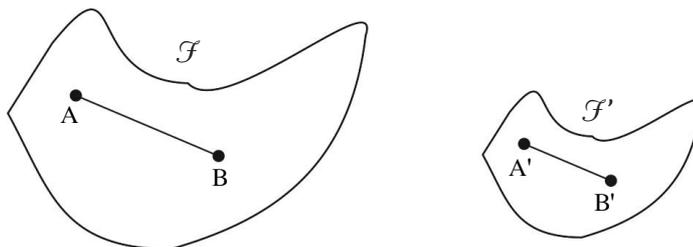
3.6.1. UM POUCO SOBRE GEORGE POLYA

George Polya (1887 – 1985), nasceu na Hungria e foi um brilhante matemático, com contribuições fundamentais em áreas como Análise, Combinatória e Probabilidade. Um de seus mais conhecidos livros, escrito em 1945, “*How to Solve it*”, que em português recebeu o título “*A Arte de Resolver Problemas*”, é um trabalho dedicado à “investigação sobre a descoberta e invenção em Matemática”. Polya nos brindou com uma notável prova e generalização do Teorema de Pitágoras: *Se as figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, independentes de sua forma geométrica, forem semelhantes, então o padrão pitagórico das áreas é satisfeito, isto é, a área da figura construída sobre o hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.*

3.6.2. A GENERALIZAÇÃO DE POLYA E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Definição: Duas figuras geométricas \mathcal{F} e \mathcal{F}' são *semelhantes* se a cada ponto A de \mathcal{F} é possível fazer uma correspondência a um e só um ponto A' de \mathcal{F}' , chamado *homólogo* do ponto A , de tal forma que se A e B são pontos quaisquer de \mathcal{F} e A' e B' são seus pontos homólogos em \mathcal{F}' , então a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ é constante, e é denominada *razão* ou *coeficiente de semelhança* da figura \mathcal{F} para a figura \mathcal{F}' . De modo similar ao caso de polígonos semelhantes, dizemos que AB e $A'B'$ são *segmentos* (*lados*, se for o caso) *homólogos*.

Figura 95 – Figuras semelhantes.



Observações:

- 1) O conceito de polígonos semelhantes é um caso particular do conceito anterior.
- 2) Para o próximo resultado usamos uma generalização do Lema 2 (Seção 3.1.6.) para figuras semelhantes quaisquer, ou seja: *A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes quaisquer estão entre si assim como o quadrado da razão de semelhança.* Uma prova deste fato pode ser encontrada em LIMA (1991, p49) usando a ideia de aproximações por retângulos.

A proposição a seguir foi enunciada e demonstrada por Polya.

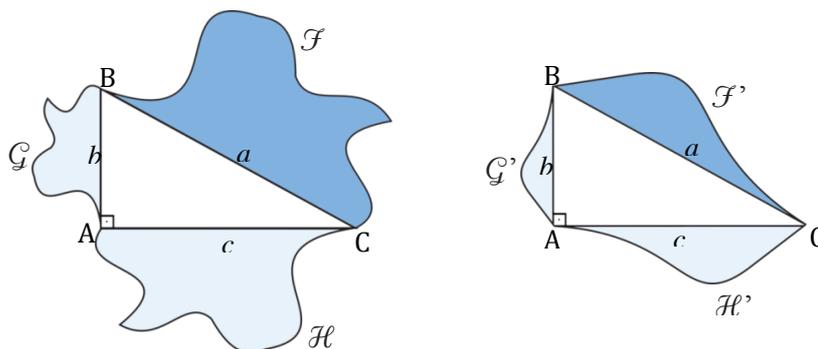
Proposição 3.18 (Polya): Sejam \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} três figuras semelhantes, construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos (correspondentes) aos lados das figuras semelhantes que os contém, então as áreas $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}$ e $\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$ satisfazem a relação $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$ (padrão pitagórico).

Demonstração:

Faremos a demonstração em duas etapas. Na *primeira*, mostraremos que se a relação entre áreas for satisfeita para uma terna particular de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, então será satisfeita para qualquer outra terna de figuras semelhantes construídas sobre esses mesmos lados. Na *segunda* etapa exibiremos uma terna particular de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, que satisfazem a condição enunciada na proposição, isto é, são semelhantes e satisfazem o padrão pitagórico (relação entre áreas).

1ª Etapa: Seja ABC um triângulo retângulo, cuja hipotenusa e catetos medem, respectivamente, a , b e c . Sejam \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} , três figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos do triângulo ABC, para as quais, seja válida a relação $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$, vide Figura 96, a seguir.

Figura 96 – Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



Se \mathcal{F}' , \mathcal{G}' e \mathcal{H}' são outras três figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e catetos do triângulo ABC, na mesma ordem que as anteriores e lembrando que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre elas (observação anterior, item 2), podemos escrever:

$$\frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{H}')}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}} = \left(\frac{a}{c}\right)^2. \quad \text{Logo,} \quad \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}} \quad \text{e}$$

$$\frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{H}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}}, \quad \text{o que nos permite concluir que} \quad \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{H}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}}, \quad \text{cujo valor}$$

comum denotaremos por m . Assim, $\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')} = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})}$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')} = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{G})}$ e

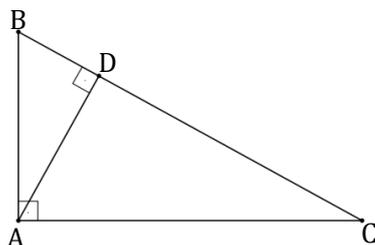
$$\mathcal{A}_{(\mathcal{H}')} = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}.$$

Então, $\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H}')} = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{H})} = m \cdot (\mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}) = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}$, ou seja, $\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H}')} = \mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}$.

2ª Etapa: Devemos mostrar que é possível construir 3 figuras semelhantes, \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} , sobre os lados do triângulo retângulo ABC que, de acordo com a hipótese, satisfazem a relação entre áreas.

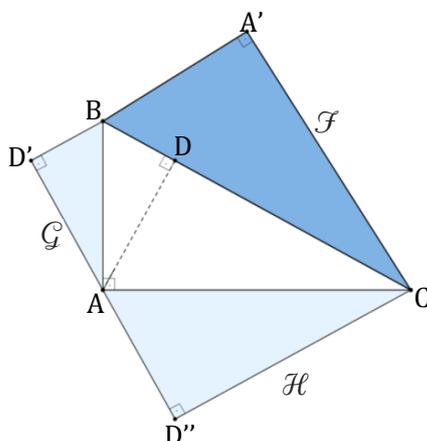
Sendo D o pé da altura relativa à hipotenusa do triângulo ABC (Figura 97), temos três triângulos semelhantes. Podemos tomar uma cópia do triângulo ABC com sendo a figura \mathcal{F} , do triângulo ABD como a figura \mathcal{G} e do triângulo ACD como a figura \mathcal{H} . Temos então uma terna de figuras semelhantes que satisfazem as condições da proposição. Note que $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$, pois $\mathcal{A}_{(ABC)} = \mathcal{A}_{(ABD)} + \mathcal{A}_{(ACD)}$.

Figura 97 – Altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo .



A Figura 98, a seguir, ilustra os 3 triângulos construídos sobre os lados do triângulo ABC, onde A' é a reflexão do ponto A em relação à hipotenusa BC, D' e D'' são as reflexões de D, respectivamente, em relação aos catetos AB e AC.

Figura 98 – Construção dos três triângulos semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.

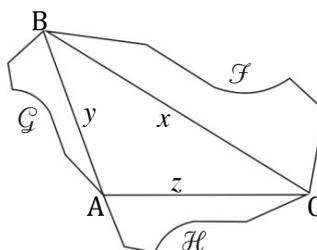


Observamos que a relação entre áreas para triângulos semelhantes (quaisquer) foi provada na Proposição 3.3, usando o Teorema de Pitágoras. Entretanto, para os três triângulos semelhantes considerados acima, a relação entre áreas se verifica sem usar o Teorema de Pitágoras. Assim, o Teorema de Pitágoras *pode ser obtido como uma consequência do teorema anterior*, uma vez que os quadrados são semelhantes.

Uma pergunta natural é: na generalização de Polya é realmente necessário que o triângulo seja retângulo? Analisando superficialmente, tem-se a impressão que a extensão se aplicaria a qualquer tipo de triângulo. Na proposição seguinte encontramos a resposta.

Proposição 3.19: Num triângulo ABC, com lados de medidas x , y e z , são construídos sobre os seus lados, respectivamente, figuras semelhantes, \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} , tal que as suas áreas satisfaçam a relação $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$ e os vértices do triângulo são pontos homólogos das figuras que os contém, então ABC é retângulo de hipotenusa x .

Figura 99 – Figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo qualquer.



Demonstração:

Sendo \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} figuras semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \left(\frac{z}{x}\right)^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{H})} = \frac{z^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})}$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} &= \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})} \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} + \frac{z^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \frac{y^2+z^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 &= \frac{y^2+z^2}{x^2} \Rightarrow x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow x, y \text{ e } z \text{ são respectivamente, as medidas da} \\ &\text{hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo (pela recíproca do Teorema de} \\ &\text{Pitágoras, Proposição 2.12, Seção 2.3.).} \end{aligned}$$

■

Observações:

- 1) De acordo com a Proposição 3.19, fica claro então, que a generalização de Polya só se aplica mesmo a triângulos retângulos.
- 2) Quase todas as extensões apresentadas anteriormente, em que as figuras possuem como um de seus lados um lado do triângulo retângulo são, de fato, casos particulares da generalização de Polya, pois se tratavam de figuras semelhantes.

3.7. A GENERALIZAÇÃO DE PAPPUS

3.7.1. UM POUCO SOBRE PAPPUS

Pappus de Alexandria (c. 290 – 350) foi um dos últimos grandes matemáticos gregos da antiguidade. Apesar de pouco se saber sobre a sua vida, sabe-se que ele foi um importante pesquisador e autor de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização grega. Pappus raramente alegou possuir ideias originais, mas tinha o olho voltado para obras de seus predecessores. Uma das suas mais famosas obras, “*Synagoge*” (340 d. C.), ou “*Coleção Matemática*” é uma composição de oito livros, onde são encontrados relatos e novas provas e temas suplementares para várias proposições de Arquimedes, Euclides, Apolônio e Ptolomeu. Muitos de seus estudos foram o ponto de partida para a invenção da Geometria Analítica por Descartes (1596 – 1650), 13 séculos depois. Curiosamente, foi Pappus que formulou a conjectura de que o formato em hexágono dos favos de mel é o que permite armazenar a maior quantidade de mel com o menor gasto de cera. Também ficaram famosos os seus estudos sobre centros de gravidade de sólidos e superfícies de revolução, e sobre seções cônicas.

3.7.2. A GENERALIZAÇÃO DE PAPPUS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

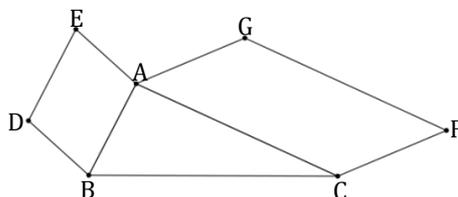
Finalizando este capítulo sobre as extensões e generalizações do Teorema de Pitágoras, vamos ver mais uma interessante “generalização”.

O resultado a seguir, foi proposto e provado por Pappus e pode ser considerado uma generalização do Teorema de Pitágoras, uma vez que o Teorema de Pitágoras é obtido como um caso particular dele. Surpreendentemente, tal resultado não exige que o triângulo, sobre cujos lados, constroem-se as figuras, seja retângulo.

Proposição 3.20 (Pappus): Seja ABC um triângulo qualquer e sobre dois de seus lados construimos dois paralelogramos quaisquer, $ABDE$ e $ACFG$, como na Figura 100, a seguir. Então é possível construir sobre o outro lado desse triângulo,

um terceiro paralelogramo, BCHI, cuja área seja igual à soma das áreas dos outros dois já construídos.

Figura 100 – Paralelogramos sobre os catetos do triângulo retângulo.

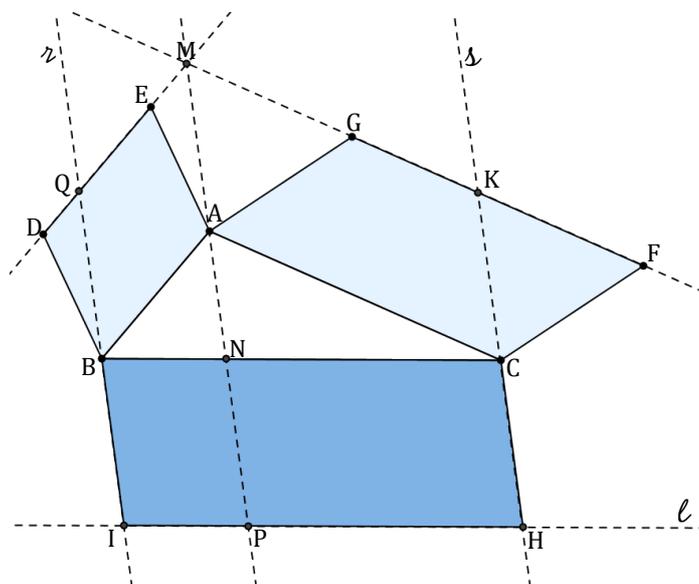


Demonstração:

Inicialmente, vamos proceder à construção do terceiro paralelogramo, seguindo o raciocínio de Pappus, e depois, provar que a relação entre as áreas é satisfeita.

1º) Construção: Sejam M a intersecção entre as retas suportes do lado DE e FG e N a intersecção da reta \overleftrightarrow{MA} com o lado BC, vide figura auxiliar abaixo. Sobre \overleftrightarrow{MA} , consideremos o ponto P, tal que $\overline{MA} = \overline{NP}$. Sejam ℓ a reta passando por P e paralela a BC, e r e s , respectivamente, as retas passando por B e C paralelas à reta \overleftrightarrow{MA} . Sejam I e H, respectivamente, a intersecção da reta ℓ com as retas r e s . O quadrilátero BCHI é um paralelogramo, construído por Pappus, que satisfaz a relação proposta.

Figura 101 – Construção de Pappus.



2º) Mostremos que a área do paralelogramo BCHI é igual à soma das áreas dos paralelogramos ABDE e ACFG.

Sejam Q o ponto de intersecção entre a reta ℓ e DE e K o ponto de intersecção da reta ℓ com FG.

Observe que o paralelogramo BNPI tem a mesma área que o paralelogramo ABQM, (Figura 101), pois tem a mesma base ($\overline{AM} = \overline{NP}$, por construção) e tem a mesma altura, pois estão situados entre duas retas paralelas, fato já provado na Proposição 2.1. Os triângulos BDQ e AEM são congruentes, então $\mathcal{A}_{(ABDE)} = \mathcal{A}_{(ABQM)}$, pois $\mathcal{A}_{(ABDE)} = \mathcal{A}_{(BDQ)} + \mathcal{A}_{(ABQE)}$ e $\mathcal{A}_{(ABQM)} = \mathcal{A}_{(AEM)} + \mathcal{A}_{(ABQE)}$. Logo, $\mathcal{A}_{(ABDE)} = \mathcal{A}_{(ABQM)} = \mathcal{A}_{(BNPI)}$.

De modo análogo, mostramos que $\mathcal{A}_{(ACFG)} = \mathcal{A}_{(CNPH)}$.

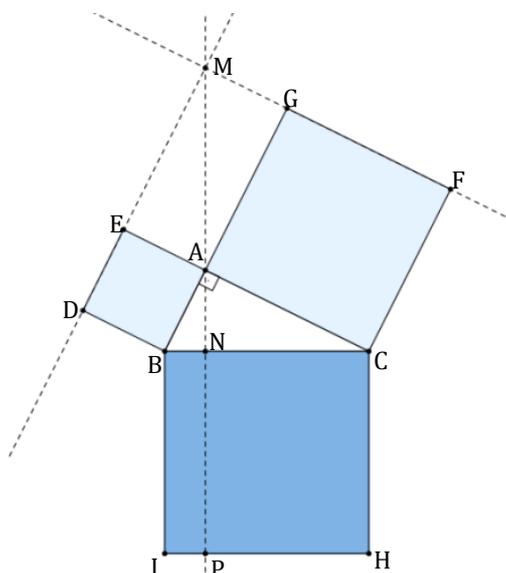
Desta forma, $\mathcal{A}_{(ABDE)} + \mathcal{A}_{(ACFG)} = \mathcal{A}_{(BNPI)} + \mathcal{A}_{(CNPH)} = \mathcal{A}_{(BCHI)}$.

Assim mostramos que o paralelogramo BCHI, construído sobre BC, é realmente o paralelogramo que satisfaz a generalização de Pappus.

■

Corolário (Teorema de Pitágoras): Se na Proposição 3.20 o triângulo ABC é retângulo e construímos quadrados sobre os catetos do triângulo (retângulo) então a construção de Pappus nos levará a um outro quadrado e portanto obtemos o Teorema de Pitágoras.

Figura 102 – Construção de Pappus – Teorema de Pitágoras.



Demonstração:

Devemos mostrar que BCHI é realmente um quadrado, para concluir que o resultado de Pappus realmente se trata de uma extensão do Teorema de Pitágoras.

Primeiramente, vamos mostrar que $\overline{NP} = \overline{BC}$.

Observe que, por construção, AEMG é um retângulo e os triângulos GAM e ABC são congruentes. Assim, $\overline{BC} = \overline{AM}$ e como, por construção, $\overline{NP} = \overline{AM}$, segue que $\overline{NP} = \overline{BC}$.

Agora vamos mostrar que o ângulo $\widehat{B\hat{N}P}$ é reto.

De fato, observe que os ângulos \widehat{BAN} e \widehat{MAG} são congruentes, pois são opostos pelo vértice e que \widehat{ABN} é congruente a \widehat{GMA} (os triângulos ABC e GMA são congruentes). Logo, \widehat{ANB} é congruente a \widehat{GMN} , que por construção, é reto. Como $\widehat{B\hat{N}P}$ e \widehat{ANB} são suplementares, temos que $\widehat{B\hat{N}P}$ é reto.

Por construção, BI, CH e NP são paralelos, logo podemos concluir que o paralelogramo BCHI é, na realidade, um quadrado. Portanto, aplicando aos três quadrados a relação garantida por Pappus, obtemos $\mathcal{A}_{(ABDE)} + \mathcal{A}_{(ACFG)} = \mathcal{A}_{(BCHI)}$.

■

Observações:

- 1) Note que os paralelogramos construídos de acordo com a construção de Pappus, em geral, não são semelhantes.
- 2) Claramente poder-se-ia construir no lado BC um paralelogramo satisfazendo o padrão de área, basta considerar BC como base e altura $h = \frac{\mathcal{A}_{(ABCD)} + \mathcal{A}_{(ACFG)}}{BC}$. Mas vale ressaltar que na demonstração realizada por Pappus, conforme o costume da época, era comum as construções geométricas com o uso de régua e compasso.

CAPÍTULO 4 – PROPOSTA DE ATIVIDADES EM SALA DE INFORMÁTICA COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

OBJETIVOS GERAIS: O desenvolvimento da sequência de atividades tem como objetivo levar o aluno a perceber a validade do Teorema de Pitágoras em termos de equivalência de áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo qualquer e depois algumas extensões do Teorema de Pitágoras em termos de equivalência de área para figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

PÚBLICO ALVO: Foi proposto e desenvolvido duas sequências de atividades. Uma mais ampla, com algumas extensões do Teorema de Pitágoras, aplicada para alunos do 1º ano do Ensino Médio e outra, somente com equivalência de áreas de quadrados, aplicada para alunos da 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental.

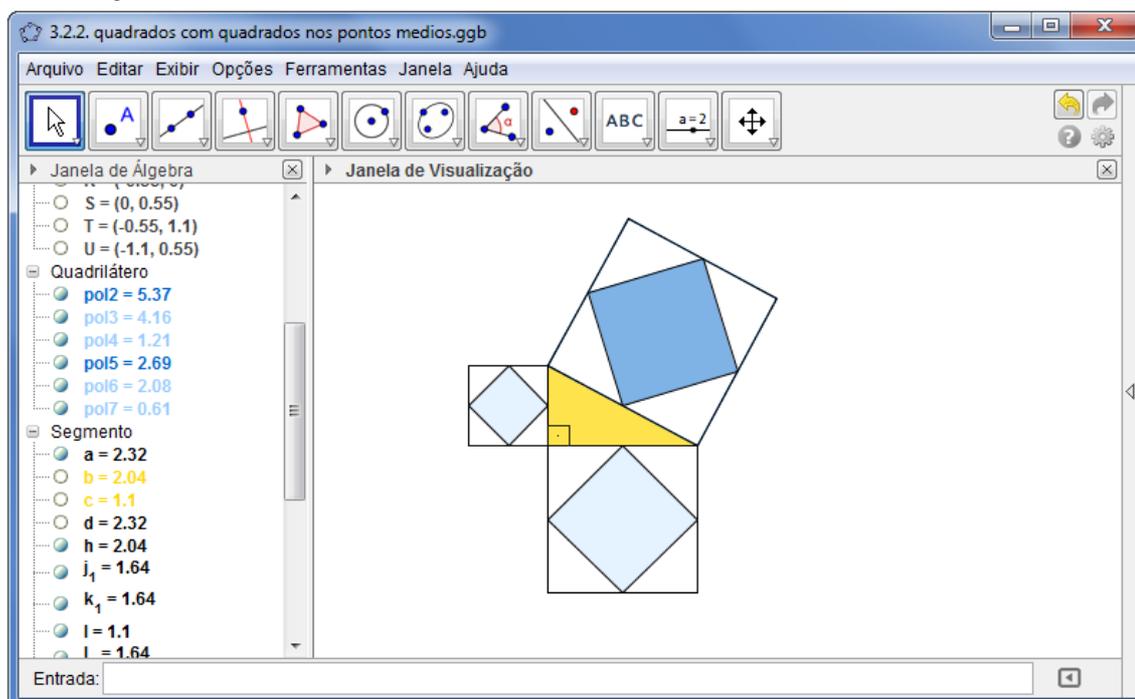
PRÉ-REQUISITOS: Para desenvolver tais atividades os alunos devem possuir conhecimentos prévios, como noções sobre polígonos, cálculo de áreas, e alguma familiaridade com o uso de computadores e seus recursos.

MATERIAIS E TECNOLOGIAS: Não há como negar que a informática e os recursos tecnológicos são uma realidade na vida pessoal e social de quase todos os cidadãos e está presente em praticamente todos os ramos do conhecimento. Na educação, desde que seja bem utilizado, poderá ser um recurso de grande importância para o aprendizado. Uma aula bem preparada usando, por exemplo, recursos computacionais, pode entusiasmar o aluno, aguçando a sua curiosidade em relação ao que está sendo ensinado, tornando o aprendizado mais atrativo, divertido e interessante. Vale ressaltar que o computador nada mais é do que uma ferramenta, e os recursos tecnológicos devem servir como extensões do professor, nunca o substituirá. Com relação ao uso de recursos tecnológicos, o Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e suas Tecnologias (SÃO PAULO, 2011), destaca:

[...] certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, softwares para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos, bem como o seu uso será crescente, inevitável e desejável, salvo em condições extraordinárias, em razão de extremo mau uso. (SÃO PAULO, 2011, p. 33 – 34).

Nas atividades com o uso de informática que desenvolvemos neste trabalho, usamos o software GeoGebra. O GeoGebra é um software de Geometria Dinâmica, onde através dele são possíveis a construção de pontos, segmentos, retas, polígonos, seções cônicas, construção de gráficos de funções, entre outros. O mais interessante é, que, depois de construído os objetos, é possível manipulá-los dinamicamente, facilitando a aprendizagem e a constatação de resultados. Outra vantagem do software GeoGebra, é que ele permite, num único ambiente, visualizar as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. O GeoGebra é gratuito e o seu download pode ser feito na própria página do desenvolvedor do programa, disponível em <http://www.GeoGebra.org/cms/pt_BR/download/>.

Figura 103 – Interface do software GeoGebra.



RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS: Deve-se organizar as atividades com uma sequência didática a fim de proporcionar alguns questionamentos aos alunos, com campos e tabelas a serem preenchidos, promovendo uma interação entre o aluno e o software. A sala de informática deve ser organizada anteriormente, e estar preparada para receber uma quantidade adequada de alunos, pois muitos alunos num só computador pode prejudicar o andamento desejado na realização das atividades. Recomenda-se instalar o software com antecedência e verificar o seu correto funcionamento.

DIFICULDADES PREVISTAS: Alguns alunos poderão apresentar dificuldades com relação ao uso do computador ou em relação ao software. É importante dedicar um tempo, antes de iniciar as atividades, para que os alunos façam uma exploração livre do software GeoGebra, objetivando estimular a sua curiosidade sobre as suas ferramentas básicas, principalmente aquelas que mais serão usadas no decorrer das atividades.

ATIVIDADES PROPOSTAS: Dividimos as atividades em duas partes, sendo que a primeira foi proposta para turmas de alunos que já tiveram contato com o Teorema de Pitágoras e a segunda, para uma turma que ainda não teve contato com o teorema.

4.1. PARTE I: ATIVIDADES PROPOSTAS PARA ALUNOS QUE JÁ TIVERAM CONTATO COM O TEOREMA DE PITÁGORAS, A PARTIR DA 8ª SÉRIE/9º ANO

ATIVIDADE 1

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Construir quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo e verificar a validade do Teorema de Pitágoras em termos de equivalência de áreas.

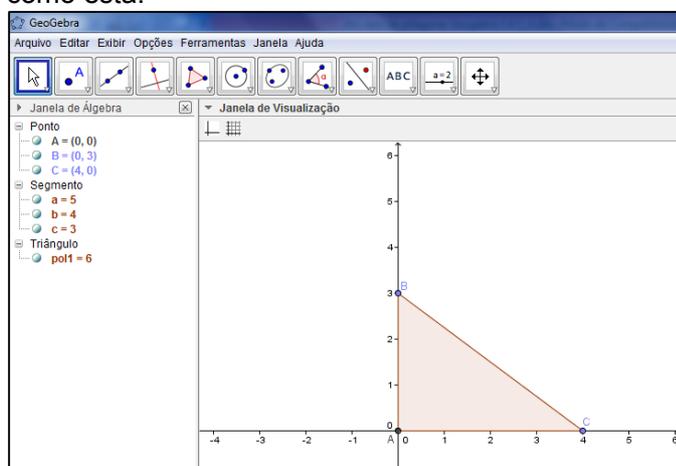
PÚBLICO ALVO: A partir do 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental (no caso, aplicou-se para uma turma de 1º ano do Ensino Médio).

TEMPO PREVISTO: 2 horas aulas.

ATIVIDADE DESENVOLVIDA:

- (1) Vamos construir um triângulo ABC que tenha um lado medindo **3** e outro medindo **4** unidades, usando *os pontos dos eixos cartesianos*, como na figura a seguir. Para isso, clique na **Caixa 1** e selecione a ferramenta “**Novo ponto**” () marque 3 pontos, com as seguintes coordenadas: A(0,0), B(0,3) e C(4,0). **Modo de construção:** para construir o ponto A fixo na origem, passe o mouse ao redor da origem, quando aparecer a mensagem  de um clique e o ponto A será construído na origem do sistema cartesiano, não podendo ser manipulado. Da mesma forma, para construir o ponto B no eixo das ordenadas, clique ao redor do ponto (0, 3) e quando aparecer a mensagem  dê um clique, fixando o ponto no eixo das ordenadas. De modo análogo, ao posicionar o mouse ao redor de (4, 0), surgirá a mensagem , que fixará o ponto no eixo das abscissas. Dessa maneira, o ponto B se movimentará somente pelo eixo Y e o ponto C, pelo eixo X.

Agora, clique na **Caixa 5** e selecione a ferramenta “**Polígono**” (), e vamos construir nosso triângulo, para isso, clique nos pontos A, B, C e novamente em A. Você deve obter uma figura como esta:



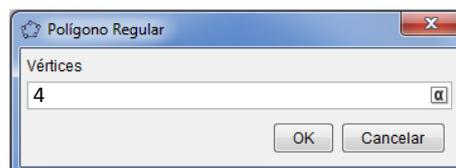
- (2) Vamos “esconder” os eixos cartesianos, para isso clique em  .

- (3) Vamos medir o valor do ângulo BÂC, clique na **Caixa 8**, selecione “**Ângulo**” () e a seguir, nessa ordem, nos pontos C, A e B. O valor do ângulo deve aparecer junto ao ângulo Â. Agora responda:

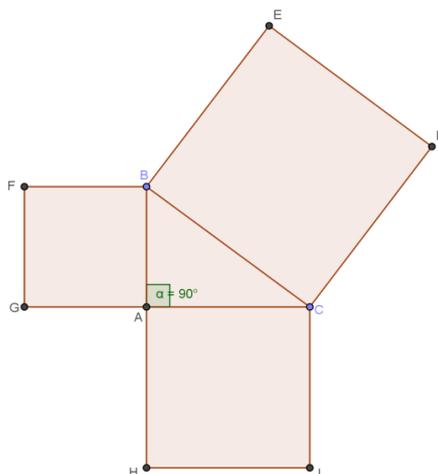
- Quanto vale o ângulo CÂB? _____.
- Qual o nome que recebem os triângulos que possuem um ângulo reto? _____.
- Como se chama o lado (do triângulo) oposto ao ângulo reto? _____.
E qual o nome dos outros dois lados desse triângulo? _____.

Clique em “**Arquivo**” e “**Gravar Como**” e salve o arquivo com o nome de *triângulo retângulo*. Nas Atividades 2, 3 e 4, utilizaremos essas mesmas construções iniciais.

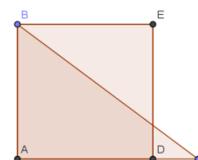
- (4) Agora, vamos construir 3 quadrados, cada um tendo como base um lado do triângulo. Para isso clique, novamente na **Caixa 5**, selecione a ferramenta “**Polígono Regular**” (). Clique inicialmente no ponto B e depois em C, e uma caixa como a abaixo surgirá:



Digite 4 e dê OK, então um quadrado deverá ser construído sobre o lado BC. Repita este procedimento para os lados AB e CA. No final, você deverá ter uma figura como a esta:



OBSERVAÇÃO: Se o quadrado ficar desenhado do outro lado, com pontos em comum com o interior do triângulo (como abaixo), basta desfazer (Ctrl + z) e refazer o procedimento, mas agora clicando primeiro no outro ponto do lado onde se pretende construir o quadrado (dica: seguir o sentido horário).



- (5) Agora vamos conferir a medida dos lados. Para isso vá novamente à **Caixa 8** e selecione a ferramenta “**Distância, Comprimento ou Perímetro**” () e depois clicar sobre os lados AC, AB e BC.

- (6) Agora responda:

- (a) Quais são as medidas dos catetos do triângulo retângulo construído?

$\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ e $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$. E a hipotenusa? $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (b) Qual é a área do quadrado que tem o cateto **AB** como um lado? $\underline{\hspace{2cm}}$.

E a área do quadrado que tem o cateto **AC** como um lado? $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (c) Qual a área do quadrado que tem a hipotenusa **BC** como lado? $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (d) Para conferir se você acertou, clique na **Caixa 8** e selecione a ferramenta “**Área**” () . Clique no interior do quadrado construído sobre o lado AC, deverá aparecer o valor da área desse quadrado. Repita este procedimento para os quadrados construídos sobre os lados AC e AB.

- (e) Agora some as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Quanto é?

$$3^2 + 4^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (f) Compare a soma das áreas dos quadrados que tem os catetos como lado, obtido em (e) com a área do quadrado que tem a hipotenusa como lado. Analisando as áreas desses quadrados, o que é possível observar? $\underline{\hspace{2cm}}$

$\underline{\hspace{2cm}}$

$\underline{\hspace{2cm}}$

- (7) Será que foi coincidência? Só dará certo para esse triângulo de lados 3, 4 e 5?

Vamos alterar o valor do lado do triângulo retângulo e analisar o que acontece com as áreas dos quadrados construídos sobre os lados. Para isso, selecione na **Caixa 1** a ferramenta “**mover**” () e altere as posições dos pontos B e/ou C. Observe que mesmo alterando as posições dos pontos B e C, o ângulo BÂC continua sendo de 90° e o triângulo ABC permanecerá sendo retângulo. Faça pelo menos 3 alterações e anote os valores obtidos na tabela a seguir:

	Área do quadrado construído sobre o cateto AB. (Área = \overline{AB}^2)	Área do quadrado construído sobre o cateto AC. (Área = \overline{AC}^2)	Soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. ($\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$)	Área do quadrado construído sobre a hipotenusa. (Área = \overline{BC}^2)
1)				
2)				
3)				

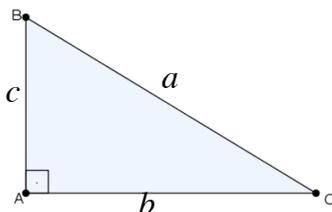
Agora, compare os valores das duas últimas colunas, ou seja, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ com \overline{BC}^2 .
O que podemos concluir sobre esses dois valores?

Essa atividade nos permite tirar a seguinte conclusão:

CONCLUSÃO: Nestes triângulos retângulos que foram construídos, a **soma dos quadrados das medidas dos** _____ **é igual ao quadrado da medida da** _____!

Esse resultado não vale apenas para estes casos particulares. Temos um teorema que nos diz que **“Para todo triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”**. Esse é o famoso **Teorema de Pitágoras!**

Simbolicamente ou de forma resumida, se um triângulo retângulo tem hipotenusa com medida a e catetos medindo b e c , então:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

ATIVIDADE 2

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Construir triângulos equiláteros sobre os lados de um triângulo retângulo e verificar a validade de extensões do Teorema de Pitágoras em termos de equivalência de áreas, porém agora, as figuras construídas são triângulos equiláteros.

PÚBLICO ALVO: A partir do 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental.

TEMPO PREVISTO: 1 hora aula.

ATIVIDADE DESENVOLVIDA:

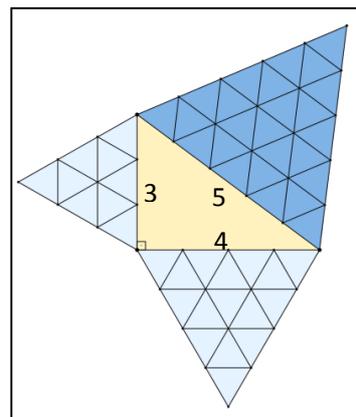
Na Atividade 1, construímos quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo e verificamos que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Nesta atividade vamos verificar se esse padrão ocorre com outras figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo, mais precisamente quando trabalhamos com triângulos equiláteros.

(1) Para começar, observe a figura ao lado, onde foram construídos triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Considerando a área de triângulo de lado 1 (\triangle) como sendo a unidade de área, responda:

- Qual é a área do triângulo construído sobre o cateto de medida 3? $A_1 =$ _____.
- Qual é a área do triângulo construído sobre o cateto de medida 4? $A_2 =$ _____.
- Qual é a área do triângulo construído sobre a hipotenusa (medida 5)? $A_3 =$ _____.
- Qual é o valor de $A_1 + A_2 =$ _____.

Compare esse resultado com A_3 .

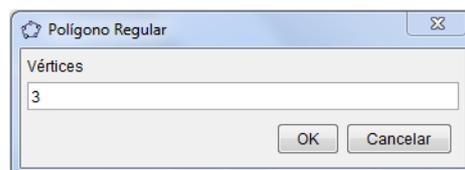
O que podemos concluir? _____.



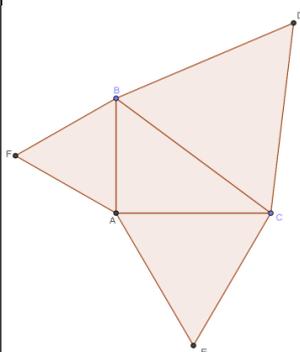
Observa-se que o “padrão pitagórico” das áreas funcionou para este triângulo retângulo (de lados 3, 4 e 5), com triângulos equiláteros construídos sobre os seus lados. Será que valerá também para triângulos equiláteros construídos sobre os lados de triângulo retângulo qualquer. É o que vamos verificar.

(2) Inicialmente vamos construir um triângulo retângulo como nos passos (1) e (2) da Atividade 1, ou abra o arquivo “*triângulo retângulo.ggb*” que você salvou anteriormente.

(3) Construir agora triângulos equiláteros sobre cada lado deste triângulo. Para isso, clique na **Caixa 5**, selecione a ferramenta “**Polígono Regular**” () . Clique inicialmente no ponto B e depois em C, e uma caixa como a do lado surgirá:



Digite 3 e dê OK, então um triângulo equilátero será construído sobre o lado BC. Repita este procedimento para os lados AB e CA. No final, você deverá ter uma figura similar a esta ao lado:



(4) Clique na **Caixa 8** e selecione a ferramenta “**Área**” (). Clique no interior do triângulo equilátero construído sobre o lado BC, deverá aparecer o valor da área desse triângulo. Repita este procedimento para os triângulos construídos sobre os lados AC e AB.

(5) Some as áreas dos triângulos construídos sobre os catetos AB e AC e a compare com a área do triângulo construído sobre a hipotenusa BC. O que se verifica?

_____.

(6) Na **Caixa 1**, selecione a ferramenta “**mover**” () e altere as posições dos pontos B e/ou C. Faça pelo menos 3 alterações e anote os valores obtidos na tabela a seguir:

	Área do triângulo construído sobre o cateto AB. (Área = A_1)	Área do triângulo construído sobre o cateto AC. (Área = A_2)	Soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos. ($A_1 + A_2$)	Área do triângulo construído sobre a hipotenusa BC (Área = A_3)
1)				
2)				
3)				

Agora, compare os valores das duas últimas colunas, ou seja, ($A_1 + A_2$) com A_3 . O que podemos concluir sobre esses dois valores? _____

CONCLUSÃO:

ATIVIDADES 3 e 4

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Construir polígonos regulares e semicírculos sobre os lados de um triângulo retângulo e obter extensões do Teorema de Pitágoras em termos de equivalência de áreas.

PÚBLICO ALVO: A partir do 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental.

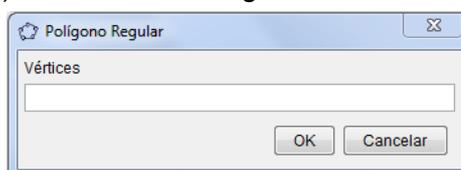
TEMPO PREVISTO: 1 hora aula.

ATIVIDADES DESENVOLVIDAS:

ATIVIDADE 3

Nesta atividade iremos construir outros polígonos regulares sobre os lados de um triângulo retângulo.

(1) Com o arquivo “*triângulo retângulo.ggb*” aberto, vamos construir um polígono regular de qualquer número de lados sobre os lados do triângulo retângulo (você deve construir o polígono com o mesmo número de vértices em todos os lados do triângulo). Para isso basta repetir os passos do item (3) da Atividade 2, digitando o número de lados que se deseja na caixa:



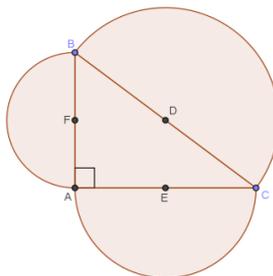
(2) Vamos calcular, usando o GeoGebra, a área de cada um desses polígonos e verificar se ocorre o padrão pitagórico para essas áreas, ou seja, se a soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos é igual à área do polígono construído sobre a hipotenusa.

CONCLUSÃO:

ATIVIDADE 4

Será que o padrão pitagórico das áreas é válido para figuras que não sejam polígonos? É o que vamos verificar nessa atividade.

(1) Vamos construir sobre os lados do triângulo retângulo semicírculos. Com o arquivo “*triângulo retângulo.ggb*” aberto, encontrar o ponto médio de cada um dos lados do triângulo, para isso, clique na **Caixa 2** e selecione a ferramenta “**Ponto Médio ou Centro**” (). Clique sobre cada lado do triângulo e o ponto médio será determinado sobre os lados. A seguir clique na **Caixa 6** e selecione “**Setor Circular dado o Centro e dois pontos**” (), clique no ponto médio da hipotenusa, e a seguir nos pontos C e B. Faça o mesmo para os catetos AB e AC. Você irá obter uma figura semelhante a seguinte:



(2) Calcular, usando o GeoGebra, a área de cada um desses semicírculos e verificar se ocorre o padrão pitagórico para essas áreas.

CONCLUSÃO:

4.2. PARTE II: ATIVIDADE PROPOSTA PARA ALUNOS DA 6ª SÉRIE/7ºANO, QUE AINDA NÃO TIVERAM CONTATO COM O TEOREMA DE PITÁGORAS

Nesta parte a atividade, inicialmente, é a mesma proposta para a 8ª série/9º ano. Porém, no final, analisamos a não veracidade da relação entre as áreas quando o triângulo não for retângulo (passos **(8)** a **(10)**, p. 97). Esta proposta surgiu após a aplicação das atividades da Parte I, e em função de estar ministrando aulas para a turma da 6ª série/7º ano.

ATIVIDADE 1

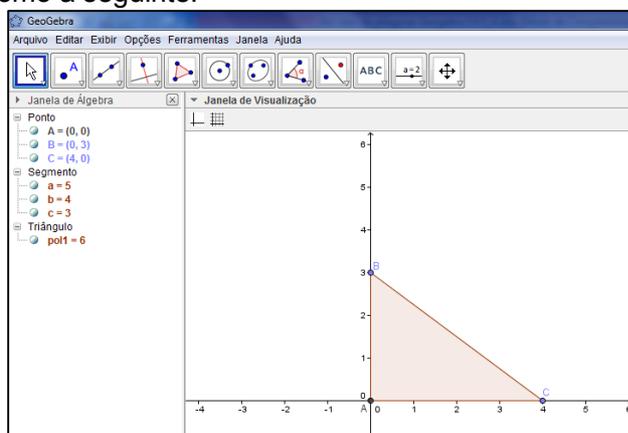
OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Construir quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo e verificar a validade do Teorema de Pitágoras em termos de equivalência de áreas.

PÚBLICO ALVO: 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental.

TEMPO PREVISTO: 2 horas aulas.

ATIVIDADE DESENVOLVIDA:

- (1)** Vamos construir um triângulo ABC que tenha um lado medindo **3** e outro medindo **4** unidades, usando *os pontos dos eixos cartesianos*, como na figura a seguir. Para isso, clique na **Caixa 1** e selecione a ferramenta “**Novo ponto**” () marque 3 pontos, com as seguintes coordenadas: A(0,0), B(0,3) e C(4,0). Dica de construção: para construir o ponto A fixo na origem passe o mouse ao redor da origem, quando aparecer a mensagem  de um clique e o ponto A será construído na origem do sistema cartesiano, não podendo ser manipulado. Da mesma forma, para construir o ponto B no eixo das ordenadas, clique ao redor do ponto (0, 3) e quando aparecer a mensagem  dê um clique, fixando o ponto no eixo das ordenadas. De modo análogo, ao posicionar o mouse ao redor de (4, 0), surgirá a mensagem , que fixará o ponto no eixo das abscissas. Dessa maneira, o ponto B se movimentará somente pelo eixo Y e o ponto C, pelo eixo X. Agora, clique na **Caixa 5** e selecione a ferramenta “**Polígono**” (), e vamos construir nosso triângulo, para isso, clique nos pontos A, B, C e novamente em A. Você deve obter uma figura como a seguinte:



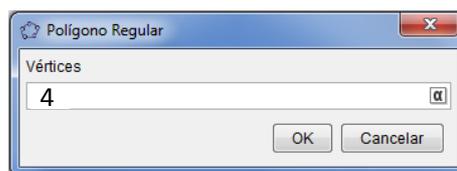
(2) Vamos “esconder” os eixos cartesianos, para isso clique em



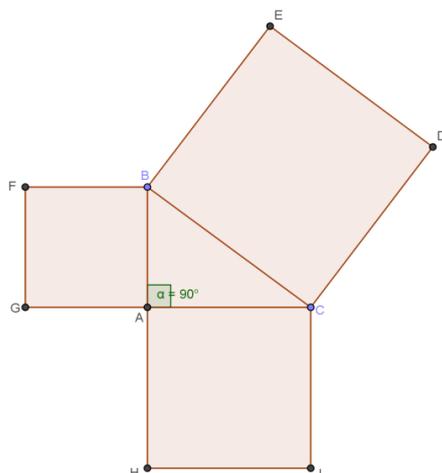
(3) Vamos medir o valor do ângulo $\widehat{B\hat{A}C}$, clique na **Caixa 8**, selecione “**Ângulo**” () e a seguir, nessa ordem, nos pontos C, A e B. O valor do ângulo deve aparecer junto ao ângulo \hat{A} . Agora responda:

- Quanto vale o ângulo $\widehat{C\hat{A}B}$? _____.
- Qual o nome que recebem os triângulos que possuem um ângulo reto? _____.
- Como se chama o lado (do triângulo) oposto ao ângulo reto? _____.
E qual o nome dos outros dois lados desse triângulo? _____.

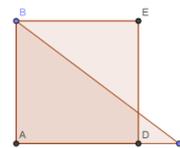
(4) Agora, vamos construir 3 quadrados, cada um tendo como base um lado do triângulo. Para isso clique, novamente na **Caixa 5**, selecione a ferramenta “**Polígono Regular**” () . Clique inicialmente no ponto B e depois em C, e uma caixa como a do lado surgirá:



Digite 4 e dê OK, então um quadrado deverá ser construído sobre o lado BC. Repita este procedimento para os lados AB e CA. No final, você deverá ter uma figura como a esta:



OBSERVAÇÃO: Se o quadrado ficar desenhado do outro lado, com pontos em comum com o interior do triângulo (como abaixo), basta desfazer (Ctrl + z) e refazer o procedimento, mas agora clicando primeiro no outro ponto do lado onde se pretende construir o quadrado (dica: seguir o sentido horário).



(5) Agora vamos conferir a medida dos lados. Para isso vá novamente à **Caixa 8** e selecione a ferramenta “**Distância, Comprimento ou Perímetro**” () e depois clicar sobre os lados AC, AB e BC.

(6) Agora responda:

- Quais são as medidas dos catetos do triângulo retângulo construído?
 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ e $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$. E a hipotenusa? $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Qual é a área do quadrado que tem o cateto **AB** como um lado? _____.
E a área do quadrado que tem o cateto **AC** como um lado? _____.
- Qual a área do quadrado que tem a hipotenusa **BC** como lado? _____.
- Para conferir se você acertou, clique na **Caixa 8** e selecione a ferramenta “**Área**” () . Clique no interior do quadrado construído sobre o lado AC, deverá aparecer o valor da área desse quadrado. Repita este procedimento para os quadrados construídos sobre os lados AC e AB.
- Agora some as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.
Quanto é? $3^2 + 4^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(f) Compare a soma das áreas dos quadrados que tem os catetos como lado, obtido em (e) com a área do quadrado que tem a hipotenusa como lado. Analisando as áreas desses quadrados, o que é possível observar?

_____.

- (7) Será que foi coincidência? Só dará certo para esse triângulo de lados 3, 4 e 5? Vamos alterar o valor do lado do triângulo retângulo e analisar o que acontece as suas áreas dos quadrados construídos sobre os lados. Para isso, selecione na **Caixa 1** a ferramenta “**mover**” () e altere as posições dos pontos B e/ou C. Observe que mesmo alterando as posições dos pontos B e C, o ângulo BÂC continua sendo de 90° e o triângulo ABC permanecerá sendo retângulo. Faça pelo menos 3 alterações e anote os valores obtidos na tabela abaixo:

	Área do quadrado construído sobre o cateto AB. (Área = \overline{AB}^2)	Área do quadrado construído sobre o cateto AC. (Área = \overline{AC}^2)	Soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. ($\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$)	Área do quadrado construído sobre a hipotenusa. (Área = \overline{BC}^2)
1)				
2)				
3)				

Agora, compare os valores das duas últimas colunas, ou seja, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ com \overline{BC}^2 . O que podemos concluir sobre esses dois valores? _____.

- (8) Será que isso acontece com triângulo qualquer que não seja retângulo? Vamos verificar. Clique na **Caixa 5** e selecione a ferramenta “**Polígono**” () e vamos construir um triângulo qualquer. Para isso, clique em 3 pontos quaisquer, e depois, novamente no primeiro ponto. Meça todos os ângulos usando a ferramenta “**Ângulo**” () na **Caixa 8**, e certifique-se que nenhum dos ângulos seja de 90°.

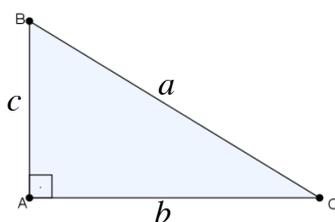
- (9) Construa quadrados em cada lado deste triângulo. Para tanto, repita os passos do item (4).
- (10) Calcule a área de cada um desses quadrados, repetindo os procedimentos feito em (6), item (d). Somar as áreas dos quadrados construídos sobre os dois lados menores e compare com a área do quadrado construído sobre o lado maior. Esses valores são iguais? _____.

- (11) Essa atividade nos permite tirar a seguinte conclusão:
Nos **TRIÂNGULOS RETÂNGULOS**, a **soma dos quadrados das medidas dos** _____ **é igual ao quadrado da medida da** _____!

Temos um teorema que nos diz que “**Para todo triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos**”. Esse é o famoso *Teorema de Pitágoras*, que você irá aprender no 8º ano!

Ainda, quando o triângulo não é retângulo isso não vale.

De forma resumida, se um triângulo retângulo tem hipotenusa com medida a e catetos medindo b e c , podemos escrever:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

4.3. RELATO DE EXPERIÊNCIA

As atividades propostas neste capítulo foram realizadas numa escola estadual, em São José do Rio Preto/SP, na qual sou professor efetivo desde 2012.

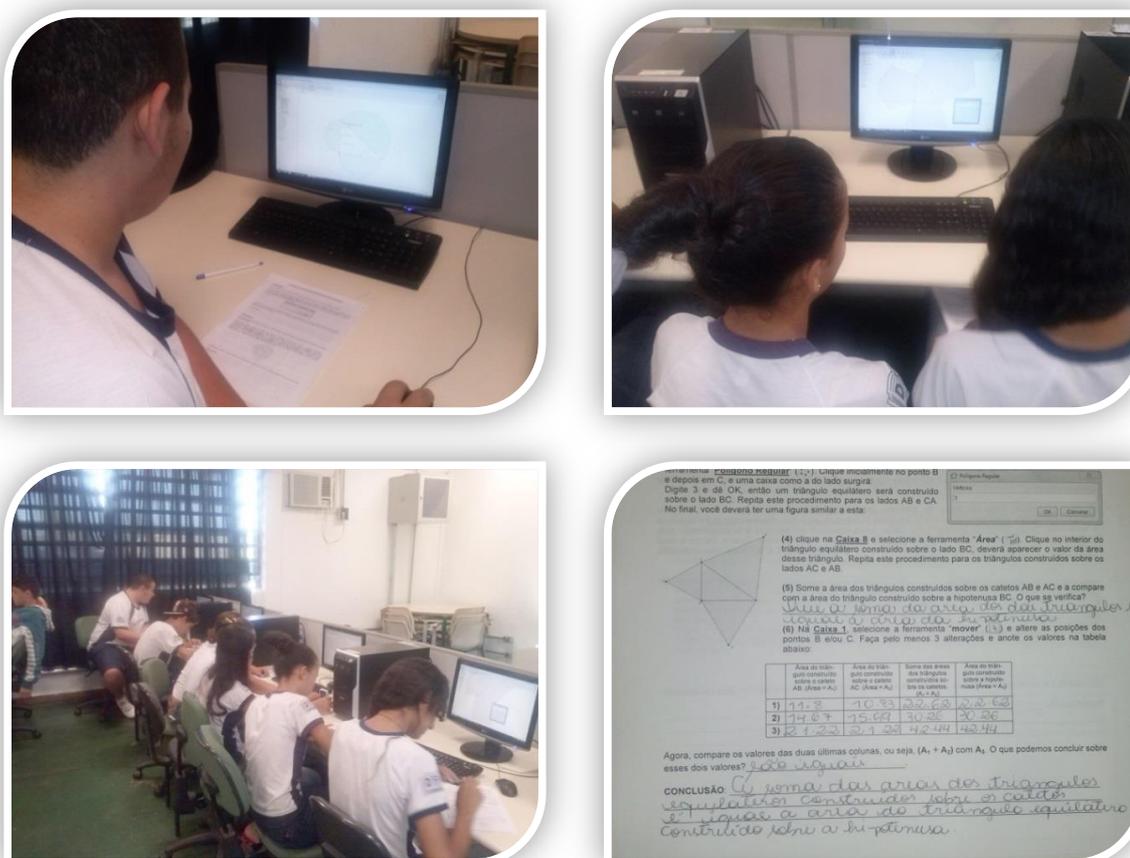
As atividades da Parte I foram aplicadas para uma turma de 1º ano do Ensino Médio, que já possuíam conhecimento prévio do Teorema de Pitágoras. A sequência desenvolvida na Atividade 1 possibilitou que os poucos fossem recordados alguns tópicos que os alunos não se lembravam mais. Como exemplo, no momento de construir um quadrado no lado do triângulo, ao clicar na ferramenta "Polígono Regular", alguns alunos, quando questionados, não souberam responder o que era um polígono regular. Depois de construídos os quadrados no caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5, a verificação da equivalência das áreas foi imediata para todos os alunos, mesmo sem o uso do software GeoGebra. Quando questionados sobre a validade para outros triângulos retângulos que não o particular que fora construído, houve um aceno em geral que também seria válido, o que foi facilmente verificado com a utilização do software GeoGebra.

Concluída a Atividade 1, foi questionado se esse padrão de equivalência de áreas seria válido para outros polígonos construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Nesse momento, houve até certo embate, alguns alunos chegaram a afirmar que a professora tinha dito que seria válido para outros polígonos e não só para quadrados. Com o desenvolvimento das atividades 2, 3 e 4, os alunos se convenceram também, que o padrão pitagórico das áreas é válido não só para quadrados, mas para figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo, mesmo que não seja um polígono.

De modo geral, os alunos da turma de 1º ano de Ensino Médio, se mostraram motivados e interessados na realização das atividades e acharam-na interessante e que o uso de tecnologias, como a informática, facilita e ajudam na compreensão de certos conteúdos de Matemática.

A seguir algumas fotos sobre o desenvolvimento das atividades realizadas com os alunos do 1º ano do Ensino.

Figura 104 – Fotos das atividades na sala de informática com os alunos do 1º ano do Ensino Médio.

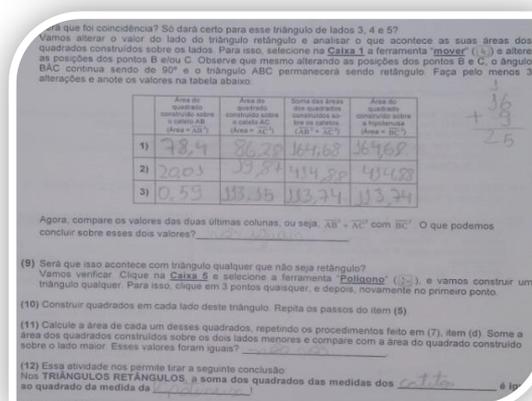
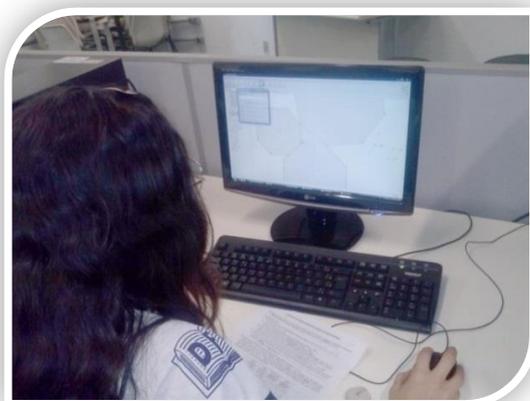


A Atividade 1 da Parte II foi proposta no intuito de saber como um aluno, que ainda não teve contato com o Teorema de Pitágoras reagiria, quando ele percebesse a equivalência de áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Neste sentido, a atividade pode ser realizada nas turmas de 7ª série/8º ano, antes de introduzir o Teorema de Pitágoras. No entanto essa atividade foi aplicada em uma turma de 6ª série/7º ano, pois durante o período letivo de 2013, não ministrei aulas para 7ª série/8º ano.

A sequência proposta na atividade, como já observado anteriormente, foi praticamente a mesma que na Atividade 1 da Parte I, porém com uma pequena inclusão. Foi proposto para eles construírem os quadrados sobre os lados de um triângulo qualquer, que não seja retângulo, e facilmente, constataram, com o uso do GeoGebra, que o padrão de equivalência das áreas não se repetia. Com isso reforçou-se o fato de que a equivalência entre as áreas dos quadrados só é válida se o triângulo for retângulo. Concluí a atividade, falando que esse padrão de equivalência das áreas sobre os quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo era um conteúdo que seria estudando no ano seguinte e que se chamava *Teorema de Pitágoras*. Para minha surpresa, um aluno, que nem costuma ser muito participativo no dia-a-dia escolar, questionou se esse padrão das áreas era válido somente se fizesse a construção de quadrados nos lados do triângulo e se por acaso ele fizesse outro polígono que não fosse um quadrado, o padrão de equivalência das áreas continuaria válido? No mesmo instante, elogiei a sua pergunta e a repassei para o restante da classe, que a princípio, ficou em dúvida. Foi solicitado, então, para que eles, ao invés de quadrados, agora construísem outros tipos de polígonos regulares sobre os lados do triângulo, calculassem as suas áreas e verificassem se o padrão de equivalência de áreas era válido, o que foi feito sem nenhuma dificuldade. Percebi que os alunos gostaram muito da atividade, foi muito proveitoso e que eles gostariam que atividades como essa fossem feitas com maior frequência. Particularmente, foi uma atividade muito prazerosa de ser realizada, ainda mais com o questionamento do aluno, da 6ª série/7º ano, sobre as extensões do Teorema de Pitágoras.

A seguir algumas fotos da atividade realizada com os alunos da 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental.

Figura 105 – Fotos da atividade na sala de informática com os alunos da 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental.



4.4. DIFICULDADES ENCONTRADAS

Apesar da maioria das escolas brasileiras possuírem laboratórios de informática, parece que esses não recebem a devida atenção por parte dos órgãos responsáveis quando o assunto é a manutenção, pois sempre escutamos professores reclamando que boa parte dos computadores de sua escola não funciona. O laboratório de informática da escola que apliquei as atividades possui 10 computadores, mas somente 5 se encontravam em pleno funcionamento e, naquele momento devido à problemas técnicos, se encontrava sem acesso à internet. Tive que fazer o download do software em outro local e levar num pendrive para fazer a instalação. Só uma observação: o não funcionamento da internet trouxe um benefício, pois os alunos ficaram mais concentrados na atividade e as chances de

se distraírem, principalmente com o uso das redes sociais e jogos on-line, ficaram reduzidas. Devido a esse número reduzido de computadores em funcionamento, foi impraticável realizar uma atividade com todos os alunos da classe, que normalmente, chega a 35. As atividades, tanto na Parte I como na Parte II foram realizadas com 12 alunos, os que estavam presentes no dia. O número elevado de faltas deve-se ao fato de que as atividades foram realizadas já no final do semestre e um dia após a aplicação da prova SARESP. Como as atividades foram aplicadas a um número reduzido de alunos, foi possível, um perfeito acompanhamento e suporte por parte do professor, algo que seria impossível, com uma turma de 35 alunos e 5 computadores funcionando. Uma alternativa, seria dividir a turma em duas e realizar as atividades separadamente. No Estado de São Paulo, isto seria possível com o apoio e suporte do professor auxiliar, que acompanha o professor titular em suas aulas por 1 dia na semana.

CAPÍTULO 5 – O TEOREMA DE PITÁGORAS EM ALGUNS DOCUMENTOS OFICIAIS DE ENSINO

Neste capítulo vamos analisar como alguns documentos oficiais de ensino, nacionais e especificamente do Estado de São Paulo, abordam o ensino do Teorema de Pitágoras, e a sua contribuição para o desenvolvimento de habilidades específicas nos estudantes do ensino básico brasileiro.

5.1. OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs) E O TEOREMA DE PITÁGORAS

5.1.1. UM POUCO SOBRE OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs) DO ENSINO FUNDAMENTAL

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foram criados em 1996 com a finalidade de nortear o trabalho das equipes escolares no Brasil, em particular os professores, no que tange aos aspectos da sua prática pedagógica. Seu objetivo é uniformizar o ensino no país, garantindo que crianças e jovens brasileiros tenham condições de acesso a uma educação de qualidade a fim de adquirirem conhecimentos para o exercício da cidadania. Devido à enorme extensão territorial e cultural do Brasil, os PCNs podem ser adequados segundo as especificidades de cada região, não se configurando assim, como um modelo curricular impositivo, dando autonomia às escolas e aos professores.

Em linhas gerais, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), se caracterizam por:

- apontar a necessidade de unir esforços entre as diferentes instâncias governamentais e da sociedade, para apoiar a escola na complexa tarefa educativa;
- mostrar a importância da participação da comunidade na escola, de forma que o conhecimento aprendido gere maior compreensão, integração e inserção no mundo; a prática escolar comprometida com a interdependência escola-sociedade tem como objetivo situar as pessoas como participantes da sociedade — cidadãos — desde o primeiro dia de sua escolaridade;
- contrapor-se à ideia de que é preciso estudar determinados assuntos porque um dia eles serão úteis; o sentido e o significado da aprendizagem

precisam estar evidenciados durante toda a escolaridade, de forma a estimular nos alunos o compromisso e a responsabilidade com a própria aprendizagem;

- explicitar a necessidade de que as crianças e os jovens deste país desenvolvam suas diferentes capacidades, enfatizando que a apropriação dos conhecimentos socialmente elaborados é base para a construção da cidadania e da sua identidade, e que todos são capazes de aprender e mostrar que a escola deve proporcionar ambientes de construção dos seus conhecimentos e de desenvolvimento de suas inteligências, com suas múltiplas competências;
- apontar a fundamental importância de que cada escola tenha clareza quanto ao seu projeto educativo, para que, de fato, possa se constituir em uma unidade com maior grau de autonomia e que todos que dela fazem parte possam estar comprometidos em atingir as metas a que se propuseram;
- ampliar a visão de conteúdo para além dos conceitos, inserindo procedimentos, atitudes e valores como conhecimentos tão relevantes quanto os conceitos tradicionalmente abordados;
- evidenciar a necessidade de tratar de temas sociais urgentes — chamados Temas Transversais — no âmbito das diferentes áreas curriculares e no convívio escolar;
- apontar a necessidade do desenvolvimento de trabalhos que contemplem o uso das tecnologias da comunicação e da informação, para que todos, alunos e professores, possam delas se apropriar e participar, bem como criticá-las e/ou delas usufruir;
- valorizar os trabalhos dos docentes como produtores, articuladores, planejadores das práticas educativas e como mediadores do conhecimento socialmente produzido; destacar a importância de que os docentes possam atuar com a diversidade existente entre os alunos e com seus conhecimentos prévios, como fonte de aprendizagem de convívio social e como meio para a aprendizagem de conteúdos específicos. (BRASIL, 1998a, p. 10–11).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como objetivos do ensino Fundamental que os alunos sejam capazes de:

- compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
- posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
- conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
- conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;
- perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
- desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;

- conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
- utilizar as diferentes linguagens — verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (BRASIL, 1998a, p. 55–56)

Para que tais objetivos sejam alcançados, os Parâmetros Curriculares Nacionais foram organizados em áreas de conhecimentos e temas transversais, sempre prevendo adequações, respeitando as particularidades sociais e financeiras de cada região. As áreas de conhecimento abordadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais são: Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências Naturais, Educação Física, Arte e Língua Estrangeira. Todas as áreas de conhecimento visam inserir o cidadão na sociedade de uma forma autônoma, construindo conhecimentos significativos para o desenvolvimento de suas capacidades.

5.1.2. OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL (5ª SÉRIE/6º ANO À 8ª SÉRIE/9º ANO) E O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática enfoca que a Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações simples do cotidiano como contar, calcular, leitura de gráficos e mapas e tantas outras. Para as atividades em sala de aula, enfatiza como ponto de partida a resolução de problemas em detrimento a procedimentos mecânicos de memorização de fórmulas e reprodução de procedimentos, destacando a importância do uso de recursos tecnológicos e jogos, que é uma forma interessante de propor e resolver problemas.

Para que o ensino de Matemática atinja seus objetivos, permitindo ao aluno que desenvolva suas capacidades cognitivas, ampliando os recursos necessários

para o exercício pleno da cidadania, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática a fim de cumprir com esses propósitos:

- incorporam o estudo dos recursos estatísticos constituindo um bloco de conteúdos denominado Tratamento de Informação;
- indicam aspectos novos no estudo dos números e operações, privilegiando o desenvolvimento do sentido numérico e a compreensão de diferentes significados das operações;
- propõem novo enfoque para o tratamento da álgebra, apresentando-a incorporada aos demais blocos de conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo;
- enfatizam a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e espacial;
- destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações;
- apresentam uma graduação dos conteúdos do segundo para o terceiro ciclo que contempla diferentes níveis de aprofundamento, evitando repetições;
- recomendam o uso de calculadoras nas aulas de Matemática. (BRASIL, 1998a, p. 60)

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, para se que tenha um ensino de Matemática que propicie ao aluno a construção da cidadania, o Ensino Fundamental tem como objetivos:

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos

consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998b, p. 47–48)

No Ensino Fundamental, os currículos de Matemática devem compreender o estudo dos números e das operações, que envolve os campos da Aritmética e da Álgebra, o estudo do espaço e das formas, abrangendo o campo da Geometria e o estudo das grandezas e das medidas, esta última, fazendo conexões com os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento. Como o cidadão é "bombardeado" diariamente com conteúdos relativos ao tratamento da informação, como gráficos, tabelas, ideias de probabilidades e combinatória, se faz necessário o acréscimo de tais conteúdos. Sintetizando, os conteúdos foram organizados em 4 blocos, com os seguintes temas:

- ✓ Números e Operações;
- ✓ Espaço e Forma;
- ✓ Grandezas e Medidas;
- ✓ Tratamento da Informação.

Com relação ao Teorema de Pitágoras, podemos dizer que o seu estudo está inserido no tema "Espaço e Forma". No entanto, é impossível não associá-lo, também, com os temas "Números e Operações" e "Grandezas e Medidas".

Começa a ser abordado no final do ciclo II do Ensino Fundamental, ou seja, a partir do 7ª série/8º ano e 8ª série/9º ano. Um dos objetivos do Ensino de Matemática, neste ciclo, no que tange à competência do desenvolvimento do pensamento geométrico, que seja feito por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a ampliar e aprofundar noções geométricas para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais. O aluno também deve ser levado a ampliar e construir as noções de medidas, pelo estudo de diferentes grandezas, efetuar cálculos, obter e utilizar fórmulas para o cálculo de área de figuras planas. O ideal é que as situações de aprendizagem a serem desenvolvidas neste ciclo, principalmente os conteúdos do bloco Espaço e Forma, na qual o Teorema de Pitágoras se enquadra, sejam feitas com construções, manuseio das figuras, que permitam ao aluno através de suas análises e observações, fazer conjecturas e identificar propriedades. Dessa forma, segundo os

PCN, conceitos e procedimentos visando o ensino do Teorema de Pitágoras, podem ser tratados em:

Números e Operações

- Constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do π , da $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc.).[...]

- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.[...]

- Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta.[...]

Espaço e Forma [...]

- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.

Grandezas e Medidas [...]

Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado (...) (BRASIL, 1998b, p. 87 – 90).

5.2. O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS DE ACORDO COM O CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

5.2.1. UM POUCO SOBRE O CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Em 2008, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo propôs reformulações no currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis do Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Esse currículo básico pretendeu dar apoio pedagógico aos trabalhos dos professores nas escolas estaduais, objetivando a melhoria na qualidade das aprendizagens dos alunos.

[...] a Secretaria pretende que esta iniciativa seja, mais do que uma nova declaração de intenções, o início de uma contínua produção e divulgação de subsídios que incidam diretamente na organização da escola como um todo e nas aulas. Ao iniciar este processo, a Secretaria procura também cumprir seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências, para que nossas escolas funcionem de fato como uma rede [...]. (SÃO PAULO, 2008, p.3).

Hoje, esta proposta é denominada “Currículo Oficial” e está estruturada em seis princípios, sendo cada um deles, de extrema importância para a implementação do Currículo. São eles:

- I. Uma escola que também aprende;
- II. O currículo como espaço de cultura;
- III. As competências como referência;
- IV. Prioridade para a competência da leitura e da escrita;
- V. Articulação das competências para aprender;
- VI. Articulação com o mundo do trabalho.

5.2.2. O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS E O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias no Ensino Fundamental (ciclo II) e Ensino Médio (SÃO PAULO, 2011), tem como uma de suas finalidades principais fazer uma aproximação entre a matemática que é ensinada nas escolas e o universo da cultura, valorizando contextualizações e enfrentamentos de situações-problema, para que, em parceria com a língua materna, o aluno tenha o desenvolvimento de sua percepção crítica sobre o mundo no qual está inserido.

Existe um acordo tácito com relação ao fato de que os adultos necessitam da Matemática em suas ações como consumidores, como cidadãos, como pessoas conscientes e autônomas. Todos lidam com números, medidas, formas, operações; todos leem e interpretam textos e gráficos, vivenciam relações de ordem e de equivalência; todos argumentam e tiram conclusões válidas a partir de proposições verdadeiras, fazem inferências plausíveis a partir de informações parciais ou incertas. Em outras palavras, a ninguém é permitido dispensar o conhecimento da Matemática sem abdicar de seu bem mais precioso: a consciência nas ações. (SÃO PAULO, 2011, p. 29).

A fim de desenvolver o elenco de competências básicas dos alunos ao longo de sua vida escolar, o Currículo do Estado de São Paulo de Matemática e suas Tecnologias é pautado em três eixos norteadores da ação educacional:

- **o eixo expressão/compreensão:** a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto, de uma tabela, de um gráfico, até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais etc.;
- **o eixo argumentação/decisão:** a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações, tendo em vista a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações efetivas;
- **o eixo contextualização/abstração:** a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola, de enraizamento na realidade imediata, nos universos de significações – sobretudo no mundo do trabalho –, e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de virtualidades, de potencialidades para se conceber o que ainda não existe. (SÃO PAULO, 2011, p. 31–32).

Com relação à organização dos conteúdos básicos, estes foram organizados, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, em três blocos temáticos: Números, Geometria e Relações, que natural e permanentemente, se relacionam entre si.

Sobre o Teorema de Pitágoras, objeto de nosso estudo, podemos dizer que ele está envolvido em todos os três grandes blocos, mas é natural que, especificamente, se enquadre dentro do bloco "Geometria".

Em "Geometria", nas séries/anos iniciais do ciclo II, deve-se preocupar em representar e classificar as formas planas e espaciais, principalmente com atividades concretas. Nos anos finais do ciclo II, deve-se dar ênfase à construção de certos raciocínios lógicos geométricos, de simples deduções de resultados anteriormente conhecidos. É importante salientar que cabe ao professor buscar um equilíbrio na distribuição dos conteúdos a fim de incorporar o ensino da Geometria, de forma espiralada, em todas as séries/anos da grade escolar, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias, os conteúdos associados a habilidades a serem desenvolvidas foram organizados em grades curriculares, distribuídas por bimestre, em cada série/ano, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. O que se objetiva com esta "lista" de conteúdos, a qual não é rígida e inflexível, é que suas abordagens estejam voltadas para a formação das competências pessoais, levando o aluno a um enriquecimento e valorização da cultura e do mundo do trabalho.

No Currículo do Estado de São Paulo, o estudo do Teorema de Pitágoras, consta, explicitamente no conteúdo do Ensino Fundamental, nas séries/anos finais do ciclo II, 7^a série/8^o ano.

Figura 106 – Conteúdos e Habilidades de Matemática referente ao 4^o bimestre da 7^a série/8^o ano do Ensino Fundamental.

7 ^a série/8 ^o ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
4 ^o Bimestre	<p>Geometria</p> <p>Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Tales • Teorema de Pitágoras • Área de polígonos • Volume do prisma 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos • Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares • Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes

Fonte: SÃO PAULO, 2011, p. 62.

Neste momento, o Teorema de Pitágoras é trabalhado por meio de várias situações-problema, com ideias que induzem o aluno a constatar a equivalência entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo. Isto acontece no 4^o bimestre, na *Situação de Aprendizagem 3*, e o Caderno do Professor, volume 4, da 7^a série/8^o ano assim descreve a sequência de atividades a serem desenvolvidas.

Na Situação de Aprendizagem 3, o teorema de Pitágoras é foco da aprendizagem. Nela, apresentamos uma sequência de atividades que explora, em uma perspectiva histórica, a análise de fatos relacionados a padrões numéricos e geométricos que, por sua vez, tornam-se argumentos na demonstração desse teorema. Esta Situação de Aprendizagem também apresenta um conjunto de exercícios exemplares que permite a identificação e a aplicação do Teorema de Pitágoras em situações contextualizadas. (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

O Teorema de Pitágoras também aparece explicitamente como uma habilidade a ser desenvolvida dentro do conteúdo Proporcionalidade na Geometria no 3º bimestre da 8ª série/9º ano.

Figura 107 – Conteúdos e Habilidades de Matemática referente ao 3º bimestre da 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental.

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Geometria/Relações</p> <p>Proporcionalidade na Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • O conceito de semelhança • Semelhança de triângulos • Razões trigonométricas 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes • Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos • Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos

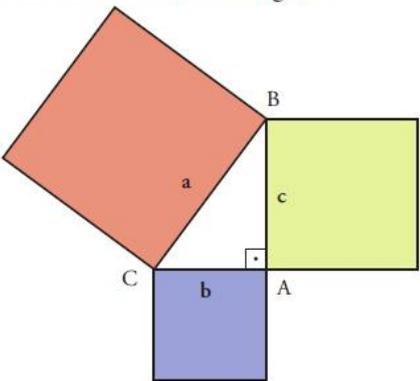
Fonte: SÃO PAULO, 2011, p. 64.

O Teorema de Pitágoras é retomado na 8ª série/9º ano em dois momentos: primeiramente no 3º bimestre, na *Situação de Aprendizagem 3*, a partir do aprofundamento do estudo da semelhança de triângulos, quando serão obtidos, as relações métricas, dentre elas o próprio Teorema de Pitágoras. Também é abordado no 4º bimestre, na *Situação de Aprendizagem 2*, onde a partir dos estudos relativos ao número π , cálculo de áreas de círculos e setores circulares. Aqui são exploradas as extensões do Teorema de Pitágoras do ponto de vista de equivalência de áreas com a construção de várias figuras circulares, construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

Veja, a seguir, como as atividades da *Situação de Aprendizagem 2*, sobre o Teorema de Pitágoras são propostas no Caderno do Aluno, Vol. 4, da 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental.

Figura 108 – Atividade 17, Caderno do Aluno – Vol. 4, 8ª série/9º ano.

17. Na 7ª série/8º ano, você estudou o teorema de Pitágoras.



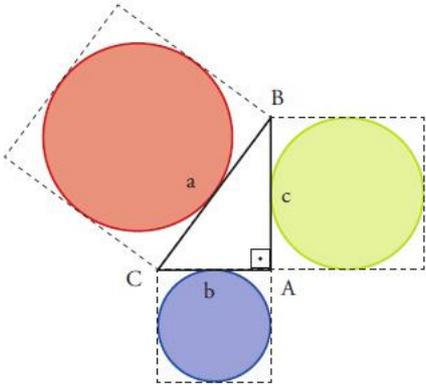
a) Escreva a expressão algébrica do teorema para o triângulo retângulo ABC.

b) Qual é a relação entre as áreas dos quadrados representados na figura.

Fonte: SÃO PAULO, 2010, p. 27.

Figura 109 – Atividade 18, Caderno do Aluno – Vol. 4, 8ª série/9º ano

18. Na figura a seguir, os círculos foram construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Verifique se, analogamente ao que ocorre no teorema de Pitágoras, a área do círculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos círculos sobre os catetos. (Medidas: $a = 5$ cm; $b = 3$ cm; $c = 4$ cm.)



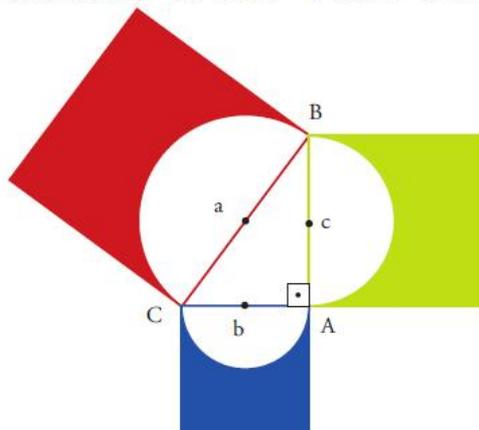
Resposta: _____

Fonte: SÃO PAULO, 2010, p. 28.

Figura 110 – Atividade 19, Caderno do Aluno – Vol. 4, 8ª série/9º ano.

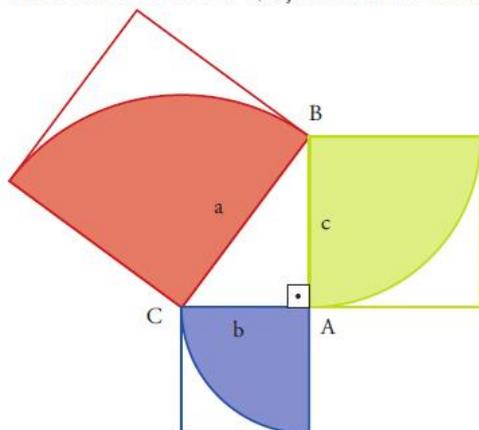
19. Verifique se essa relação entre as áreas vale também para as figuras a seguir:

- a) Região complementar do quadrado em relação ao semicírculo.
(Medidas: $a = 10$ cm; $b = 6$ cm; $c = 8$ cm.)



Resposta: _____

- b) Setor circular de 90° (faça o cálculo literal, com as letras **a**, **b** e **c**).



Resposta: _____

Fonte: SÃO PAULO, 2010, p. 28 e 29.

Como aplicação do Teorema de Pitágoras, o Caderno do Aluno – Vol. 4, 8ª série/9º ano, apresenta uma atividade com as lúnulas de Hipócrates. Primeiramente, se faz um contexto histórico sobre as lúnulas, a seguir, uma atividade de construção de lúnulas nos lados de um triângulo retângulo e por último, como desafio, uma atividade que relaciona as áreas das lúnulas com a área do triângulo retângulo. Veja a seguir as atividades propostas.

Figura 111 – Leitura e análise de Texto: as lúnulas de Hipócrates, Caderno do Aluno – Vol. 4, 8ª série/9º ano.



Leitura e Análise de Texto

As lúnulas de Hipócrates

Um dos desafios matemáticos que mais intrigaram os estudiosos desde a Antiguidade foi o problema da quadratura do círculo. Esse problema consistia em construir um quadrado de área igual à de um círculo com determinado diâmetro. Em termos práticos, o problema se reduz a encontrar uma relação entre o lado do quadrado e o diâmetro do círculo, o que envolverá o número π .

Como sabemos hoje, esse problema só pode ser resolvido por meio de aproximações, pois π é um número irracional e não pode ser representado por uma razão entre inteiros. Contudo, consta que o matemático grego Hipócrates de Chios (460 a.C.) conseguiu resolver um problema de quadratura de uma figura curvilínea. Ele mostrou que a soma das áreas de duas **lúnulas** era igual à área de um triângulo retângulo. Lúnulas são figuras curvilíneas delimitadas por dois arcos de circunferência.

Fonte: SÃO PAULO, 2010, p. 29.

Observação: Com relação ao último parágrafo do texto acima, vale observar que π além de ser irracional é um *número transcendente (não algébrico)*, ou seja, π não é raiz de nenhuma equação polinomial de coeficientes racionais. Geometricamente, números transcendentos não são construtíveis com régua e compasso, o que torna impossível a quadratura do círculo.

Figura 112 – Atividade 20, Caderno do Aluno – Vol. 4, 8ª série/9º ano.

20. Com base nas instruções a seguir, você vai construir duas **lúnulas**. Para isso, será necessário o uso de uma régua e de um compasso.

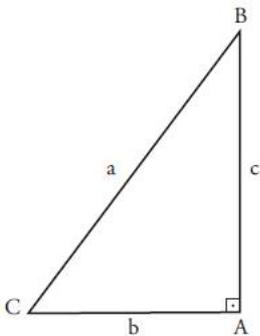
- **1ª etapa:** construa um triângulo retângulo ABC com lados medindo $a = 5$ cm, $b = 3$ cm e $c = 4$ cm. Nomear os vértices com as letras **A**, **B** e **C**. O vértice **A** deve ser oposto ao lado **a**; o vértice **B**, ao lado **b** e o vértice **C**, ao lado **c**.
- **2ª etapa:** determine os pontos médios (M_a , M_b e M_c) dos lados desse triângulo.
- **3ª etapa:** construa um semicírculo, voltado para fora do triângulo, com centro nos pontos médios dos catetos **b** e **c**.
- **4ª etapa:** construa um semicírculo com centro no ponto médio da hipotenusa, voltado para o interior do triângulo.
- **5ª etapa:** pinte levemente com um lápis a região formada entre os semicírculos dos catetos e o semicírculo da hipotenusa. Essas regiões são chamadas lúnulas.

Fonte: SÃO PAULO, 2010, p. 30.

Figura 113 – Atividade 21. Caderno do Aluno – Vol. 4, 8ª série/9º ano.

 **Desafio!**

21. Prove, algebricamente, que a soma das áreas das lúnulas é igual à do triângulo retângulo ABC representado a seguir.



Fonte: SÃO PAULO, 2010, p. 30.

Apesar de não aparecer claramente expresso, a aplicação do Teorema de Pitágoras é muito abrangente. Será útil e necessário para resolver diversas situações problemas no Ensino Médio, podendo ser identificado na trigonometria, na geometria analítica, no estudo da distância entre pontos, equações das cônicas, e na geometria espacial métrica.

5.3. O TEOREMA DE PITÁGORAS NAS MATRIZES DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DO SARESP

5.3.1. UM POUCO SOBRE O SARESP

O SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) é o sistema adotado, a partir de 1996, pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo para avaliar o desempenho dos alunos da Educação Básica ao término da 2ª série/3º ano, 4ª série/5º ano, 6ª série/7º ano e 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental e também 3º ano do Ensino Médio. O SARESP não visa somente avaliar o aluno, atribuindo a ele uma nota ou conceito, mas também

sistematizar dados e produzir informações sobre o desempenho e a evolução dos alunos.

A partir de 2007 houve muitas mudanças no SARESP, destacando entre elas a adequação das habilidades avaliadas às do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb)/Prova Brasil, tornando possível a comparação dos resultados obtidos pelos alunos paulistas nesses dois exames. Também foram introduzidas mudanças na avaliação de Matemática, com a inclusão de itens com respostas construídas pelos alunos, a fim de verificar as diferentes estruturas de seu pensamento lógico-matemático, detectando os procedimentos utilizados pelos mesmos no cumprimento das tarefas.

Aplicado anualmente, geralmente em novembro, o SARESP avalia todo o sistema de ensino paulista e serve também de subsídio para o governo monitorar as políticas públicas de educação. Tudo isso não é realizado somente com a aplicação de provas aos alunos, mas também por meio de questionários dirigidos aos alunos, pais, professores e toda equipe gestora de ensino. Participam alunos das redes públicas municipais e estaduais de ensino, sendo que a participação de alunos de escolas da rede privada também é possível, desde que a unidade de ensino faça a adesão ao programa e assuma as despesas decorrentes.

5.3.2. MATRIZES DE REFERÊNCIA PARA A AVALIAÇÃO

Uma das finalidades principais de uma matriz de referência é a sinalização das estruturas básicas de conhecimentos, pautados em competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, por meio de diferentes componentes curriculares, em todas as etapas de sua vida escolar,.

No campo da Educação, é fundamental definir uma matriz de referência em situações de aprendizagem e ensino. Por esse intermédio pode-se avaliar, mesmo que de modo indireto e inferencial, a ocorrência de efetiva aprendizagem. Pode-se, ainda, estabelecer correspondências entre uma situação (o ensino e a aprendizagem em sala de aula) e outra (o que é legítimo de ser avaliado em uma prova, por exemplo). Quanto ao instrumento de avaliação em si mesmo, pode-se comparar a matriz de referência proposta (em sua perspectiva geral) com as habilidades aferidas nesse instrumento específico. (São Paulo, 2009d, p. 10 – 11).

A matriz de referência do SARESP foi elaborada a partir da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, introduzida em 2008. Essa base curricular comum a todos os alunos da educação básica, contribuiu para que o SARESP pudesse contar com o apoio das Matrizes de Referências em seu sistema de avaliação, já que se pode esperar o que o aluno deveria ter aprendido.

A estrutura da Matriz de Referência do SARESP está baseada no trinômio - Habilidades - Competências Cognitivas - Conteúdos.

As Habilidades possibilitam a inferência do nível de domínio das competências cognitivas em que os alunos se encontram. Devem ser caracterizadas de modo mensurável e funcionam como indicadores das aprendizagens do que se espera do aluno no período avaliado. As suas indicações são úteis na elaboração dos itens da prova, na qual os elaboradores podem adequar os conteúdos de cada disciplina à competência que se avaliar em dada questão.

A Matriz de Referência do SARESP conceitua as Competências Cognitivas da seguinte maneira:

Competências cognitivas são modalidades estruturais da inteligência. Modalidades, pois expressam o que é necessário para compreender ou resolver um problema. Ou seja, valem por aquilo que integram, articulam ou configuram como resposta a uma pergunta. Ao mesmo tempo, são modalidades porque representam diferentes formas ou caminhos de se conhecer. Um mesmo problema pode ser resolvido de diversos modos. Há igualmente muitos caminhos para se validar ou justificar uma resposta ou argumento. (São Paulo, 2009d, p.14).

As Competências Cognitivas avaliadas no exame do SARESP foram organizadas em três grupos:

Grupo I: Competências para observar.

O Grupo I refere-se aos esquemas presentativos ou representativos, propostos por Jean Piaget. Graças a eles, os alunos podem ler a prova, em sua dupla condição: registrar perceptivamente o que está proposto nos textos, imagens, tabelas ou quadros e interpretar este registro como informação que torna possível assimilar a questão e decidir sobre a alternativa que julgam mais correta. (São Paulo, 2009d p.16).

Grupo II: Competências para realizar.

As habilidades relativas às competências do Grupo II caracterizam-se pelas capacidades de o aluno realizar os procedimentos necessários às suas tomadas de decisão em relação às questões ou tarefas propostas na prova. (São Paulo, 2009d, p.18).

Grupo III: Competências para compreender.

Estas competências implicam o uso de esquemas operatórios. As competências relativas a esse Grupo III devem ser analisadas em duas perspectivas. Primeiro, estão presentes e são mesmo essenciais às competências cognitivas ou às operações mentais destacadas nos Grupos I

e II. Porém, quando referidas a eles, têm um lugar de meio ou condição, mas não de fim. Ou seja, atuam de modo a possibilitar realizações via esquemas procedimentais (Grupo II) ou leituras via esquemas de representação (Grupo I). (São Paulo, 2009d, p.18).

Dentro de cada um desses grupos são descritas várias habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, sempre integrando e articulando os saberes.

Sobre os Conteúdos, estes devem privilegiar algumas competências e habilidades a eles associadas. Descreve as estruturas conceituais mais gerais de cada disciplina que se traduzem em aquisição de habilidades específicas pelos alunos. A Matriz de Referência do SARESP divide os conteúdos nos mesmos temas indicados nos PCN do Ensino Fundamental (Tema 1: Números e Operações, Tema 2: Espaço e Forma, Tema 3: Grandezas e Medidas e Tema 4: Tratamento da informação).

O Teorema de Pitágoras é explicitamente citado como um conteúdo do Tema 3 (Grandezas e Medidas) na 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental. As habilidades que os alunos devem adquirir sobre o Teorema estão inseridas nas competências do Grupo II (Competências para realizar). Eles devem resolver problemas em diferentes contextos, que envolvam as relações métricas dos triângulos retângulos, dentre elas, o Teorema de Pitágoras.

Figura 114 – Competências do sujeito referente à 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental.

COMPETÊNCIAS DO SUJEITO			
	GRUPO I	GRUPO II	GRUPO III
	Competências para observar	Competências para realizar	Competências para compreender
OBJETOS DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) Tema 3 – Grandezas e medidas (Tales, Pitágoras / Áreas, volumes, proporcionalidade / Semelhança / Trigonometria, corpos redondos)	H31 Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares.	H35 Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, em diferentes contextos.	
	H32 Calcular o volume de prismas em diferentes contextos.	H36 Resolver problemas em diferentes contextos, que envolvam as relações métricas dos triângulos retângulos. (Teorema de Pitágoras).	
	H33 Utilizar a razão pi no cálculo do perímetro e da área da circunferência.	H37 Resolver problemas em diferentes contextos, a partir da aplicação das razões trigonométricas dos ângulos agudos.	
	H34 Calcular a área e o volume de um cilindro.	H38 Resolver problemas que envolvam o cálculo de perímetro de figuras planas.	
		H39 Resolver problemas que envolvam o cálculo de área de figuras planas.	
		H40 Resolver problemas que envolvam noções de volume.	
		H41 Resolver problemas que utilizam relações entre diferentes unidades de medida.	

Fonte: São Paulo, 2009d, p. 79.

Na matriz de referência do 3º ano do Ensino Médio, Tema 3 (Grandezas e Medidas), Competências do Grupo III (Competências para compreender), especifica que os alunos devem resolver problemas que envolvam as relações métricas fundamentais em triângulos retângulos. Aqui, mesmo não fazendo nenhuma referência explícita ao Teorema de Pitágoras, fica claro o seu uso como sendo uma relação métrica do triângulo retângulo.

5.4. AS AVALIAÇÕES DO SAEB E O TEOREMA DE PITÁGORAS

5.4.1. UM POUCO SOBRE O SAEB

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é composto de avaliações em nível nacional para fins de diagnóstico, realizadas em larga escala, com o propósito de avaliar a qualidade do ensino brasileiro e ao mesmo tempo fornecer subsídios para ações voltadas para promover a redução de desigualdades, correção de distorções favorecendo assim um aumento na qualidade da educação no país.

São testes de língua portuguesa, com foco em leitura, e matemática, com foco na resolução de problemas. Os estudantes também fornecem informações pessoais respondendo a um questionário socioeconômico. Diretores e professores também respondem a questionários que visam coletar dados demográficos, perfis profissionais e sobre condições de trabalho.

Ao lado das taxas de aprovações, o desempenho dos alunos nessas avaliações serve de base para o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

O Saeb é composto por três avaliações externas em larga escala:

Figura 115 – Organograma do Saeb.



Fonte: Portal INEP¹

¹ Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/saeb/aneb-e-anresc>> Acesso em out. 2013.

O portal do INEP, disponível em <<http://portal.inep.gov.br/web/saeb/aneb-e-anresc>>, apresenta as características e objetivos de cada uma das avaliações do Saeb:

- **Avaliação Nacional da Educação Básica – Aneb:** abrange, de maneira amostral, alunos das redes públicas e privadas do país, em áreas urbanas e rurais, matriculados na 4ª série/5ºano e 8ªsérie/9ºano do Ensino Fundamental e no 3º ano do Ensino Médio, tendo como principal objetivo avaliar a qualidade, a equidade e a eficiência da educação brasileira. Apresenta os resultados do país como um todo, das regiões geográficas e das unidades da federação.
- **Avaliação Nacional do Rendimento Escolar - Anresc (também denominada "Prova Brasil"):** trata-se de uma avaliação censitária envolvendo os alunos da 4ª série/5ºano e 8ªsérie/9ºano do Ensino Fundamental das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federal, com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino ministrado nas escolas públicas. Participam desta avaliação as escolas que possuem, no mínimo, 20 alunos matriculados nas séries/anos avaliados, sendo os resultados disponibilizados por escola e por ente federativo.
- **A Avaliação Nacional da Alfabetização – ANA:** avaliação censitária envolvendo os alunos do 3º ano do Ensino Fundamental das escolas públicas, com o objetivo principal de avaliar os níveis de alfabetização e letramento em Língua Portuguesa, alfabetização Matemática e condições de oferta do Ciclo de Alfabetização das redes públicas. A ANA foi incorporada ao Saeb pela Portaria nº 482, de 7 de junho de 2013.

A Aneb e a Anresc / Prova Brasil são aplicadas a cada dois anos, enquanto a ANA é de realização anual.

5.4.2. A MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA DO SAEB E O TEOREMA DE PITÁGORAS

As matrizes de matemática do Saeb estão estruturadas por anos e séries, com o foco na resolução de problemas. As habilidades que deverão ser desenvolvidas em cada fase do ensino são definidas por descritores, os quais contemplam aqueles mais relevantes para obter a mensuração desejada na prova. Esses descritores, num total de 37 (nomeados de D1 a D37) para a 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental e 35 (D1 a D35) para o 3º ano do Ensino Médio, são agrupados em 4 temas, que relacionam um conjunto de objetivos educacionais:

- ✓ Tema I. Espaço e Forma
- ✓ Tema II. Grandezas e Medidas
- ✓ Tema III. Números e Operações/Álgebra e Funções
- ✓ Tema IV. Tratamento da Informação

O Teorema de Pitágoras não aparece descrito explicitamente em nenhum dos descritores da Matriz de Referência de Matemática: Temas e seus Descritores – 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental, mas as suas aplicações ficam claramente implícitas no descritor D10 - *Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos*, inserido no Tema I - Espaço e Forma. É evidente que, para resolver as situações problema usando a relação de Pitágoras, serão necessários a utilização de outros descritores, principalmente os relacionados com o Tema III - Números e Operações / Álgebra e Funções.

Na Matriz de Referência de Matemática: Temas e seus Descritores – 3º ano do Ensino Médio, aplicações do Teorema de Pitágoras aparecem implicitamente no descritor D2 - *Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais*, também inserido no Tema I - Espaço e Forma.

5.5. O TEOREMA DE PITÁGORAS NA MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM

5.5.1. UM POUCO SOBRE O ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o domínio de competências e habilidades básicas adquiridas pelos alunos concluintes ou que já concluíram o Ensino Médio. Em 2009, foi apresentada uma proposta de reformulação do ENEM. A intenção do Ministério da Educação foi democratizar as oportunidades de acesso às vagas das universidades federais com uma seleção unificada. As universidades federais tem autonomia na forma de como adotar as notas do ENEM em seu processo seletivo.

Dependendo de sua nota no ENEM, o estudante pode se inscrever numa série de programas do governo federal, dentre eles:

- **Sistema de Seleção Unificada (Sisu):** Sistema criado com a finalidade de selecionar alunos para as instituições públicas de ensino superior de diversas instituições brasileiras em todos os estados.

- **Programa Universidade Para Todos (Prouni):** é outro programa de acesso ao ensino superior no qual o governo federal concede bolsas de estudos parciais, de 50% e até integrais, para estudantes de baixa renda.
- **Fundo de Financiamento Estudantil (Fies):** o programa concede bolsas restituíveis a estudantes que não tem condições de pagar as mensalidades do curso de graduação. Funciona como um empréstimo, depois de concluir o curso, ele deve pagar a dívida ao governo, com juros de 3,4% ao ano.
- **Ciência sem Fronteiras:** O programa oferece bolsas de estudos que inclui todos os gastos para estudantes das áreas de engenharia, tecnologia, biologia e ambiental terem a possibilidade de realizar parte de sua graduação em instituições estrangeiras de excelência.
- **Certificado de Conclusão do Ensino Médio:** a partir de 2008, o ENEM substituiu o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja) que era o exame responsável por avaliar adultos que pretendiam conseguir o certificado de conclusão do Ensino Médio. É necessário obter, no mínimo, 450 pontos nas provas objetivas e 500 na redação para receber o diploma através do exame.

5.5.2. A MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM

Um dos objetivos do novo exame foi induzir a reestruturação dos currículos do Ensino Médio e essa nova prova foi organizada a partir de um conjunto de conteúdos associados a uma matriz de habilidades que deverão ser desenvolvidos pelos alunos ao fim da escolaridade básica.

Na Matriz de Referência para o Enem, implantada a partir de 2009, estão descritos cinco eixos cognitivos (Dominar linguagens; Compreender fenômenos; Enfrentar situações-problema; Construir argumentação e Elaborar propostas) que são comuns a todas as quatro grandes áreas do conhecimento (Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias). Para cada área do

conhecimento são designadas várias competências a serem desenvolvidas por meio de construção de habilidades, num total de 30, indicadas por H1 a H30.

Por fim, em seu anexo, a Matriz de Referência relaciona os “Objetos de Conhecimento”, que nada mais é do que a relação dos conteúdos associados a cada grande área do conhecimento. A Matriz de Matemática e suas Tecnologias divide os conteúdos em cinco blocos, da seguinte forma:

Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º grau, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações. (MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM, 2009, p.18).

O Teorema de Pitágoras não é citado, explicitamente, nenhuma vez na Matriz de Matemática e suas Tecnologias, mas as suas aplicações ficam claramente subentendidas nas habilidades a serem desenvolvidas nas “Competências de área 2 e 3”, descritas abaixo:

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas. (MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM, 2009, p.5).

Também fica subentendido o uso do Teorema de Pitágoras quando a Matriz de Referência relaciona, os “Objetos de Conhecimento” e no bloco “Conhecimentos geométricos” destaca o conteúdo “relações métricas nos triângulos”, que de forma assim geral, enquadra as aplicações do Teorema, sendo este, uma relação de um tipo particular de triângulo, o retângulo.

Por se tratar de um teorema que possui inúmeras aplicações nas diversas áreas de atuação do homem, o Teorema de Pitágoras é cobrado constantemente nas questões das provas do ENEM.

APÊNDICE I

Neste apêndice vamos demonstrar as várias extensões retilíneas apresentadas na Seção 3.2. do Capítulo 3.

Em todas as situações, vamos considerar um triângulo retângulo com hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c e, portanto, válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$. E a poderá indicar tanto a medida da hipotenusa, como a hipotenusa (lado). O mesmo ocorre com os catetos b e c . Consideraremos também $\mathcal{A}_{(S_a)}$, $\mathcal{A}_{(S_b)}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)}$ como sendo as áreas das regiões construídas sobre a hipotenusa a e catetos b e c , respectivamente.

Proposição: Em todas as situações abaixo, as regiões (figuras coloridas) construídas sobre os lados do triângulo retângulo preservam o padrão pitagórico das áreas, ou seja, a área da região construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das regiões construídas sobre os catetos.

As regiões ou figuras coloridas são caracterizadas do seguinte modo:

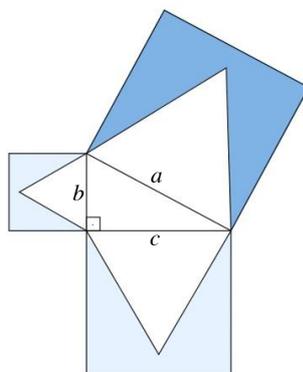
- 1) Complementares dos triângulos equiláteros construídos no interior dos quadrados e tendo como base os lados do triângulo retângulo.
- 2) Quadrados inscritos nos pontos médios dos quadrados dos lados do triângulo retângulo.
- 3) Triângulos equiláteros inscritos nos pontos médios dos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 4) Quadriláteros não-convexos cujos vértices são os extremos de um lado do triângulo retângulo, o ponto médio do lado oposto e o centro do quadrado tem como base o lado do triângulo retângulo.
- 5) Quadrados cujos centros coincidem com os centros dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo e suas diagonais têm como medida $\frac{1}{2}$ da diagonal do quadrado básico.
- 6) Quadrados cujos centros coincidem com os quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo e suas diagonais têm como medida $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado básico.

- 7) Quadrados inscritos nos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo em pontos que os dividem na mesma razão k .
- 8) Triângulos inscritos nos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo em pontos que os dividem na mesma razão k .

Demonstração:

- 1) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 116 – Complementar aos triângulos equiláteros.



A área da região colorida construída sobre a hipotenusa é dada por $\mathcal{A}_{(S_a)} = a^2 - \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{4}$.

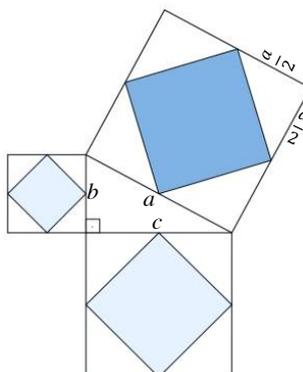
Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{4}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{4}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{4} + \frac{c^2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{4} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (4 - \sqrt{3})}{4} = \frac{a^2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{4} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

Note que isto pode também ser visto diretamente, usando a Proposição 3.2 e o Teorema de Pitágoras.

- 2) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 117 – Quadrados inscritos nos pontos médios.



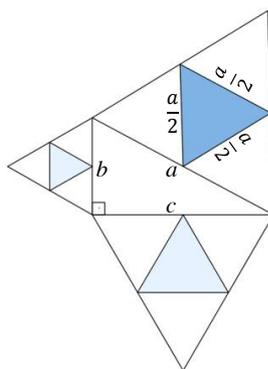
Observe que a região construída sobre a hipotenusa é um quadrado cujos lados medem $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ e sua área é dada por $\mathcal{A}_{(S_a)} = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2}{2}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2}{2}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{b^2+c^2}{2} = \frac{a^2}{2} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

3) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 118 – Triângulos equiláteros inscritos nos pontos médios.



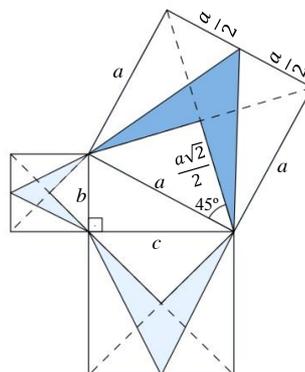
O triângulo inscrito no ponto médio do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa tem lado $\frac{a}{2}$ e a sua área é dada por $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{16}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{16}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{16}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{16} + \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{16} = \frac{(b^2+c^2) \cdot \sqrt{3}}{16} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{16} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

4) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 119 – Quadriláteros não-convexos inscritos nos quadrados.



Observe na Figura 119 que a área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas do quadrado de lado a e pela soma das áreas de dois triângulos retângulos de lados a e $\frac{a}{2}$ e do triângulo de lados a e $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ que formam ângulo de 45° .

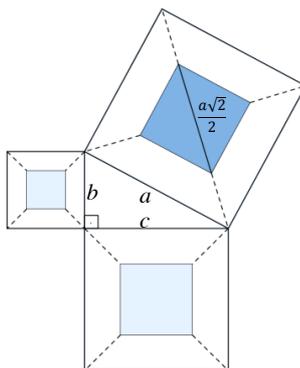
$$\text{Então, } \mathcal{A}_{(S_a)} = a^2 - \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{a} \cdot \text{sen } 45^\circ \right) = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2}{4} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2}{4}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{b^2+c^2}{4} = \frac{a^2}{4} = \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

5) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 120 – Quadrados com vértices nas diagonais.



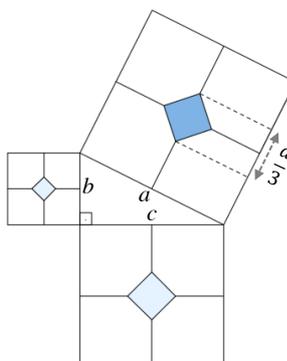
O quadrado com centro no quadrado construído sobre a hipotenusa tem diagonal $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Então a sua área é dada por $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$.

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2}{4} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2}{4}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{b^2+c^2}{4} = \frac{a^2}{4} = \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

6) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 121 – Quadrados com diagonais iguais a $\frac{1}{3}$ do lado.



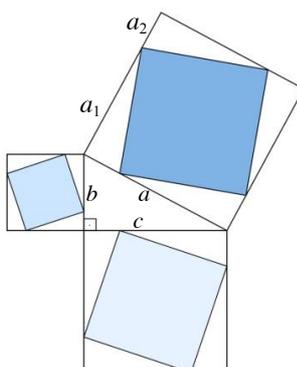
O quadrado com centro no quadrado construído sobre a hipotenusa e diagonal de medida $\frac{a}{3}$ tem sua área dada por $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{18}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2}{18}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2}{18}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2}{18} + \frac{c^2}{18} = \frac{b^2+c^2}{18} = \frac{a^2}{18} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

7) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 122 – Quadrados dividindo o lado na razão k .



Considere o quadrado inscrito no quadrado construído sobre a hipotenusa cujos vértices dividem o lado desse quadrado na razão k . Sejam a_1 e a_2 as medidas dos segmentos nos quais ficaram divididos os lados do quadrado. Então $\frac{a_1}{a_2} = k \Rightarrow a_1 = k \cdot a_2$ e como $a_1 + a_2 = a$, temos $k \cdot a_2 + a_2 = a \Rightarrow a_2 = \frac{a}{k+1}$.

Observe, na Figura 122, que a área desse quadrado é dada pela diferença entre as áreas do quadrado de lado a e dos 4 triângulos retângulos de catetos a_1 e

a_2 . Então $\mathcal{A}_{(S_a)} = a^2 - 4 \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{2} = a^2 - 2 \cdot k \cdot a_2 \cdot a_2 = a^2 - 2 \cdot k \cdot a_2^2$. Substituindo $a_2 = \frac{a}{k+1}$,

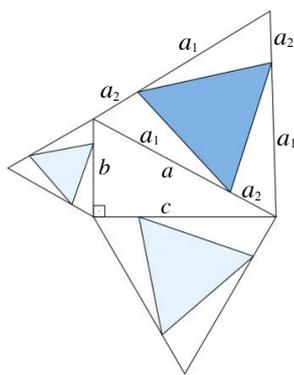
temos $\mathcal{A}_{(S_a)} = a^2 - 2 \cdot k \cdot \left(\frac{a}{k+1}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot (k+1)^2 - 2ka^2}{(k+1)^2} = \frac{a^2 \cdot [(k+1)^2 - 2k]}{(k+1)^2} = \frac{a^2 \cdot (k^2 + 1)}{(k+1)^2}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (k^2 + 1)}{(k+1)^2}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (k^2 + 1)}{(k+1)^2}$.

Portanto, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (k^2 + 1)}{(k+1)^2} + \frac{c^2 \cdot (k^2 + 1)}{(k+1)^2} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (k^2 + 1)}{(k+1)^2} = \frac{a^2 \cdot (k^2 + 1)}{(k+1)^2} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

8) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 123 – Triângulos equiláteros dividindo o lado na razão k .



Considere o triângulo inscrito no triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa cujos vértices dividem o lado desse triângulo na razão k . Sejam a_1 e a_2 as medidas dos segmentos nos quais ficaram divididos os lados do triângulo equilátero. Da mesma forma que no caso anterior, temos $\frac{a_1}{a_2} = k$, $a_1 + a_2 = a$, resultando $a_2 = \frac{a}{k+1}$.

Observe, na Figura 123, que a área desse triângulo é dada pela diferença entre as áreas do triângulo equilátero de lado a e dos 3 triângulos de lados a_1 e a_2 que formando entre si ângulo de 60° .

Logo, $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \text{sen } 60^\circ$. Substituindo $a_1 = k \cdot a_2$ e

$a_2 = \frac{a}{k+1}$, obtemos $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{a^2 \sqrt{3} \cdot (k^2 - k + 1)}{4 \cdot (k+1)^2}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \sqrt{3} \cdot (k^2 - k + 1)}{4 \cdot (k+1)^2}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \sqrt{3} \cdot (k^2 - k + 1)}{4 \cdot (k+1)^2}$.

Portanto, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \sqrt{3} \cdot (k^2 - k + 1)}{4 \cdot (k+1)^2} + \frac{c^2 \sqrt{3} \cdot (k^2 - k + 1)}{4 \cdot (k+1)^2} = \frac{(b^2 + c^2) \sqrt{3} \cdot (k^2 - k + 1)}{4 \cdot (k+1)^2} =$
 $= \frac{a^2 \sqrt{3} \cdot (k^2 - k + 1)}{4 \cdot (k+1)^2} = \mathcal{A}_{(S_a)}$ ■

APÊNDICE II

Neste apêndice vamos demonstrar as várias extensões do Teorema de Pitágoras para as não retilíneas (figuras formadas por arcos de circunferências e segmentos de reta), apresentadas na Seção 3.3.6. do Capítulo 3.

Em todas as situações, vamos considerar um triângulo retângulo com hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c e, portanto, válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Consideraremos também $\mathcal{A}_{(S_a)}$, $\mathcal{A}_{(S_b)}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)}$ como sendo as áreas das figuras construídas sobre a hipotenusa a e catetos b e c , respectivamente. As provas, em geral, seguem o mesmo procedimento e consistem em um bom exercício para o cálculo de áreas de figuras. Observamos entretanto, que algumas poderiam ser obtidas mais diretamente, por usar resultados já provados.

Proposição: Em todos os casos abaixo, as regiões (figuras coloridas) construídas sobre os lados do triângulo retângulo preservam o padrão pitagórico das áreas, ou seja, a área da figura colorida construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras coloridas construídas sobre os catetos.

As regiões ou figuras coloridas são caracterizadas do seguinte modo:

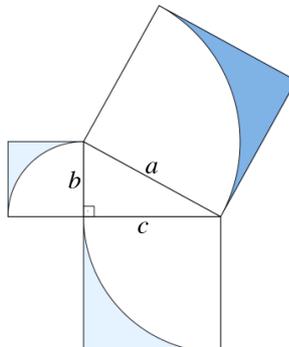
- 1) Exteriores aos quadrantes de círculos e interiores aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 2) Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 3) Exteriores aos arcos ogivais e interiores aos quadrantes de círculo que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 4) Exteriores aos arcos ogivais e interiores aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 5) Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrantes que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 6) Interiores aos quadrados e exteriores aos círculos inscritos que tem como base os lados do triângulo retângulo.

- 7) Exteriores aos triângulos equiláteros e interiores aos arcos ogivais que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 8) Exteriores aos semicírculos e interiores aos arcos ogivais que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 9) Círculos inscritos em triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 10) Interiores aos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo e exteriores aos círculos inscritos nestes triângulos.
- 11) Exteriores aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo e interiores aos círculos circunscritos nestes quadrados, exceto as regiões comuns ao triângulo retângulo.
- 12) Exteriores aos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo e interiores aos círculos circunscritos nestes triângulos, exceto as regiões comuns ao triângulo retângulo.
- 13) Coroas circulares dos círculos inscritos e circunscritos aos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo, exceto as regiões comuns ao triângulo retângulo.
- 14) Coroas circulares dos círculos inscrito e circunscrito aos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo, exceto as regiões comuns ao triângulo retângulo.
- 15) Interior a um semicírculo e exterior ao outro cujos centros estão nos pontos médios de dois lados consecutivos dos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 16) Intersecção de setores angulares com centros em vértices opostos dos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.
- 17) Intersecção de semicírculos de centros nos pontos médios dos lados dos quadrados que tem como base os lados do triângulo retângulo.

Demonstração:

1) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 124 – Exteriores aos quadrantes de círculos.



A área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas de um quadrado de lado a e um setor circular de 90° e raio a . Assim

$$\mathcal{A}_{(S_a)} = a^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{a^2 \cdot (4 - \pi)}{4}.$$

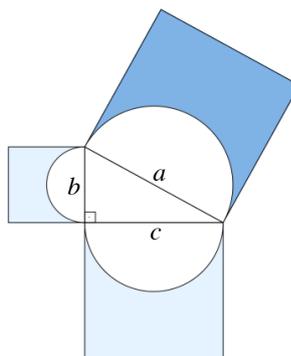
$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (4 - \pi)}{4} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (4 - \pi)}{4}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (4 - \pi)}{4} + \frac{c^2 \cdot (4 - \pi)}{4} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (4 - \pi)}{4} = \frac{a^2 \cdot (4 - \pi)}{4} = \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

Observemos que isto pode ser obtido diretamente da Proposição 3.14 e do Teorema de Pitágoras.

2) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 125 – Exteriores aos semicírculos.



A área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas de um quadrado de lado a e um semicírculo de raio $\frac{a}{2}$. Então, $\mathcal{A}_{(S_a)} =$

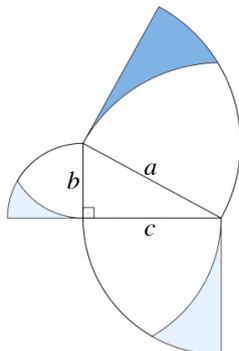
$$= a^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot (8 - \pi)}{8}.$$

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (8 - \pi)}{8}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (8 - \pi)}{8}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (8 - \pi)}{8} + \frac{c^2 \cdot (8 - \pi)}{8} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (8 - \pi)}{8} = \frac{a^2 \cdot (8 - \pi)}{8} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

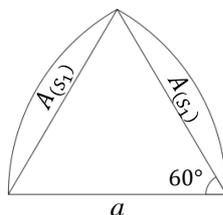
3) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 126 – Exteriores aos arcos ogivais e interiores aos quadrantes.



A área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre um setor circular de 90° de lado a e um arco ogival de base a , ou seja, $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2 - \mathcal{A}_a$, onde \mathcal{A}_a é a área do arco ogival construído sobre a hipotenusa.

Figura 127 – Elementos do arco ogival.



Observe na Figura 127, acima, que a área \mathcal{A}_a do arco ogival é dada pela soma das áreas de dois segmentos circulares de 60° e raio a e um triângulo equilátero de lado a . Seja $A_{(S_1)}$ a área de cada um desses segmentos circulares. Observe também que $A_{(S_1)}$ é dada pela diferença entre as áreas de um setor circular de 60° e raio a e um triângulo equilátero de lado a , isto é, $A_{(S_1)} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.

Logo, $\mathcal{A}_a = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{12} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.

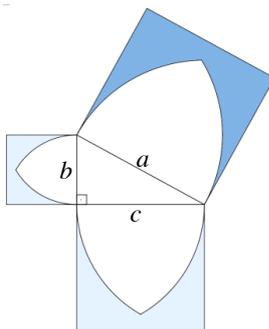
Então, $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{a^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12}$.

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12}.$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} &= \frac{b^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} + \frac{c^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} = \frac{a^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} = \\ &= \mathcal{A}_{(S_a)}. \end{aligned}$$

4) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 128 – Exteriores aos arcos ogivais e interiores aos quadrados.



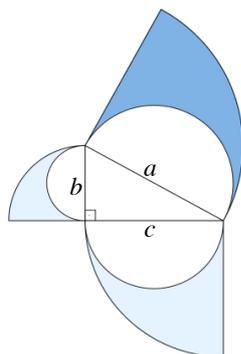
A área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas do quadrado de lado a e do arco ogival de base a . Já calculamos em 3) a área do arco ogival, assim, $\mathcal{A}_{(S_a)} = a^2 - \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{a^2 \cdot (12 - 4\pi + 3\sqrt{3})}{12}$.

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (12 - 4\pi + 3\sqrt{3})}{12} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (12 - 4\pi + 3\sqrt{3})}{12}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} &= \frac{b^2 \cdot (12 - 4\pi + 3\sqrt{3})}{12} + \frac{c^2 \cdot (12 - 4\pi + 3\sqrt{3})}{12} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (12 - 4\pi + 3\sqrt{3})}{12} = \\ &= \frac{a^2 \cdot (12 - 4\pi + 3\sqrt{3})}{12} = \mathcal{A}_{(S_a)}. \end{aligned}$$

5) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 129 – Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrantes.



A área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas do setor angular de 90° de raio a e do semicírculo de raio $\frac{a}{2}$. Então,

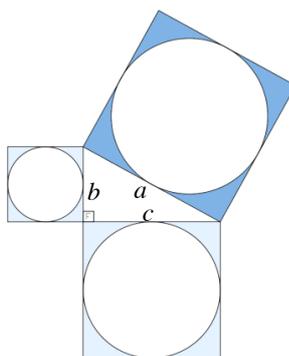
$$\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot a^2}{8}.$$

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{\pi \cdot b^2}{8}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{\pi \cdot c^2}{8}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{\pi \cdot b^2}{8} + \frac{\pi \cdot c^2}{8} = \frac{\pi \cdot (b^2 + c^2)}{8} = \frac{\pi \cdot a^2}{8} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

6) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 130 – Exteriores aos círculos e interiores aos quadrados.



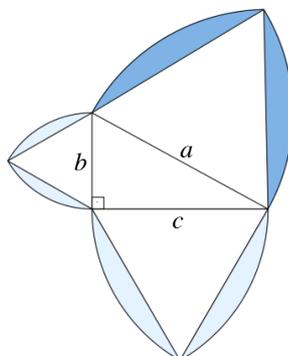
A área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas do quadrado de lado a e do círculo de raio $\frac{a}{2}$. Então, $\mathcal{A}_{(S_a)} = a^2 - \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot (4 - \pi)}{4}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (4 - \pi)}{4}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (4 - \pi)}{4}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (4 - \pi)}{4} + \frac{c^2 \cdot (4 - \pi)}{4} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (4 - \pi)}{4} = \frac{a^2 \cdot (4 - \pi)}{4} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

7) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 131 – Exteriores aos triângulos e interiores aos arcos ogivais.



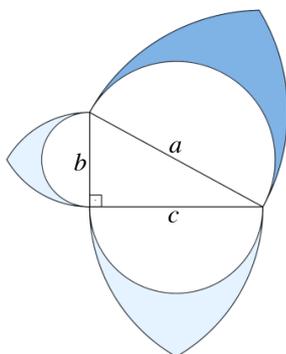
Observe que a área da região construída sobre a hipotenusa é dada por $\mathcal{A}_{(S_a)} = 2 \cdot A_{(S_1)}$, onde $A_{(S_1)} = \frac{a^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$ é a área de cada um dos segmentos circulares, como já foi visto em 3). Logo, $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{a^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$.

Portanto, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{6} + \frac{c^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{6} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{6} = \frac{a^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{6} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

8) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 132 – Exteriores aos semicírculos e interiores aos arcos ogivais.



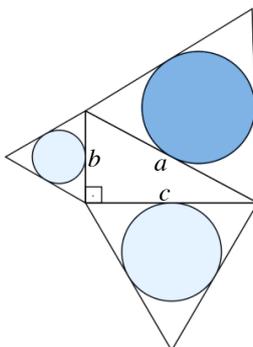
A área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas do arco ogival de base a e do semicírculo de raio $\frac{a}{2}$. Então, $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{12} - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot (5\pi - 6\sqrt{3})}{24}$.

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (5\pi - 6\sqrt{3})}{24} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (5\pi - 6\sqrt{3})}{24}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} &= \frac{b^2 \cdot (5\pi - 6\sqrt{3})}{24} + \frac{c^2 \cdot (5\pi - 6\sqrt{3})}{24} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (5\pi - 6\sqrt{3})}{24} = \frac{a^2 \cdot (5\pi - 6\sqrt{3})}{24} = \\ &= \mathcal{A}_{(S_a)}. \end{aligned}$$

9) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 133 – Círculos inscritos aos triângulos equiláteros.



O centro do círculo inscrito no triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa coincide com o baricentro do triângulo equilátero e seu raio r_a é dado por $r_a = \frac{1}{3}h_a$, onde $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ é a altura do triângulo equilátero. Logo, $r_a = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

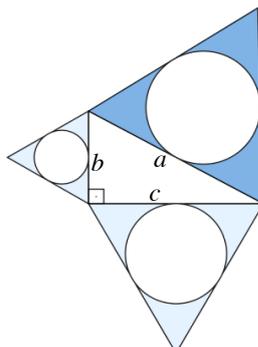
$$\text{A área desse círculo é dada por } \mathcal{A}_{(S_a)} = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi \cdot a^2}{12}.$$

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{\pi \cdot b^2}{12} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{\pi \cdot c^2}{12}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{\pi \cdot b^2}{12} + \frac{\pi \cdot c^2}{12} = \frac{\pi \cdot (b^2 + c^2)}{12} = \frac{\pi \cdot a^2}{12} = \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

10) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 134 – Exteriores aos círculos e interiores aos triângulos.



A área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas do triângulo equilátero de lado a e do círculo de raio $r_a = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, conforme

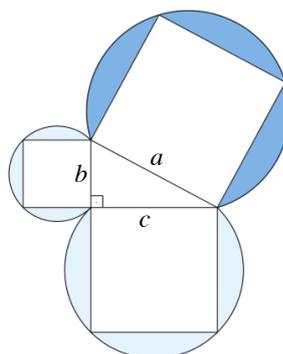
visto em 9). Então, $\mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot a^2}{12} = \frac{a^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} + \frac{c^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} = \frac{a^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{12} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

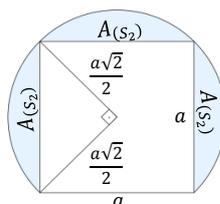
11) A figura que representa a região é a seguinte:

Figuras 135 – Exteriores aos quadrados e interiores aos círculos.



Observe, na Figura 136, abaixo, que a região construída sobre a hipotenusa é composta por três segmentos circulares. A área $A_{(S_2)}$ de cada um destes segmentos circulares é dada pela diferença entre as áreas de um setor circular de 90° de raio $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e de um triângulo retângulo de catetos $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Figura 136 – Elementos da região.



Dessa maneira, $A_{(S_2)} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{8}$.

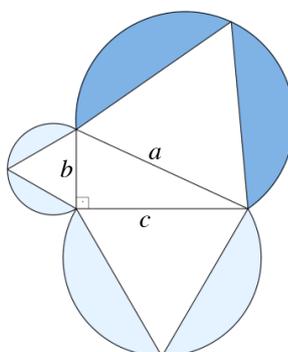
Então, a área da região construída sobre a hipotenusa é dada por $\mathcal{A}_{(S_a)} = 3 \cdot \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{8}$.

Analogamente, $\mathcal{A}_{(S_b)} = 3 \cdot \frac{b^2 \cdot (\pi - 2)}{8}$ e $\mathcal{A}_{(S_c)} = 3 \cdot \frac{b^2 \cdot (\pi - 2)}{8}$.

Logo, $\mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = 3 \cdot \frac{b^2 \cdot (\pi - 2)}{8} + 3 \cdot \frac{b^2 \cdot (\pi - 2)}{8} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (\pi - 2)}{8} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{8} = \mathcal{A}_{(S_a)}$.

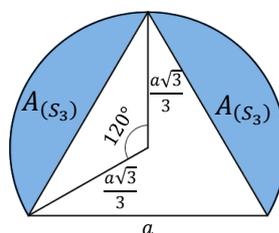
12) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 137 – Exteriores aos triângulos e interiores aos círculos circunscritos.



Observe, na Figura 138, abaixo, que a região é formada por dois segmentos circulares. A área $A_{(S_3)}$ de cada um destes segmentos circulares é dada pela diferença entre as áreas do setor circular de 120° e raio $r_a = \frac{2}{3} \cdot h_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e do triângulo isósceles de lados iguais a $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Figura 138 – Elementos dos setores circulares.



Dessa forma, $A_{(S_3)} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen } 120^\circ = \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{36}$.

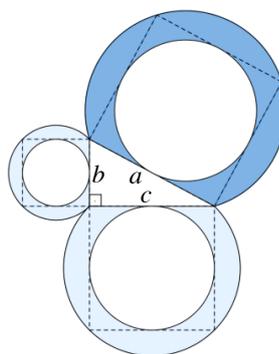
Então, a área da região construída sobre a hipotenusa é dada por $\mathcal{A}_{(S_a)} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{36} = \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{18}$.

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{18} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{18}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} &= \frac{b^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{18} + \frac{c^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{18} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{18} = \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{18} = \\ &= \mathcal{A}_{(S_a)}. \end{aligned}$$

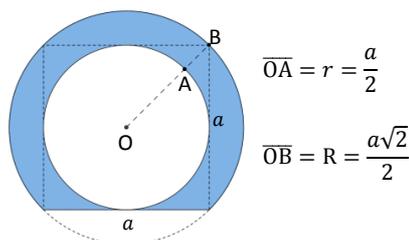
13) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 139 – Coroas circulares do quadrado.



Observe na Figura 140, abaixo, que a área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas da coroa circular de raios $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $r = \frac{a}{2}$ e do segmento circular cuja área é $A_{(S_2)}$, já calculada em 11).

Figura 140 – Elementos da região.



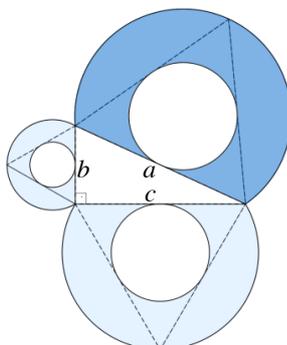
$$\text{Então, a área da região será } \mathcal{A}_{(S_a)} = \pi \cdot \left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] - \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{8} = \frac{a^2 \cdot (\pi + 2)}{8}.$$

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (\pi + 2)}{8} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (\pi + 2)}{8}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (\pi + 2)}{8} + \frac{c^2 \cdot (\pi + 2)}{8} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (\pi + 2)}{8} = \frac{a^2 \cdot (\pi + 2)}{8} = \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

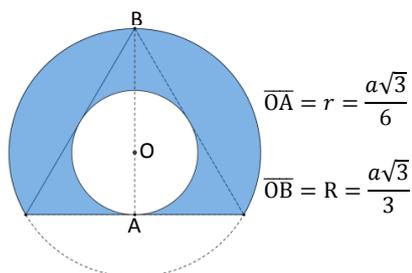
14) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 141 – Coroas circulares do triângulo equilátero.



Observe na Figura 142, abaixo, que a área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre a coroa circular de raios $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, e do segmento circular cuja área é $A_{(S_3)}$, já calculada em 12).

Figura 142 – Elementos da região.



$$\text{Então, a área da região será } \mathcal{A}_{(S_a)} = \pi \cdot \left[\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right] - \frac{a^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{36} =$$

$$= \frac{a^2 \cdot (5\pi + 3\sqrt{3})}{36}.$$

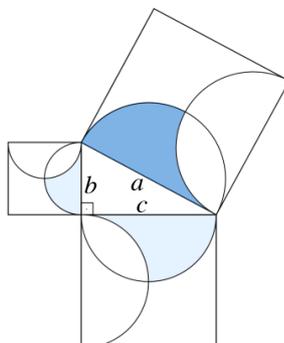
$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (5\pi + 3\sqrt{3})}{36} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (5\pi + 3\sqrt{3})}{36}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (5\pi + 3\sqrt{3})}{36} + \frac{c^2 \cdot (5\pi + 3\sqrt{3})}{36} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (5\pi + 3\sqrt{3})}{36} = \frac{a^2 \cdot (5\pi + 3\sqrt{3})}{36} =$$

$$= \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

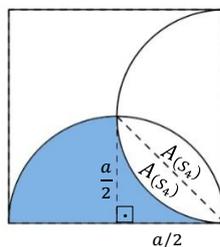
15) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 143 – Exterior a semicírculo e exterior a outro.



Observe, na Figura 144, abaixo, que a área da região construída sobre a hipotenusa é dada pela diferença entre as áreas do semicírculo de raio $\frac{a}{2}$ e de dois segmentos circulares de 90° e raio $\frac{a}{2}$. Observe também, que a área $A_{(S_4)}$ de cada um desses segmentos é dada pela diferença entre as áreas do setor angular de 90° e do triângulo retângulo de catetos $\frac{a}{2}$.

Figura 144 – Elementos da região.



$$\text{Então, } A_{(S_4)} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{16}.$$

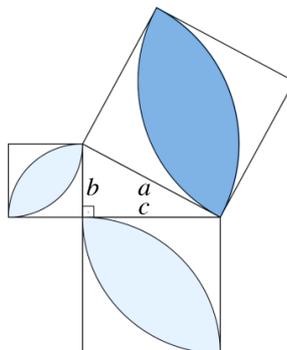
$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_a)} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot A_{(S_4)} = \frac{\pi a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{16} = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2}{4} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2}{4}.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{4} = \frac{a^2}{4} = \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

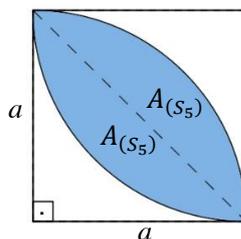
16) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 145 – Intersecção de setores angulares.



Observe, na Figura 146, que a área da região construída sobre a hipotenusa é formada por dois segmentos circulares de 90° e raio a . Observe também que a área $A_{(S_5)}$ de cada um desses segmentos é dada pela diferença entre as áreas do setor angular de 90° e raio a e do triângulo retângulo de catetos a .

Figura 146 – Elementos da região.



$$\text{Então, } A_{(S_5)} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{4}.$$

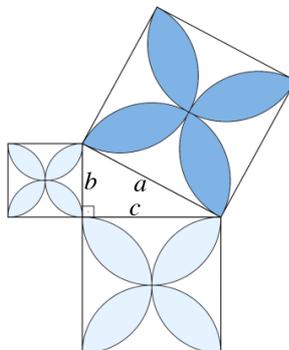
$$\text{Logo, a área da região é dada por } \mathcal{A}_{(S_a)} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{4} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{2}.$$

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (\pi - 2)}{2} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (\pi - 2)}{2}.$$

$$\text{Portanto, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (\pi - 2)}{2} + \frac{c^2 \cdot (\pi - 2)}{2} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (\pi - 2)}{2} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{2} = \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

17) A figura que representa a região é a seguinte:

Figura 147 – Intersecção de semicírculos.



Observe que a região construída sobre a hipotenusa tem área dada por:

$\mathcal{A}_{(S_a)} = 8 \cdot A_{(S_4)}$, onde $A_{(S_4)} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{16}$ é a área do segmento circular calculado em 15).

$$\text{Logo, } \mathcal{A}_{(S_a)} = 8 \cdot \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{16} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{2}$$

$$\text{Analogamente, } \mathcal{A}_{(S_b)} = \frac{b^2 \cdot (\pi - 2)}{2} \text{ e } \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{c^2 \cdot (\pi - 2)}{2}.$$

$$\text{Portanto, } \mathcal{A}_{(S_b)} + \mathcal{A}_{(S_c)} = \frac{b^2 \cdot (\pi - 2)}{2} + \frac{c^2 \cdot (\pi - 2)}{2} = \frac{(b^2 + c^2) \cdot (\pi - 2)}{4} = \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{4} = \mathcal{A}_{(S_a)}.$$

■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Pitágoras é considerado um dos mais importantes teoremas da Matemática elementar. Neste trabalho, pudemos constatar, através das diversas leituras realizadas, sua grandiosíssima relevância em diversas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento. Foi muito enriquecedor ter estudado e aprofundado no estudo de tão importante teorema, com certeza, da próxima vez que for ministrar este conteúdo, o farei de uma forma diferente.

Com o simples resgate histórico que foi realizado neste trabalho, esperamos ter contribuído para que os leitores, principalmente os professores, avaliem a importância sobre o papel da história nas aulas de Matemática, fato ainda muito pouco explorado atualmente.

Cabe aqui salientar que o uso da informática é uma poderosa ferramenta que o professor pode utilizar no ensino de Matemática, pois torna o estudo mais atraente e prazeroso. Isto pode ser comprovado nas atividades de informática com o software GeoGebra, propostas neste trabalho e aplicadas para alunos da rede pública. Por meio de relatos e observações feitas durante as aplicações das atividades, pudemos atestar o desenvolvimento de habilidades e competências, previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, pois com o software Geogebra, é possível que o aluno manipule elementos geométricos, execute ações frente aos questionamentos apresentados, analise os dados obtidos e tire conclusões, ampliando assim os seus conhecimentos.

Por fim, com o desenvolvimento deste trabalho, esperamos contribuir para uma melhoria no ensino de Matemática e que este sirva como fonte de consulta e apoio para os professores em suas atividades e práticas docentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A. *Episódios da História da Matemática*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. SBM, 1984.

BARON, M. E. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*. Unidade 1: A Matemática Grega. Tradução de José Raimundo Braga Coelho. Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. SBM, 1985.

BARBOSA, R. M. *Descobrendo Padrões Pitagóricos*. Atual Editora, São Paulo, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. PDE: *Plano de Desenvolvimento da Educação. Prova Brasil - Ensino Fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília, MEC, SEB; Inep, 2008. 200 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998b. 148 p.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: *Plano de Desenvolvimento da Educação; SAEB; ensino médio; matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008. 127 p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf>. Acesso em: 03 dez. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: *Plano de Desenvolvimento da Educação; Prova Brasil; ensino fundamental; matrizes de referência; tópicos e descritores*. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008. 200 p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf>. Acesso em: 03 dez. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais, terceiro e quarto*

ciclos do ensino fundamental. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998a. 174 p.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações* - Vol. Único. Editora Ática, São Paulo. 3ª Edição, 2008.

Encyclopædia Britannica Online. Disponível em <<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/442170/Pappus-of-Alexandria>>. Acesso em: 16 nov. 2013.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. Editora UNESP, São Paulo, 2009.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002.

FANTI, E. L. C. et al. *Explorando conteúdos de geometria, em especial o Teorema de Pitágoras, com recursos didáticos, dentre eles o software GeoGebra visando tornar as aulas do ensino fundamental mais dinâmicas*. Trabalho enviado para publicação no E-Livros Prograd. Núcleos de Ensino da UNESP (Artigos dos projetos realizados em 2012). No prelo.

LOOMIS, E. S. *The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Washington, D.C., 1968, 310p.

IEZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar* - Vol 3 (Trigonometria). Atual Editora, São Paulo. 9ª Edição, 2013.

iG São Paulo. (sítio eletrônico). *O que é o Enem*. Disponível em <<http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/enem/2012-06-21/o-que-e-o-enem.html>>. Acesso em: 02 dez. 2013.

IMENES, L. M. *Descobrendo o Teorema de Pitágoras*. Coleção Vivendo a Matemática. Ed. Scipione, 14ª Edição, 2000.

INEP (sítio eletrônico). *Instruções para aplicação do SAEB*. Disponível em <<http://portal.inep.gov.br/web/saeb/aneb-e-anresc>>. Acesso em: 03 dez. 2013.

LIMA, E. L. et al. *Temas e Problemas Elementares*. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 2ª edição, 2005.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LOURENÇO, M. L.; SILVA, E. A. *Generalizações e Extensões do Teorema de Pitágoras*. UNESP, São José do Rio Preto, 1992.

MADJAROF, Rosana. *Pitágoras de Samos*. Disponível em <<http://www.mundodosfilosofos.com.br/pitagoras.htm>>. Acesso em: 08 jul. 2013.

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM 2009. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br>>. Acesso em: 28 NOV. 2013.

Ministério da Educação (sítio eletrônico). *Novo Enem*. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13318&Itemid=310>. Acesso em: 02 dez. 2013.

PEDROSO, H. A. *A Escola de Atenas*. Disponível em <<http://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/historia-da-matematica/>>. Acesso em 27 jul. 2013.

PEDROSO, H. A. *História da Matemática*. UNESP, São José do Rio Preto, 2009.

PEDROSO, H. A. e PRECIOSO, J. C. Notas de Minicurso “*Números Construtíveis e Problemas Clássicos de Geometria*”. XXII Semana da Matemática – IBILCE/UNESP. São José do Rio Preto, 2010.

PROFMAT – Material didático. *MA23 - Geometria Analítica*, unidade 5. IMPA, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Campinas, SP: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.

ROSA, E. *Mania de Pitágoras*. Revista Professor de Matemática - SBM, v. 2, 14-22, 1983.

SÁ, I. P. *A Magia da Matemática: Atividades Investigativas, Curiosidades e Histórias da Matemática*. Ed. Ciência Moderna, 3ª Edição, 2010.

SAMPAIO, J. C. V. et al. *Hipertexto Pitágoras*. Disponível em <<http://www.dm.ufscar.br/hp/hp0/hp0.html>>. Acesso em: 08 jul. 2013.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Aluno: Matemática. Ensino Fundamental 8ª série, volume 4*. Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2010.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática. Ensino Fundamental 7ª série, volume 4*. Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009a.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática. Ensino Fundamental 8ª série, volume 3*. Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009b.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática. Ensino Fundamental 8ª série, volume 4*. Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009C.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias - Ensino Fundamental – Ciclo II e Médio*. São Paulo, SEE, 2011. 72p.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Matrizes de referência para a avaliação SARESP: documento básico*. Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009d. 174 p. v. 1

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*. São Paulo, SEE, 2008. 35p.

SOUZA, R. B. *O uso das tecnologias na educação*. Disponível em <<http://www.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/5945/o-uso-das-tecnologias-na-educacao.aspx>>. Acesso em: 05 dez. 2013.

TUNNEL of Eupalinos, The. Documentário History Channel. 6'36". Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=4l4Z8qkvSUC>>. Acesso em julho de 2013.