INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Aimoré Aragão de Oliveira

Matemática Financeira:

Análise de Livros Didáticos

Instituto de Matemática Pura e Aplicada – RJ

2014

Agradecimentos

A Deus, porque sem Ele nada seria possível!

Ao meu pai Aimoré Soares, meu irmão Itaci Oliveira e à minha noiva Helen Jardim, pelo apoio, incentivo e paciência em todos os momentos deste Mestrado Profissional.

Ao professor Paulo Cezar Pinto Carvalho, pelas ótimas aulas de Matemática Discreta que serviram de motivação para trabalhar com Matemática Financeira. À professora Lucia Tinoco, minha orientadora na Monografia da Graduação e Licenciatura em Matemática que, mesmo após tantos anos, pude utilizar o que aprendi para a elaboração deste trabalho.

Dedico este trabalho ao meu filhão, Marco Antônio Lima de Oliveira, uma das minhas principais fontes de energia, à memória de minha mãe, Maria Amélia A. de Oliveira, minha eterna referência e aos meus avós maternos Dina e Manoel Aragão.

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivos:

- Apontar a relevância da Matemática Financeira na formação de cidadãos críticos, capazes de avaliar e tomar decisões na área financeira de modo embasado e consciente;

- Analisar se a abordagem dada à matemática financeira pelos livros didáticos oferecidos pelo programa PNLEM nas escolas públicas estimula e favorece esta formação.

.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Análise crítica de livros, cidadania e tomadas de decisão.

Abstract

The objectives of this final working course are:

- Point the relevance of Financial Mathematics in the formation of critical citizens capable of evaluating and making decisions in the financial area with basement and awareness;

- Analyze the approach taken by the financial mathematics textbooks offered by PNLEM program in public schools encouraging and promoting this relation.

Key words: Financial Mathematics, citizenship, critical analysis of books and decision making.

Sumário

1. Introdução

A Matemática Financeira é um tópico muito importante a ser estudado no Ensino Médio.

Na última década, algumas pesquisas tem surgido com o intuito de abordar questões financeiras e o que significa educar financeiramente a população. Finanças pessoais, matemática financeira, educação financeira, matemática comercial e ensino básico de finanças são alguns nomes empregados atualmente para o Ensino de Matemática Financeira. (Muniz, Jurkiewicz, 2013).

Para o Banco Central do Brasil, a Educação Financeira é “o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão dos conceitos e produtos financeiros. Com informação, formação e orientação claras, as pessoas adquirem os valores e as competências necessários para se tornarem conscientes das oportunidades e dos riscos a elas associados e, então, façam escolhas bem embasadas, saibam onde procurar ajuda e adotem outras ações que melhorem o seu bem-estar.” (BCB, 2010)

Alguns pesquisadores apresentam pontos de vista diferentes do conceito apresentado pelo BCB, mas não antagônicas com relação ao tema. Para Saito, “A Educação Financeira pode ser entendida como um processo de transmissão de conhecimento que permite o aprimoramento da capacidade financeira dos indivíduos de modo que estes possam tomar decisões fundamentadas e seguras, tornando-se mais integrados à sociedade, com uma postura pró-ativa na busca de seu bem estar.” (Saito, 2007, p.20)

Outrossim, é importante considerar aspectos como: contextualização, exercício da cidadania, desenvolvimento da capacidade de efetuar cálculos, utilizando tanto as operações básicas quanto outras mais sofisticadas e utilização de recursos tecnológicos, que são facilmente contemplados pelo ensino de Matemática Financeira.

Nos últimos anos o país tem experimentado constantes mudanças econômicas: o aumento do poder de compra da população, principalmente nas classes com menor poder aquisitivo; facilidades na compra da casa própria e automóveis por meio de financiamentos pela Caixa Econômica Federal; diversas opções de investimentos; aumento do número de famílias que viajam para o exterior; diferentes modalidades de pagamentos de objetos de uso cotidiano, como móveis, eletrodomésticos e eletroeletrônicos.

A experiência adquirida em um pouco mais de uma década de atividade docente demonstra que, o ensino de matemática financeira, principalmente na escola pública, não acompanhou essas mudanças.

Este fato também é constatado por diversos professores com maior experiência, como o prof. Bigode, que em 2013 destacou que:

"Nos dias de hoje, é muito comum um cidadão, a partir de certa idade, utilizar a Matemática para tomar decisões em atividades cotidianas que envolvem dinheiro. Ao passarmos os olhos pelos jornais diários e páginas de notícias da Internet contatamos, frequentemente, tabelas e gráficos relacionados à economia do país, que é repleta de matemática. Temos de estar preparados para interpretar esses índices, tabelas, gráficos e cálculos."

O especialista em finanças Roberto Zentgraf, também afirma que "*Apesar de óbvio, ainda é comum observarmos um grande contingente de pessoas iludindo-se com ofertas enganosas, mesmo a mídia, divulga casos do tipo "se o comprador optar pela compra em 12 prestações, acabará pagando duas vezes pelo bem" e outras bobagens do gênero*".

A partir destas considerações, podemos observar que conceitos fundamentais da matemática financeira, como a de que o dinheiro tem diferentes valores ao longo do tempo e que não é correto somar quantias localizadas em tempos diferentes, não são conhecidos por grande parte da população. A precária a formação de cidadãos conscientes nessa área, limita a capacidade de decisão no aspecto financeiro, ou seja, em resoluções econômicas fundamentadas e na utilização de recursos tecnológicos que auxiliem nessas tomadas de decisões.

Com esse trabalho objetivamos:

- Apontar a relevância da Matemática Financeira na formação de cidadãos críticos, capazes de avaliar e tomar decisões na área financeira de modo embasado e consciente;
- Analisar se a abordagem dada à matemática financeira pelos livros didáticos oferecidos pelo programa PNLEM às escolas públicas estimula e favorece essa formação.

Para o desenvolvimento desse trabalho, foram feitas:

- Leituras da Constituição Nacional, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), bem como de referenciais teóricos que tratam de matemática financeira e cidadania.
- Análise de alguns livros didáticos adotados em escolas públicas brasileiras, fornecidos pelo MEC através do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM).

2. Cidadania e Matemática Financeira

A Educação Básica tem por finalidade formar indivíduos capazes de exercer plenamente o direito à cidadania. A Constituição Federal de 1988 garante, em seu Art. 205, que a "*Educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando o pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.*"

Em decorrência disso, a LDB 9394/96, nos artigos 2°, 22°, 27° e 35° evidencia a necessidade de promover uma educação a fim de formar cidadãos críticos, dispostos a exercer plenamente a cidadania:

Art. 2°. A educação é dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Art. 22°. A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

Art. 27°. Os conteúdos curriculares da educação básica observarão, ainda, as seguintes diretrizes:

I – a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática.

Art. 35°. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidade:

III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.

Sendo assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que a formação do aluno deve ter como alvo principal, a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade em utilizar as diferentes tecnologias referentes às áreas de atuação. Dois fatores foram levantados para essa “nova” (em 2000) proposta de currículo:

- Mudanças estruturais que decorrem da chamada “revolução do conhecimento”
- Expansão crescente da rede pública, atendendo aos padrões de qualidade que coadunem com as exigências desta sociedade.

Os PCNs indicam, ainda, que é objetivo da Matemática:

- Entender o impacto das tecnologias associadas às Ciências Naturais na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social.
- Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas.

Tendo em vista estas diretrizes, algumas questões devem ser consideradas:

Qual seria o papel da Matemática na formação crítica do indivíduo?

Quais assuntos, na Matemática Básica, possibilitariam diretamente o aluno a desenvolver habilidades para o pleno exercício da cidadania?

Sem dúvida, um dos principais assuntos que contemplam estes questionamentos, é o estudo da Matemática Financeira.

É importante que os jovens, ainda na idade em que o manuseio do dinheiro seja apenas a simples compra de lanches na escola, estejam inseridos em situações que simulem práticas comerciais. Inicialmente, com situações cotidianas e, posteriormente, nos anos finais do Ensino Médio, situações mais complexas, que simulem problemas reais, sendo necessária a tomada de decisões, tais como: compra de imóveis, empréstimos e antecipação de parcelas, diferentes modalidades de investimentos e etc.

Os alunos da rede pública podem, através da abordagem feita em matemática financeira, oferecida atualmente nos anos finais da escola básica, e auxiliada pelos recursos oferecidos pelo livro didático, exercer plenamente o direito à cidadania, abrangendo a maioria dos aspectos envolvidos nas relações comerciais cotidianas?

Em suma, estes alunos são capazes de responder às questões do tipo:

- O que seria melhor? Juntar dinheiro e comprar uma mercadoria à vista ou comprar a prazo, muitas vezes em parcelas iguais e “sem juros”?
- Vale a pena investir em caderneta de poupança?
- Qual melhor investimento, levando em conta a incidência de taxas de juros diferenciadas e impostos?

3. A Matemática Financeira, a Escola e o Livro Didático.

De um modo geral, a falta de tempo oriunda de uma carga horária grande de trabalho, dificulta:

- o planejamento e estruturação de atividades contextualizadas, que necessitam de pesquisa e troca de informações entre professores de matemática e outras disciplinas,
- a participação em atividades de especialização, que geralmente são oferecidas em épocas de recesso e férias do professor e
- a dificuldade de acesso a livros e manuais especializados na formação continuada do professor.

Devido a isso, o livro didático torna-se, senão a única, a principal fonte de pesquisa e referência do professor e muitas vezes, norteadora do trabalho a ser desenvolvido em sala de aula.

Observando trabalhos recentes, como a pesquisa feita por Hélio Rosetti Junior e Juliano Schimiguel, apresentada no volume 6, n.11 de 2010 da Enciclopédia Biosfera, podemos ver o espaço dado à Matemática Financeira em Livros Didáticos nacionais de 1990 até 2003, onde era predominante o uso de Volume Único para os livros de Matemática. Lembremos que naquela época não havia um programa semelhante ao PNLEM para as escolas públicas.

Transcrevemos abaixo as conclusões desse trabalho:

1990	Matemática: Volume Único Gelson Iezzi ... (et al.) Ed. Saraiva, SP	Não apresenta conteúdo de Matemática Financeira.
1997	Matemática – Volume Único Walter Facchini Ed. Saraiva, SP	Não apresenta conteúdo de Matemática Financeira.

1998	Matemática para o ensino Médio Carlos Alberto Marcondes dos Santos Nélson Gentil Sérgio Emílio Greco Ed. Ática, SP	Volume Único. Apresenta 3 páginas sobre porcentagens, Juros Simples e Juros Compostos, com aplicação das fórmulas em exemplos e resolução de exercícios.
2001	Matemática para o ensino médio – volume único Manoel Jairo Bezerra Ed. Scipione, SP	Apresenta 6 páginas contendo porcentagem, Juros simples, Montante, Desconto Comercial Simples e Juros Compostos com aplicação das fórmulas em exemplos e resolução de exercícios.
2001	Matemática para o Ensino Médio. Chico Nery Fernando Trotta Ed. Saraiva, SP	Não apresenta conteúdo de Matemática Financeira.
2003	Curso de Matemática Edwaldo Bianchini Herval Paccola Ed. Moderna, SP	Apresenta, em 16 páginas: Taxa de porcentagem, Lucros e prejuízos, Juros Simples, Juro Composto, Pagamento parcelado, com aplicação de fórmulas em exemplos, resolução de exercícios e testes de vestibulares.
2003	Matemática contexto & aplicações Luiz Roberto Dante Ed. Ática SP	No volume I, são 16 páginas contendo Números proporcionais, porcentagem, termos importantes da Matemática Financeira, Juros Simples, Juros Compostos, Juros e funções, com aplicações das fórmulas em exemplos, resolução de exercícios e testes de vestibulares.

2004	Matemática Manoel Paiva Ed. Moderna, SP	Não apresenta conteúdo de Matemática Financeira.
2005	Matemática: Volume Único Gélson Iezzi … (et al.) Ed. Atual, SP	Apresenta 18 páginas contendo: Razão e proporção, porcentagem, Juros, Juros simples e Juros compostos, com aplicações de fórmulas em exemplos, resolução de exercícios e testes de vestibulares.

Através da leitura desta tabela, podemos constatar que a atenção dada à Matemática Financeira cresceu ao longo do tempo, principalmente comparando dois livros do mesmo autor (Gelson Iezzi), com 15 anos de diferença entre as publicações.

A consolidação da Matemática Financeira no currículo da Escola Básica, se dá a partir dos anos 2000, motivada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (volume 2, 2006), onde é proposta a divisão dos conteúdos em 4 blocos: Números e operações, Funções, Geometria e Análise de Dados e Probabilidade. Nas páginas 70 e 71 dessas Orientações, o bloco de Números e operações deve capacitar, por meio de diversas situações, "capacitá-los a resolver problemas do cotidiano" e, ao final do Ensino Médio, o aluno deve ser capaz de "decidir sobre vantagens e desvantagens de uma compra à vista ou à prazo" e ainda, "calcular impostos e contribuições previdenciárias, avaliar modalidades de juros bancários".

Veremos na próxima seção que, com o programa PNLEM, todos os livros oferecidos à escola pública possuem pelo menos, uma seção tratando da Matemática financeira.

4. Matemática Financeira e o Livro Didático na Escola Pública

O PNLEM, Programa Nacional do Livro Didático no Ensino Médio, foi implantado em 2004, pela Resolução n°38 do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação), prevendo a universalização de livros didáticos para alunos do Ensino Médio de todo o país, proporcionando material de apoio pedagógico e sendo fonte de pesquisa para alunos e professores da rede pública em âmbito nacional. Com esse programa, ficou garantido o acesso a livros didáticos a "todos" os alunos de escola pública do país, em diversas disciplinas, haja vista que a distribuição desse material é gratuita e oferecida pelo Governo diretamente à instituição de ensino. Inicialmente atendendo a 1,3 milhão de alunos da 1ª série do Ensino Médio e 5392 escolas das regiões Norte e Nordeste, com livros de Português e Matemática. Já em 2005, 2,7 milhões de livros foram distribuídos entre as três séries e em todas as regiões do país. Em 2008, o investimento do FNDE no programa foi de R$ 416,9 milhões, sem contar gastos com distribuição, segundo o Portal MEC.

No programa de 2012, os livros didáticos oferecidos trazem o conteúdo de matemática financeira em diferentes séries, dependendo do enfoque que será dado pelo(s) autor(es) ao conteúdo, ou simplesmente como aplicação contextualizada a outros temas da matemática, como por exemplo: Função afim / Progressões Aritméticas / Juros simples e Função exponencial / Progressões Geométricas / Logaritmos / Juros Compostos.

A seguir, mostraremos os livros didáticos e onde estão sendo apresentados os conteúdos de Matemática Financeira, seguido de um resumo da análise feita pela equipe de professores avaliadores e elaboradores do Guia PNLEM do livro didático 2012, que é um guia oferecido, juntamente com exemplares dos livros didáticos aprovados pelo programa para a apreciação dos professores de cada escola pública do Brasil, que deverão escolher, dentre esses livros, qual será fornecido pelo MEC à escola, nos três anos seguintes à escolha feita.

4.1 Conexões com a Matemática

Obra coletiva, desenvolvida por 15 professores, sob a coordenação de Juliane Matsubara Barroso, Ed. Moderna. Código 25042COL02.

Nesta obra, a Matemática Financeira é apresentada na 1ª unidade do livro da 3ª série, em 20 páginas. Segundo o Guia, "a matemática financeira é estudada em um capítulo do livro 3, com exemplos pertinentes". Na parte da análise dedicada à metodologia, salienta-se que o livro, como um todo, não explora o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas.

4.2 Matemática – Contexto & Aplicações

De Luiz Roberto Dante, Ed. Ática. Código 25116COL02.

Segundo o Guia, "observa-se uma boa conexão entre os diversos campos da Matemática e desta com outras áreas de conhecimento. Também verifica-se a preocupação em articular os conhecimentos novos e os já abordados."

A matemática financeira é abordada no capítulo 10, do livro da 1ª série, são 54 páginas com conceitos de proporcionalidade, porcentagem, juros e funções.

A análise feita no Guia salienta que há uma excessiva atenção dada ao conteúdo de Funções ("praticamente 70% das 500 páginas do volume tratam desse tema") e a obra caracteriza-se pelo excesso de conteúdos, desenvolvidos de maneira enciclopédica. Nesta obra, observa-se ainda, na seção de matemática financeira, que a linguagem (verbal e/ou simbólica) pode dificultar a compreensão.

4.3 Matemática

Editora Moderna, Código 25117COL02.

Nesta obra, o autor Manoel Paiva sistematiza os conceitos de forma cuidadosa, mas sem estímulo à investigação por parte do aluno. O conteúdo de matemática financeira é apresentado no capítulo 2 do livro 1, de 18 páginas, juntamente com os assuntos: equações, inequações e sistemas de equações polinomiais do 1º grau e equações polinomiais do 2º grau. O livro apresenta exercícios bem contextualizados sobre tema, mas o uso de calculadoras e outros recursos tecnológicos são pouco estimulados.

4.4 Matemática Ciência e Aplicações

De autoria de David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périgo, Ed. Saraiva. Código 25121COL02.

A metodologia adotada oferece poucas oportunidades para uma aprendizagem autônoma por parte do aluno.

O livro traz, no capítulo 11 do primeiro livro e em 20 páginas, o assunto Matemática comercial e financeira com os conceitos de porcentagens, aumentos, descontos, juros simples e compostos, juros e funções. Com destaque na abordagem de juros e funções.

Neste material, não é propiciado aos alunos autonomia na construção do conhecimento e a maior parte dos exercícios exige apenas cálculos com base nas fórmulas apresentadas.

4.5 Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia

Código 25122COL02, de autoria de Jackson Ribeiro, Ed. Scipione.

Nesta obra, destacou-se o incentivo ao uso de calculadoras, trabalho em grupo e leituras complementares. É comum na obra como um todo, explorar conexões da Matemática com outras disciplinas e práticas sociais atuais. A Matemática Financeira é abordada no primeiro capítulo do segundo livro, desenvolvendo, com aplicações sugestivas e em 37 páginas, os seguintes assuntos: proporção numérica, porcentagem, acréscimos e descontos, juros simples e compostos e representação da evolução do montante como função do tempo.

Na análise da abordagem feita pelo do Guia, nota-se que a motivação para as funções exponenciais é feito num contexto de juros compostos, no primeiro livro, mas tal conceito é efetivamente trabalhado apenas no segundo livro. A matemática financeira é estudada a partir de comentários feitos pela recente crise econômica mundial.

O Guia demonstra que as contextualizações nessa obra permeiam temas sociais que propiciam a formação cidadã, o desenvolvimento crítico e a compreensão do mundo. Entretanto, na matemática financeira existe um texto bastante controverso sobre compras a prazo, que deve ser cuidadosamente abordado.

4.6 Matemática Ensino Médio

Código 25125, de Maria Ignez Diniz e Kátia Stocco Smole, Ed. Saraiva.

Neste livro, as autoras iniciam cada unidade com situações contextualizadas e pertinentes, procurando incentivar o estudo dos temas propostos. Podemos destacar a presença de tópicos interdisciplinares relevantes e atuais, entretanto, muito numerosos e alguns, com assuntos complexos, dificultando de certa maneira, o trabalho com tais textos, fazendo com que sejam utilizados apenas a nível informativo. Destaca-se positivamente também, a utilização de recursos didáticos, como jogos, *softwares* (livres) e calculadoras.

A Matemática Financeira é trabalhada no primeiro capítulo do livro 3, em 21 páginas, com indicação no índice apenas para juros simples e compostos.

4.7 Novo Olhar – Matemática

De autoria de Joamir Souza, Ed. FTD, Código 25133COL02.

O principal foco dessa obra é a contextualização. Os textos encontrados na abertura das unidades trazem informações de diferentes áreas de conhecimento, favorecendo o estabelecimento de conexões entre saberes. As generalizações são feitas a partir de exemplos, sem grandes discussões sobre essa atitude e nem referências a demonstrações lógicas, naturalmente dificultando um desenvolvimento lógico-dedutivo, que é uma característica importante da Matemática. As atividades são amplamente transcritas de exames vestibulares e ENEM.

Neste livro, há uma unidade inteira para Matemática financeira e Estatística (Unidade 2 da 2ª série), desenvolvendo a matemática financeira em um capítulo de 32 páginas, nomeado por juros e amortização.

Ainda segundo o Guia, as fórmulas são deduzidas muito rapidamente, sem deixar claro que os problemas podem ser resolvidos sem elas.

5. Análise detalhada dos livros didáticos

Nesta seção, faremos a análise de alguns livros didáticos do programa PNLEM de 2012. Tais livros foram escolhidos devido à disponibilidade de acesso na escola na qual leciono durante o tempo de redação deste trabalho. Infelizmente, não foi possível ter em mãos pelo menos um exemplar dos livros que apresentam o conteúdo de matemática financeira em cada uma das três séries do Ensino Médio.

- Novo Olhar – Matemática, de Joamir Souza, Ed. FTD. Esse livro é utilizado no Colégio Pedro II. Sua escolha foi ratificada por meio de votação envolvendo toda a equipe de docentes integrantes do Departamento de Matemática dessa instituição, após breve apreciação das coleções disponíveis no programa PNLEM.
- Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia, de Jackson Ribeiro, Ed. Scipione.
- Matemática, de Manoel Paiva, Ed. Moderna.

O objetivo desta análise é verificar como o conteúdo de Matemática Financeira é abordado: com definições, tipos de exemplos, contextualizações, leituras de textos complementares, coerência entre exemplos oferecidos e exercícios propostos, constatar se há incentivo ou subsídios para a construção do senso crítico em matemática financeira, colocando o aluno em situações que proponham tomadas de decisões, capacitando-o a exercer a cidadania, de modo pleno e consciente, no âmbito financeiro.

5.1 Novo Olhar – Matemática

A unidade 2 do livro do 2º ano dessa obra apresenta o conteúdo de matemática financeira, juntamente com estatística. Há um capítulo para cada tema (respectivamente os capítulos 3 e 4 deste livro).

A estrutura do capítulo de matemática financeira é: Introdução, seção de porcentagens, seção *Contexto* (texto complementar sobre o IPI), seção de aumentos e descontos sucessivos, seção *Contexto* (texto sobre o INPC), seção sobre Juros (simples e compostos), seção Contexto (Previdências), Juros e Funções, Sistemas de Amortização (Modelo Price), seção Contexto (compras parceladas), Explorando o tema (texto com o título: Quanto dinheiro há no mundo?) e Atividades Complementares (exercícios)

5.1.1 Introdução

A introdução do capítulo é feita de modo interessante, apresentando diversas situações econômicas:

- Investimentos com renda fixa, como a caderneta de poupança, apontado como um investimento conservador.
- Investimentos com renda variável, como o mercado de ações. Neste momento é apontado que tais investimentos são mais rentáveis que os investimentos com renda fixa, apresentando, porém, riscos maiores de perda.
- Investimentos na Bolsa de Valores. Há um infográfico indicando o processo de investimento nessa modalidade: abertura de ações pela companhia, a necessidade do investidor procurar uma corretora credenciada na Comissão de Valores Mobiliários (CVM), o sistema de *Home Broker.*

O livro imediatamente observa que investimentos com renda fixa, são conservadores e com rentabilidade menor, porém mais seguros que os investimentos com rendas variáveis, com maior rentabilidade e maiores riscos de perdas financeiras.

Ao final da introdução, são feitas três perguntas:

- *Seus pais ou responsáveis fazem algum tipo de investimento? Qual?*
- *Qual é a diferença entre investir em ações e investir em uma caderneta de poupança?*
- *Se você aplicasse R$ 100,00 em uma caderneta de poupança que rende uma taxa de juros de 0,5% ao mês, qual seria o valor, após um mês?*

O Capítulo 3 inicia-se com um destaque à profissão de contador, salientando que é um profissional que utiliza a Matemática Financeira, seguido de uma breve explicação de sua rotina de trabalho e um link para o Conselho Federal de Contabilidade.

Como uma introdução ao tema, sem a apresentação de definições, é apontado que operações de compra e venda de produtos e serviços, aplicações e empréstimos bancários, pagamentos de impostos são elementos da Matemática Financeira e que ela serve de ferramenta para bancos calcularem a taxa de juros de um empréstimo ou investimento, além de ser utilizada em análise de vantagens e desvantagens em relação a compras à vista ou a prazo.

5.1.2 Porcentagem

Na seção seguinte, o livro aborda o conceito de porcentagem. Faz considerações sobre o fato de que este é um assunto que certamente foi estudado em anos anteriores, introduz o tema com uma notícia onde é evidente uma relação que pode ser escrita em forma percentual e define o conceito da seguinte forma:

*A porcentagem corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Para indica-la, utilizamos o símbolo %. Toda a razão $\frac{x}{y}$, com y = 100, é denominada **taxa percentual**.*

Acreditamos que essa definição é adequada. Independentemente do acesso anterior do aluno ao tema, com essa definição, ele é capaz de descrever de modo rápido e claro o conceito de porcentagem e com ela, ampliar seu conhecimento sobre o assunto.

O livro apresenta 5 exemplos e 2 exercícios resolvidos, dos quais:

Os exemplos 1 e 2 envolvem escrita percentual.

O exemplo 3 é sobre descontos. São apresentadas duas maneiras diferentes de resolução: a primeira calculando o valor do desconto e retirando esse valor do total e a segunda maneira, calculando o percentual que restará após o desconto e fazendo o cálculo diretamente com esse percentual sobre o total.

No exemplo 4 não é apresentado o total. É apresentada uma equivalência entre uma porcentagem e um valor dado.

O exemplo 5 é sobre aumentos. Não é apresentado o preço inicial, apenas o preço após o aumento e pretende-se descobrir o preço antes do aumento. O livro apresenta a resolução, já acrescentando o percentual de reajuste ao total, apresentando uma porcentagem maior do que 100%.

Após essa bateria de exemplos, são apresentados 2 “exercícios resolvidos” (R1 e R2) sendo que:

O exercício R1 é sobre acréscimos, onde são feitas duas resoluções: uma calculando-se o percentual de aumento e acrescentando-se ao total e a outra maneira é somando os percentuais (obtendo um percentual maior do que 100%) e fazendo-se um único cálculo percentual. Este exemplo é análogo ao exemplo 3, apresentando apenas acréscimos.

Os exemplos seguem um nível crescente de dificuldade e contextos. Com o exercício R1, temos uma junção do que é exposto nos exemplos 3 e 5.

No exercício R2 , nota-se um aumento no nível de dificuldade: É o primeiro exercício onde não é exigido o cálculo percentual sobre valores dados, a resolução é totalmente apresentada de modo algébrico. Para chegar à solução, é necessário utilizar as competências trabalhadas nos exemplos 3, 4, 5 e em R1 e, em seguida, o que foi trabalhado nos exemplos 1 e 2.

Observemos a transcrição do exercício R2 e a solução proposta pelo livro:

R2 *Márcia paga mensalmente uma prestação correspondente a 5% do seu salário. Em certo mês, a prestação teve um desconto de 4%, e o salário de Márcia, um acréscimo de 8%. Nesse mês, a qual porcentagem do salário correspondeu a prestação?*

Resolução

Chamamos de P_0 e S_0 os valores da prestação e do salário, antes do desconto e do acréscimo, respectivamente.

P_0 corresponde a 5% de S_0 $\rightarrow P_0 = \frac{5}{100} \cdot S_0 \;\Rightarrow \frac{P_0}{S_0} = \frac{5}{100}$

Sejam P e S os valores da prestação e do salário, após o desconto e o acréscimo, respectivamente. A prestação diminuiu 4% e o salário aumentou 8%; logo:

- *P corresponde a 96% de P_0* $\rightarrow \mathrm{P} = \frac{96}{100} \cdot \mathrm{P}_0$

(foi indicado que 96% = 100% - 4%)

- *S corresponde a 108% de S_0* → $S = \frac{108}{100} . S_0$

(foi indicado que 108% = 100% + 8%)

Desse modo, a razão entre o valor da prestação e o salário é:

$$\frac{P}{S} = \frac{\frac{96}{100} . P_0}{\frac{108}{100} . S_0} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{96}{108} . \frac{P_0}{S_0} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{96}{108} . \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{2}{45} = 0{,}0\overline{4} \cong 4{,}4\%$$

Portanto, nesse mês, o valor da prestação correspondeu a cerca de 4,4% do salário de Márcia.

Neste momento, o autor perde uma oportunidade de apresentar uma resolução sem uma carga algébrica significativa, sugerindo ao aluno estipular valores para prestações e salários coerentes com o exercício. Infelizmente, não há um exercício equivalente no livro. Um exemplo interessante sem uma oportunidade de fixação.

Através dos exemplos apresentados no livro, podemos observar que há uma grande revisão de conceitos de porcentagens trabalhados nos anos finais do ensino fundamental, mas com um enfoque pouco algébrico. Figurando apenas no último exemplo, onde também são exigidos muitos passos de resolução.

Contudo, em nenhum exercício é estimulado o senso crítico do aluno, há apenas uma abordagem instrumental e redundante da matéria, uma vez que os exemplos dados, com exceção de R2, são muito simples e figuram em diversos contextos familiares aos alunos, inclusive em outras disciplinas. Apresentar poucos exercícios, (apenas o R2) que necessitem uma estruturação algébrica foi uma perda de oportunidade, pois o público ao qual se destina esta obra, são alunos da 2ª série do Ensino Médio, que já deveriam estar bastante familiarizados com a estruturação algébrica.

A tabela abaixo separa os exercícios de porcentagem com os objetivos a que se propõem e a conexão entre os exercícios resolvidos.

Objetivos	Exercícios	Exemplos no livro

Escrita percentual	1, 2, 3	1 e 2.
Cálculo de porcentagem aplicado a problemas financeiros	4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 18	3, 4, 5 e exercício resolvido R1.
Cálculo de porcentagem aplicado a problemas não financeiros	5,6, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21	Não há.

Podemos constatar que há igual número de exercícios de porcentagem com contexto financeiro e não financeiro. Há uma perda de oportunidade muito grande aqui, visto que o capítulo é de Matemática Financeira e as propostas de exemplos dados foram focadas em problemas financeiros.

Transcreveremos aqui os exercícios 8, 9, 14 e 17, que trazem contextualizações interessantes e desafiadoras:

8 *Em uma rifa, organizada pela associação de moradores, para arrecadar fundos que serão destinados a obras em certa comunidade, o lucro obtido foi de 35%. Sabendo que a receita foi de R$4455,00, quantos reais foram gastos com os prêmios e as demais despesas (custo)?*

→*Lembre-se de que o lucro corresponde à diferença entre a receita e o custo*

A nota no final do enunciado é fundamental para a resolução. O termo “lembre-se” está sendo empregado, mas qual a garantia que os alunos (da escola pública) do nível fundamental foram apresentados ao conteúdo necessário para desenvolver a questão?

Não existe no livro exemplo paralelo a esse exercício. O aluno precisa modelar o problema de acordo com um conceito que não é garantido que eles já tenham trabalhado e aplicar a porcentagem de acordo com a interpretação correta do enunciado que não é simples. O lucro é de 35% sobre a receita ou sobre o custo? É uma dúvida natural, ainda mais que esse exercício é único na sessão.

Por essas razões, o exercício torna-se difícil e, com a ausência de um exemplo anterior equivalente, a reação natural do aluno é deixar de fazer o exercício, aguardando a resolução do professor.

9 *Para atrair a atenção dos consumidores, um comerciante, percebendo que certo modelo de tênis em sua loja custava R$ 20,00 mais caro que na loja concorrente, realizou uma promoção oferecendo 8% de desconto, para que o preço na sua loja ficasse R$ 10,00 mais barato que na loja concorrente. Qual é o preço desse tênis na loja concorrente?*

Um belo exercício! Apresenta contexto adequado e é desafiador, uma vez que o aluno, além de resolver, deve modelar o problema através da correta interpretação do texto, aplicar a porcentagem nesse modelo e resolver uma equação. Ainda existe a possibilidade de discussão com colegas, dependendo de como se inicia a resolução, ao atribuir a incógnita, na própria loja, ou na concorrência.

Vamos observar também um exercício (número 14) proposto do grupo que não possui contexto financeiro:

14 *A diferença entre dois números naturais é 40. Adicionando 30% do maior número com 60% do menor número obtemos 75. Quais são esses números?*

Este exercício envolve modelagem com um sistema de duas equações, não havendo aplicação financeira, como também há ausência de contexto. Consideramos uma perda de tempo e oportunidade, uma vez que esse exercício foge à proposta do capítulo, que é trabalhar matemática financeira e, por tratar-se de um assunto que está sempre presente no cotidiano das aulas de matemática, o aluno se esforçará em resolver o exercício e chegar à resposta, mas este esforço não se converterá em nenhum ganho para o aluno, no sentido de desenvolver habilidades críticas na matemática financeira.

Para encerrar as análises sobre esta bateria de exercícios, veremos o exercício proposto 17, que assim como o exercício 8, exige que os alunos modelem o problema com equações, aplicando porcentagens e resolvam um sistema, tal como no exercício 14, mas agora com um contexto financeiro.

17 *Lucas comprou um sofá, uma mesa de jantar e uma cama de casal, gastando no total R$ 3170,00. O sofá custou R$ 750,00 a mais que a mesa de jantar, e o preço da cama de casal é 45% do preço do sofá. Qual é o preço de cada mercadoria comprada*

por Lucas?

Ao final dessa seção, concluímos que há um grande número de exercícios sobre porcentagem, fixando muito bem o cálculo direto, que já é um conceito dominado pelos alunos a partir dos alunos regulares de um modo geral. Exercícios mais relevantes, com aplicação à matemática financeira, aparecem de modo exclusivo, não permitindo ao aluno outra chance de acertar o conceito abordado em tais situações financeiras. Em suma, o foco da seção é na aplicação instrumental do conceito de porcentagem, em detrimento das aplicações diversas sobre o conceito em situações comerciais.

Nenhum exercício proposto nessa seção apresenta um paralelo ao exercício resolvido R2.

Após seção de porcentagens, há um texto interessante sobre IPI – Imposto sobre Produtos Industrializados, que destaca o significado do termo *Alíquota*, trazendo dois exercícios: um deles sobre o que foi abordado no texto enriquecendo a discussão sobre a incidência de impostos e motivos sobre essa incidência e o outro, uma questão do ENEM de 2003 sobre tabagismo, sem nenhuma relação com o texto.

5.1.3 Acréscimos e descontos sucessivos

Por meio da resolução de um exemplo envolvendo três acréscimos sucessivos, modelando os acréscimos com a notação "100% + i_n" (n = 1,2,3) o desenvolvimento é feito passo a passo dos três acréscimos aplicados, chegando ao resultado final. Em seguida, é apresentada nova resolução do problema, iniciando com a apresentação de um produto único com as três notações "100% + i_n", seguido da transformação dessas notações para decimal, obtendo um resultado na forma decimal e fazendo finalmente a conversão desse resultado para porcentagem (100% + I) e, por meio dessa, o cálculo final é realizado, obviamente igual ao resultado obtido no primeiro método.

É destacado que o índice "I", obtido após o produto dos três fatores de aumento é equivalente aos três acréscimos sucessivos. Em seguida, o livro destaca a generalização do conceito de acréscimos sucessivos chegando à fórmula:

$$P_n = P_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_n)$$

Para o conceito de descontos sucessivos, o livro, novamente por meio de um exemplo, mostra a resolução do problema proposto de modo análogo aos acréscimos, agora com a escrita “100% - i_n”, chegando à generalização do conceito e à fórmula:

$$P_n = P_0(1 - i_1)(1 - i_2)(1 - i_3) \dots (1 - i_n)$$

Em seguida, o livro apresenta seis exercícios resolvidos com contextualizações interessantes e variadas sobre acréscimos e descontos, alguns, exclusivamente de acréscimos, outros exclusivamente sobre descontos e exercícios onde as duas situações estão presentes.

Vamos transcrever a resolução proposta pelo livro ao exercício R7, onde há o incentivo ao uso de calculadora científica, inclusive com uma breve explicação de como utilizar a função $\boxed{x^y}$ ou $\boxed{\wedge}$ e a apresentação do resultado de $1{,}001^4$ com 9 casas decimais de aproximação, tal como aparecera na calculadora.

R7 *Sobre uma fatura, é cobrado 0,1% de acréscimo sucessivo por dia de atraso. Por essa fatura foi pago R$ 311,24, com quatro dias de atraso.*

Determine o valor dessa fatura caso ela tivesse sido paga:

a) Em dia *b) Com um dia de atraso*

Resolução

a) O valor final da fatura é P = 311,24. Assim, segue que:

$$311{,}24 = P_0 \,.\, (1 + 0{,}001) \,.\, (1 + 0{,}001) \,.\, (1 + 0{,}001) \,.\, (1 + 0{,}001) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 311{,}24 = P_0 \,.\, 1{,}001^4 \Rightarrow P_0 \cong \frac{311{,}24}{1{,}004} \cong 310$$

Portanto, o valor da fatura paga em dia seria de aproximadamente R$ 310,00.

b) Do item a, temos que o valor inicial é aproximadamente R$ 310,00. Logo:

P = 310 . (1+0,001) = 310 . 1,001 = 310,31

Portanto, o valor da fatura paga com um dia de atraso seria aproximadamente R$ 310,31.

Podemos observar que, uma vez usando calculadora, não há necessidade de aproximar valores no meio da resolução. O cálculo todo poderia ser feito na íntegra, com todas as casas decimais que a calculadora fornece e aproximar o resultado final. Outro ponto importante é que, tal exemplo, transmite a ideia que "n" aplicações sucessivas da taxa "i" significa n.i, pois o resultado apresentado ocorre essa igualdade.

Este exemplo é inadequado. Uma vez que não corresponde à realidade. A incidência de juros nessa situação é chamada de *juros de mora*. É a única situação real em que ocorre a incidência de juros simples, pois a taxa de juros é pequena e o resultado do cálculo fica indiferente. Quando calculado a juros simples, aplicamos "n. i" ao capital, que é muito mais operacional do que aplicar $(1+ i)^n$.

Outro ponto a ser ressaltado, é que mesmo com a apresentação da resposta, paira a dúvida para o aluno mais atento: o valor pago será R$ 310,00 ou aproximadamente R$ 310,00? Aproximadamente R$ 310,31 ou exatamente R$ 310,31? Qual o valor exato sairá da minha conta?

O exercício resolvido R8 é uma questão do vestibular da FGV-RJ de 2003. Observemos a transcrição do enunciado e da resolução proposta pelo livro:

R8 *Um agricultor vende a um grande fazendeiro os tomates que cultiva, lucrando 20% sobre o custo. O fazendeiro, por sua vez, revende os tomates, lucrando também, 20% sobre o preço pago, a um intermediário que os vende a um grande supermercado, e este, ao público consumidor, cada um desses dois últimos lucrando, também, 20% sobre o que pagaram.*

a) Qual foi o percentual de aumento no preço do tomate, desde a origem (agricultor) até o consumidor final?
b) Mantidas as margens de lucro das etapas anteriores, qual deveria ser o ganho percentual aproximado do supermercado, para que o preço do tomate chegasse ao consumidor final com um aumento de 80% sobre o custo do agricultor?

Resolução

a) Multiplicando os fatores de atualização para os 4 acréscimos sucessivos de 20%, temos:

120% . 120% . 120% . 120% = 1,2 . 1,2 . 1,2 . 1,2 = 2,0736 = 207,36%

Portanto, o preço final do tomate teve um aumento de 107,36%

(207,36% – 100%)

b) Chamamos de x o fator de atualização feito pelo supermercado. Mantendo os acréscimos do agricultor, do fazendeiro e do intermediário, temos que:

$$120\% \,.\, 120\% \,.\, 120\% \,.\, X = 180\% \ (\acute{u}nico\ acr\acute{e}scimo\ de\ 80\%)$$

$$1{,}2 \,.\, 1{,}2 \,.\, 1{,}2 \,.\, x = 1{,}8 \Rightarrow 1{,}728 \,.\, x = 1{,}8 \Rightarrow x \cong 1{,}0417 \Rightarrow x \cong 104{,}17\%$$

Portanto, o lucro do supermercado deveria ser 4,17%.

(104,17% – 100%)

Acreditamos que, ao final desta bateria de exercícios resolvidos, faltou um destaque para o fato de quatro aumentos sucessivos de 0,1% não ser equivalente a um único aumento de 0,4% (embora as aproximações feitas levem a crer nisso). E que quatro aumentos de 20% não são equivalentes a um aumento de 80%.

A escolha dos exercícios foi adequada, mas com a falta deste comentário final, há um risco muito grande de haver uma falha conceitual, haja vista que, ao final do exercício resolvido R6, há uma pergunta em aberto sobre esta situação, que será considerada pelo aluno se ele efetivamente reler a resolução de R6 e se propuser a responder a essa pergunta em destaque.

A consolidação deste fato, de que aumentos sucessivos são calculados pelo produto dos fatores de aumento e não pela soma destes, deveria estar destacada ao final de tantos exemplos, assim como a fórmula foi destacada.

A preferência pelo destaque em fórmulas e não na evidência e revisão dos resultados concretos obtidos, motiva os alunos a se interessarem apenas pelas fórmulas e cálculos, sem a preocupação de avaliar ou analisar resultados obtidos, prejudicando o amadurecimento de senso crítico nos alunos.

Após a bateria de exercícios resolvidos, temos 13 exercícios propostos, coerentes com o que foi apresentado nos exemplos.

Um destaque (negativo) que pode ser feito nesta bateria de exercícios é o de número 32, transcrito a seguir:

32 *Para aumentar em 50% a área de um triângulo qualquer, quantos por cento devemos aumentar a medida da altura, se a medida da base for aumentada em 20%?*

Vemos que o exercício traz um pretexto geométrico para abordar aumentos sucessivos. Utilizo o termo pretexto para essa contextualização, pelo fato de estar inserido num capítulo de matemática financeira, há muitas situações reais nas quais o mesmo cálculo poderia ser exigido, sem fugir ao tema central do capítulo.

Um exercício como este poderia estar inserido na seção de áreas, no capítulo de geometria, onde seria coerente a retomada da ideia de aumentos sucessivos num contexto de cálculo de medidas de áreas.

Concluindo a análise dessa seção, comparando com a anterior, a diversidade de exercícios é menor. Em momento algum foi incentivado o uso de calculadoras, o que torna a resolução de tais exercícios um esforço desnecessário e demorado para a obtenção dos resultados. Existe uma contextualização dos exercícios, abrindo espaço para discussões e análises críticas, mas estas poderiam trazer situações mais concretas, como por exemplo, rendimentos da caderneta de poupança em um período de pelo menos seis meses, pagamentos de multas diárias em períodos diferentes, onde se fossem exigidas mudanças de unidade e o apoio de uma calculadora científica. Tais situações naturalmente apresentariam ainda mais discussões e visões críticas de aplicações da matemática financeira no cotidiano.

No *Contexto* seguinte, sobre o INPC após a descrição sobre o índice, é apresentada uma tabela com a variação do INPC de janeiro a junho de 2009 nas 11 regiões metropolitanas envolvidas.

Aqui ocorre um fato perigoso: num dos itens do exercício é pedida a variação do INPC no Brasil de janeiro a maio. Se o aluno somar os índices, o resultado é 2,3%. Calculando corretamente, multiplicando os fatores, obtém-se

2,32%. Essa diferença de 0,02 pode ser ignorada pelos alunos, considerando que ocorreu algum tipo de aproximação. Novamente, a oportunidade de reforçar o conceito central dessa seção não é feito. Principalmente se a leitura desse texto for realizada sem o acompanhamento do professor.

No item seguinte, o mesmo cálculo é pedido, mas de janeiro a junho em Fortaleza. Aqui, um dos índices é negativo, não há uma explicação clara do significado desse tipo de índice. Se o cálculo for feito de forma incorreta, por meio de somas, o resultado ficará muito distante da resposta correta, mas esse fato pode ser ignorado pelo aluno, uma vez que há parcelas negativas, apresentando um diferencial em relação ao item anterior, onde mesmo realizando o cálculo errado, a resposta "aproximadamente" correta é obtida.

A proposta do texto é a pesquisa, que talvez jamais seja feita, mas atrelar o conceito de acréscimos ou descontos sucessivos com a incidência de vários índices, obriga o uso de calculadora para a determinação do total acumulado, apenas em um texto no final da seção é um desperdício de uma ótima oportunidade de discussão sobre um tema mais do que atual e contextualizado.

5.1.4 Juros

A seção de juros é mencionada, juntamente com o seu significado implícito, por três situações rápidas:

- Quando uma pessoa realiza um empréstimo no banco, ela deve pagar, além da quantia emprestada, um valor a mais, correspondente ao juro, isto é, um tipo de "aluguel" pelo período em que o dinheiro ficou emprestado.
- Quando uma pessoa faz uma aplicação de certa quantia, seja em caderneta de poupança ou em outro investimento. Nesse caso a pessoa recebe juro de acordo com o período em que essa quantia ficou aplicada.
- Quando o pagamento de uma fatura é efetuado com atraso, esta é acrescida de juro correspondente ao tempo de atraso.

Em seguida, o livro define e apresenta siglas para Capital, juro (rendimento, acréscimo ou “aluguel” pago pelo investimento ou empréstimo de certa quantia), taxa de juros (porcentagem que se recebe de rendimento em um investimento ou que se paga pelo empréstimo de certa quantia), tempo e montante.

Percebemos aqui que não há um destaque para definições para juros, juros simples e juros compostos. Não é mencionado que a taxa de juros e o tempo devem estar na mesma unidade de tempo.

O livro inicia a seção de juros simples por meio de um exemplo tradicional, onde são apresentados os aspectos: capital, tempo e taxa de juros. É feito o cálculo de um mês de rendimento e em seguida, esse rendimento é multiplicado pelo período de aplicação.

Em seguida, é evidenciado que, para o cálculo dos juros, foram multiplicados capital, taxa e tempo e a fórmula $\boxed{j = c.i.t}$ é apresentada. É feita a verificação, por meio da substituição dos valores na fórmula, chegando-se ao mesmo resultado que o procedimento anterior para finalmente, apresentar o valor do montante pedido no enunciado do exemplo.

Com o término do exemplo, é apresentada novamente, e de maneira redundante, mas agora dentro de uma caixa colorida, a fórmula $\boxed{j = c.i.t}$, com uma (re)apresentação do significado das letras envolvidas na fórmula e, em seguida, é apresentada a fórmula para o cálculo do montante com as equivalências: $\boxed{M = c + j \Rightarrow M = c + c.i.t \Rightarrow M = c(1 + it)}$. Para finalizar as explicações, e o destaque colorido, é comentado que nas fórmulas, a taxa de juros deve ser expressa na forma decimal.

Na sequência do texto e sem destaque algum, é mencionado que a taxa de juros e o período de tempo devem estar numa mesma unidade de tempo, seguido de exemplos de conversões de taxa a.a. para a.m. por meio de divisão por 12 e a.m. para a.a. por meio de multiplicação por 12. Não é mencionada a possibilidade de a equiparação entre as unidades de tempo e taxa ser feita sobre a unidade de tempo.

Essa omissão caracteriza um problema em potencial; uma vez que, na seção de juros compostos, é mencionado apenas que tal procedimento, de multiplicar ou dividir por 12, não poderá ser feito nesse novo regime. O livro informa apenas que deverão ser feitos outros cálculos para se alcançar essa equivalência.

Para os exercícios resolvidos, são apresentados três de aplicação direta da fórmula, onde são cobrados em cada um, respectivamente, os juros, a taxa e o tempo. O quarto exercício resolvido é uma questão de vestibular da FGV-RJ de 2008, onde o grau de dificuldade é bem maior que os anteriores e num contexto em que a modalidade de juros aplicados é irrelevante, pois o período de tempo considerado é de um mês.

Vejamos a transcrição do exercício e a resolução proposta:

R12 *João comprou um televisor por R$ 1050,00 a ser pago em duas parcelas iguais: a primeira à vista, e a segunda após um mês. Se a loja cobra taxa de juros de 10% ao mês sobre o saldo devedor, o valor de cada parcela é:*

a) R$ 550,00 b) R$ 577,50 c) R$ 525,00 d) R$ 540,00 e) R$ 545,00

Resolução

Seja x o valor de cada parcela. Como a segunda parcela é o montante obtido sobre o saldo devedor, c = 1050 – x, com i = 0,1 e t = 1, então:

$$M = c(1 + i.t) \Rightarrow x = (1050 - x)(1 + 0{,}1.1) \Rightarrow x = (1050 - x).1{,}1 \Rightarrow$$

$$x = 1155 - 1{,}1x \Rightarrow 2{,}1.x = 1155 \Rightarrow x = 550$$

*Portanto, o valor de cada parcela é R$ 550,00, ou seja, alternativa correta é **a**.*

O comentário em que o saldo devedor corresponde à diferença entre o valor pago da dívida e o que já foi pago é apresentado em destaque num espaço na resolução do exercício.

Embora, de um modo geral, muitos alunos já tenham experiência com o conteúdo de juros simples e à estrutura financeira, respectivamente, devido às aulas de matemática financeira no ensino fundamental e à experiência de vida, não é adequada a construção de conhecimento omitindo definições formais de conceitos fundamentais e procedimentos de cálculo, presumindo que os alunos se recordem de aulas anteriores de outros segmentos ou que tais conceitos são elementares ou de senso comum.

Os quinze exercícios dessa seção são coerentes com a teoria exposta e com os exemplos propostos pelo livro. Observemos a transcrição de três exercícios dessa seção:

47 *Certo investidor aplicou simultaneamente, em regime de juros simples, durante 8 meses, dois capitais da seguinte maneira:*

- *Investimento A: R$ 5000,00 com taxa de juros de 3% a.m.*
- *Investimento B: R$ 4500,00 com taxa de juros de 42% a.a.*

a) Qual dos investimentos gerou o maior rendimento?

b) Se o investidor fizesse apenas uma aplicação, com todo o capital, qual deveria ser a taxa de juros simples mensal para obter a mesma rentabilidade?

Este exercício é interessante, pois, no item a, é apresentada uma análise e comparação entre duas situações diferentes onde, muito apropriadamente, a resposta correta é a de capital inicial menor. Uma excelente oportunidade para o professor explorar análises críticas dessa situação, levando o aluno a concluir que a taxa maior levará, ao longo do tempo, a montantes maiores. Paralelos com funções do primeiro grau são apropriados neste momento, inclusive com esboços dos gráficos do montante pelos meses de aplicação.

O item b também é interessante, pois para resolver o problema, o aluno precisa somar os capitais iniciais e utilizar, para o cálculo da taxa mensal, a soma dos montantes obtidos em cada aplicação separadamente.

50 *Um cliente tomou como empréstimo a importância de R$ 3500,00 de uma instituição financeira, por determinado período, com taxa de juros simples de 88,8% a.a., pagando ao final R$ 5313,00. Quantos meses durou esse empréstimo,* *considerando que cada mês tem 30 dias?*

Este exercício suscita a dúvida: "por que considerar meses com 30 dias?" Esta dúvida não é sanada em nenhuma parte do livro, deixando a responsabilidade para o professor. Com professores diferentes (com experiências e formações diferentes) falando sobre o tema, há garantias de que a informação dada seja adequada ou coerente com o trabalho proposto?

O próximo exercício é interessante. Ele apresenta uma situação real, onde há incidência de juros e também apresenta um contexto de tomada de decisão, mas a redação do comando do item b não incentiva esta análise a fim de se fazer uma escolha.

51 *Em certa loja, Daniele comprou uma geladeira no valor de R$ 2100,00, em duas parcelas iguais a R$ 1100,00: a 1ª no ato da compra, e a 2ª após 30 dias, acrescida de juros.*

a) Qual é a taxa de juros mensal cobrada por essa loja?
b) Quantos reais Daniele economizaria se pagasse o valor total à vista, sabendo que no pagamento à vista o consumidor tem 8% de desconto?

Na letra a, o aluno logo percebe que seu raciocínio está incorreto se o cálculo da taxa for feito sobre o total da compra.

A letra b seria muito rica para desenvolver raciocínio crítico sobre a situação: "Daniele tem dinheiro para pagar o valor à vista, que é de R$ 1932,00?". O pagamento à vista é uma opção caso se tenha a importância! E, uma vez tendo a importância, seria possível optar pelo plano parcelado e investir o dinheiro? Essas possibilidades de discussões não podem ser contempladas com o texto escrito na forma que está.

O ponto negativo detectado na resposta deste item é que, pelo gabarito, Daniele economizaria R$268,00. Pagando à vista, a economia é de R$ 168,00. Os outros R$ 100,00 de economia seriam após um mês, caso a opção fosse o pagamento parcelado. Foi feita a soma de valores em épocas diferentes, sendo que a taxa de juros não é considerada nula em momento algum, isso é um erro conceitual muito importante!

A seção de Juros Compostos inicia-se de modo análogo a de Juros Simples: apresentação ao tema por meio de um exercício indicando que os juros compostos são um caso particular de aumentos sucessivos, sendo que as taxas de acréscimo são todas iguais. É utilizada a fórmula de aumentos sucessivos e após o cálculo, é dada a solução do problema.

Em seguida é feita em destaque numa caixa colorida, a generalização da fórmula do montante de um capital aplicado a juros compostos:

$$\mathrm{M} = \mathrm{c}(1 + \mathrm{i}_1)(1 + \mathrm{i}_2)(1 + \mathrm{i}_3) \dots (1 + \mathrm{i}_\mathrm{n}), \text{em que } \mathrm{i}_1 = \mathrm{i}_2 = \mathrm{i}_3 = \cdots = \mathrm{i}_\mathrm{n} = \mathrm{i}$$

E, finalizando a apresentação da fórmula e considerando que n = t, conclui-se que $\mathrm{M} = \mathrm{c}.(1 + \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) \dots (1 + \mathrm{i})$ com n fatores (1+i) chegando a $\mathrm{M} = \mathrm{c}(1 + \mathrm{i})^\mathrm{t}$.

Após a fórmula, é feito um destaque, de que não é possível obter taxas equivalentes em períodos diferentes por meio da multiplicação ou divisão, assim como foi feito em juros simples. É mencionado apenas que é necessário outro tipo de cálculo.

Novamente há uma perda de oportunidade, uma vez que, na 2ª série do Ensino Médio, os alunos já possuem ferramentas e instrumentos para efetuar o cálculo de taxas equivalentes com ligeira praticidade.

Os quatro exercícios resolvidos apresentados na seção são tradicionais, com períodos de tempo curtos, de até quatro meses. É incentivado o uso da calculadora apenas no primeiro exercício e um dos exercícios resolvidos é uma reaplicação do exercício R7, exposto em páginas anteriores, só que agora, com a orientação de que se aplique imediatamente a fórmula $M = c(1 + i)^t$. O último exercício resolvido como exemplo é uma questão do ENEM de 1999 onde se pretende saber o tempo a que uma quantia deve ficar aplicada até atingir um determinado montante. A seguir, a transcrição do exercício juntamente com a resolução proposta:

R16 *João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R\$ 21000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R\$ 20000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.*

Para ter o carro, João deve esperar:

a) *dois meses, e terá a quantia exata*
b) *três meses, e terá a quantia exata*
c) *três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$ 225,00*
d) *quatro meses, e terá a quantia exata*
e) *quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$ 430,00*

Resolução

Utilizando a fórmula $\mathrm{M} = \mathrm{c}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}}$, *para c = 20000 e i = 0,02, temos:*

$$M = 20000(1+0{,}02)^t \Rightarrow M = 20000\,.\,1{,}02^t$$

Calculamos os valores obtidos pela aplicação ao final de dois, três e quatro meses:

- *t = 2* $M = 20000\,.\,1{,}02^2 = 20808{,}08 \longrightarrow R\$20808{,}08$
- *t = 3* $M = 20000\,.\,1{,}02^3 = 21224{,}16 \longrightarrow R\$21224{,}16$
- *t = 4* $M = 20000\,.\,1{,}02^4 \cong 21648{,}64 \longrightarrow R\$21648{,}64$

Note que, em três meses, o montante é aproximadamente R\$ 225,00 maior que o valor do carro, ou seja, a alternativa correta é c.

Não é exposto para o aluno outro tipo de resolução. Um problema equivalente, mas com um período de tempo maior, ficaria totalmente inviabilizado pelo trabalho necessário para realizar várias vezes o mesmo tipo de conta. Abordar esse exercício utilizando logaritmos e calculadora científica ou uma planilha eletrônica tornaria a resolução desse problema, que é muito adequado para o contexto atual, muito mais interessante e simples.

Nesta seção, mais do que em outras, as soluções vêm acompanhadas do termo *aproximadamente*. De fato, são feitas aproximações, inclusive no corpo do desenvolvimento e não só na resposta final, mas a questão que colocamos é: nesse momento, podemos abrir mão do preciosismo matemático em prol da contextualização do exercício? Num contexto no qual, pelos cálculos, o valor a ser pago é de R$ 272,04187. Qual seria o ganho pedagógico obtido ao dizer, em todas as situações, que o valor pago será de *aproximadamente* R$272,04? Na prática, efetivamente será esse o valor a ser debitado na conta corrente! O uso do "*aproximadamente*" embora correto do ponto de vista do rigor, não permite que se dê a resposta de modo categórico, abrindo espaço para questionamentos como: "mas na prática será esse valor mesmo?" Ou ainda, "se é esse valor é o que sairá da minha conta, porque dizer que ele é aproximado?".

São propostos oito exercícios ao final da seção, não havendo nada de especial ou diferente do que tradicionalmente é apresentado como exercícios sobre juros compostos. Destaque apenas para o exercício 57, que deve ser resolvido usando propriedades de logaritmos. É o único exercício desse tipo nesta bateria de exercícios, outro de resolução equivalente só aparece na seção de exercícios complementares. Em nenhum momento no capítulo, o conceito de logaritmo foi retomado, o que torna a execução desse exercício muito difícil de ser feita pelos alunos, carecendo do auxílio do professor e praticamente não tendo outra oportunidade para repetir esse modelo de exercício.

O contexto seguinte, fala sobre Previdência Social. Após um brevíssimo comentário sobre a possibilidade de o trabalhador optar por uma previdência privada para complementar a aposentadoria, o texto apresenta, sem demonstrações (formais ou informais) as fórmulas: $M = Q\,.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$, para o montante obtido após n meses aplicando Q reais, a uma taxa i a.m. e a fórmula $M = R\,.\left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t . i}\right]$, para se efetuar t retiradas de R reais, sobre um montante M. Em seguida, a transcrição do exemplo apresentado para a aplicação das fórmulas e as perguntas feitas ao final do texto:

Contexto *Para garantir um complemento de R$ 300,00 por mês dos 60 aos 85 anos,* *é preciso acumular cerca de R$ 46562,06; para uma renda de R$ 1000,00, esse número fica próximo de R$ 155206,86. As contas levam em consideração uma taxa real de juros de 0,5% a.m.*

Logo, é preciso poupar para garantir uma aposentadoria mais tranquila, e o valor a ser poupado varia conforme a renda mensal que cada pessoa deseja no futuro.

a) *A aposentadoria depende do tempo de contribuição e dos recolhimentos realizados. Pergunte aos seus pais ou conhecidos sobre o que eles sabem do assunto e depois compare sua resposta com a dos colegas*
b) *Calcule o valor aproximado do depósito Q que deve ser poupado mensalmente, durante 20 anos, com uma taxa mensal de juros de 0,5% a.m., para garantir, dos 60 aos 85 anos:*

- *R$ 300,00 mensais*
- *R$ 1000,00 mensais*

c) *Se uma pessoa investir mensalmente R$ 100,00 em uma aplicação financeira que oferece 0,5% de juros reais por mês, calcule o montante ao final de:*

- *10 anos*
- *20 anos*
- *30 anos*
- *40 anos*

d) *O que você pode concluir sobre o item c?*
e) *Suponha que uma pessoa aplique R$ 100,00 mensais durante 40 anos, com uma taxa real de juros de 1% a.m. Nessa situação, qual seria o valor acumulado ao final do período?*
f) *Deduza a primeira fórmula que relaciona a quantia M e o depósito Q, em reais.*

Lembre-se que a fórmula da soma dos n termos de uma PG finita é

$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$.

Este texto é muito rico! Mas é de difícil compreensão por parte dos alunos, uma vez que não há desenvolvimento dos cálculos feitos e as atividades de pesquisas propostas, nesta fase de escolaridade, são praticamente inviáveis, caso o professor não as incentive. A atividade de dedução de fórmulas, é também difícil de ser proposta, uma vez que não é praxe desta obra fazer demonstrações.

O livro não explica o significado da expressão *taxa real de juros*.

Acreditamos que textos como este, deveriam ser o foco principal do desenvolvimento da matemática financeira, pois é atual, totalmente contextualizado e desenvolve a cidadania e o senso de economia, indo na contra mão do que se vê hoje em dia, que é o consumismo extremo e imediato, ou seja, a necessidade de se ter sempre os produtos na versão mais moderna e etc.

5.1.5 Juros e Funções

Nesta seção, é feita uma correspondência entre juros (simples e compostos) e funções.

É estipulado um valor para capital e uma taxa a.a. e são analisada as duas modalidades de juros com esses valores.

Nos juros simples, é definida uma função juro $j = f(t): R_+ \to R$ e é feito o esboço do gráfico j x t. Em seguida, é definida a função montante $g(t): R_+ \to R$ e esboçado o gráfico M x t, informando que corresponde a uma função afim.

Agora, com juros compostos, é definida a função $M = h(t): R_+ \to R$ com os mesmos parâmetros para capital e taxa utilizados nos juros simples e também é feito esboço do gráfico M x t, informando que corresponde a uma função exponencial.

Ao final desse exemplo, sem generalização, é apresentado um exercício resolvido, envolvendo duas aplicações: uma a juros simples e outra a juros compostos. O interessante é que todos os parâmetros da aplicação de juros compostos são menores que a aplicação a juros simples e, pelo esboço e comparação dos gráficos, a aplicação a juros compostos supera rapidamente a outra aplicação. Mas não há explicações teóricas com base na natureza de crescimento das duas funções.

Há uma bateria de oito exercícios de escrita de funções, esboço de gráficos e análise de gráficos já montados. Não há análises críticas das situações propostas, apenas análises técnicas da construção, identificação da natureza da função e coleta de informações diretamente do gráfico.

Esta seção poderia estar diluída na seção de juros, permitindo aos alunos uma visão mais global do comportamento e significado das diferentes modalidades de juros, algo que não é feito em nenhum momento nessa obra. Em suma, ao final destas seções, o aluno é capaz de aplicar as fórmulas de juros simples e compostos, fazer gráficos da evolução do montante nas duas modalidades, mas não sabem *definir* o que são juros simples e compostos, mesmo consultando o livro à procura de uma frase ou conceito que os esclareça.

5.1.6 Sistema de amortização

Esta seção é um diferencial neste livro! Em nenhuma outra obra catalogada no PNLEM 2012 existe um tópico semelhante.

O livro, de maneira totalmente diferente das demais seções, define formalmente o que é Amortização - *processo de redução de uma dívida por meio de pagamentos parciais, que podem ser mensais, bimestrais, anuais, entre outros. Cada pagamento ou prestação realizado corresponde a juros e parte do capital, valor da dívida, sendo os juros calculados sobre o saldo devedor* - Relembrando ao aluno que saldo devedor é a diferença entre valor da dívida e o que já foi pago e mostra a composição de uma prestação no sistema de amortização, ou seja, *Prestação = Amortização + Juros.*

É dito que existem diferentes modelos de amortização, onde os principais, SAC e Price, são definidos e diferenciados, mas há o comprometimento apenas de estudar o sistema Price.

Não é mencionado qualquer motivo pela escolha do sistema Price, visto que, uma justificativa aqui seria muito construtiva, uma vez que esse motivo estimularia a visão crítica da matemática financeira. Não é incentivado o uso de qualquer planilha eletrônica, o que tornaria o estudo dessa seção muito atrativa e contextualizada, com objetivo de abrir a mente dos alunos e facilitar a queda de vários “tabus” da matemática financeira, como a não observância de que quantias possuem valores diferentes ao longo do tempo e de que não é correto somar valores em diferentes épocas.

É apresentada a fórmula $P = \frac{c\,.\,i}{1-(1+i)^{-n}}$ (sem nenhuma demonstração), seguida de um exemplo para o cálculo da prestação em cinco parcelas de um empréstimo e uma tabela informando: parcelas, juros, amortização e o saldo devedor.

Finalizando a apresentação teórica, é informado, no site do Banco Central www.bcb.gov.br/?PRESTFIXA, a calculadora do cidadão, que permite calcular, em financiamentos no sistema Price, qualquer um dos quatro parâmetros: número de meses, taxa de juros mensal, valor da prestação e valor financiado, bastando apenas informar os outros três.

É apresentado um exemplo resolvido equivalente ao exemplo dado para ilustrar o conceito, seguido de seis exercícios propostos muito bem contextualizados e variados.

Observemos a transcrição de um dos exercícios propostos:

73 Felipe trocará seu automóvel usado por um novo que custa R$ 32000,00. Ele dará seu automóvel como entrada, no valor de R$ 9000,00, e pagará o restante em 48 parcelas mensais, com juros de 1% a.m. no sistema Price.

a) Calcule o valor de cada parcela paga por Felipe.
b) Quantos reais de juros Felipe pagará?

Faremos aqui uma ressalva: o item b é totalmente inapropriado. Ele sugere que seja feita a soma das 48 parcelas e que seja verificada a diferença entre este valor e o saldo devedor após a entrada. Nenhuma das 48 parcelas está na mesma data que o saldo devedor e, mais uma vez, não é propagada a ideia de que não é possível somar valores em épocas diferentes.

O *Contexto* apresentado no final da seção traz uma boa abordagem sobre poupar para comprar à vista ou pagar parcelado. É uma excelente discussão:

ter o bem de consumo imediatamente, pagando juros e parcelamentos ou esperar um pouco mais e comprar à vista, muitas vezes adquirindo um produto mais moderno, dependendo do objeto da compra. É fato que nem sempre o consumidor pode juntar o dinheiro necessário em tempo conveniente para comprar um produto. O fato de promover esta discussão gera ganhos, já que é absolutamente pertinente nesta fase da vida, pois que o aluno ainda não está totalmente inserido nesse mundo, ou seja, ainda não tem contas a pagar, não tem dívidas e ainda está planejando seu futuro profissional. O aluno pode, Inclusive, levar essa discussão para casa e contribuir para a educação financeira dos pais, encontrando um sentido muito pertinente para o que se aprende em sala de aula.

Mais uma vez observamos que são feitas perguntas ao final do texto, que levam o aluno a reforçar um conceito incorreto de somar valores em épocas diferentes, dando a falsa impressão de que, comprando um produto com um parcelamento maior, pagar-se-á mais. De fato, somando tais parcelas (em épocas diferentes) o resultado é maior. Porém, trazendo todas as parcelas para a data de pagamento à vista, o resultado deste somatório é igual ao pagamento à vista.

O inconveniente que poderia ser mencionado numa compra à prazo é: adquirir um bem de consumo hoje e pagar durante muitos meses por este bem e comprometer parte do salário por um tempo muitas vezes maior que a vida útil do próprio bem, é algo questionável. Estas parcelas significam uma diminuição do salário do consumidor, impondo uma diminuição no orçamento familiar que, com o passar do tempo, tornam-se pesadas, pois não existe mais a satisfação de estar pagando por uma novidade que incrementou a vida da família e geralmente, estes parcelamentos não estão sozinhos no orçamento. Esta situação acaba impondo a família a se adaptar a uma realidade econômica menor que antes da compra.

Ao final dessa seção, há um texto publicado na revista *Superinteressante* sobre uma curiosidade: *"Quanto dinheiro existe no mundo?"* assinado por *Luciana Farnesi*. (disponível em http://super.abril.com.br/superarquivo/2006/conteudo_458646.shtml, acesso em 27 abr.2009). Infelizmente, a resposta dessa pergunta é impossível.

Encerrando o capítulo, são propostos dez exercícios complementares, que revisam todo o conteúdo dado.

Concluindo a análise deste livro, podemos constatar momentos de inovação na abordagem da matemática financeira e momentos de extremo tradicionalismo, inclusive fugindo ao tema do capítulo. Não foi amplamente incentivada a utilização de recursos tecnológicos e, nos poucos momentos em que recursos foram utilizados, o foram de maneira secundária, aproximando valores sem necessidade, uma vez que os cálculos eram feitos na calculadora, e não foram feitos comentários sobre essas aproximações, muitas vezes sem sentido, uma vez que os contextos envolvidos careciam de precisão, pois se tratava de pagamentos.

Poucas definições, justificativas embasadas e nuances da matéria foram oferecidas de modo claro para o aluno, podendo propiciar o estudo de matemática financeira com uma boa habilidade nos cálculos, mas não são capazes de dar significados a esses cálculos e também não são capazes de entender termos e situações elementares.

Percebemos que as definições de alguns conceitos não foram realizadas de modo satisfatório, pois em nenhum momento o autor esclarece explicitamente o significado de termos, como por exemplo, juros e taxa de juros, bem como a necessidade de taxas de juros e tempos se enquadrarem na mesma unidade de medida.

5.2 Matemática – Ciência, Linguagem e Tecnologia

O primeiro capítulo do Livro 2 é dedicado inteiramente à matemática financeira. A estrutura do capítulo é: Introdução, Proporção Numérica, Porcentagem, Acréscimo e desconto, Juros e Juros e funções. Ao final do capítulo há três textos complementares sobre investimentos, cartões de crédito e compras à vista.

O capítulo apresenta na introdução um infográfico sobre o início da crise americana de 2008, com as grandes quedas de bolsas de valores e grandes instituições financeiras norte-americanas no setor imobiliário.

5.2.1 Proporção numérica

A seção começa apresentando informações nutricionais de alimentos, em uma tabela, especificando quantidades em porções e os respectivos valores energéticos.

Em seguida, são feitas razões entre os valores expostos e constata-se que todas possuem a mesma razão, definida como coeficiente de proporcionalidade. A partir daí, são definidos os conceitos de razão, proporção e são dadas nomenclaturas de meios e extremos. É feita também uma correspondência entre essas proporções e a função linear.

São apresentados exemplos de cálculos de quarta proporcional e problemas envolvendo razões, aplicados a situações financeiras. Os doze exercícios propostos são coerentes com o que se foi trabalhado nos exemplos.

Os conceitos foram revisados claramente e com uma linguagem adequada para alunos de 2ª série de Ensino Médio, fazendo dessa seção um excelente resumo de razões e proporções do 7º ano e não traz grandes dificuldades para a resolução dos alunos, uma vez que os níveis de dificuldade variam de simples para moderados. Entretanto, as questões propostas não trazem discussões pertinentes visando o desenvolvimento crítico em matemática financeira.

5.2.2 Porcentagem

A seção inicia-se com uma informação estatística do IBGE sobre a realidade brasileira acerca dos bens de consumo. Esta informação pode ser escrita na forma de razão centesimal e logo em seguida, é apresentado o conceito de porcentagem. O livro apresenta três exemplos simples envolvendo escrita de porcentagem, cálculo percentual e correspondência entre a escrita percentual e parte do inteiro. Em seguida, dois exercícios resolvidos são apresentados. O primeiro deles, com nível de dificuldade similar aos exemplos, sobre porcentagens complementares e é resolvido de duas maneiras: a primeira aplicando a porcentagem, calculando o complementar e a segunda maneira, calculando a porcentagem complementar e utilizando-a sobre o total. O segundo exercício resolvido é uma questão do ENEM de 2001.

Os doze exercícios propostos ao final dessa seção são muito simples, não trazendo nenhuma situação desafiadora para alunos regulares de 2º ano de Ensino Médio. Não há exercícios que estimulem tomadas de decisão nem discussões sobre cidadania.

A única exceção é o exercício 24, transcrito a seguir, que apresenta a composição de uma conta de energia elétrica, que além da cobrança da energia propriamente dita, contribuem para o valor final da fatura: gastos com distribuição, encargos setoriais, transmissão e tributos.

24 *Como é composto o valor da sua conta de luz:* *Na fatura mensal de energia elétrica, estão inclusos, no valor total, não somente a energia elétrica consumida, mas também outros custos de serviços e tributos.*

Energia elétrica- R$ 56,93

Distribuição- R$ 45,27

Encargos Setoriais- R$ 11,74

Transmissão- R$ 6,84

Tributos (ICMS,PIS-Pasep/Cofins)- R$ 29,22

a) *Dentre os custos apresentados, qual representa a maior parte do valor total da fatura?*
b) *Que porcentagem representa o custo de cada serviço e tributos incluídos, em relação ao valor total da fatura?*
c) *Se em determinada fatura foram pagos R$ 19,48 em tributos, quanto foi pago no custo da transmissão?*

Ressaltamos que não há referências nesse exercício sobre o grau de veracidade desses dados, assim como a região onde tal cobrança é aplicada (se ela for real), e se todas as parcelas componentes da fatura possuem alguma relação proporcional com o gasto efetivo de luz ou alguma parcela fixa comum a todas as residências com as mesmas características.

5.2.3 Acréscimo e desconto

A inflação é o tema introdutório dessa seção. Há uma explicação sobre termo e também sobre *hiperinflação* e a exposição de uma reportagem ilustrativa.

O livro define o termo acréscimo e lista três tipos de acréscimos: simples, simultâneo e sucessivo, todos eles seguidos de exemplos claros diretos, contextualizados e com duas maneiras diferentes de resolução. Sempre com o caso em que os acréscimos são calculados diretamente do total e de modo separado e a 2ª maneira, com um cálculo mais direto, respectivamente expressando os acréscimos como "100% + i", "100% + (i_1 + i_2)" e também "(100% + i_1) . (100 + i_2)", fazendo as respectivas conversões das taxas para a forma decimal.

Após os exemplos, o livro nomeia os fatores na forma decimal de "(100+i_n)" como *fatores de atualização* e formaliza o conceito de acréscimos sucessivos, chegando à fórmula $P = P_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \ldots (i + i_n)$.

O livro apresenta cinco exercícios resolvidos, sendo um de cada para os acréscimos simples e simultâneos e três para acréscimos sucessivos, com uma boa contextualização e incentivando o uso de calculadora. Há uma figura ilustrando o uso da tecla $\boxed{x^y}$.

Transcreveremos a resolução proposta pelo livro ao exercício resolvido R10, que é muito semelhante ao exercício R8 do livro analisado anteriormente, mas com uma contextualização um pouco diferente, onde não é difícil supor que esse processo de intermediação não corresponda à realidade, uma vez que o leite só receberá processamento após a segunda etapa de comercialização.

R10 *Alberto é produtor de leite e vende sua produção a um grande fazendeiro, com* *lucro de 15% sobre o custo. O fazendeiro, por sua vez, revende o leite a uma cooperativa, obtendo lucro de 10% sobre o preço pago. Após processar o leite, a cooperativa obtém lucro de 30% sobre o preço pago ao fazendeiro com a venda ao consumidor.*

a) *Qual é o percentual de aumento no preço do leite do produtor:*
   - *À cooperativa*
   - *Ao consumidor?*

b) *Se o lucro do produtor e do fazendeiro se mantiver, qual deveria ser o ganho percentual aproximado da cooperativa para que o preço do leite tenha um aumento de 70% em relação ao custo do produtor?*

Resolução

a) *Multiplicando os fatores de atualização, temos:*

- *115% . 110% = 1,15.1,1 = 1,265 = 126,5%*

  Portanto, o percentual de aumento do produtor à cooperativa é <u>26,5</u>%.

  (126,5% – 100%)

- *115% . 110% . 130% = 1,15 . 1,1 . 1,3 = 1,6445 = 164,45%*

  Portanto, o percentual de aumento do produtor ao consumidor é <u>64,45</u>%.

  (164,45% – 100%)

b) *Como o lucro do produtor e do fazendeiro serão mantidos, chamamos de x o acréscimo da cooperativa e calculamos:*

$$115\% \,.\, 110\% \,.\, \mathrm{x} \;=\; \underbrace{170\%}_{\text{(único acréscimo de 70\%)}} \Rightarrow 1{,}15 \,.\, 1{,}1 \,.\, \mathrm{x} = 1{,}7 \Rightarrow 1{,}265.\mathrm{x} = 1{,}7$$

$$\mathrm{x} \;\cong 1{,}3439 = 134{,}39\%$$

Portanto, o lucro da cooperativa deveria ser de 34,39%

Na resolução do item a, poderia ter sido aproveitado o cálculo do aumento da cooperativa para o consumidor, fazendo apenas 1,265 . 1,3. Isso propiciaria ao aluno uma sofisticação maior nas estratégias de cálculo e economia de tempo nas contas, reduzindo a margem de erro de cálculo. Não apresentar essas possibilidades versáteis limita a aprendizagem, impossibilitando o amadurecimento do aluno.

Com os exemplos do livro, não há preocupação em sobrecarregar a escrita com o termo *aproximadamente*. Na resolução há o símbolo ≅ sempre que se faz necessário, mas no momento da resposta, é apresentado o valor sem a menção de que este foi fruto de aproximações, propondo assim, uma conjuntura muito mais prática de ser lida e contundente para o aluno.

Há dez exercícios sobre os diferentes tipos de acréscimos, todos eles coerentes com o que foi abordado nos exemplos. Analisaremos o exercício 29, que apresenta um texto com detalhes muito sutis e o exercício 33, que define a expressão *aumento real*, que é uma expressão absolutamente atual, mas que tradicionalmente não é trabalhada em sala de aula.

Nenhum exercício dessa seção apresenta contexto envolvendo tomadas de decisão, embora aconteçam contextualizações interessantes, como as transcritas a seguir:

29 *Incide sobre certa fatura, quando paga em atraso, uma multa de 5%. Além da multa, há um acréscimo de 0,5% por dia de atraso sobre o valor da fatura. Sabendo que foram pagos R$ 49,50 por uma fatura com dez dias de atraso, determine o valor se ela tivesse sido paga em dia.*

A expressão “0,5% por dia” deveria ser mais bem trabalhada, uma vez que existe a expressão “0,5% ao dia”. Uma sutileza que encaminha a diferentes procedimentos para o cálculo, sendo de competência do mesmo assunto abordado.

33 *Em um acordo entre o sindicado e as empresas de certa categoria, estabeleceu-se que seria realizado um reajuste de 7% referente à inflação do período e 4% de aumento real, ou seja, 4% de aumento sobre o salário após a reposição da inflação. Qual era o salário, antes do aumento, de um funcionário que passou a receber R$ 834,60?*

Ao ler o exercício, o aluno aumenta o seu vocabulário financeiro, sendo capaz de compreender um termo comum em noticiários em todo o Brasil e, consequentemente, crescendo como cidadão, sendo capaz de analisar de modo mais crítico e fazer avaliações mais embasadas sobre situações financeiras que atingem diretamente a sua realidade.

A seção de Desconto traz como assunto introdutório o IPI, com destaque para o termo *alíquota* e uma matéria de jornal ilustrativa, tal como na seção de acréscimos. É definido o termo desconto e apresentado três tipos de desconto: simples, simultâneos e sucessivos, com exemplos e desenvolvimentos análogos ao estudo de acréscimos, finalizando a seção com a fórmula de descontos sucessivos $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0(1\text{-}\mathrm{i}_1)(1\text{-}\mathrm{i}_2)(1\text{-}\mathrm{i}_3)\dots(1\text{-}\mathrm{i}_n)$.

São resolvidos quatro exercícios, sendo que o último envolve o conceito de acréscimos e descontos sucessivos. Todas as resoluções são feitas de maneira única e detalhada, apresentando evolução no estilo de apresentar desenvolvimentos. A seguir, temos a transcrição da resolução de um desses exercícios:

R13 *Um veículo novo custa R$ 30000,00 e sofre depreciações de 20% e 15% nos dois primeiros anos, respectivamente, e certa depreciação x nos anos posteriores. Determine a taxa x de depreciação depois do segundo ano, sabendo que após três anos de uso o valor do veículo é de R$ 19380,00.*

Resolução

A taxa de depreciação (desconto) incide sobre o valor do veículo no ano anterior. Dessa forma, utilizaremos descontos sucessivos na resolução.

$$P_3 = P_0(1-i_1)(1-i_2)(1-i_3) \Rightarrow 19380 = 30000(1-0{,}20)(1-0{,}15)(1-x)$$

$$19380 = 30000.0{,}68.(1-x) \Rightarrow 19380 = 20400 - 20400x \ \Rightarrow x = \frac{1020}{20400}$$

$$x = 0{,}05 \ ou \ x = 5\%$$

Portanto, após o segundo ano a taxa de depreciação do veículo é de 5%

Os oito exercícios são coerentes com o que foi exposto nos resolvidos, mas possuem um nível de dificuldade baixo, não sendo desafiadores para os alunos. Destaque para o exercício 38, que fornece uma imagem sugerindo promoção de um laptop, solicitando que o aluno elabore uma questão com esse tema, o exercício 39, que explica o significado de Taxa de câmbio e cotações do dólar e o exercício 42 que apresenta uma situação de aumento e logo em seguida, pede-se o fator de desconto para que o preço retorne ao seu valor inicial, antes do aumento.

Todos os exercícios visam aplicação direta do conceito e destreza em cálculos, não sendo sugerido o uso de calculadora ou planilha eletrônica. Não há exercícios sobre tomadas de decisões, mas os contextos abordados nos exercícios permitem comentários, por parte do professor, que despertem a consciência crítica dos alunos.

5.2.4 Juros

A seção começa com uma situação de rendimento de uma aplicação em banco conduzida de modo diferente: é informado o valor aplicado e o rendimento após um mês. É apresentada a razão do rendimento e a aplicação em forma de porcentagem e, em seguida, rendimento e porcentagem são “batizados” de juros e taxa de juros. Em seguida, é dito que outra situação envolvendo juros refere-se a pagamentos de empréstimos, dando a ideia de que os juros equivalem a um pagamento de aluguel pelo dinheiro emprestado.

As nomenclaturas tradicionais em matemática financeira são apresentadas, juntamente com as respectivas siglas e é dado o prosseguimento para o estudo de Juros Simples.

O estilo para introduzir a seção é interessante, uma breve história com todas as informações ao invés de uma introdução com estrutura de exercício resolvido (onde o aluno simplesmente observa a resolução) ou afirmações gerais sobre o assunto (onde o aluno “viaja” sem saber direito do que se trata). A postura passiva do aluno nesse momento é a mesma em qualquer situação, mas o texto, resume de forma satisfatória e direta a ideia que pretende transmitir. Vejamos a transcrição desta situação introdutória:

> *Gisele fez uma aplicação de R$ 1000,00 em um banco. Após um mês, essa aplicação havia rendido R$ 8,00, o que corresponde a 0,8% do valor investido.*
>
> *Os R$ 8,00 recebidos por Gisele são referentes ao juro sobre o dinheiro aplicado. Nesse caso, a taxa de juros foi de 0,8% ao mês.*

Na parte de Juros Simples, a primeira informação dada é que os juros incidentes sobre uma aplicação ou empréstimo podem ser simples ou compostos. Logo em seguida, é definido que os juros simples são aqueles incidentes sobre o capital inicial.

Por meio da análise da resolução de um exemplo, constata-se que, para obter os juros simples no período, ocorreu a multiplicação entre capital, taxa e tempo, seguida da expressão $\boxed{j = c.i.t}$, e é obtido o montante da aplicação.

Destacamos novamente a apresentação do cálculo dos juros e a fórmula para o Montante e, em uma caixa ao lado, com igual destaque, a informação de que taxa de juros e tempo devem estar na mesma unidade, com exemplos no decorrer do texto.

Nos três exercícios resolvidos, embora a abordagem seja tradicional e comum , os dois primeiros apresentaram um contexto no qual era necessário fazer conversões para adequar taxa e tempo, mas todas as conversões foram feitas sobre o tempo.

São propostos dez exercícios coerentes, que foram resolvidos como exemplo, destacando-se o de número 50, que envolveu taxa de juros e tempo com unidades diferentes e divisão proporcional, dando um pouco de sentido à revisão feita desse assunto no início do capítulo e o de número 52, que foi uma questão do processo seletivo da UFPR de 2008, proposta no livro como atividade em grupo e, ao final da questão, são feitas sugestões de pesquisa acerca de: valores mínimos para investimento em fundos de ações, renda fixa e poupança; existência de taxas administrativas e impostos cobrados sobre investimentos; possibilidade de resgate do dinheiro investido a qualquer momento e qual melhor modalidade de investimento nas condições do problema proposto.

A abordagem de Juros Compostos começa com um texto veiculado no "*Últimas notícias" do site da Associação Brasileira de Bancos* e assinado por "32 respeitados especialistas em Matemática Financeira e acadêmicos brasileiros", acessada em 28 de Novembro de 2009 no site www.abbc.org.br sobre ações judiciais movidas contra bancos e construtoras devido ao regime de financiamentos habitacionais atual, que utiliza o sistema Price de amortização de dívidas. O texto define o significado dos Juros compostos de maneira clara e rápida. O livro utiliza a definição dada pelo texto para trabalhar o conceito de juros compostos, fazendo associações com o que foi exposto na seção de acréscimos sucessivos.

Em nenhum outro momento o livro trata de amortizações, o que consideramos uma perda de oportunidade de ilustrar, de modo mais concreto para os alunos, do que se trata o texto introdutório, além de abordar um dos temas de maior importância para a formação crítica do indivíduo na matemática financeira.

Seguindo o estudo de juros compostos, o livro informa que este é um caso particular de acréscimos sucessivos e utiliza desse fato para resolver um exercício como exemplo, com um período de tempo de três meses. Ao final do exemplo, o livro generaliza o conceito, chegando à fórmula do cálculo do montante com incidência de juros compostos.

É incentivado nos seis exemplos e exercícios resolvidos apresentados, o uso de calculadora, mas não foi feita nenhuma observação sobre o que fazer caso a taxa de juros e o tempo estejam em unidades diferentes. Apenas em um exemplo houve a necessidade de mudança de unidade, onde o tempo estava apresentado em dias e a taxa, a.m., o tempo foi transformado imediatamente para meses sem ter sido feito qualquer comentário, nem mesmo assinalando que ocorreu mudança de unidade para a resolução. Transcreveremos a seguir o exercício resolvido R20, onde se fez necessário alguns cálculos com logaritmos e de maneira muito perspicaz, não foram dados valores dos logaritmos necessários, deixando para os cálculos serem feitos em calculadora.

R20 *Maria investiu R$ 3000,00 a juro composto de 3% a.m. com a intenção de, com os rendimentos obtidos, comprar uma televisão de R$ 800,00. Por quantos meses, no mínimo, o capital deve ficar aplicado?*

Resolução

Quando o investimento de Maria render R$ 800,00, o montante será M = 3800. Assim:

$$M = c.(1+i)^t \Rightarrow 3800 = 3000(1+0{,}03)^t \Rightarrow \frac{3800}{3000} = (1{,}03)^t \Rightarrow (1{,}03)^t = \frac{19}{15}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência e com auxílio de uma calculadora científica, determinamos o valor de t.

$$(1{,}03)^t = \frac{19}{15} \Rightarrow \log(1{,}03)^t = \log\frac{19}{15} \Rightarrow t.\log 1{,}03 = \log\frac{19}{15} \Rightarrow t = \frac{\log\frac{19}{15}}{\log 1{,}03} \cong 8$$

Portanto, o capital deve ser aplicado por, no mínimo, 8 meses.

São propostos doze exercícios e um desafio, com algumas contextualizações incomuns, como a dos exercícios 53 e 54, onde se faz um empréstimo e este empréstimo é quitado em pagamento único após um período. Sobre esses exercícios, seria interessante realizar uma análise comparativa com amortizações no sistema Price (considerando que já mencionaram este sistema), juntamente com tabulações sobre essas duas maneiras de amortização da dívida, com o objetivo de salientar o fato de não ser correto somar valores em épocas diferentes. Os demais exercícios trazem contextualizações tradicionais e coerentes com o que foi apresentado nos exemplos e exercícios resolvidos.

Transcreveremos dois exercícios deste bloco, ambos retirados de vestibulares, nos quais são verificadas duas contextualizações excelentes:

59 (UPE – 2008) *Dan deve uma importância C em um determinado cartão de crédito. Ele resolve não utilizar mais o cartão e pagar mensalmente 30% do valor da fatura. Se o cartão cobra juro de 12% ao mês, lançados sobre o saldo devedor, antes de enviar a fatura, após 10 meses, quanto Dan deve ao cartão?*

a) 0   b) $(0{,}7)^{10}$. C   c) $(0{,}82)^{10}$. C   d) $(0{,}784)^{10}$. C   e) $(0{,}824)^{10}$. C

Esta situação deve assolar milhares de brasileiros. Analisá-la em sala, inclusive terminando os cálculos, para que vejam claramente que ainda faltam mais de 8% da fatura a ser paga, permitirá que os alunos conheçam os riscos da má utilização de cartões de crédito antes que recaia sobre a maioria deles, a responsabilidade de pagá-los.

63 (Unesp - 2005) *Mário tomou um empréstimo de R$ 8000,00 a juros de 5% a.m.*

Dois meses depois, pagou R$ 5000,00 do empréstimo e, um mês após esse pagamento, liquidou o seu débito. O valor do último pagamento foi de:

a) R$ 3015,00 b) R$ 3820,00 c) R$ 4011,00 d) R$ 5011,00 e) R$ 5250,00

O desafio no final desta bateria de exercícios é interessante. Ele apresenta maior complexidade, devido à necessidade de utilizar várias habilidades diferentes para resolvê-lo: estruturar o raciocínio desenhando linhas de tempo e modelar o problema com uma equação do 2º grau. Sem dúvidas, trata-se de um exemplo bastante rico, abarcando tópicos diferenciados da matemática e com estratégias de solução pouco usuais.

Desafio (FGV/SP -) *O Sr. Vitor costuma aplicar suas economias num fundo que rende juros compostos.*

a) Se ele aplicar hoje R$ 10000,00 e R$ 20000,00 daqui a 1 ano, qual seu saldo daqui a 2 anos, se a taxa for de 15% a.a.?

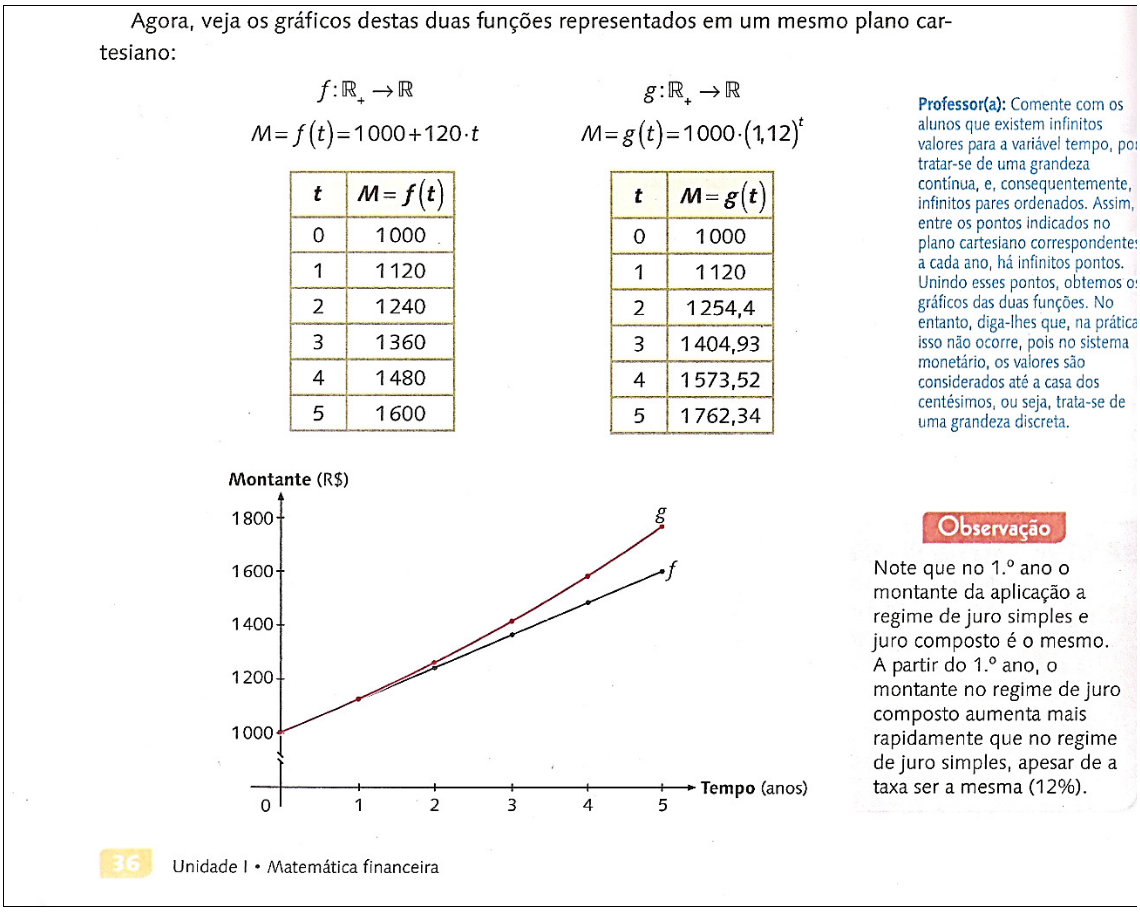
b) Se ele aplicar hoje R$ 30000,00, sacar R$ 10000,00 daqui a um ano, sacar R$ 20000,00 daqui a 2 anos e ainda ficar com um saldo de R$ 11200,00 nessa data, qual a taxa anual de aplicação?

5.2.5 Juros e funções

As relações entre Juros Simples e função afim e Juros Compostos e função do tipo exponencial são feitas a partir de um mesmo exemplo, onde são nomeadas as funções f e g, respectivamente, para o Montante calculado a juros simples e a juros compostos. São escritas as leis de formação para f e g, com as respectivas tabelas com seis entradas para a evolução do montante.

Ao fazer os esboços dos gráficos das funções, o livro utiliza apenas um plano cartesiano, com o intuído de encerrar a comparação entre os dois tipos de juros. Nesse momento, é observado em nota que “no 1º ano o montante da aplicação a regime de juro simples e juro composto é o mesmo. A partir do 1º ano, o montante no regime de juro composto aumenta mais rapidamente que no regime de juros simples, apesar de a taxa ser a mesma. “Há uma sugestão no livro do professor para comentar com os alunos que “existem infinitos valores para a variável tempo, por tratar-se de uma grandeza contínua e, consequentemente, infinitos pares ordenados. Assim entre os pontos indicados no plano cartesiano correspondentes a cada ano, há infinitos pontos. Unindo esses pontos obtemos os gráficos das duas funções. No entanto, é relevante ressaltar que, na prática, isso não ocorre, pois no sistema monetário, os valores são considerados até a casa dos centésimos, ou seja, trata-se de uma grandeza discreta."

Observando o esboço do gráfico, podemos perceber que, entre 0 e 1 ano, os traços das funções f e g estão sobrepostos, levando à falsa conclusão de que o comportamento das duas funções é idêntico nesse intervalo.



Agora, veja os gráficos destas duas funções representados em um mesmo plano cartesiano:

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$M = f(t) = 1000 + 120 \cdot t$

t	$M = f(t)$
0	1000
1	1120
2	1240
3	1360
4	1480
5	1600

$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$M = g(t) = 1000 \cdot (1{,}12)^t$

t	$M = g(t)$
0	1000
1	1120
2	1254,4
3	1404,93
4	1573,52
5	1762,34

Professor(a): Comente com os alunos que existem infinitos valores para a variável tempo, po[r] tratar-se de uma grandeza contínua, e, consequentemente, infinitos pares ordenados. Assim, entre os pontos indicados no plano cartesiano correspondente[s] a cada ano, há infinitos pontos. Unindo esses pontos, obtemos o[s] gráficos das duas funções. No entanto, diga-lhes que, na prátic[a] isso não ocorre, pois no sistema monetário, os valores são considerados até a casa dos centésimos, ou seja, trata-se de uma grandeza discreta.

Observação

Note que no 1.º ano o montante da aplicação a regime de juro simples e juro composto é o mesmo. A partir do 1.º ano, o montante no regime de juro composto aumenta mais rapidamente que no regime de juro simples, apesar de a taxa ser a mesma (12%).

36 Unidade I • Matemática financeira

A escala adotada para os eixos é correta, mas contribui para essa falsa impressão pela natureza dos dados envolvidos. O gráfico apresenta uma quebra no eixo y, pois os dados considerados estão distantes da origem e, sem a quebra, demandaria um espaço maior na folha para o esboço, o que certamente seria inconveniente. Para eliminar o equívoco na interpretação da leitura, deveria estar destacada em uma janela a ampliação do comportamento das funções no intervalo [0,1].

Os seis exercícios deste bloco, envolvem a escrita da lei de formação do montante em função do tempo (aplicado às duas modalidades de juros) e um exercício que sugere análise e tomada de decisões, mas com um contexto incomum, onde é feita uma compra pagando a entrada e não é estipulado o tempo em que será feito o pagamento da segunda parcela, liquidando o pagamento da conta. A seguir, a transcrição desse exercício:

70 *André comprou uma TV que custa R$ 1000,00. Para realizar o pagamento, ele tinha duas opções:*

Opção 1 *Entrada de R$ 200,00 e o restante em uma única parcela acrescida a taxa de juro composto de 1,5% a.m.*
Opção 2 *Uma entrada de R$ 400,00 e o restante em uma única parcela acrescida a taxa de juro simples de 1,5% a.m.*

a) *Escreva a função:*
- *f que represente o valor pago pela TV em função do tempo t para a opção 1*
- *g que represente o valor pago pela TV em função do tempo t para a opção 2*

b) *Esboce, em um mesmo plano cartesiano, as funções f e g.*

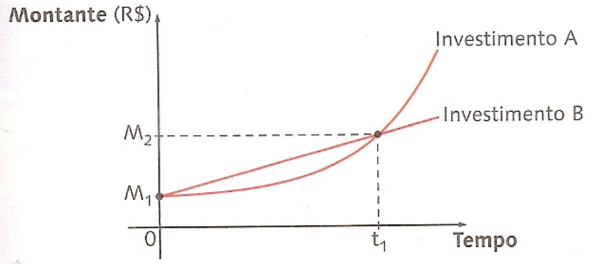
c) *Entre as opções apresentadas, qual será mais vantajosa para o consumidor, caso o restante da dívida seja pago:*
- *Em até 3 meses?*
- *Após 5 meses?*

O contexto desse exercício não é plausível! Uma loja não fornecerá opções para pagamento sem fixar uma data. O mesmo exercício poderia ser apresentado, mas com um contexto de empréstimo entre familiares, onde as regras de financiamento seriam diferentes do que se vê cotidianamente.

Outro ponto a considerar é que, fazendo as contas, já no primeiro mês a opção 2 é mais vantajosa. O que é natural, pois é sabido que o capital tem um crescimento maior quando o regime é de juro composto. Seria interessante em um exercício desse tipo, criar uma situação em que, dependendo do tempo decorrido ocorressem alternâncias entre as opções de pagamentos.

Observando o exercício 68 vemos que o gráfico apresentado, que é o único esboçado nessa bateria de exercícios, está corretamente apresentando o comportamento de crescimento do montante ante os dois regimes de juros.

68 Veja no gráfico dois tipos de investimentos oferecidos por um banco.



a) Sabendo que um desses investimentos utiliza taxa de juro simples e outro de juro composto, identifique cada um deles. investimento A: juro composto; investimento B: juro simples

b) Qual dos investimentos é mais vantajoso para um período menor que t_1? E maior que t_1? investimento B; investimento A

c) No início do investimento, qual foi o capital aplicado? M_1

d) Escreva uma função que represente os investimentos *A* e *B*. Investimento A: $M = f(t) = M_1 \cdot (1+i)^t$; investimento B: $M = g(t) = M_1 \cdot (1+i \cdot t)$

As perguntas feitas no enunciado reforçam a ideia correta, o que faz com que a má interpretação na leitura do gráfico ilustrativo do conceito fique mais flagrante.

No final do capítulo encontram-se quinze exercícios de revisão. Não são oferecidas nesta bateria de exercícios situações diferenciadas das apresentadas ao longo do capítulo. Não há exercícios que incentivem análises de casos e tomadas de decisão.

Juntamente com os exercícios, são apresentados três textos complementares sobre investimentos (BM&Fbovespa, São Paulo, 2009), Cartões de Crédito (Mercado de Cartões, www.abecs.org.br, acesso em 19nov.2009) e compras à vista (Stephen Kanitz, revista Veja, 13 março de 2002).

Os textos são claros e muito bem articulados, proporcionando uma leitura fácil para os alunos, incentivando novas pesquisas sobre os assuntos abordados, como os tipos de investimentos que estão crescendo no Brasil, as dificuldades ocasionadas pelo mau uso de cartões de crédito e das vantagens da compra à vista, onde “o consumo é a recompensa merecida pelo trabalho bem feito” e as desvantagens de se comprar a prazo, onde o “trabalho se torna uma obrigação para saldar as dívidas do consumo”. Sem dúvida, estes textos, quando lidos e discutidos, trarão amadurecimento aos alunos da 2ª série do Ensino Médio, que estão prestes a ingressar neste universo ou que já começaram a ter experiências comerciais com rendas adquiridas independentemente das provisões de seus responsáveis. Infelizmente, essas informações ficam apenas no campo das ideias, sem a apresentação de situações onde seja possível aplicar o que foi trabalhado no capítulo.

Os exercícios do livro, de uma maneira geral, têm apresentado contextos de pagamentos em parcelas únicas, após períodos de mais de uma unidade de tempo. Acreditamos que situações apresentando quantias em várias épocas diferentes deveriam ser colocadas em pauta, pois as contextualizações possíveis, se bem exploradas, propiciariam aos alunos oportunidades de análises críticas de situações e tomadas de decisões.

O fato de não trabalhar sistemas de amortização nesse contexto e outras abordagens envolvendo análises e tomadas de decisão, referendadas com cálculos ilustrativos das situações levantadas no texto, também determinou uma importante perda de oportunidade em desenvolver habilidades críticas nos alunos que utilizam essa obra.

5.3 Matemática

Esta obra, de autoria de Manoel Paiva, traz o conteúdo de Matemática Financeira no capítulo 2 do primeiro livro, sendo a quinta seção do capítulo, onde anteriormente foram trabalhadas equações polinomiais do 1º grau, inequações polinomiais do 1º grau, sistemas de equações polinomiais do 1º grau e equações polinomiais do 2º grau. Os assuntos são apresentados de modo rápido e resumido, concluindo todo o estudo proposto em nove páginas, incluindo textos complementares, mas do modo que é exposto, os alunos conseguem ter uma ideia precisa dos conceitos trabalhados.

A introdução é feita com simulações de notícias em jornais, através das frases: “*O Brasil tomou um empréstimo de 400 milhões de dólares à* ***taxa de juro*** *de 4% ao mês*” e “*No Polibanco, com um capital inicial de R$ 1000,00 você acumula um* ***montante*** *de R$ 1230,00 em um ano*”, seguido da informação que para melhor compreensão da mesma é necessário conhecer conceitos como: porcentagens, capital inicial, juro, taxa de juro e montante.

5.3.1 Porcentagens

A seção de porcentagem apresenta um texto sobre a obrigatoriedade da gasolina comercializada em postos de combustível conter 25% de álcool anidro em sua composição, é explicado o significado dessa afirmação e em seguida é definido o conceito de taxa percentual.

São apresentados sete exercícios resolvidos, dos quais quatro deles são para escrita e representação percentual de modo direto, sem contexto algum, um para cálculo direto com porcentagem sem contexto financeiro, um para representação percentual sem contexto financeiro e o último exercício apresentando situação de aumento de preço, dado o preço após o aumento. Todos os exercícios resolvidos apresentaram baixo nível de complexidade e as resoluções foram rápidas. Nesta obra, além do espaço dado ao estudo da matemática financeira ser pequeno, os exemplos fugiram ao tema.

Foram propostos sete exercícios, dos quais quatro apresentavam contextos financeiros. Mas não houve coerência entre o que foi apresentado nos sete exemplos e o que foi proposto nos sete exercícios. A saber:

- O primeiro exercício, com quatro itens era sobre escrita percentual.
- O segundo exercício incentivava o uso de calculadora (simples) para realizar o cálculo direto de porcentagem, com valores pequenos, menores do que 50 unidades.

- Na resolução do terceiro exercício não se tratou de cálculos percentuais sobre valores, apenas era necessário aplicar um percentual sobre outro percentual, a fim de obter como resposta um novo percentual.
- No quarto exercício era necessário aplicar a relação entre venda, custo e lucro, que não foi apresentada em nenhuma situação anterior no livro.

Os três últimos exercícios do bloco são interessantes, sendo que os exercícios de número 24 e 26 trazem contextos não explorados pelos livros anteriormente analisados. O exercício 25 envolve o conceito de descontos sucessivos. Todavia, os alunos ainda nas primeiras semanas do Ensino Médio terão dificuldades em resolver esses exercícios, principalmente levando-se em conta a falta de modelos referenciais oferecidos pelo livro.

24 *Um comerciante comprou algumas caixas de tabletes de manteiga por R$ 2,00 a unidade. Percebendo que havia comprado mais do que conseguiria vender antes do vencimento do prazo de validade, resolveu vender cada unidade do produto a R$ 1,80, para acelerar as vendas. Nessa transação calcule o percentual de prejuízo sobre o preço de compra.*

É um exercício que traz uma ideia interessante sobre as relações de compra e venda, principalmente para discutir o que se deve levar em conta para determinar um percentual de revenda de mercadorias. Da maneira que foi proposto, algumas falhas podem dificultar a resolução, principalmente quando se aplica uma visão crítica da situação apresentada, por exemplo: todos os tabletes comprados foram vendidos a R$ 1,80? Se desde o início o comerciante percebeu que não seria possível vender, porque comprar tantos tabletes?

26 *Em um determinado dia, 1 dólar americano valia R$ 2,00. Um mês depois, 1 dólar americano valia R$ 1,95.*

a) Qual foi o percentual de desvalorização do dólar, em relação ao real, nesse mês?

b) Qual foi o percentual de valorização do real, em relação ao dólar, nesse mês?

A ideia que o exercício 26 aborda deveria ser melhor trabalhada pelo livro, pois definir sobre qual referência o percentual está incidindo é uma dificuldade muito comum nesse nível de escolaridade.

5.3.2 Juros Simples

O conteúdo de juros simples é apresentado por meio de duas situações, onde em nenhuma delas está claramente expresso o que se pretende calcular: a primeira situação com passagem de tempo de apenas um mês (o que permite que os cálculos feitos se apliquem a juros compostos, tornando este exemplo não muito adequado), onde, na resolução, são destacados do texto os elementos juros, capital inicial, taxa de juros e montante, juntamente com as suas siglas.

A segunda situação será transcrita e analisada a seguir.

Situação II

Paulo emprestou R$ 180,00 a Luís, por dez meses. Durante esse período, Luís pagou mensalmente pelo empréstimo 5% da quantia emprestada e, ao final dos dez meses, devolveu os R$ 180,00 a Paulo. Nessa situação temos:

C = R$ 180,00

J = 10 . 0,05 . R$ 180,00 = R$ 90,00

M = R$ 180,00 + R$ 90,00 = R$ 270,00

I = $\frac{9}{180}$ *= 0,05 = 5% (taxa mensal)*

Nesta resolução, fica evidente que é feita a soma com parcelas em diferentes épocas. Cada R$ 9,00 pago por Luís nos 10 meses não resultarão em R$ 90,00, a menos que a taxa de juros seja nula (que não tem sentido trabalhar com essa possibilidade).

Embora a resposta do exercício esteja correta, a taxa de juro é de 5% a.m., a justificativa não está. Uma boa justificativa para o fato é que, ao final de cada mês, ao ser pago 5% do valor emprestado, o saldo devedor permanece o mesmo, que é de R$ 180,00. Fazendo o mesmo pagamento mensalmente, o saldo devedor sempre é recalculado, tornando a R$ 180,00. Por esse motivo, foi possível pagar os "mesmos" R$ 180,00. Esse raciocínio recebe o nome de *fluxo de caixa*. Uma boa generalização para o fato é que Luís poderia pagar indefinidamente ao final de cada mês o valor de 5% do valor emprestado e após os 10, 11 ou 20 meses, pagar os "mesmos" R$ 180,00 a Paulo!

O motivo da utilização das aspas anteriormente é que R$ 180,00 dez meses atrás não correspondem a R$ 180,00 hoje. O valor atualizado com os dados do problema seria de R$ 307,86, calculados a uma taxa de juros compostos de 5% a.m., ou seja, $180.(1,05)^{11}$.

Certamente, esta situação não é adequada para um exemplo inicial, principalmente por conter conceitos que serão apresentados posteriormente.

O termo Juros Simples não foi mencionado em nenhuma das duas situações apresentadas na introdução da seção.

Após a apresentação das situações, é definido formalmente o significado de juros simples e é apresentada a fórmula $\boxed{J = C.i.t}$. Nenhuma observação é feita sobre a necessidade da igualdade nas unidades de taxa de juros e tempo, não é feito nenhum exercício como exemplo de aplicação direta da fórmula, como também não é apresentada de modo claro a necessidade da substituição da taxa i na forma decimal.

São propostos quatro exercícios de aplicação direta de fórmula, sendo que em apenas um exercício, a taxa e o tempo estão em unidades diferentes, mas apresentando conversão simples do tempo de ano para meses, adequando-se a taxa a.m. do exercício.

5.3.3 Juros Compostos

O livro informa que esta modalidade de juro é o mais usado em transações financeiras, descrevendo de modo claro e detalhado como é a incidência da taxa de juros nesta modalidade, a partir da segunda unidade de tempo. Neste momento, o livro reforça a comparação com juros simples, informando que nesta modalidade a incidência é sempre sobre o capital inicial.

Como exemplo, é montada a tabela (com colunas mês, Capital, juro e Montante), apresentando a evolução de uma aplicação ao longo do tempo, sendo fornecidos capital inicial e taxa mensal de juros.

Em seguida, é refeita a tabela anterior apenas com as siglas de capital e taxa, permitindo, ao final de algumas linhas deduzir a fórmula do montante para juros compostos. Neste momento é reforçada a ideia de que taxas e tempo devem estar na mesma unidade e é feita uma observação para o caso de como ficaria a fórmula do montante para o caso das taxas mensais serem diferentes, apresentando em seguida, a fórmula dos acréscimos sucessivos, sem mencionar esta terminologia.

Os cinco exercícios resolvidos como exemplos são variados e três destes, são aplicações da fórmula do Montante, os dois últimos são sobre aumentos ou descontos sucessivos, sem usar esta terminologia. Em todos os exemplos que se fizeram necessários, os resultados dos cálculos de $(1+i)^t$ foram dados, não havendo incentivo para o uso de calculadoras.

Vamos observar a resolução de um exercício apresentado neste bloco, transcrito a seguir, o qual trata de equivalência de taxas, sem mencionar tal terminologia:

R.22 *Houve época em que a taxa de inflação no Brasil era de 25% ao mês. Qual a taxa de inflação anual no Brasil, nessa época? Supor a taxa constante a cada mês. Dado* $(1{,}25)^{12} \approx 14{,}55$

Resolução

Para calcular tal inflação, vamos obter o juro composto produzido por um capital *inicial C aplicado durante 12 meses à taxa de 25% ao mês.*

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}(1 + 0{,}25)^{12} \Rightarrow \mathrm{M} = \mathrm{C}(1{,}25)^{12} \therefore \mathrm{M} = 14{,}55\mathrm{C}$$

Assim, o juro J gerado no período de 12 meses é : J = 14,55C – C = 13,55C

A razão $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$ *é a taxa durante o período de 12 meses.*

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \frac{13{,}55\mathrm{C}}{\mathrm{C}} = 13{,}55 = \frac{1.355}{100} = 1.355\%$$

A taxa de inflação era de 1.355% ao ano, aproximadamente.

Neste exemplo, é calculada a taxa anual como a razão entre Juros e Capital, mas não houve uma definição prévia sobre taxa, sugerindo que o aluno já conheça o conceito de anos anteriores, o que não é uma boa iniciativa. É interessante que o livro considere a experiência prévia do assunto, mas é muito importante que o livro defina com clareza todos os conceitos, promovendo ampliações de conteúdo, caso não seja o primeiro contato do aluno com o conceito ou que o aluno aprenda o mesmo de modo sólido, caso o aluno da 1ª série nunca tenha estudado matemática financeira em anos anteriores.

O livro não apresenta exemplos para a situação inversa: conhecendo a taxa anual, determinar a taxa mensal. Seria extremamente difícil abordar essa equivalência, uma vez que seria necessário conhecimento de logaritmos, o que não se aplica devido ao momento em que é proposto o ensino de matemática financeira.

Ao final da seção, são propostos oito exercícios, dos quais, os cinco primeiros são de aplicação direta da fórmula do montante e os demais, sobre acréscimos e descontos sucessivos, com contextualizações tradicionais. Em cada exercício, foi dado o valor de $(1+i)^t$, com poucas casas decimais e sem nenhum incentivo ao uso de calculadora científica. No exercício sobre descontos sucessivos, a fórmula e a representação decimal do desconto foram fornecidas, cabendo ao aluno somente a colocação dos dados na fórmula e os respectivos cálculos.

Ao final deste bloco de exercícios, são propostas duas atividades: Roteiro de trabalho e Exercícios Complementares. No Roteiro de trabalho são feitas perguntas conceituais sobre os temas abordados em todo o capitulo, desde equações do 1º grau.

Nos vinte exercícios complementares, são propostos dez exercícios ligados à matemática financeira. Não havendo aprofundamento do conteúdo e as questões são equivalentes às propostas ao longo da seção.

Nenhum exercício do livro apresentou situações propondo análises críticas ou tomadas de decisões. Estudar Matemática financeira no início da 1ª Série do Ensino Médio limitou a abordagem e o aprofundamento do conteúdo, privando o aluno da utilização de ferramentas fornecidas por conceitos que serão ensinados ao longo do ano.

Fechando o capítulo, um texto superficial intitulado “inflação acumulada” explica o significado do termo inflação, informando alguns índices (INPC, IGP e IPC) e os respectivos órgãos responsáveis pela medição. Um exemplo fictício sobre o cálculo da inflação acumulada em um período de três meses encerra o texto. Um questionário de três itens é proposto ao final desse texto, sobre a interpretação dos alunos acerca do tema, uma pesquisa sobre outros índices que a medem e um cálculo da inflação acumulada num período de trê meses, dados os índices inflacionários mensais.

6. Conclusões

A Matemática Financeira é um dos tópicos da Matemática de maior aplicabilidade no cotidiano, favorecendo a formação de cidadãos críticos capazes de exercer plenamente o direito à cidadania, avaliando e tomando decisões financeiras de modo consciente e embasado, como as leis e diretrizes nacionais sugerem para a educação básica.

O livro didático, como a principal fonte de pesquisa para o aluno e uma das principais referências bibliográficas do professor, deve ter um papel de facilitador do processo de ensino, fornecendo subsídios teóricos, exercícios que simulem e estimulem, por meio de contextos atuais e desafiadores, uma prática econômica consciente por parte dos alunos, possibilitando efetiva formação de cidadãos capazes de avaliar e agir sobre as informações, situações e propostas oferecidas à sociedade diariamente.

Analisando detalhadamente três das sete obras oferecidas pelo programa PNLEM 2012, concluímos que:

a) **Os principais assuntos estudados e que são comuns às obras, são porcentagens, juros simples e compostos.**

Ao final do capítulo sobre matemática financeira, o aluno pode concluir que tudo se resume a esses três conceitos, mas no cotidiano não é isso o que percebemos.

Na seção de porcentagens, constatamos que a abordagem possui características de revisão de todos os aspectos relacionados ao assunto, desde a escrita percentual na forma decimal ou fracionária e aplicações em geometria. Tal abordagem desvia a atenção do objetivo principal de estudo, que é a Matemática Financeira. Em muitos exercícios são propostas ao aluno situações não financeiras de difícil resolução, exigindo destreza na interpretação e modelagem de problemas e a experiência adquirida com essas resoluções não é reaproveitada no decorrer do capítulo.

Nas seções de juros, o objetivo principal é a aplicação de fórmulas, por meio de contextualizações rápidas e de fácil detecção dos dados necessários para a resolução.

b) **O aproveitamento da experiência e conhecimento prévio do aluno é considerado, mesmo não havendo certeza que, no Ensino Fundamental, tais conceitos tenham sido trabalhados e, caso afirmativo, em quais níveis o foram.**

Isto se torna evidente, pois há supressões de definições formais de alguns termos e conceitos, como juros, taxa de juros e as relações entre receita, lucro e custo. Há proposta de exercícios que contém termos ou estratégias de resolução que não são encontrados previamente no livro, forçando o aluno a esperar pela resolução do professor. É importante que o livro aproveite a experiência prévia do aluno, mas em contrapartida, é importante que ocorram ampliações dos conceitos. O livro deve ser um divisor de águas. O aluno que já teve contato com o conceito deve efetivamente agregar à sua bagagem o que o livro oferece.

Os livros apresentam boa quantidade de exercícios, com variedade de situações, determinando uma característica de quase exclusividade de situações, prejudicando a fixação.

c) **Praticamente não são incentivados o uso de calculadoras científicas e planilhas eletrônicas.**

Na obra em que a Matemática Financeira é oferecida no início da 1ª série, apenas calculadora simples é indicada. Os dados que poderiam ser calculados por meio da utilização de calculadora científica são oferecidos nos enunciados e com poucas casas decimais, impossibilitando, ainda, discussões sobre aproximações de resultados.

Nas obras em que a Matemática Financeira é oferecida na 2ª série, o uso de calculadora científica é estimulado, inclusive com imagens ilustrativas das teclas que devem ser utilizadas.

As planilhas eletrônicas são mencionadas, mas não há ilustrações nem instruções de como elas podem ser utilizadas como ferramentas de cálculo e programação de fórmulas. As planilhas são utilizadas apenas como auxiliares na construção de tabelas.

d) Não há exercícios com propostas de análises críticas e tomadas de decisões.

Os exercícios não apresentaram situações em que os alunos optassem por diferentes modalidades de compras ou investimentos, simulando situações reais. Poucos exercícios apresentaram pretextos para escolhas, onde a estratégia de resolução seria aplicar duas ou mais vezes a mesma fórmula, com parâmetros diferentes e verificar resultados ou escolher entre duas propostas de investimentos apresentadas com capitalização sob juros simples e outra com juros compostos.

Ao final das seções, são apresentados textos interessantes e ricos em materiais para discussões que despertam opiniões e análises críticas sobre assuntos que fazem parte da realidade da população como: inflação, dívidas, investimentos, cartões de crédito e comprometimento de orçamento. Mas ao final da leitura, não há encaminhamento para perguntas cujas respostas necessitem de cálculos ou recursos oferecidos ao longo do capítulo. Ou seja, os textos e perguntas poderiam ser propostos, sem nenhuma alteração de forma e conteúdo, em outras disciplinas.

e) Conceitos importantes são parcialmente explorados.

A equivalência de unidades entre tempo e taxa de juros na resolução de problemas é parcialmente abordada nas obras. Poucos exercícios apresentaram-na sob diferentes unidades de tempo e quando colocadas, o único aspecto abordado é a transformação do tempo com uma unidade superior à unidade de taxa e não é feita a situação inversa.

A equivalência entre taxas de juros expressa em diferentes unidades de tempo foi mencionada e exemplificada discretamente em juros simples. Em juros compostos, quando o assunto foi mencionado, a única consideração feita foi que o cálculo seria diferente do efetuado com taxas em juros simples. Não foi detectada em nenhum exercício a necessidade de realizar tais conversões.

Constatamos em todas as obras exercícios envolvendo acréscimos e descontos sucessivos, em contextos de diferentes níveis de complexidade. Mas em apenas algumas obras o conteúdo foi abordado de modo cuidadoso e em seções exclusivas para o tema, com resumo teórico e exemplos.

O assunto “Amortizações de dívidas” foi abordado apenas em uma obra, por meio de fórmulas e pouco incentivo à utilização de planilhas eletrônicas nos exercícios. Na exposição teórica, tabelas feitas a partir de planilhas foram utilizadas. A montagem de tais planilhas, discriminando colunas de juros, amortizações e saldo devedor não foi feita de modo claro, possibilitando reprodução das mesmas pelos alunos com facilidade em programas específicos.

f) A impossibilidade de somar valores em diferentes épocas não é abordada.

Um dos principais problemas em Matemática Financeira, que é deslocar quantias no tempo, não é abordado de modo claro e direto. Não foi constatada, em nenhuma obra analisada, menção sobre a equivalência entre capitais em épocas diferentes, alguns exemplos e exercícios apresentam contextos em que são feitas somas de parcelas localizadas em épocas diferentes, sem transportá-las a uma mesma data.

Considerando o Guia PNLEM, a única obra que trata do deslocamento de quantias no tempo é o livro Contexto & Aplicações, do autor Luiz Roberto Dante, infelizmente esta obra não foi acessível a mim no momento da pesquisa e redação desse trabalho.

Ao analisarmos, de modo global, os livros didáticos oferecidos para a rede pública brasileira por meio do Guia PNLEM de 2012, concluímos que não há concordância de propostas sobre o momento apropriado para o estudo da Matemática Financeira, sendo possível fazê-lo em qualquer uma das três séries do Ensino Médio. Dependendo do momento a ser lecionada, a abordagem será limitada, devido aos conteúdos acumulados pelos alunos ao longo do Ensino Médio.

Podemos concluir que o principal objetivo a ser alcançado pelos livros listados e analisados para as escolas públicas é a aplicação de fórmulas em contextos que não simulam completamente a realidade. O pouco rigor nas formalizações de definições e conceitos não favorece o desenvolvimento da matéria seguindo um viés crítico e analítico, prejudicando a simulação de contextos que visem tomadas de decisões embasadas em referenciais teóricos, dificultando a formação de alunos com habilidades necessárias para o pleno exercício da cidadania num contexto econômico dinâmico, repleto de possibilidade de investimentos e armadilhas, como o contexto atual.

7. Referências

1- BRASIL. Constituição (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília, DF: Senado Federal.

2- BRASIL. *Lei n° 9394 de 20 de Dezembro de 1996*. Estabelece as Diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília.

3- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Guia de Livros Didáticos do Ensino Médio (Matemática) 2012. Brasília: MEC, 2011.

4- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

5- BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Programa de Educação Financeira do Banco Central*. Disponível em http://www.bcb.gov.br/?BCEDFIN. Acesso em 10 de jan. 2014.

6- LIMA, E. L. et al.(2009) *A Matemática do Ensino Médio*. 6ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2009. *Volume 2*. 308 p. (Coleção do professor de Matemática).

7- MUNIZ, I. Jr., JURKIEWICZ, S. (2013). *Educação Econômico-financeira: Uma nova perspectiva para o Ensino Médio*. In: VII CIBEM, Montevideo, Uruguai.

8- PAIVA, M. *Matemática*.1ª Edição. São Paulo: Moderna, 2009. Volume 1. 256 p.

9- RIBEIRO, J. *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*. 1ª Edição. São Paulo: Scipione, 2011. Volume 2. 328 p.

10-ROSETTI, H. Jr, SCHIMIGUEL, J. (2010) *Estudo Comparativo dos Modelos de Matemática Financeira em Bibliografia Adotada no Ensino Médio*. In: Enciclopédia Biosfera, Centro Científico Conhecer, Goiânia. vol.6, N.11, p.4-6.

11-SAITO, A.T. (2007). *Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças no Brasil*. Dissertação de Mestrado. FEA/USP – São Paulo.

12-SOUZA, J. *Matemática*. 1ª Edição. São Paulo: FTD, 2010. Volume 2. 320 p. (Coleção: Novo Olhar)

13-ZENTGRAF, R. (1999). *Matemática Financeira Objetiva*, Rio de Janeiro: Editoração Ed.