



**PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**CLAUDIA MARIA FIUZA ALVES**

**O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS DA ARTE DE  
MAURITS CORNELIS ESCHER**

**Rio de Janeiro - RJ  
1º semestre/2014**

**CLAUDIA MARIA FIUZA ALVES**

**O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS DA ARTE DE  
MAURITS CORNELIS ESCHER**

Dissertação apresentada pela aluna Claudia Maria Fiuza Alves, à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto de Matemática Pura e Aplicada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro - RJ  
1º semestre/2014

CLAUDIA MARIA FIUZA ALVES

O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS DA ARTE DE  
MAURITS CORNELIS ESCHER

Dissertação apresentada pela aluna Cláudia Maria Fiuza Alves, à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto de Matemática Pura e Aplicada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 17 de Março de 2014

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho - IMPA  
Orientador

---

Prof. Dr. Eduardo Wagner - FGV

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Asla Sá - FGV

Rio de Janeiro - RJ  
1º semestre/2014

## Dedicatória

Ao meu pai Paulo Roberto (*in memorium*) e a minha mãe Regina Coeli que sempre foram incansáveis.

Aos meus amigos e colegas de trabalho de todas as escolas que sempre me ajudaram em todas as horas.

A minha filha Adriana, o meu maior presente.

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente aos excelentes professores de Matemática que tive o prazer de ter no decorrer dos Ensinos Fundamental e Médio, principalmente a professora Maria Tereza (*in memorium*), obrigada por ter despertado a paixão pela Matemática dentro de mim.

Ao professor e amigo Marcelo Correa, por ter me indicado o caminho do PROFMAT.

Ao orientador professor Paulo Cezar Pinto Carvalho pelas orientações, sugestões e esclarecimentos.

Aos amigos de turma, todos tão importantes nesta dura jornada.

Ao meu amigo Carlos Renato que me ajudou muito no trabalho.

Aos professores e monitores que nos acompanharam durante toda nossa jornada.

Aos meus alunos, por cada palavra ou gesto de carinho.

À minha família, pela educação apoio e investimento e à minha filha Adriana, por todo carinho e paciência.

Agradeço a CAPES pela bolsa de estudo concedida.

A missão do professor não é dar respostas prontas. As respostas estão nos livros, estão na internet. A missão do professor é provocar a inteligência, é provocar o espanto, é provocar a curiosidade.

Rubens Alves

## **Resumo**

### **O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS DA ARTE DE MAURITS CORNELIS ESCHER**

Claudia Maria Fiuza Alves

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho

O objetivo desta dissertação é facilitar o processo de ensino e aprendizado de simetria tendo como inspiração as obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher, onde encontramos bons exemplos de simetria aplicada às artes. De fato, existe uma relação simbiótica entre a Matemática e a Arte, fazendo com que trilhem seu caminho sempre juntas. Durante sua vida artística, M. C. Escher produziu xilogravuras e desenhos litográficos intrigantes e geometricamente sofisticados e são mais um exemplo de como as imagens e planificações, ou melhor, as artes podem contextualizar a Matemática. Um exemplo disso são os diferentes tipos de simetria existentes nos seus desenhos, os animais se repetem, criando um padrão e ele adorava brincar com este tipo de técnica. Neste contexto educacional, elaboramos então atividades que abordam e aprofundam esses conceitos, como um facilitador, para o ensino e aprendizado da Geometria na Educação Básica.

**Palavras-chave: Arte, Matemática, Escher.**

## **Abstract**

### **STUDY OF SYMMETRY THROUGH ART MAURITS CORNELIS ESCHER**

Claudia Maria Fiuza Alves

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho

The objective of this dissertation is to facilitate the teaching and learning of symmetry taking as inspiration the works of the Dutch artist Maurits Cornelis Escher, where we found good examples of symmetry applied to the arts. In fact, there is a symbiotic relationship between Mathematics and Art, causing tread your path always together. During his artistic life, MC Escher produced woodcuts and geometrically intriguing and sophisticated lithographic drawings and are another example of how images and lesson plans, or better, the arts can contextualize mathematics. Examples of this are the different types of existing designs in its symmetry, the animals are repeated, creating a pattern and he loved playing with this type of technique. In this educational context, then produce activities that address and build upon these concepts as a facilitator for teaching and learning Geometry in Elementary Education.

**Keywords: Art, Math, Escher.**



## Sumário

1	Introdução .....	11
2	Viajando no mundo de Maurits Cornelis Escher .....	13
3	Desvendando o mistério das tesselações .....	19
3.1	Tipos de tesselações.....	19
3.1.1	Tesselações Regulares .....	19
3.1.2	Tesselações Semirregulares .....	20
3.1.3	Tesselações Demiregulares.....	20
4	A importância das cores na tesselação.....	21
4.1.1	Escolhendo as cores.....	22
4.1.2	Escolhendo a técnica de coloração .....	23
5	A simetria matemática .....	26
5.1	Tipos de simetria.....	27
5.1.1	Simetria por rotação.....	27
5.1.2	Simetria por translação .....	28
5.1.3	Simetria por reflexão .....	28
6	Explorando a técnica de Maurits Cornelis Escher .....	30
6.1	Executando as técnicas .....	30
6.1.1	Utilizando a rotação para geração da figura base .....	30
6.1.1.1	Construção a partir do hexágono .....	30
6.1.1.2	Construção a partir do quadrado.....	32
6.1.1.3	Construção a partir do triângulo .....	33
6.1.2	Utilizando translação para geração da figura base .....	34
6.1.2.1	Construção a partir do quadrado.....	34
6.1.2.1	Construção a partir do hexágono .....	36
6.1.2.2	Construção a partir do triângulo .....	37
6.1.3	Figuras base que contém um eixo de simetria interno.....	39
6.1.3.1	Construção a partir do quadrado.....	39
6.1.3.2	Construção a partir do triângulo .....	40
6.1.3.3	Construção a partir do hexágono .....	41
7	Propostas de aulas .....	43
7.1	Planejamento.....	43
7.1.1	Objetivos.....	43
7.1.2	Duração das atividades .....	43
7.1.3	Interdisciplinaridade .....	44

7.1.4	Avaliação .....	44
7.2	Roteiro das aulas .....	44
7.2.1	Aula 1 - Conhecendo Maurits Cornelis Escher .....	45
7.2.2	Aula 2 - Trocando as informações .....	45
7.2.3	Aula 3 - Conceito de simetria e tesselações .....	47
7.2.4	Aula 4 - Criando uma tesselação .....	47
7.2.5	Aula 5 - Construção dos poliedros de Platão .....	48
7.2.5.1	Dodecaedro .....	49
7.2.5.2	Cubo .....	50
7.2.5.3	Tetraedro .....	51
7.2.5.4	Octaedro .....	52
7.2.5.5	Icosaedro .....	53
8	Relato de Prática .....	54
8.1	Realização das aulas .....	54
8.2	Resultados obtidos .....	56
8.2.1	Trabalhos com problemas .....	56
8.2.1.1	Construção de uma vaca .....	56
8.2.1.2	Construção de uma “carinha” .....	57
8.2.1.3	Construção de uma borboleta .....	57
8.2.2	Trabalho com o desafio da translação do quadrado com problemas .....	58
8.2.2.1	Construção de um pássaro .....	58
8.2.3	Trabalhos sem problemas .....	60
9	Considerações Finais .....	62
	Referencias Bibliográficas .....	63
	Anexos .....	64

## 1 Introdução

O mundo da matemática e o mundo da arte estão eternamente relacionados e Maurits Cornelis Escher observou muito bem esta relação quando disse: *“Embora não tenha qualquer formação e conhecimento das ciências exatas, sinto-me frequentemente mais ligado aos matemáticos do que aos meus próprios colegas de profissão”*.

As obras de Escher são um exemplo concreto de como as imagens podem facilitar o entendimento de alguns conceitos geométricos, através de seus desenhos, numa mistura de simetria e pavimentação do plano (tesselação), ele faz com que o aluno consiga melhor visualizar e destacar os tipos de transformações existentes, tornando-as assim mais simples aos seus olhos.

De acordo com Escher, a pavimentação de um plano é: *“A fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respectivamente, preenchida com elas. As figuras devem confinar umas com as outras sem que resultem áreas livres”*.

Suas obras facilitam ainda mais o processo de aprendizagem, pois nelas são utilizadas cores contrastantes para o preenchimento das superfícies, de uma forma sistemática e de vital importância para destacar visualmente a individualidade dos desenhos e suas respectivas transformações.

Temos também que observar as formas usadas como “base” para a execução das tesselações, numa primeira visão das imagens de Escher (figura 1), erroneamente temos a impressão dele não usar base alguma.

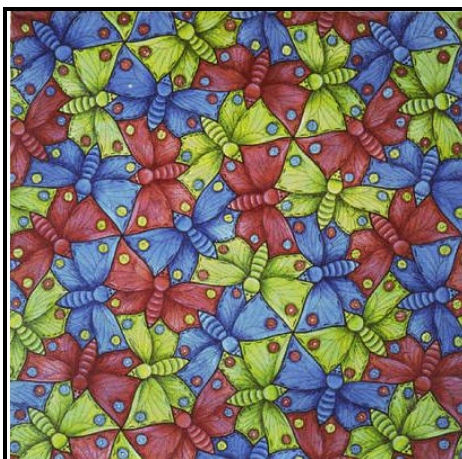


Figura 1: Escher, M. C., “Borboletas”, 1948, Tinta, Aquarela.

Apurando um pouco mais nosso olhar para as mesmas imagens, podemos perceber que este artista-matemático ou matemático-artista decidiu usar a Arte para camuflar a Matemática. Com uma técnica simples, mas precisa e com um resultado surpreendente ele transforma um quadrado, “*recortando aqui e colando ali*”, numa perfeita borboleta (figura 2). Como as borboletas são oriundas desta técnica aplicada a quadrados de mesma área elas se “*encaixam*” perfeitamente, com uma comunicação visual surpreendente, a diferença está na sua criatividade e beleza, pois são muito mais atraentes do que um simples papel quadriculado.

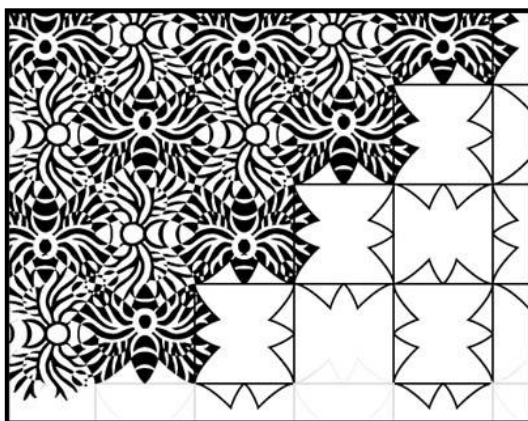


Figura 2: Transformação do quadrado em borboleta

Escher criou imagens sempre pensando nesta ideia, a de atuar sobre os observadores, de modo a cativá-los, daí o uso de cores vibrantes e de figuras mais agradáveis. Pieter Tjabbes curador da exposição “*O mundo mágico de Escher*” no Centro Cultural Banco do Brasil, relatou algumas declarações reveladoras de Escher sobre sua obra: “*Talvez eu esteja sempre em busca do espantoso e, por isso, procure apenas provocar espanto no espectador (...)*” e “*Nas minhas gravuras eu tento mostrar que vivemos em um mundo belo e ordenado, e não em um caos sem regras ... Eu não consigo deixar de brincar com as nossas certezas estabelecidas. Tenho grande prazer, por exemplo, em confundir deliberadamente a segunda e a terceira dimensões, plana e espacial, e ignorar a gravidade.*”

Baseado neste contexto educacional, o foco principal deste trabalho de conclusão de curso, é apresentar atividades, inspiradas nas obras de Escher, que abordem e aprofundem esses conceitos de forma concreta e prazerosa, como um facilitador para o ensino e aprendizado da Geometria na Educação Básica.

As turmas tomadas como laboratórios foram do 1º ano e 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense, pois todos os conceitos geométricos básicos necessários para o entendimento do projeto, já foram trabalhados previamente.

## 2 Viajando no mundo de Maurits Cornelis Escher

Você já viu alguma obra do artista Escher? Para esta pergunta, não existe a resposta “Não sei”, pois é impossível ver uma obra de Escher e esquecer. Admirar as obras de Escher é uma experiência única e inesquecível, pois elas desafiam o seu cérebro, provocando no espectador uma vontade enorme de saber como são feitos os desenhos. Para alguns, suas obras nasceram com um passe de mágica, mas não, o que elas têm como bases são refinados e complexos conceitos de Geometria.

Maurits Cornelis Escher, Leeuwarden, 17 de Junho de 1898 — Hilversum, 27 de Março de 1972 (figura 3), dedicou sua existência e trabalho às artes gráficas. Sua vida estudantil na área da matemática não foi de muito sucesso, porque o que ele sabia muito bem era aplicar intuitivamente teorias geométricas, que desconhecia completamente, nos seus desenhos.



Figura 3: Escher, M. C., “Autorretrato”, 1943, giz litográfico (desenho por raspagem).

Como citou Cláudio Fragata Lopes, em sua reportagem “Escher o gênio da arte matemática” para a revista Galileu, edição 88: “(...) *Escher sequer foi um bom aluno. Ele mesmo admitiu mais tarde que jamais ganhou, ao menos, um "regular" em matemática. Conta-se até que H.M.S. Coxeter, um dos papas da geometria moderna, entusiasmado com os desenhos do artista, convidou-o a participar de uma de suas aulas. Vexame total. Para decepção do catedrático, Escher não sabia do que ele estava falando, mesmo quando discorria sobre teorias que o artista aplicava intuitivamente em suas gravuras (...)*”.

Segundo Pieter Tjabbes: “(...) *A arte de M. C. Escher, por sua vez, há mais de meio século vem maravilhando milhões de pessoas, de todas as idades e pelo mundo todo. As exposições de suas gravuras fazem grande sucesso no Brasil ou na Espanha, na Itália ou no*

*Japão. Há oito anos abriu suas portas o frequentadíssimo Museu Escher na cidade de Haia, em sua pátria, a Holanda” (figura 4).*



Figura 4: Museu Escher em Haia, Holanda do Sul

Sua obra foi fortemente influenciada, por sua visita ao Palácio Mourisco de Alhambra, em Granada (figura 5), construído pelos árabes no século XIII.

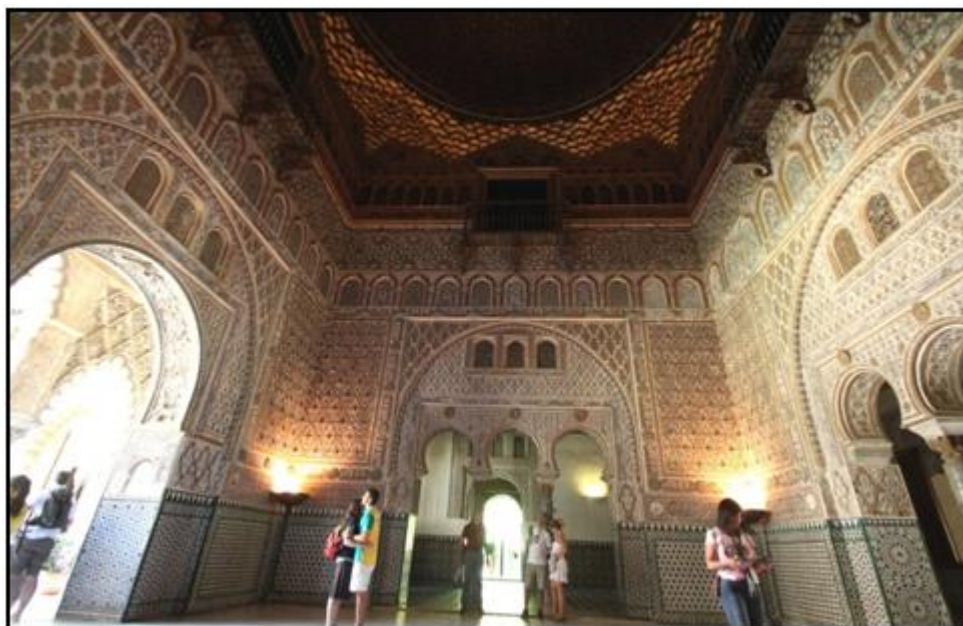


Figura 5: Palácio Mourisco da Alhambra

Lá, vislumbrando os ornamentos decorativos do palácio (figura 6), nos quais eram usados polígonos regulares num mosaico maravilhoso (figura 7 e 8), Escher descobriu os segredos da divisão regular do plano, sem a existência de espaços vazios entre as figuras, ou seja, as tesselações. Estas técnicas milenares muito utilizadas pelos árabes foram absorvidas pelo artista holandês intuitivamente, através de muita observação e reprodução do que via no Palácio.

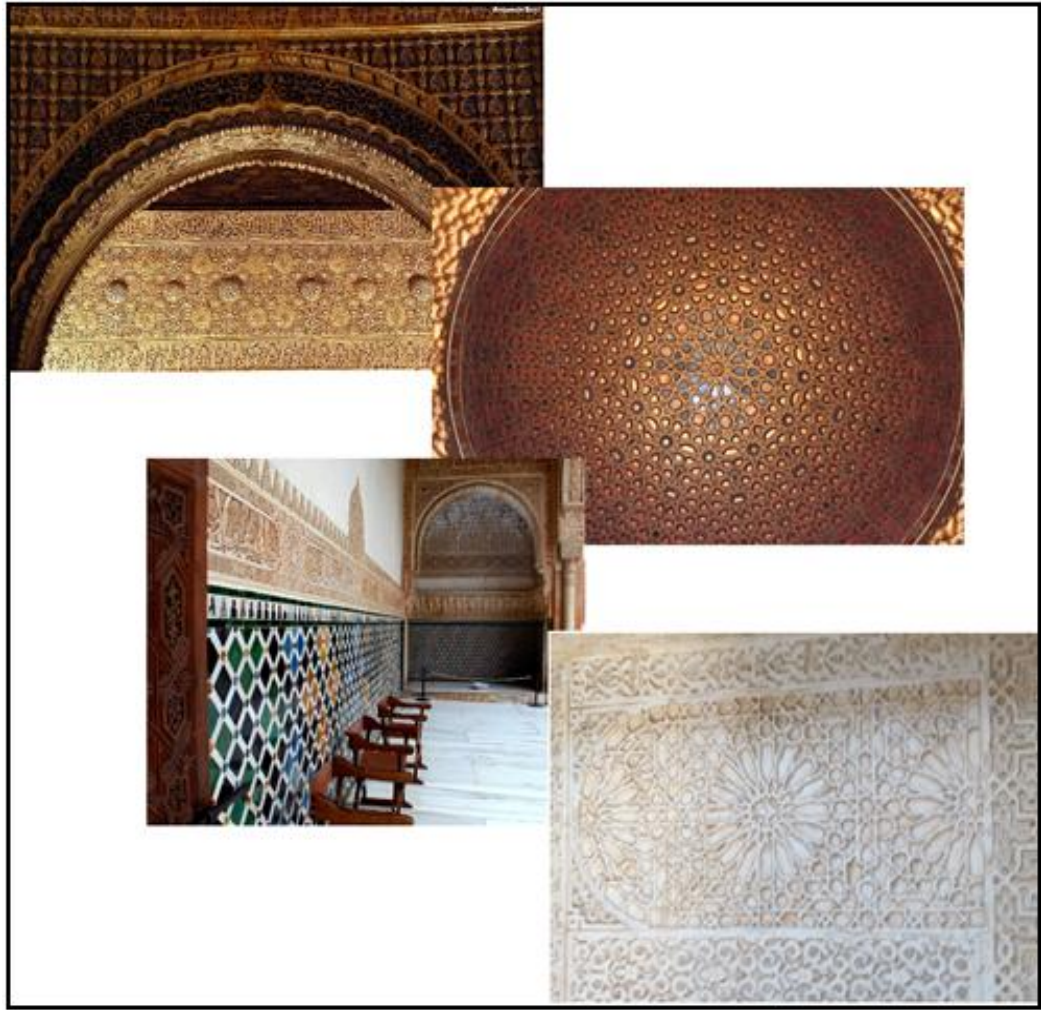


Figura 6: Detalhes dos portais, abobadas, pátio e paredes de Alhambra.



Figura 7: Serie de fotografias de mosaicos de Alhambra

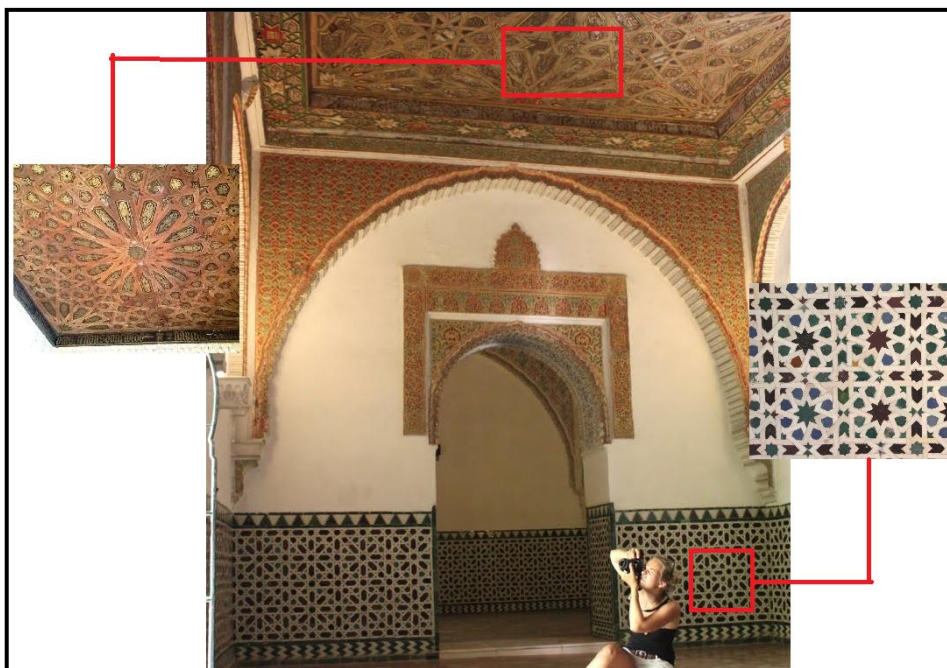


Figura 8: Paredes do Palácio Mourisco

A diferença principal e de fundamental importância para a escolha da análise das obras de Escher ao invés dos mosaicos produzidos pelos árabes no trabalho, está no fato do artista holandês substituir os polígonos regulares usados pelos árabes (figura 9), por figuras existentes na natureza e de fácil identificação, como pássaros, peixes, pessoas, répteis, etc. (figura 10), pois estas figuras são bem mais agradáveis aos olhos do que simples polígonos regulares e despertam um maior interesse dos alunos na descoberta da construção destes desenhos e conseqüentemente pelos conceitos geométricos que estão por trás de tamanha peripécia.

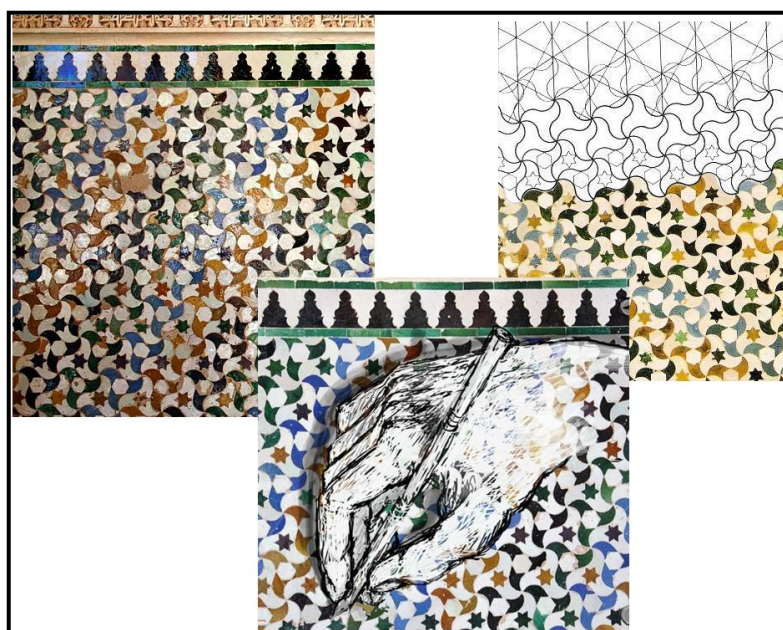


Figura 9: Tesselação em Alhambra





Figura 10: Escher, M. C., “Plane Filing II”, 1957 litografia.

O Desenho "Metamorfoses III" (figura 11) , nos dá uma ideia do impacto que teve as visitas Escher ao Palácio de Alhambra e o estudo de suas decorações geométricas.

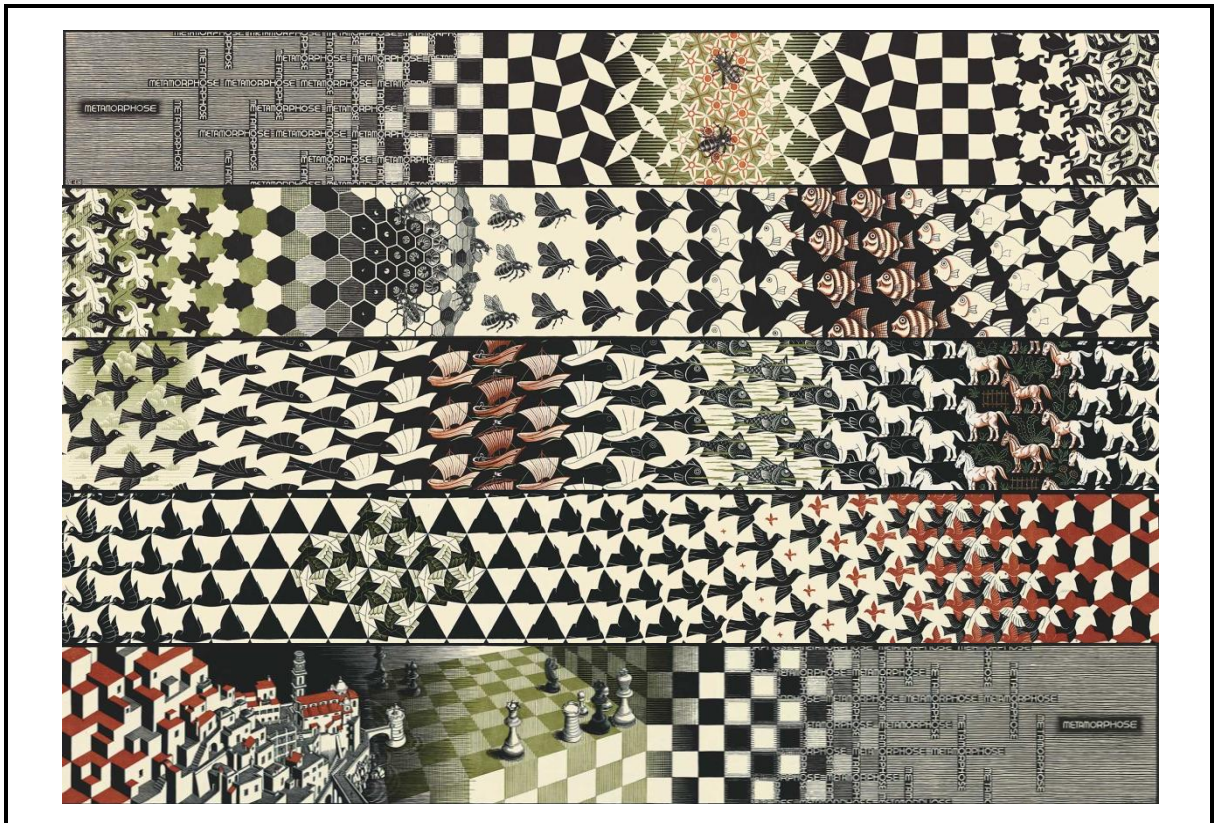


Figura 11: Escher, M. C., “Metamorfoses III”, 1967-1968 Xilogravura, segundo estado, em vermelho, verde e marrom-avermelhada. Impresso de 33 blocos em 6 folhas juntas. Montada sobre tela, em parte colorida à mão. 6.800 milímetros x 192 milímetros.

Navegando pelas obras de M. C. Escher pode-se encontrar uma rica variedade de elementos geométricos, como a translação, a rotação e a reflexão transformações que os matemáticos chamam de isometrias, muito utilizadas nas tesselações, pois têm a propriedade de preservar a distância entre pontos. Um exemplo disso está numa das suas gravuras intrigantes, a xilografia "Dia e Noite" (figura 12), onde é utilizada a reflexão de uma forma surpreendente, os campos lavrados elevam-se em direção ao céu e se transformam, aos poucos, em aves brancas e pretas.

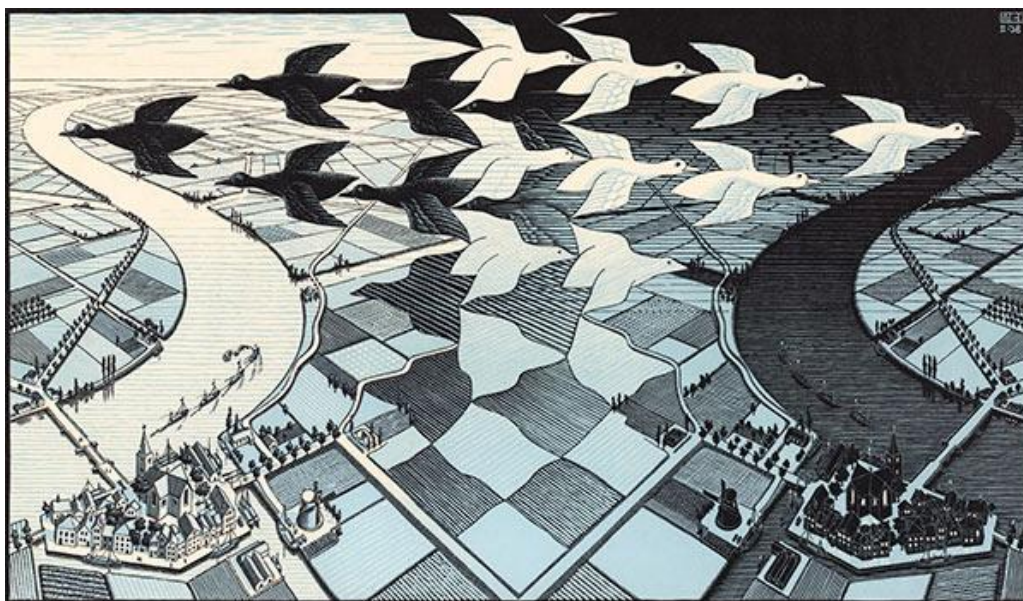


Figura 12: Escher, M. C., “Dia e Noite”, 1938, xilografia em preto e cinza, impressas a partir de dois blocos.

O professor Sérgio Alves, do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística (IME), da Universidade de São Paulo, em uma entrevista a revista Galileu disse que adota, como ferramenta de ensino, em suas aulas de Geometria os desenhos do artista: “*É notável que Escher, sem qualquer conhecimento prévio de matemática, tenha descoberto todas essas possibilidades. Quanto aos quatro movimentos, são os únicos possíveis de serem aplicados sobre um padrão plano de modo que o resultado obtido seja exatamente a figura original. Em termos matemáticos, são as únicas isometrias do plano. O estudo desses movimentos é chamado de Geometria das Transformações e suas leis governam a construção dos desenhos periódicos*”.

Com sua personalidade humilde, Maurits Cornelis Escher foi reconhecido pelo mundo, pelos seus trabalhos originais e intrigantes, onde a geometria se transforma em arte ou a arte em geometria.

### 3 Desvendando o mistério das tesselações

O significado da palavra Tesselação, segundo a Wikipédia é: “*Tesselar (em inglês: Tessellation) um plano é cobrir uma superfície com um padrão de figuras planas, de modo que não existam nem espaços entre elas, nem sobreposições, ou seja que o seu tamanho total seja igual ao espaço particionado. Pode ainda falar-se de tesselação de partes de um plano ou de outras superfícies, sendo possíveis generalizações para dimensões mais elevadas. (...) A palavra parece ter origem na palavra latina tessela, uma pequena peça cúbica de barro, ou vidro usada para fazer mosaicos*”.

Este estudo refere-se à tesselações feitas por polígonos, regulares ou não, através da exploração das obras do artista holandês M. C. Escher, que produziu entre outros trabalhos, xilogravuras e desenhos litográficos geometricamente sofisticados, despertando assim o interesse dos alunos e possibilitando que os conceitos geométricos tenham aplicação prática, podendo ser “manipulados” concretamente e conseqüentemente melhor compreendidos.

#### 3.1 Tipos de tesselações

Não será incluído aqui neste trabalho um estudo detalhado referente aos tipos de tesselações existentes, pois foge do escopo do trabalho, mas numa visita a página <http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation> pode-se constatar que as tesselações não são apenas curiosidades matemáticas, é feita uma pesquisa sobre elas, pois são facilmente encontradas em papéis de parede ou na natureza, como os favos de mel das abelhas, por exemplo, as tesselações estão por toda parte, bastando apenas observá-las e estudá-las.

##### 3.1.1 Tesselações Regulares

Nas tesselações regulares é utilizada a repetição de um mesmo polígono regular. Só existem três tipos tesselações regulares (figura 13): as que usam triângulos, quadrados ou hexágonos.

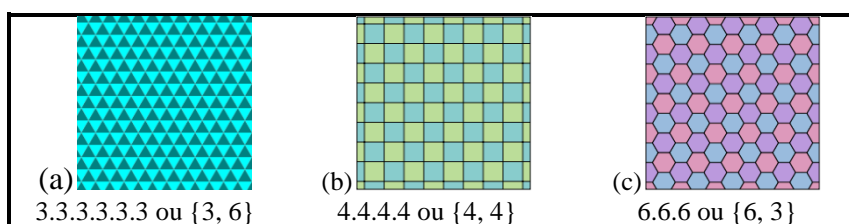


Figura 13: Tipos de tesselações regulares

As tesselações recebem seu nome de acordo com o que é visto por um vértice, na tesselação regular que utiliza apenas hexágono (figura 13, letra(c)), como cada vértice “vê” três hexágonos, sua nomenclatura é “Tesselação regular do tipo 6.6.6 ou  $\{6, 3\}$ ”.

### 3.1.2 Tesselações Semirregulares

As tesselações feitas com dois ou mais polígonos regulares são chamadas de semirregulares (figura 14), onde o padrão em cada vértice tem que ser exatamente o mesmo, neste caso, vejamos alguns exemplos.

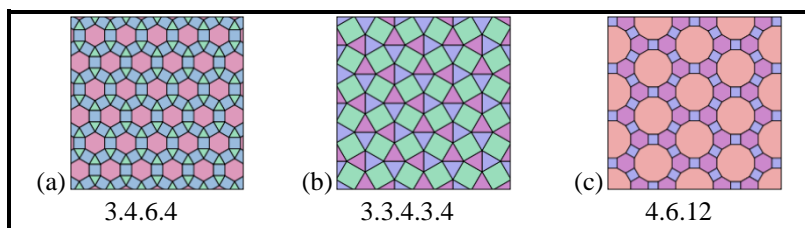


Figura 14: Tipos de tesselações semirregulares

Utilizando o mesmo padrão que as tesselações regulares, a nomenclatura das tesselações semirregulares é dado de acordo com o que é visto pelo vértice, assim neste último caso (figura 14, letra (c)) temos que como cada vértice “vê” um quadrado, um hexágono e um dodecágono, seu nome é “Tesselação semirregular do tipo 4.6.12”.

### 3.1.3 Tesselações Demiregulares

Nestas tesselações são utilizados polígonos iguais, mas não regulares (figura 15).

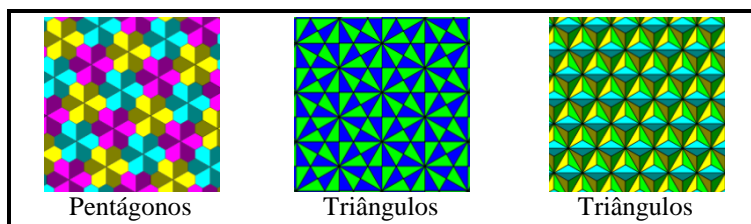


Figura 15: Tipos de tesselações demiregulares

Podemos observar num dos desenhos do artista (figura 16), esta divisão demiregular onde os pentágonos irregulares são ocupados por estrelas do mar e as conchas são o seu centro de simetria rotacional.

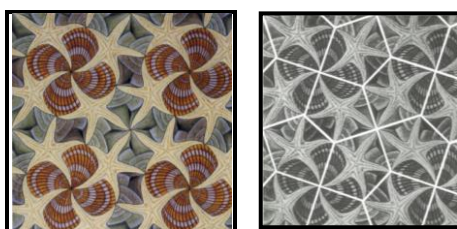


Figura 16: Escher, M. C., “Conchas e estrelas-do-mar”, 1941, nanquim, lápis de cor, aquarela.

## 4 A importância das cores na tesselação

A técnica de coloração da tesselação interfere e muito no modo como a vemos e a interpretamos. A cor pode ajudar o observador a entender melhor a tesselação e como ela foi feita, não é apenas uma questão de estética (figura 17). Percebe-se que sem o colorido, as borboletas se misturam, ficam “embaralhadas”, diferentemente no desenho colorido (figura 17) não só elas estão bem definidas, como também a sua transformação.

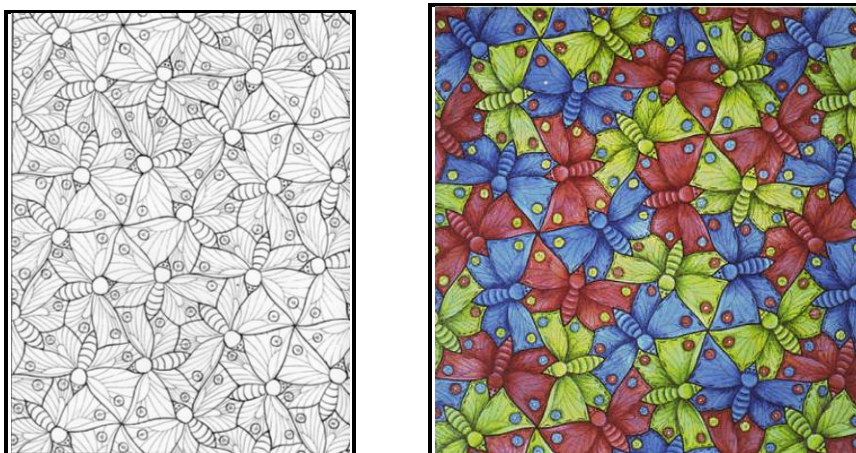


Figura 17: Escher, M. C., “Borboletas”, 1948, Tinta, aquarela.

Com toda esta importância, temos que ter muito cuidado no momento da escolha da paleta de cores a serem usadas, pois uma escolha infeliz pode tornar o desenho desinteressante aos olhos, sem uma boa comunicação visual, em contrapartida quando esta é apropriada ocorre o destaque visual da individualidade da figura e suas respectivas transformações (figura 18).



Figura 18: Escher, M. C., “Lagartos”, de 1939, nanquim, lápis, aquarela. & de 1942 nanquim, tinta de ouro, lápis de cor, pintura de pôster.

Assim, existem dois pontos importantes que devem ser levados em consideração no momento da coloração: A escolha das cores, levando em consideração seus tipos, contrastes e brilhos; A técnica utilizada na coloração.

#### 4.1.1 Escolhendo as cores

Para ajudar nesta empreitada, vamos lançar mão da “roda das cores” (figura 19), onde estão definidas as cores primárias, secundária e terciárias e da “paleta de cores” (figura 20) com a classificação de cores frias e quentes.



Figura 19: Roda das cores

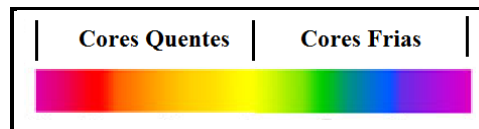


Figura 20: Palheta de cores

Um dos fatores importantes para a escolha das cores é se duas cores partem de lados opostos da roda de cores, tendo o resultado um contraste forte. No entanto, se duas cores muito próximas umas das outras são usadas, o resultado é um baixo contraste. Na figura 21(a), devido ao alto contraste, os hexágonos alaranjados saltaram acima dos triângulos equiláteros azuis, enquanto na figura 21(b), pelo suave contraste, os hexágonos verdes não saem tanto.

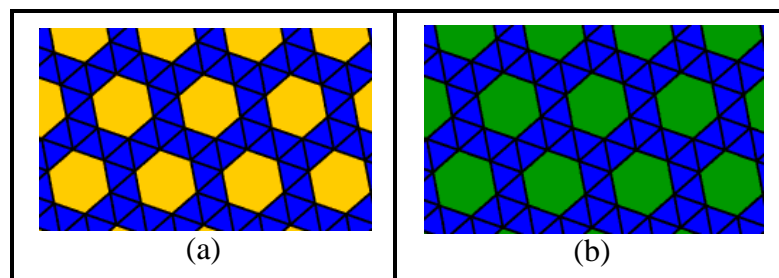


Figura 21: Mosaico com os tipos de contrastes de cores

Este fenômeno não ocorre apenas pelas cores serem contrastantes, para o olho humano as cores quentes parecem saltar, enquanto as cores frias parecem recuar para folha. Vejamos na figura 22(a), os pontos de cores quentes contra um fundo de cor fria saltam da folha, enquanto na figura 22(b), são usados pontos de cores frias contra um fundo de cores quentes, com isso eles recuam como "buracos".

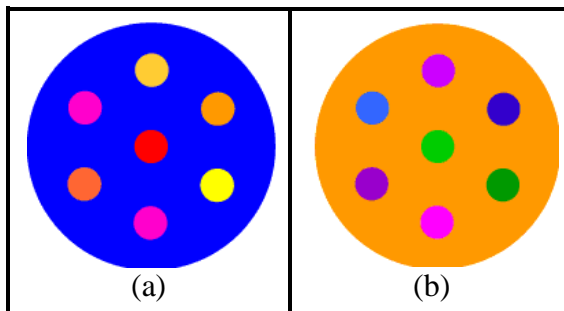


Figura 22: Comparando o contraste das cores

Outro fator que colabora para que este fato ocorra é o brilho da cor usado, quanto maior o seu brilho, mais ela se aproxima do olho e quanto menor o seu brilho, mais perto da folha fica a figura. Na figura 23 é usada a mesma cor de azul, com o mesmo brilho nos dois mosaicos, no entanto alteramos o brilho do vermelho. O resultado é que os quadrados azuis parecem estar mais longe dos olhos do lado esquerdo, do que no direito, pois o vermelho se aproxima dos olhos no lado esquerdo, fazendo o azul recuar.

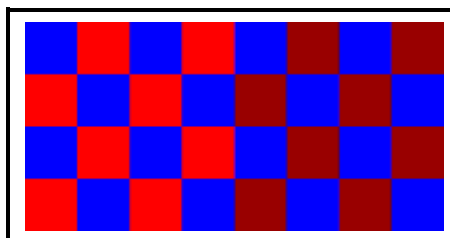


Figura 23: Comparando o efeito do brilho das cores

Assim, a escolha da cor e seu brilho devem ser feitas de acordo com o efeito que se queira programar ao desenho.

#### 4.1.2 Escolhendo a técnica de coloração

A cor pode tanto aumentar a beleza de um mosaico, como também contribuir para a sua percepção. Considere o exemplo da figura 24, estas duas imagens são do mesmo mosaico, no entanto, no colorido podemos ver mais claramente que a tesselação é composta por três tipos de formas: hexágonos, em roxo; de triângulo equilátero em azul; quadrado em branco.

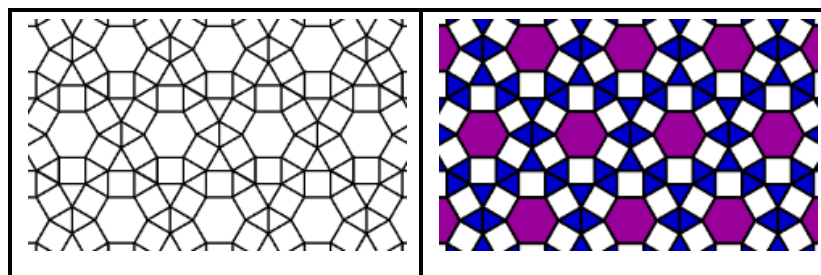


Figura 24: Técnica individual de coloração

Existem diferentes tipos de técnicas de pintura, a representada pela figura 24 é uma das mais simples, é a técnica individual de coloração, onde sua base é a de colorir todos os polígonos iguais da mesma cor, nela todos os hexágonos são pintados da cor roxa, todos os quadrados são da cor branca, e todos os triângulos equiláteros são da cor azul.

Outra técnica de coloração é técnica regional de coloração (figura 25), onde é usada a mesma cor para preencher regiões inteiras que você deseja enfatizar. Nesta técnica, o destaque maior está na forma geral e não dos polígonos isolados. O amarelo claro é utilizado para formar tiras verticais contínuas de polígonos, pintando triângulos e quadrados com a mesma cor.

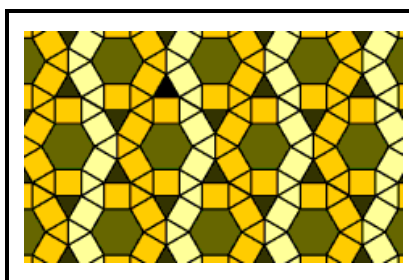


Figura 25: Técnica regional de coloração

Ainda outra técnica que pode ser utilizada é a técnica cíclica de coloração (figura 26), nesta, também damos pouca atenção à individualidade do polígono em detrimento do desenho como um todo. Nela são procuradas oportunidades de utilizar as cores em ciclos, na figura 26 o vermelho, o azul e o branco formam um ciclo colorido em torno de cada hexágono e os espaços entre eles são pretos.

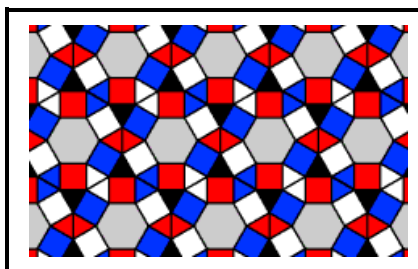


Figura 26: Técnica cíclica de coloração



A última técnica a ser apresentada é técnica sem contornos de coloração, onde são retirados os contornos das figuras. As pavimentações resultantes são surpreendentes, pois os polígonos adjacentes pintados da mesma cor vão se fundir em uma única forma, fazendo surgir um mosaico tridimensional.

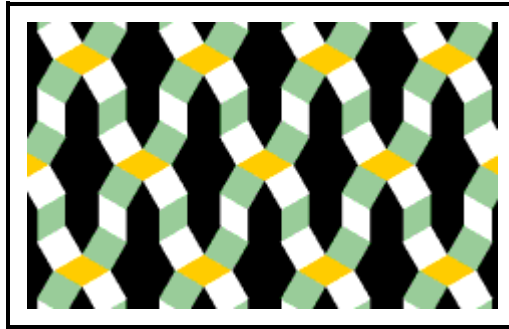


Figura 27: Técnica sem contornos de coloração

Em todos os exemplos, foram utilizados os mesmos mosaicos para que se perceba claramente que além das inúmeras maneiras existentes de se criar e/ou modificarem as pavimentações tem-se também um número infinito de maneiras para colori-los.

## 5 A simetria matemática

Quando falamos que uma imagem é simétrica logo vem a nossa mente uma figura espelhada (figura 28, letra (a)). No entanto as simetrias não dizem respeito unicamente a figuras espelhadas, elas podem também estar presentes em motivos que transladam segundo um vetor (figura 28, letra (b)) ou rotacionam em torno de um ponto (figura 28, letra (c)).

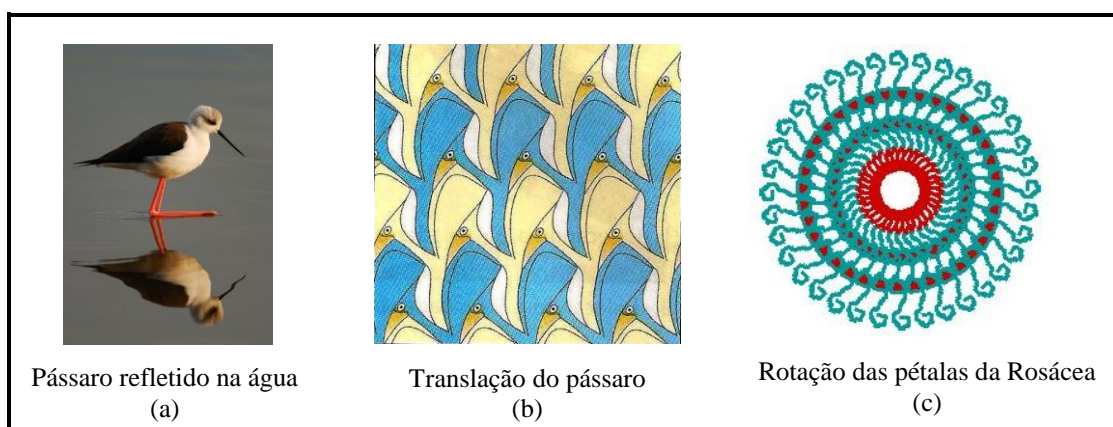


Figura 28: Tipos de simetria

Basta prestar atenção no trabalho do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher, podemos perceber diferentes tipos de simetria em algumas das suas obras (figura 29). Ele fazia tudo na intuição, pois não era matemático, mas em algumas de suas obras há belos exemplos de simetria.



Figura 29: Escher, M. C., “Peixe / pato / lagarto”, 1948 Tinta, aquarela.

Também podemos ver simetria num dos cartões postais do Brasil, o calçadão de Copacabana no Rio de Janeiro, famoso por sua repetição sinuosa e bicolor. O calçadão e algumas das obras de Escher têm características em comum que é a repetição de elementos simétricos que os compõem formando um padrão (figura 30).

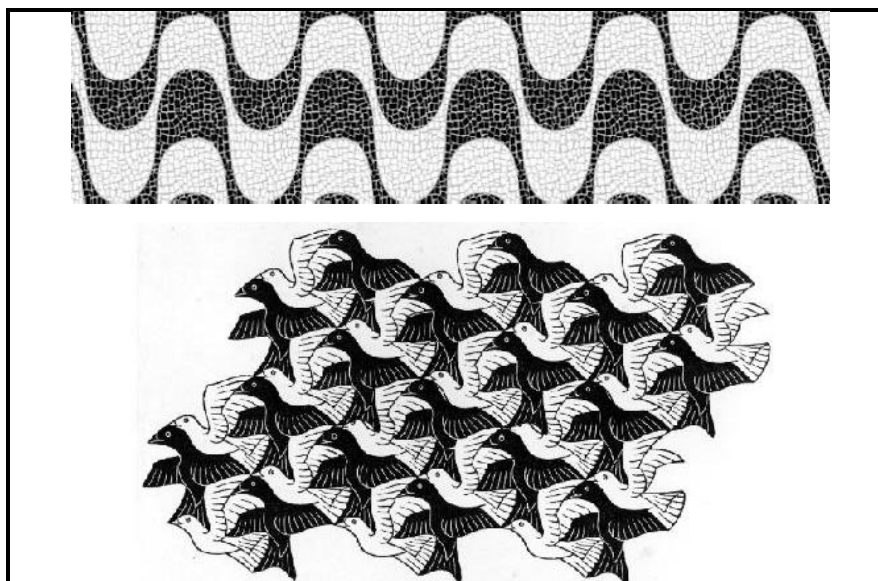


Figura 30: Calçada de Copacabana & Escher, M. C., “Divisão regular do plano com pássaros”, 1949, Gravura em madeira.

A simetria é a semelhança exata de uma forma em torno de um eixo de simetria, em torno de um ponto ou em torno de um plano. Embora relacionado com as artes o conceito de simetria é central no estudo da geometria.

## 5.1 Tipos de simetria

### 5.1.1 Simetria por rotação

A simetria por rotação ocorre quando uma imagem pode ser girada a partir de um ponto e independente do ponto que se observa ela permanece inalterada. A distância dos pontos ao centro de rotação também se mantém constante. Convencionou-se que o sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio é o sentido positivo, enquanto que o sentido do movimento dos ponteiros de um relógio é o sentido negativo. O número  $\pi$  (figura 31) “rodou” no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo), descrevendo um ângulo de vértice O e amplitude 75 graus.

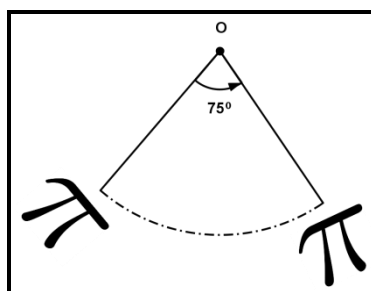


Figura 31: Rotação de centro O e amplitude  $75^{\circ}$

### 5.1.2 Simetria por translação

Na simetria por translação todos os pontos de uma figura se “deslocam” na mesma direção, no mesmo sentido e a mesma distância, sempre associadas a um vetor (figura 32).

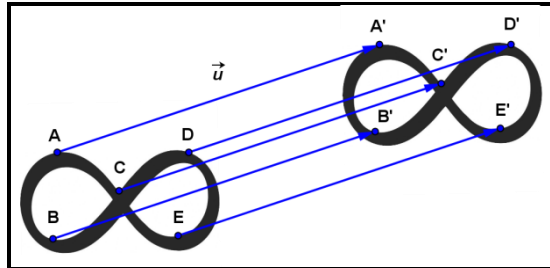


Figura 32: Translação do símbolo do infinito associada ao vetor  $\vec{u}$

Vamos supor esta figura 33 prolongada indefinidamente para os dois lados como se o rastro de pegadas continuasse sempre na mesma direção, aqui ocorre à simetria por translação.

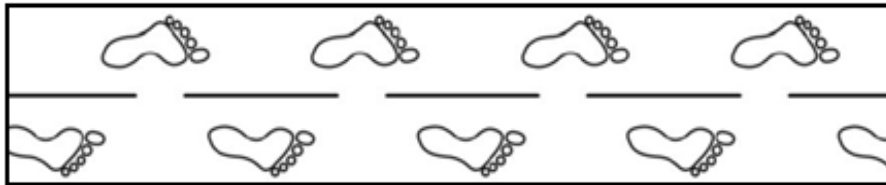


Figura 33: Pegadas

### 5.1.3 Simetria por reflexão

Na chamada simetria por reflexão um objeto ou imagem pode ser refletido em relação a um eixo linear dito eixo de simetria (figura 34), de modo que é possível fazer se corresponder ponto a ponto com a imagem original, é o mesmo que acontece quando estamos diante de um espelho plano, a imagem é simétrica em relação ao objeto real.

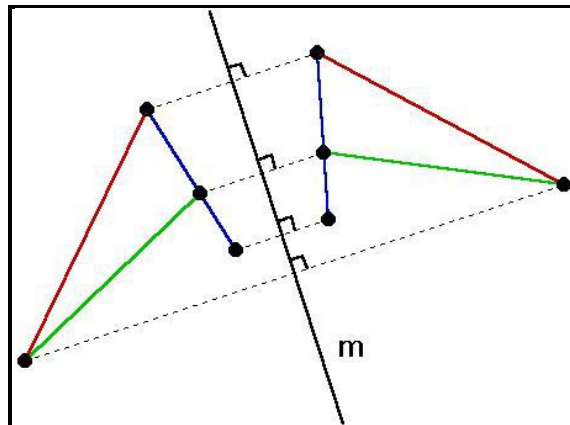


Figura 34: Reflexão do triângulo em relação ao eixo de simetria m

A figura 35 resume bem os três tipos de simetria, estudados neste trabalho, podemos observar que  $F$  é simétrico a  $F'$ , por rotação,  $F'$  é simétrico a  $F''$ , por reflexão e  $F''$  é simétrico a  $F'''$  por translação.

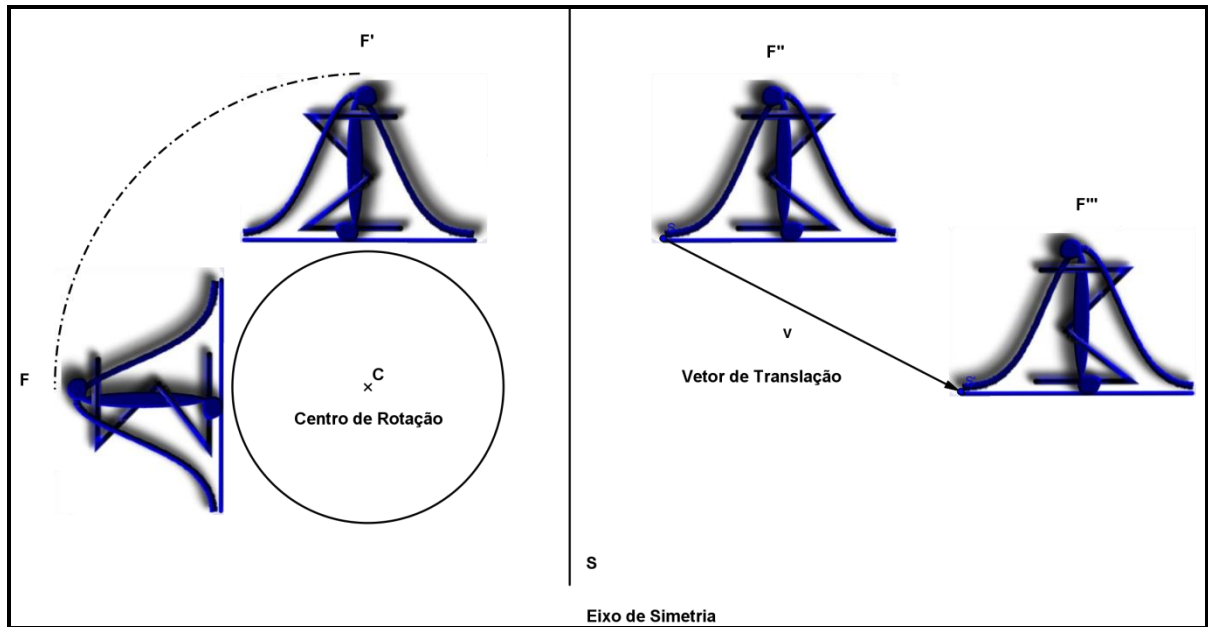


Figura 35: Três tipos de simetria

## 6 Explorando a técnica de Maurits Cornelis Escher

### 6.1 Executando as técnicas

Uma das técnicas utilizadas pelo artista M. C. Escher é relativamente simples, basta retirar uma parte de um lado do polígono e fixar de outro lado, repete-se esta operação seguindo sempre o mesmo processo, até que se obtenha a figura desejada. Como o critério para construção foi o mesmo e partiram de polígonos que possuem a mesma área, elas se encaixam perfeitamente, compondo a tesselação do plano. Para cada tipo de transformação, existe uma técnica diferente, ou seja, um lugar exato onde deve ser fixado o pedaço retirado, para que ocorra a isometria desejada na tesselação.

Serão apresentados alguns exemplos de técnicas que podem ser utilizadas para recriar as obras do artista holandês, a intenção não é de esgotar todas as possibilidades e sim despertar no leitor a curiosidade, capacidade e entendimento para buscar outros exemplos.

#### 6.1.1 Utilizando a rotação para geração da figura base

##### 6.1.1.1 Construção a partir do hexágono

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da rotação a partir do hexágono.

❖ Passo 1: Construção da figura base inicial (figura 36).

# Desenho a - Construir um hexágono regular;

# Desenho b - Construir um polígono num dos lados do hexágono (em vermelho);

# Desenho c - Recortar este polígono e colar em seu lado adjacente, conforme indicado na seta;

# Desenho d - Construir outro polígono no lado adjacente ao que recebeu anteriormente o polígono recortado (em vermelho);

# Desenho e - Recortar este polígono e colar em seu lado adjacente, conforme indicado na seta;

# Desenho f - Construir outro polígono no lado adjacente ao que recebeu anteriormente o polígono recortado (em vermelho);

# Desenho g - Recortar este polígono e colar em seu lado adjacente, conforme indicado na seta;

# Desenho h - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura base inicial para a tesselação.

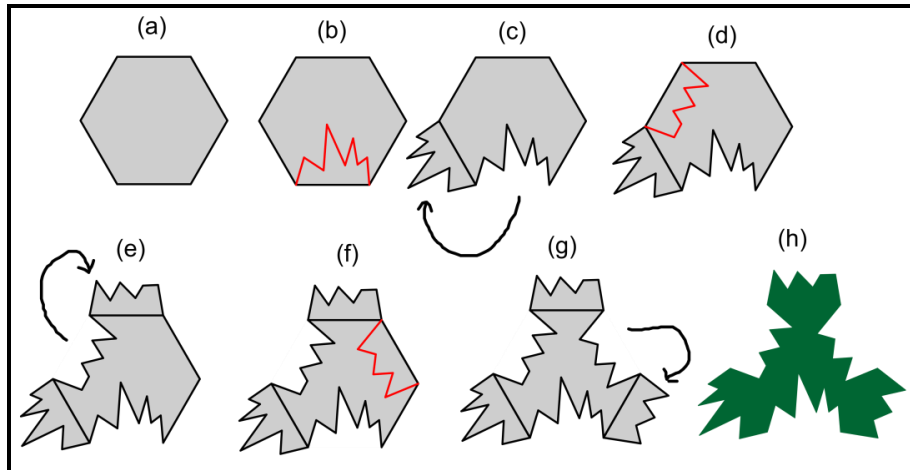


Figura 36: Desenho para construção da figura base inicial

❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 37) e construção da tesselação.

# Desenho a - Escolher um dos vértices ( $P_1$ ) do hexágono de base (em verde) e fazer uma rotação da base inicial, de  $120^\circ$  em relação a esse vértice (em rosa), repetir esta operação (em amarelo) encaixar os polígonos formados, estas três rotações de áreas recortadas geram o elemento base translacional para a tesselação.

# Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação hexagonal, esta feita a tesselação.

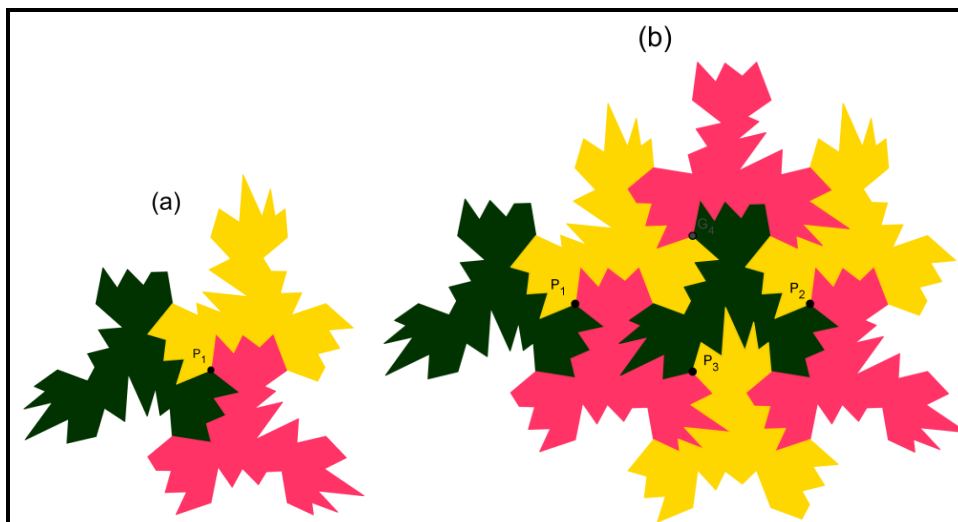


Figura 37: Desenho da translação do elemento base translacional

### 6.1.1.2 Construção a partir do quadrado

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da rotação a partir do quadrado.

❖ Passo 1: Construção de uma figura base inicial (figura 38).

# Desenho a - Construir um quadrado;

# Desenho b - Construir um polígono em um dos lados do quadrado (em vermelho);

# Desenho c - Recortar este polígono e colar em seu lado adjacente, conforme indicado na seta;

# Desenho d - Construir outro polígono no lado adjacente ao que recebeu anteriormente o polígono recortado (em vermelho);

# Desenho e - Recortar este polígono e colar em seu lado adjacente, conforme indicado na seta;

# Desenho f - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura de base inicial para a tesselação.

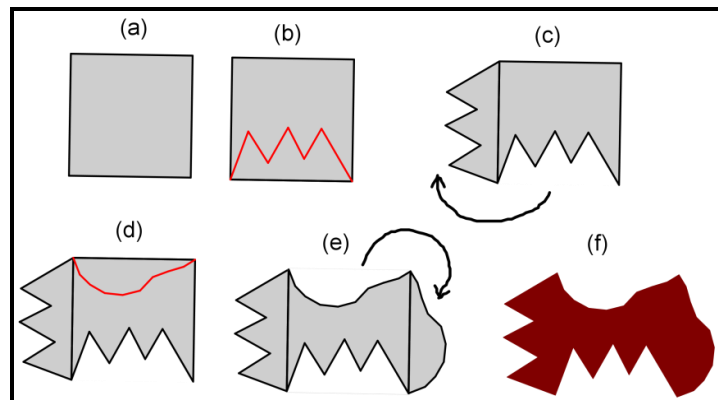


Figura 38: Desenho para construção da figura base inicial

❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 39) e construção da tesselação.

# Desenho a - Escolher um dos vértices ( $P_1$ ) do quadrado que será usado como centro de rotação. Fazer uma rotação de  $90^\circ$  da base inicial em relação ao vértice indicado. Colorir esse polígono (em vermelho), repetir esta operação (em rosa e rosa claro) encaixar os polígonos formados. Estas quatro rotações de áreas recortadas geram o elemento base translacional para a tesselação.

# Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação quadrada, esta feita a tesselação.



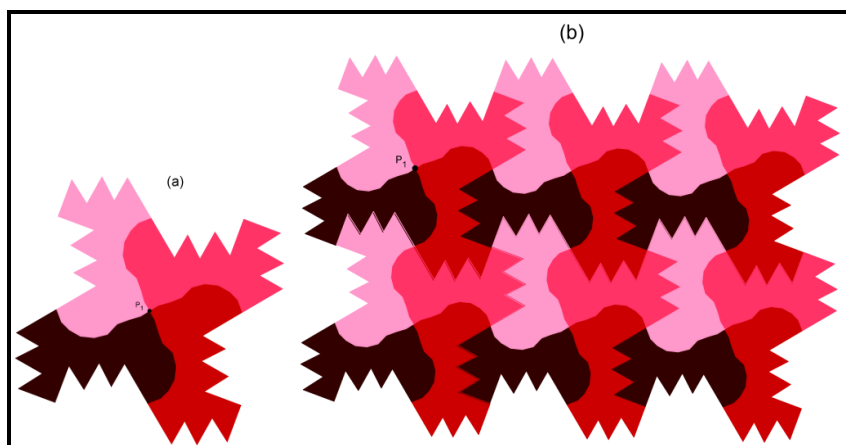


Figura 39: Desenho da translação do elemento base translacional

### 6.1.1.3 Construção a partir do triângulo

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da rotação a partir do triângulo.

❖ Passo 1: Construção de uma figura base inicial (figura 40).

# Desenho a - Construir um triângulo equilátero;

# Desenho b - Construir um polígono em um dos lados do triângulo (em vermelho);

# Desenho c - Recortar este polígono e colar em seu lado adjacente, conforme indicado na seta;

# Desenho d - Marcar o ponto médio, M, do lado do triângulo e construir um polígono utilizando apenas metade do lado (em vermelho);

# Desenho e - Recortar este polígono e colar na outra metade do lado, conforme indicado na seta;

# Desenho f - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura de base inicial para a tesselação.

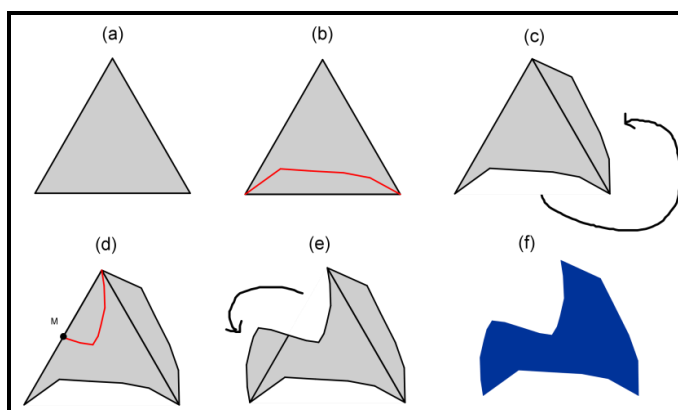


Figura 40: Desenho para construção da figura base inicial

- ❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 41) e construção da tesselação.

- # Desenho a - Escolher um dos vértices do triângulo que será usado como centro de rotação. Fazer uma rotação de  $60^\circ$  da base inicial em relação ao vértice indicado. Colorir esse polígono (em vermelho), repetir esta operação (em verde escuro, amarelo, marrom e verde claro) encaixar os polígonos formados. Estas seis rotações das áreas recortadas geram o elemento base translacional para a tesselação.
- # Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação hexagonal, esta feita a tesselação.

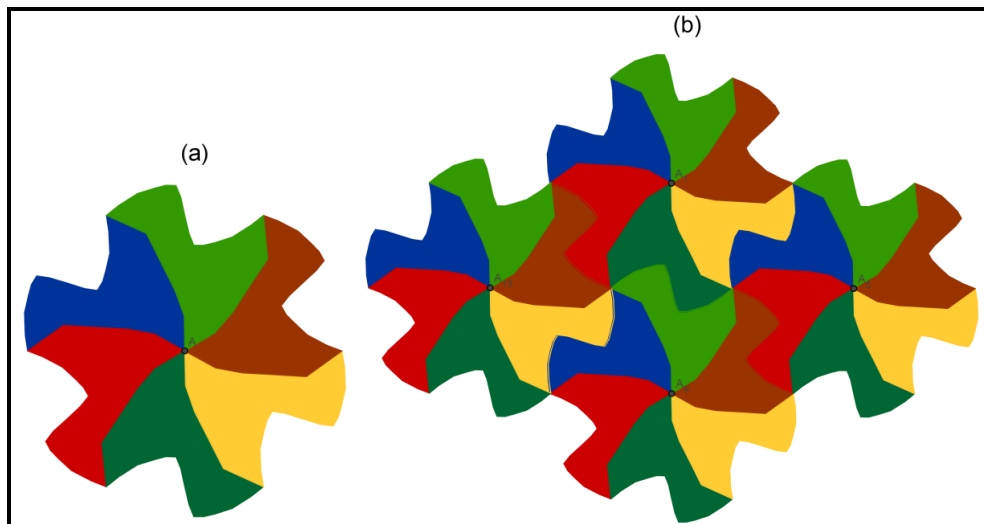


Figura 41: Desenho da translação do elemento base translacional

## 6.1.2 Utilizando translação para geração da figura base

### 6.1.2.1 Construção a partir do quadrado

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da translação a partir do quadrado.

- ❖ Passo 1: Construção de uma figura base inicial (figura 42).
- # Desenho a - Construir um quadrado;
- # Desenho b - Construir um polígono usando um dos lados do quadrado;
- # Desenho c - Construir um vetor com extremidades no lado do quadrado (em verde); Recortar este polígono e fazer a translação do polígono em relação a esse vetor, colando-o no lado oposto ao desenhado;

- # Desenho d - Construir um polígono usando outro lado do quadrado;
- # Desenho e - Construir um vetor com extremidades no lado do quadrado (em verde);  
Recortar este polígono e fazer a translação do polígono em relação a esse vetor;
- # Desenho f - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura de base inicial para a tesselação.

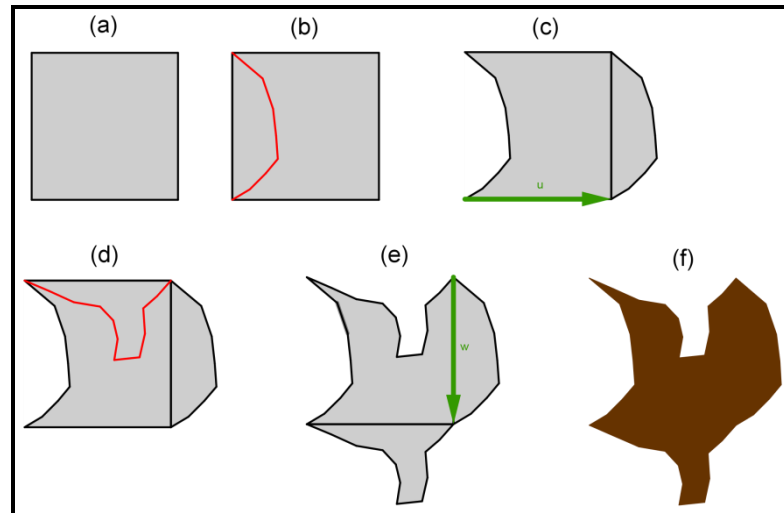


Figura 42: Desenho para construção da figura base inicial

- ❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 43) e construção da tesselação.

- # Desenho a - Construir um vetor com extremidades no lado do quadrado (em verde) e fazer a translação do polígono em relação a esse vetor (em azul). Repetir esta operação (em rosa) encaixar os polígonos formados. Esse será o elemento base translacional para a tesselação.
- # Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação quadrada, está feita a tesselação.

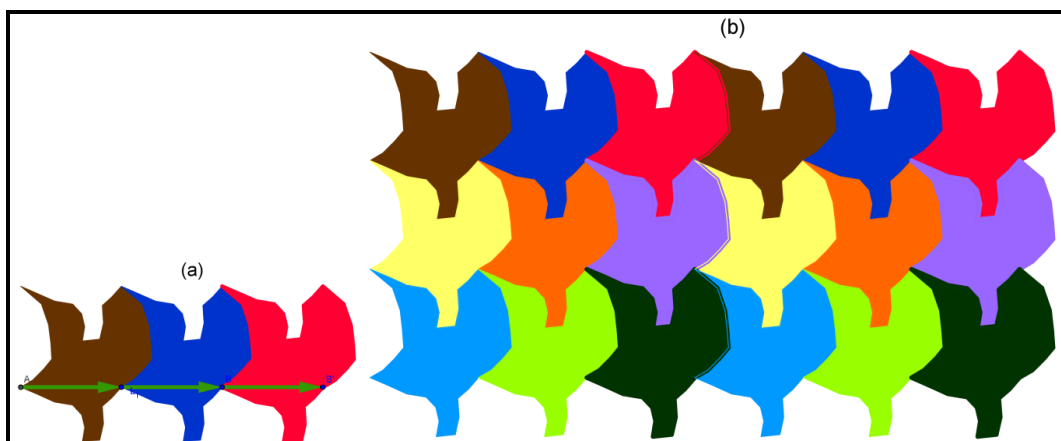


Figura 43: Desenho da translação do elemento base translacional

### 6.1.2.1 Construção a partir do hexágono

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da translação a partir do quadrado.

❖ Passo 1: Construção de uma figura base inicial (figura 44).

# Desenho a - Construir um hexágono;

# Desenho b - Construir um polígono usando um dos lados do hexágono;

# Desenho c - Construir um vetor com extremidades no lado do hexágono (em verde);  
Recortar este polígono e fazer a translação do polígono em relação a esse vetor, colando-o no lado oposto ao desenhado;

# Desenho d - Construir um polígono usando outro lado do hexágono (em vermelho);

# Desenho e - Construir um vetor com extremidades no lado do hexágono (em verde);  
Recortar este polígono e fazer a translação do polígono em relação a esse vetor, colando-o no lado oposto ao desenhado;

# Desenho f - Construir um polígono usando outro lado do hexágono (em vermelho);

# Desenho g - Construir um vetor com extremidades no lado do hexágono (em verde);  
Recortar este polígono e fazer a translação do polígono em relação a esse vetor, colando-o no lado oposto ao desenhado;

# Desenho h - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura de base inicial para a tesselação.

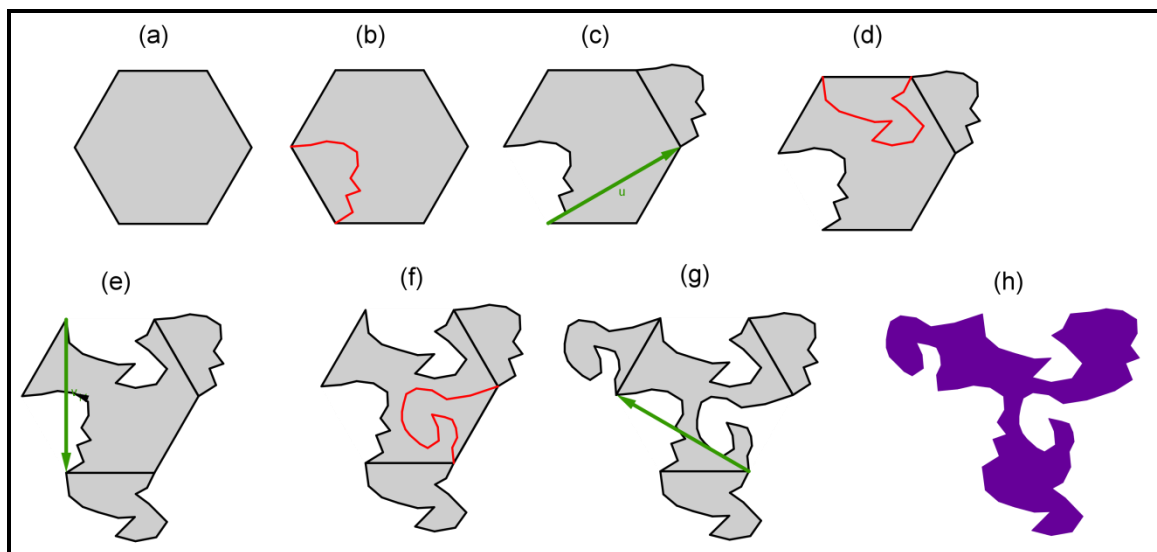


Figura 44: Desenho para construção da figura base inicial

- ❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 45) e construção da tesselação.

# Desenho a - Construir os vetores com extremidades no lado do hexágono (em verde) e fazer as translações do polígono em relação a esses vetores (em verde, laranja, roxo, rosa, amarelo e azul). Encaixar os polígonos formados. Esse será o elemento base translacional para a tesselação.

# Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando uns nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação hexagonal, está feita a tesselação.

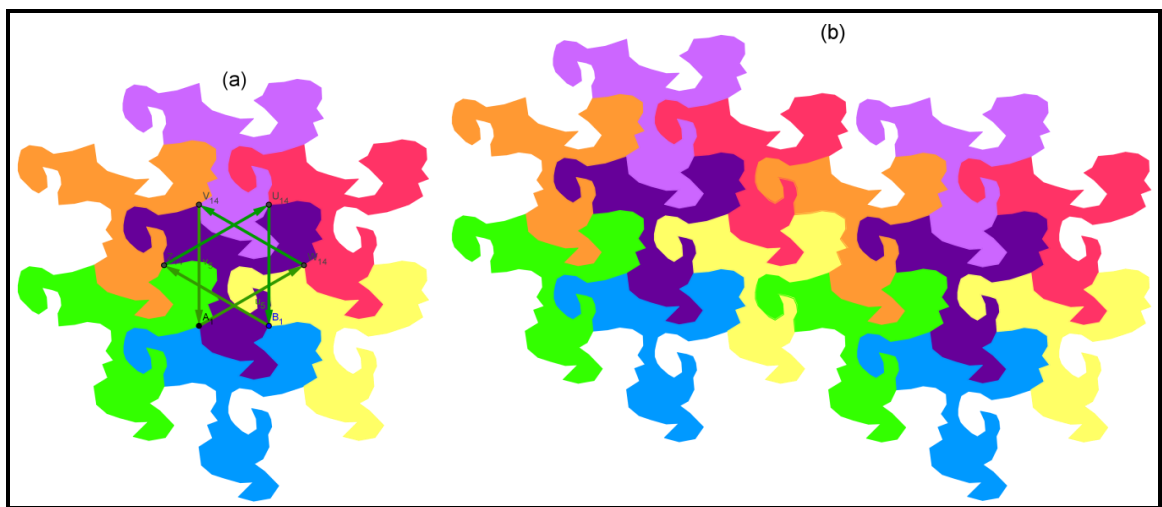


Figura 45: Desenho da translação do elemento base translacional

### 6.1.2.2 Construção a partir do triângulo

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da translação a partir do triângulo.

- ❖ Passo 1: Construção de uma figura base inicial (figura 46).

# Desenho a - Construir um triângulo equilátero e marcar seus pontos médios;

# Desenho b - Construir um polígono usando um dos lados do triângulo (em vermelho);

# Desenho c - Desenhar nos outros lados do triângulo o mesmo polígono, conforme indicado em vermelho;

# Desenho d - Recortar estes polígonos, colando-os no mesmo lado pelo lado de “fora” conforme indicado nas setas;

# Desenho e - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura de base inicial para a tesselação.

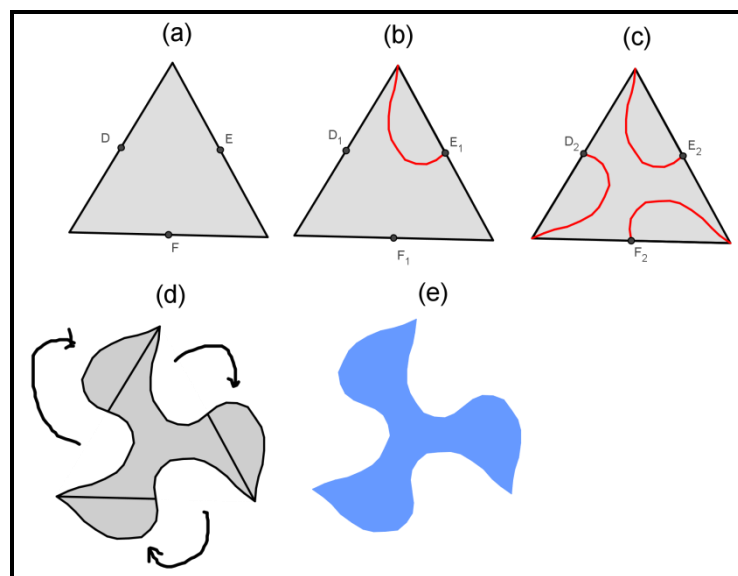


Figura 46: Desenho para construção da figura base inicial

❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 47) e construção da tesselação.

# Desenho a - Construir os vetores (em rosa) com extremidades no lado do triângulo e fazer as translações do polígono em relação a esses vetores. Encaixar os polígonos formados. Estas translações das áreas recortadas geram o elemento base translacional para a tesselação.

# Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando uns nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação hexagonal, está feita a tesselação.

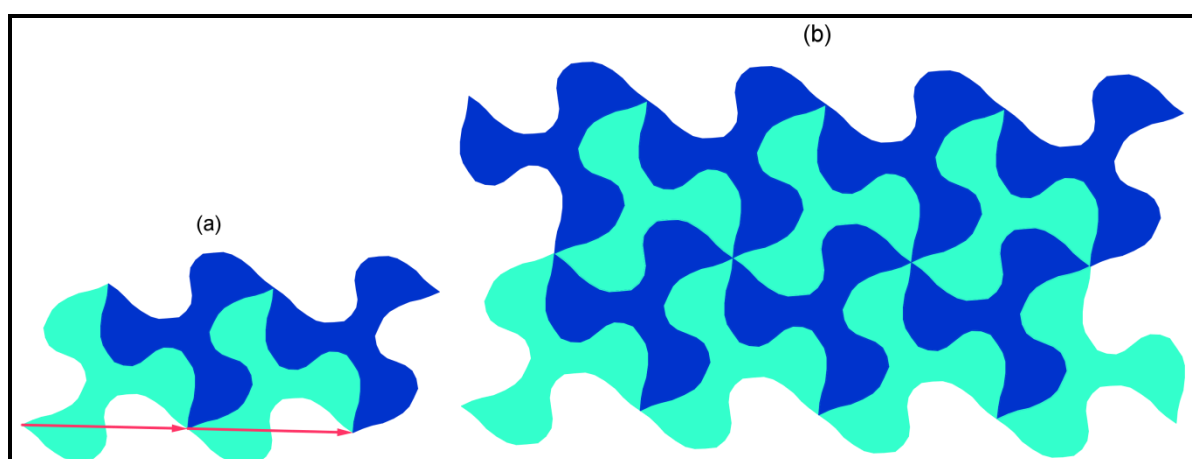


Figura 47: Desenho da translação do elemento base translacional

### 6.1.3 Figuras base que contém um eixo de simetria interno

#### 6.1.3.1 Construção a partir do quadrado

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da reflexão a partir do quadrado.

❖ Passo 1: Construção de uma figura base inicial (figura 48).

# Desenho a - Construir um quadrado;

# Desenho b - Dividir mentalmente em quatro partes. Utilize um dos quadrantes para desenhar o polígono inicial (em vermelho);

# Desenho c - Recortar este polígono e colar em seu lado adjacente, conforme indicado na seta;

# Desenho d - Fazer uma reflexão desse polígono que será recortado em relação a diagonal do quadrado (em verde), obtendo o segundo polígono a ser recortado;

# Desenho e - Colar na outra metade do lado, conforme indicado;

# Desenho f - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura de base inicial para a tesselação.

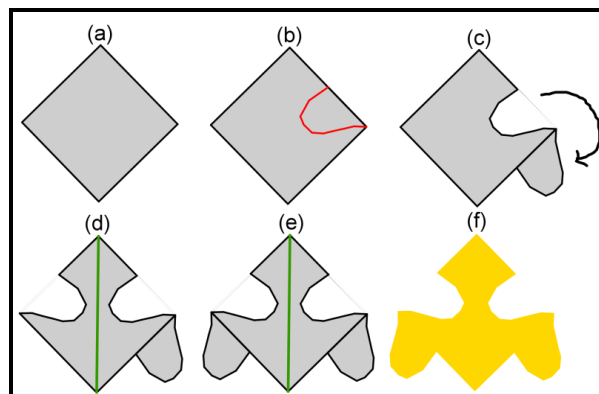


Figura 48: Desenho para construção da figura base inicial

❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 49) e construção da tesselação.

# Desenho a - Fazer uma reflexão da base inicial em relação a um dos vértices do quadrado original e duas rotações (em azul), estas reflexões e rotações das áreas recortadas geram o elemento base translacional para a tesselação.

# Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando uns nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação quadrada diagonal, está feita a tesselação.

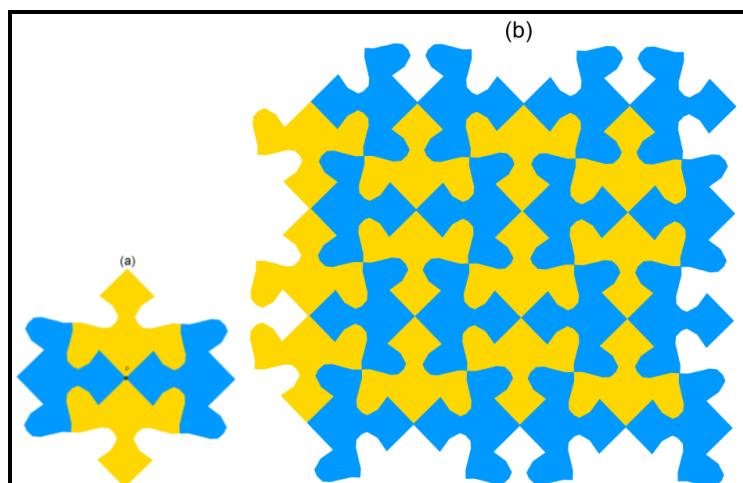


Figura 49: Desenho da translação do elemento base translacional

### 6.1.3.2 Construção a partir do triângulo

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da reflexão a partir do triângulo.

❖ Passo 1: Construção de uma figura base utilizando duas rotações das áreas recortadas preservando um eixo de simetria (figura 50).

# Desenho a - Construir um triângulo equilátero;

# Desenho b - Construir um polígono em um dos “bicos” do triângulo (em vermelho);

# Desenho c - Traçar a altura AH do triângulo (em verde). Fazer uma reflexão do polígono em relação à altura (em vermelho) obtendo os polígonos a serem recortados;

# Desenho d - Recortar estes polígonos e colar conforme indicado nas setas;

# Desenho e - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura de base inicial para a tesselação.

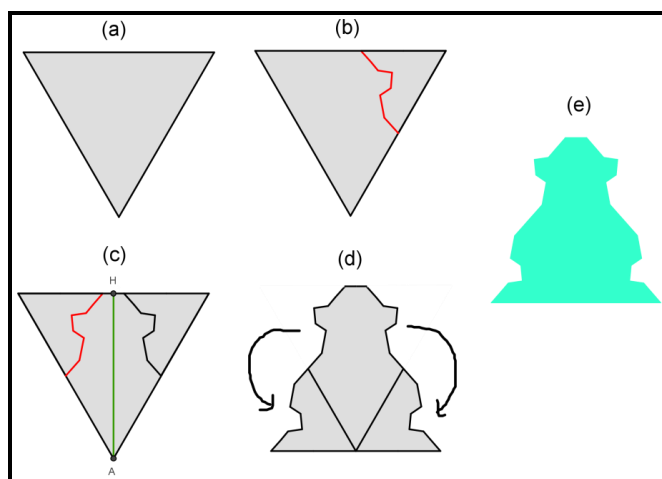


Figura 50: Desenho para construção da figura base inicial



- ❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 51) e construção da tesselação.

# Desenho a - Fazer uma rotação, uma translação e uma reflexão da base inicial. Estas transformações das áreas recortadas geram o elemento base translacional para a tesselação.

# Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando uns nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação retangular, está feita a tesselação.

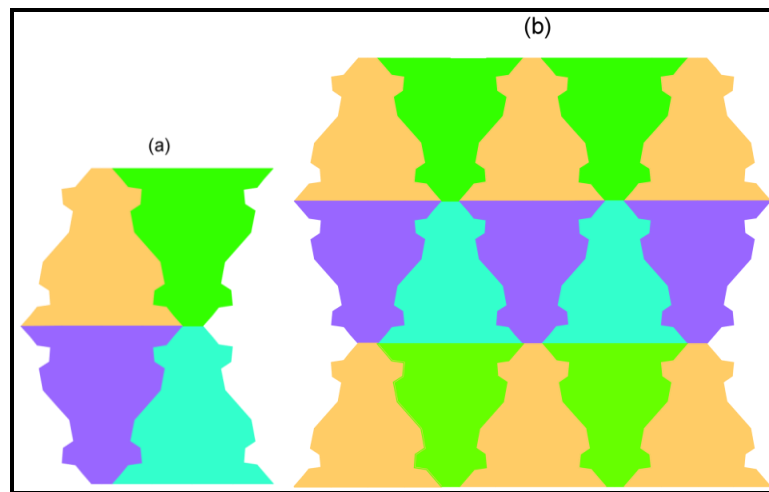


Figura 51: Desenho da translação do elemento base translacional

### 6.1.3.3 Construção a partir do hexágono

Observe o passo a passo da técnica de construção que deverá ser utilizada para que tenhamos a tesselação através da reflexão a partir do hexágono.

- ❖ Passo 1: Construção de uma figura base inicial preservando o eixo de simetria (figura 52).

# Desenho a - Construir um hexágono;

# Desenho b - Traçar uma diagonal no hexágono (em verde). Construir um polígono em um dos lados do hexágono (em vermelho);

# Desenho c - Fazer uma reflexão do polígono em relação a diagonal;

# Desenho d - Recortar estes polígonos e colar conforme indicado nas setas;

# Desenho e - Construir um polígono em outro lado do hexágono (em vermelho);

# Desenho f - Fazer uma reflexão do polígono em relação a diagonal;

# Desenho g - Recortar estes polígonos e colar conforme indicado nas setas;

# Desenho h - Construir um polígono no contorno de toda a figura e colorir. Essa será a figura de base inicial para a tesselação.

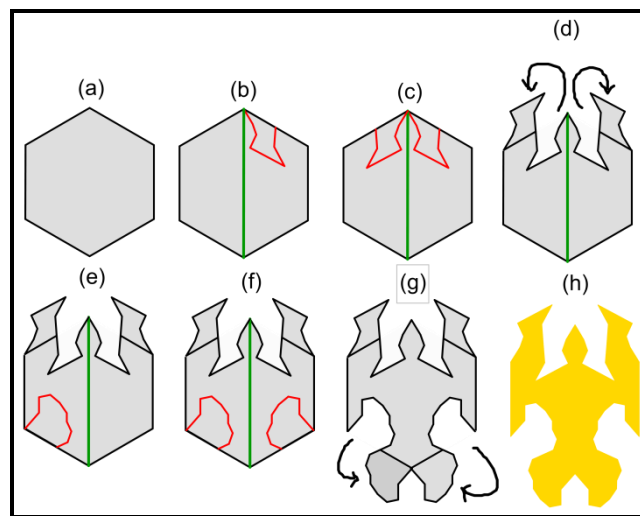


Figura 52: Desenho para construção da figura base inicial

❖ Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional (figura 53) e construção da tesselação.

# Desenho a - Fazer uma reflexão da base inicial em relação a um dos lados do hexágono original (em verde rosa e vermelho).

# Desenho b - Transladando este elemento base translacional e encaixando uns nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação quadrada, está feita a tesselação.

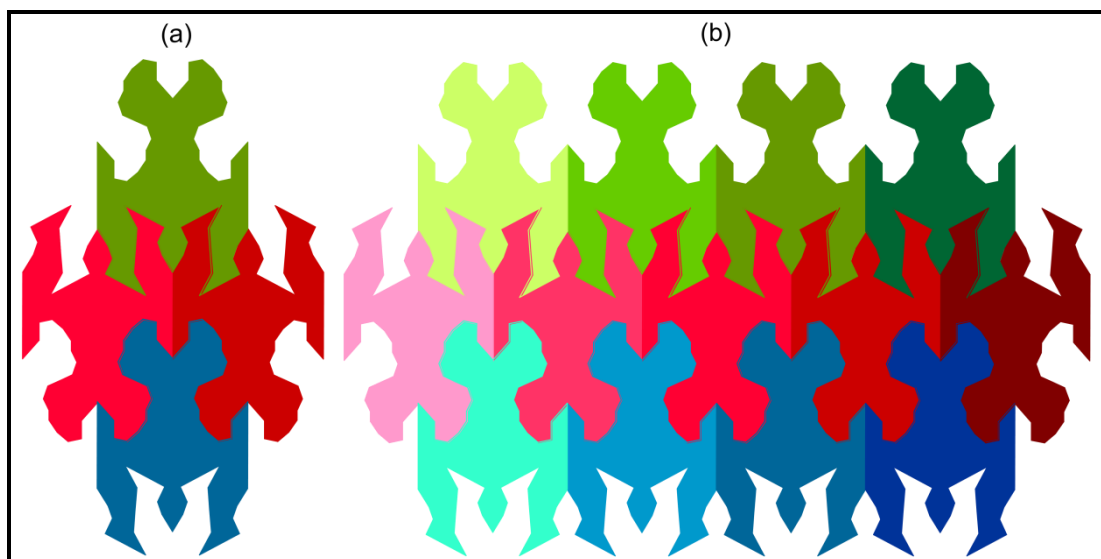


Figura 53: Desenho da translação do elemento base translacional

## 7 Propostas de aulas

O pilar principal do trabalho é facilitar o processo de ensino e aprendizagem de simetria, tendo como inspiração as obras do artista holandês M. C. Escher e não apenas apresentá-lo como uma atividade extracurricular não integrada as aulas. Neste capítulo será apresentado o planejamento das aulas, detalhando seus objetivos, interdisciplinaridade e avaliação.

É muito importante para o aluno, num primeiro momento, trabalhar com materiais concretos, para que depois ele seja capaz de abstrair aquele conceito de forma natural e definitiva. Segundo Watermann & Franco: “(...) *no processo ensino-aprendizagem o aluno deve realizar experiências com materiais concretos, usando a intuição que desperta a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, vivenciando de forma dinâmica os conteúdos, descobrindo conceitos e interiorizando-os, que servirão como auxiliares no desenvolvimento de seu raciocínio lógico*”. Baseado nestes conceitos que as aulas foram planejadas.

### 7.1 Planejamento

#### 7.1.1 Objetivos

- ✓ Identificar padrões, pavimentações e simetrias nas obras de Escher;
- ✓ Reconhecer as diferentes simetrias nas obras de Escher;
- ✓ Compor sólidos geométricos planejados com as obras de Escher;
- ✓ Articular saberes geométricos e artísticos;
- ✓ Criar Tesselações no Plano.

#### 7.1.2 Duração das atividades

Para realizá-las são necessárias cinco aulas, cada uma com dois tempos de cinquenta minutos.

### **7.1.3 Interdisciplinaridade**

A proposta do estudo da simetria pode ser feita em parceria com o professor de Arte, proporcionando assim uma interdisciplinaridade, pois vários dos conceitos apresentados são trabalhados nesta disciplina. Pode-se também ser feita uma parceria com os professores de Informática, História e Língua Portuguesa, ajudando no trabalho de pesquisa biográfica do artista e também com o professor de Inglês, ajudando durante a exibição dos vídeos. Este trabalho pode facilmente ser feito somente pelo professor de Matemática, mas como recomenda os PCN's, a integração das áreas aparentemente distintas ajuda na desfragmentação do conhecimento tornando o seu processo de construção mais fácil, eficaz e definitivo.

### **7.1.4 Avaliação**

Ao final das atividades, o professor pode organizar uma exposição, disponibilizando as telas recriadas, a biografia elaborada e as composições dos Poliedros de Platão. A avaliação dos alunos deverá ser realizada ao longo de todas as aulas, vejamos alguns critérios a serem observados:

- ✓ Participação na atividade inicial.
- ✓ Desenvolvimento e realização das atividades.
- ✓ Participação no desenvolvimento do contexto geral da aula.
- ✓ Apresentação do trabalho.

## **7.2 Roteiro das aulas**

A inclusão destas aulas no planejamento, não vai demandar tempo excessivo e nem provocar a retirada de aulas de outro conteúdo, pois a proposta é fazer um “puxadinho” na grade de maneira viável, criando atividades que possam ser aplicadas de maneira interdisciplinar, ajudando a integrar o conhecimento.

### 7.2.1 Aula 1 - Conhecendo Maurits Cornelis Escher

Será uma aula de pesquisa no laboratório de informática e seu objetivo principal é explorar a vida Maurits Cornelis Escher virtualmente. Para minimizar a necessidade de se acrescentar aulas, esta pode ser feita, interdisciplinarmente, pelo professor de Informática ou de Artes.

Com os alunos divididos em grupos de três ou quatro alunos, orientar uma pesquisa, dando ênfase a vida e a obra de Escher. Como roteiro, o professor pode sugerir algumas questões como:

- ✓ Quem foi Escher, Onde e quando nasceu?
- ✓ Em uma época de sua vida, Escher entrou em contato com uma cultura que inspirou seus desenhos, que cultura foi essa?
- ✓ Qual a sua máquina, ou melhor, a teoria por trás das obras criadas por Escher para conseguir encaixes tão perfeitos e complicados em seus trabalhos?
- ✓ Qual a relação de Escher com a Matemática? Ele afirmava que a Matemática é "um portão aberto"? E para você, a Matemática é "um portão aberto"? Por quê?
- ✓ O que mais te chama atenção nas obras? O contato com as obras de Escher modificou sua visão sobre a Matemática? Influenciou seus trabalhos artísticos?

Estas questões deverão ser registradas e organizadas numa biografia de Maurits Cornelis Escher, neste momento podemos pedir a ajuda ao professor de Português, para ajudar os alunos nesta construção.

### 7.2.2 Aula 2 - Trocando as informações

Será uma aula expositiva com atividades de aprendizagem. Para motivá-los ainda mais, exponha, utilizando um *datashow* ou outro equipamento (retroprojektor, televisão,...), algumas obras de Escher (figura 54), para que os alunos façam observações sobre o que estão vendo, trocando as informações colhidas, na aula anterior, na internet. Desta forma, o aluno, informalmente, aprofunda seu conhecimento sobre os diferentes tipos de simetria existentes, de forma intuitiva.



Figura 54: Algumas obras de M. C. Escher

Nesta aula, também podemos levar os alunos a perceber que nas obras de Escher encontramos pavimentações geradas por um padrão, e que este, se tratado de forma simplificada, nada mais é do que a existência de um “motivo” (Figura 55(a)) e suas cópias, pintadas com uma ou mais cores, sobre um fundo uniforme (Figura 55(b)).

Deve-se também chamar a atenção, para o fato que nestes desenhos a intenção é cobrir o plano completamente, sem área livres e sobreposições, constituindo assim, as tesselações.

Levando-os observar também, que esta pode ser constituída por translações (Figura 55(c)) rotações e/ou reflexões do motivo (Figura 56).



Figura 55: Fases da construção da Obra “Dois pássaros”, 1938, nanquim, lápis, aquarela.

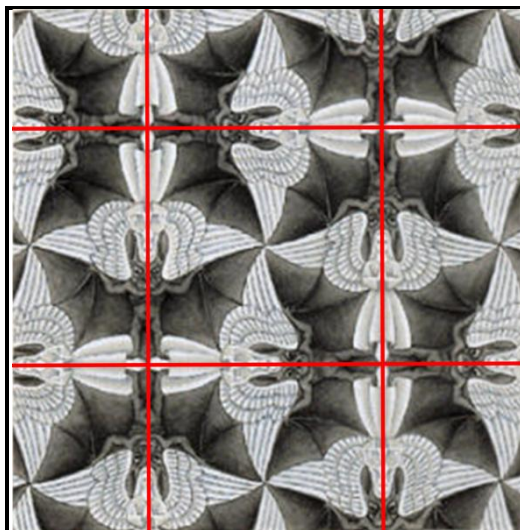


Figura 56: Escher, M. C., “Anjos e Demônios”, 1941, nanquim, lápis de cor, tinta branca.

Faça com que os alunos imaginem um espelho no lugar do traço vermelho, percebendo a simetria por reflexão. Num outro momento peça aos alunos que fixem o ponto de encontro das asas, a partir daí, podemos visualizar a simetria por rotação do motivo. É bastante comum identificar mais de um tipo de transformação nas obras de Escher.

Existem inúmeros obras deste artista que podem ser apresentadas aos alunos nesta aula, o mais importante é despertar no aluno a curiosidade sobre o tema, fazê-los debater até esgotar todas as possibilidades, pois assim eles estarão participando de forma ativa no seu processo de construção do conhecimento.

### **7.2.3 Aula 3 - Conceito de simetria e tesselações**

Será uma aula expositiva com atividades de aprendizagem. Nesta aula, trabalha-se o conceito de transformações, simetria e tesselações, para uma melhor fixação desses conceitos. O primeiro tempo de aula é expositivo, no segundo, propõem-se exercícios de fixação onde os alunos percebam os tipos de transformações, simetria e tesselações existentes. Não serão incluídos aqui mais detalhes desta aula, pois ela foge do escopo do trabalho.

### **7.2.4 Aula 4 - Criando uma tesselação**

Será uma aula expositiva e prática e seu objetivo principal é recriar a arte de Maurits Cornelis Escher. Use um *datashow* ou outro equipamento (retroprojeter, televisão,...) para apresentar a aula em PowerPoint (veja slides em anexo). Como alguns vídeos o áudio está em

inglês e poderá confundir os alunos, pode-se solicitar a presença do professor de inglês para o acompanhamento desta atividade, ajudando os alunos na compreensão dos vídeos.

Depois de apresentadas às técnicas utilizadas na criação de suas obras através dos vídeos, proponha, como desafio, que os grupos escolham dentre os trabalhos de Escher, um para fazer uma releitura, usando um painel de no mínimo 30 cm x 50 cm de tela, papelão, papel cartão ou tecido; pintando com tintas guache, aquarela, plástica ou acrílica ou ainda lápis ou giz de cera.

Na atividade os alunos irão criar tesselações similares aos feitos por Escher e identificar na obra o tipo de simetria encontrado, utilizando recursos que mais convier, como por exemplo, produções em vídeos e apresentações em PowerPoint. A ideia é que os desenhos produzidos sejam parecidos, mas não precisam e não devem ser idênticos aos feitos por Escher. Afinal, nem todos são artistas, mas todos podem fazer arte. Pode-se solicitar a presença do professor de artes para o acompanhamento desta atividade, ajudando os alunos na elaboração da releitura das obras.

### **7.2.5 Aula 5 - Construção dos poliedros de Platão**

Será uma aula prática e seu objetivo principal é aplicar a arte de Maurits Cornelis Escher nos poliedros de Platão. Para minimizar a necessidade de se acrescentar aulas, esta pode ser feita, interdisciplinarmente, pelo professor de Artes. Nesta aula também podemos deixar os alunos criarem suas tesselações, similares aos feitos por Escher, nas planificações dos sólidos geométricos, dando mais liberdade e motivação para a criatividade do aluno.

Com os alunos divididos em grupos de três ou quatro alunos, peça que eles componham os poliedros utilizando as obras de Escher nas faces, conforme orientações abaixo. No momento das composições converse com os alunos sobre cada possibilidade, mostre que as simetrias são uma constante nas obras de Escher e por conta disso, é possível decorar as faces de figuras tridimensionais onde as arestas coincidam com os eixos de simetria das imagens e os vértices com os pontos de rotação do motivo, assim, cada sólido geométrico só pode ser planificado por determinadas obras. Mais uma vez a intenção não é de esgotar todas as possibilidades, apenas apresentar alguns exemplos de técnicas que podem ser utilizadas.



### 7.2.5.1 Dodecaedro

Na composição do dodecaedro pode ser usada a obra das conchas e estrelas do mar.

❖ Material: Papel de 200grs; Cola; Tesoura; Espátula de vincar; Lápis e régua graduada.



Figura 57: Modelo do dodecaedro, metades 1 e 2

❖ Passos

1º) Imprima as duas metades do modelo 1 e 2 (figura 57). Recorte, dobre e vinque as arestas.

2º) Cole a aba A à aresta adequada, de forma a completar o desenho da concha (figura 58).



Figura 58: Arestas coladas de forma a completar o desenho da concha

3º) Monte o modelo e cole as abas, nas direções indicadas, no interior das arestas (figura 59).

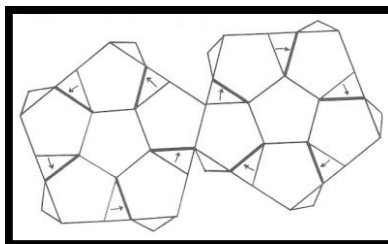


Figura 59: Direção da colagem das abas

4º) Obtém duas "taças", ligadas uma à outra. Cole as restantes abas às arestas correspondentes para fechar e obter o dodecaedro (figura 60). Pronto está construído o Dodecaedro.



Figura 60: Duas "taças" ligadas

### 7.2.5.2 Cubo

Na composição do cubo pode ser usada a obra dos peixes.

❖ Material: Papel de 200grs; Cola; Tesoura; Espátula de vincar; Lápis e régua graduada.

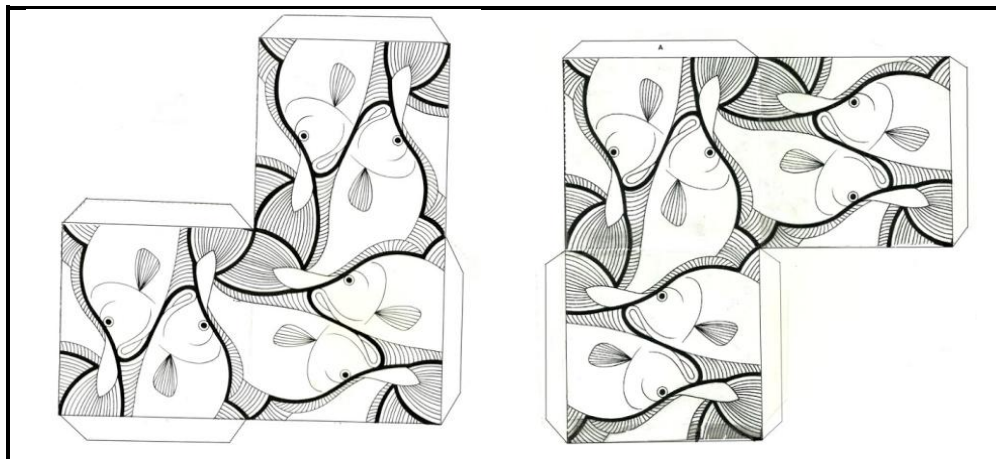


Figura 61: Modelo do cubo, metades 1 e 2

❖ Passos

- 1º) Imprima as metades do modelo 1 e 2 (figura 61). Recorte, dobre e vinque as arestas.
- 2º) Cole a aba A à aresta adequada, de forma a obter o padrão plano e completar o desenho dos peixes, (figura 62).

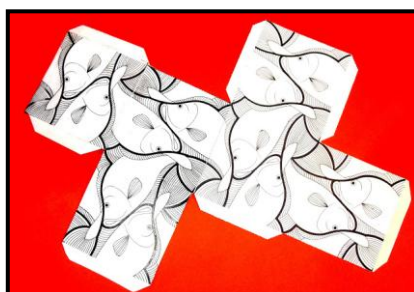


Figura 62: Padrão plano

- 3º) Monte o modelo e cole as abas, nas direções indicadas, no interior das arestas (figura 63). Pronto está construído o cubo.

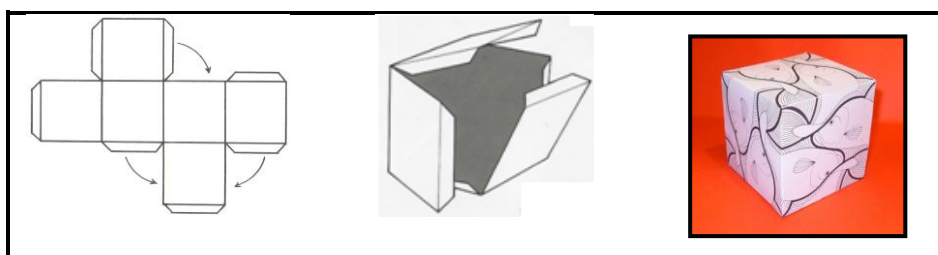


Figura 63: Direção da colagem e fechamento final do poliedro

### 7.2.5.3 Tetraedro

Na composição do tetraedro pode ser usada a obra dos repteis.

❖ Material: Papel de 200grs; Cola; Tesoura; Espátula de vincar; Lápis e régua graduada.



Figura 64: Modelo do tetraedro

❖ Passos

1º) Imprima o modelo (figura 64) . Recorte, dobre e vinque as arestas.

2º) Monte o modelo e cole as abas, nas direções indicadas, no interior das arestas, (figura 65).

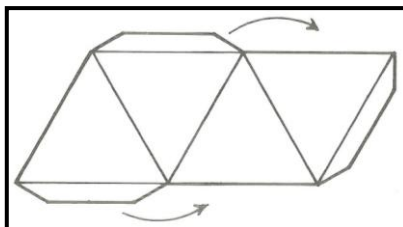


Figura 65: Modelo Tetraedro, com direção da colagem das abas.

3º) Cole a aba restante. Pronto está construído o Tetraedro (figura 66).

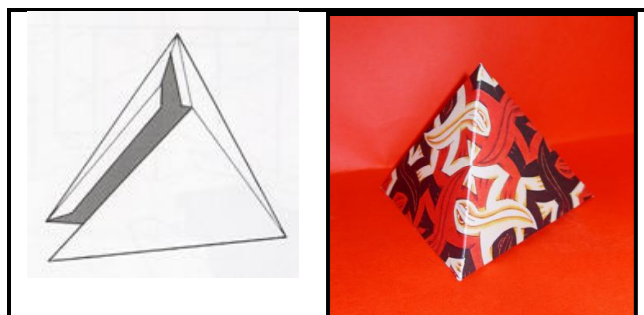


Figura 66: Fechamento final do poliedro

### 7.2.5.4 Octaedro

Na composição do octaedro pode ser usada a obra dos três mundos.

❖ Material: Papel de 200grs; Cola; Tesoura; Espátula de vincar; Lápis e régua graduada.

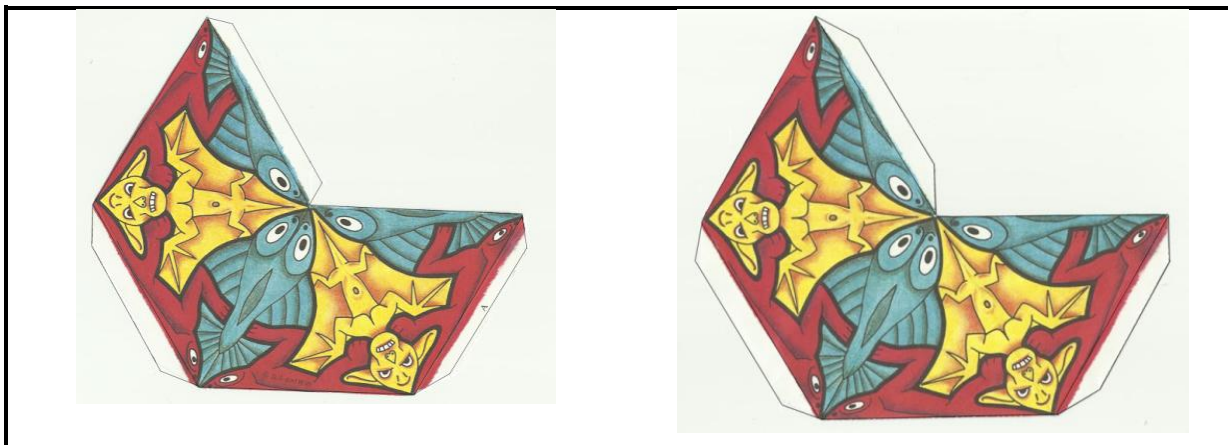


Figura 67: Modelo do Octaedro, metades 1 e 2

❖ Passos

- 1º) Imprima as duas metades do modelo 1 e 2 (figura 67) . Recorte, dobre e vinque as arestas.
- 2º) Junte as duas metades do modelo, colando a aba A à aresta adequada, de forma a obter o padrão plano (figura 68).

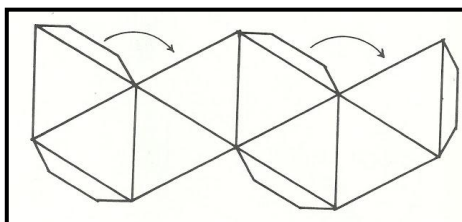


Figura 68: Padrão plano. Metades do modelo coladas.

- 3º) Monte o modelo e cole as abas (como indicado na figura 69), no interior da aresta respectiva; obtém duas pirâmides ligadas entre si. Cole a aba restante. Pronto está construído o Octaedro (figura 69).

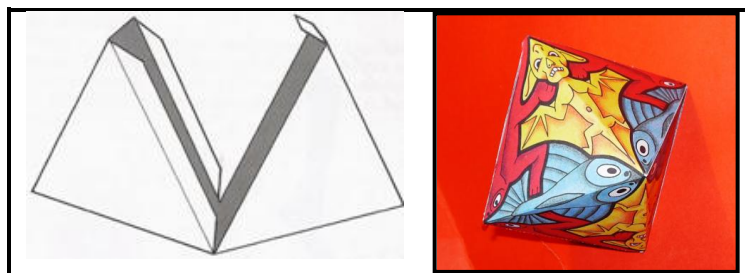


Figura 69: Fechamento final do poliedro

### 7.2.5.5 Icosaedro

Na composição do icosaedro pode ser usada a obra das borboletas.

❖ Material: Papel de 200grs; Cola; Tesoura; Espátula de vincar; Lápis e régua graduada.

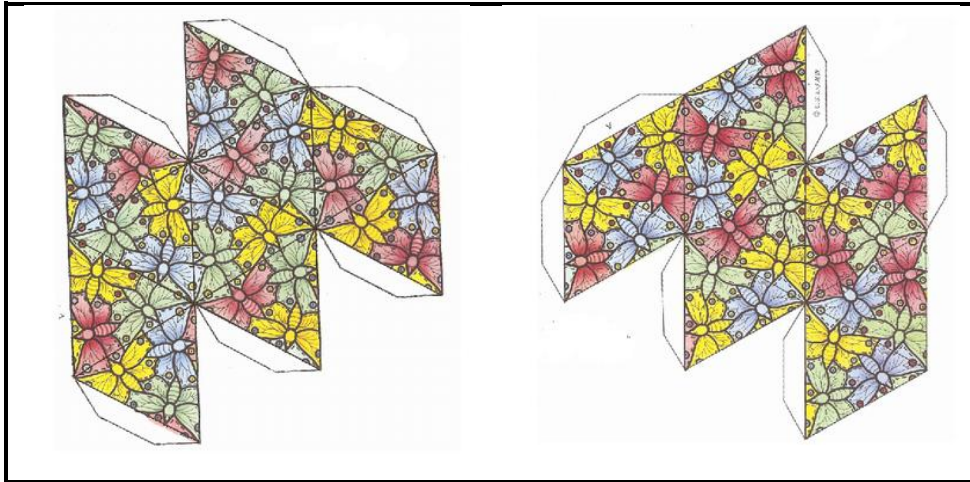


Figura 70: Modelo do Icosaedro, metades 1 e 2

❖ Passos

- 1º) Imprima as duas metades do modelo 1 e 2 (figura 70) . Recorte, dobre e vinque as arestas.
- 2º) Junte as duas metades do modelo, colando a aba A à aresta adequada, de forma a obter o padrão plano (figura 71).

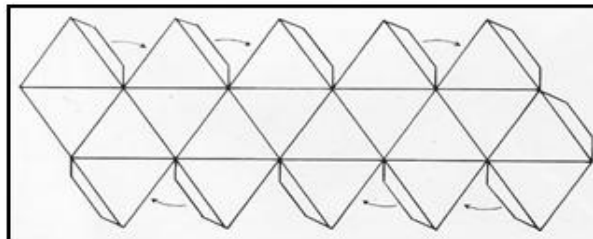


Figura 71: Padrão plano. Metades do modelo coladas.

- 3º) Monte o modelo e cole as abas nas direções indicadas, no interior da aresta respectiva; obtém duas taças, ligadas entre si. Cole-as uma à outra, nos lugares apropriados. Pronto está construído o Icosaedro (figura 72).

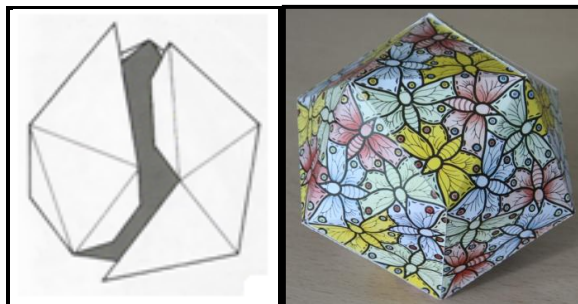


Figura 72: Fechamento final do poliedro

## 8 Relato de Prática

Neste capítulo será relatada a experiência na realização das atividades, alguns fatos que ocorreram e os resultados obtidos.

### 8.1 Realização das aulas

Na primeira aula foi apresentado o artista holandês, numa tentativa de provocar neles o interesse pelas suas obras e fazendo-os buscar a matemática escondida por trás de suas obras.

Esta aula foi no laboratório de informática, junto com o professor Fernando, que leciona informática para a turma, antes de pedir que fizessem a pesquisa, perguntei se alguém já tinha ouvido falar em Maurits Cornelis Escher, e como eu já esperava, a resposta foi negativa. Então perguntei se alguém já tinha visto na internet ou em outro lugar, uns desenhos que nos davam a impressão de estar subindo e descendo ao mesmo tempo, alguns disseram que já tinham visto, pois gostavam de ilusão de ótica e que tinham aprendido sobre isso com a professora de Ciências.

Usando este gancho, comecei a falar sobre o artista, dizendo que ele era o autor de inúmeros desenhos intrigantes e surpreendentes, mas não dei muitos detalhes, pois queria que eles descobrissem sozinhos através de sua pesquisa, falei apenas o necessário para que despertasse neles a vontade de saber mais sobre o fascinante M. C. Escher. Esta pesquisa foi feita durante todo o primeiro tempo de aula, sempre com a orientação do professor Fernando, que a direcionou, para que ela fosse a mais objetiva e produtiva possível e também para que os alunos não se dispersassem, afinal os atrativos na internet são muitos. No segundo tempo de aula, os alunos (em grupo) elaboraram a Biografia do artista, baseada nos fatos colhidos virtualmente, os que não conseguiram acabar em aula levaram para casa para terminar.

Por estarmos quase no final do ano e por serem turmas de primeiro e segundo ano do Ensino Médio e os conceitos geométricos básicos necessários para o entendimento do projeto, já terem sido trabalhados em anos escolares anteriores, as aulas dois e três foram unidas numa mesma aula. Nesta foram apresentados alguns desenhos do artista e neles foram destacados os tipos de simetria existentes, como não houve a necessidade de se deter muito nos conceitos, ficamos com mais liberdade para explorar ao máximo os desenhos e seus movimentos. A cada

figura mostrada era proposto aos alunos que dissessem que tipo e/ou tipos de simetria eram utilizados por Escher.

Os alunos ficaram compenetrados durante toda a exposição e se divertindo muito nas figuras finais, já bem familiarizados com as técnicas do artista holandês, sendo uma das frases mais citadas "Ele é o cara". Disse então que na próxima aula eu apresentaria a eles, como eram feitos aqueles desenhos, e que eles também seriam capazes de criar e de ter seu momento de artista, todos ficaram extremamente empolgados com a perspectiva desta produção, mas também com muito receio, pois diziam que "Aqueles desenhos não são de Deus" e que eles duvidavam que fossem capazes de fazer, mas estavam topando o desafio.

Na aula quatro foi apresentado, utilizando o computador e a televisão que existe na sala, o arquivo em PowerPoint (anexo), o silêncio pairou durante todo o início da exibição. Pouco a pouco, a cada vídeo assistido, eles iam reagindo ao que estavam assistindo e nos seus rostos, podia-se ver claramente uma delicada mistura de admiração, surpresa e encantamento. Ao final da apresentação, estavam todos eufóricos. Aproveitando este clima favorável, lancei o desafio: Vamos recriar um das obras de Maurits Cornelis Escher. A aceitação foi geral.

Pedi que eles se dividissem em grupos e escolhessem dentre os desenhos exibidos ou algum outro que eles viessem a pesquisar, um para fazer a atividade, sendo que o principal era criar tesselações similares aos feitos por Escher identificando nelas sua simetria. Pedi também que eles produzissem um passo a passo de seu trabalho e para tal, poderiam utilizar o recurso que mais lhe conviesse, como por exemplo, produções em vídeos ou apresentações em PowerPoint.

Para que todos não escolhessem o mesmo tipo de transformação, foi feito um sorteio dos tipos simetria, o interessante é que alguns que sortearam translação, o que aparentemente é mais fácil de ser executado, pediram para trocar com outro grupo, pois eles disseram que a rotação e reflexão davam uma sensação maior de movimento e que eles achavam bem mais interessantes. Antes mesmo de a aula acabar, alguns já faziam planos sobre os desenhos que iriam fazer.

Para a turma do segundo ano, como eu estava trabalhando geometria espacial, pedi que eles fizessem o trabalho nas planificações dos sólidos geométricos estudados em sala de aula, com isso, além do sorteio das transformações, fizemos também o sorteio dos sólidos geométricos.

Duas posturas mais se destacaram a do grupo que primeiro iria aleatoriamente recortar seus papéis, depois ver com o que eles estavam parecendo, para então efetuar a pintura. Outra, e foi a que mais chamou a atenção, a dos alunos que primeiro idealizaram suas figuras,

determinaram o que iriam fazer, para depois tentar adequar e descobrir como fazer o seu desenho na transformação sorteada.

Ao final da aula estavam todos empolgadíssimos com o desafio, tanto os alunos, como também o professor.

## 8.2 Resultados obtidos

De uma maneira geral, os alunos tiveram um desempenho excelente na realização das atividades, apenas alguns grupos tiveram problemas na construção ou finalização dos desenhos do desafio de recriar um das obras de Maurits Cornelis Escher.

### 8.2.1 Trabalhos com problemas

Neste item, será feita uma análise minuciosa dos trabalhos e um breve comentário sobre os problemas encontrados, abordando os motivos de terem ocorrido e o que poderia ser feito para reparar o erro.

#### 8.2.1.1 Construção de uma vaca

O desenho (figura 73) apresentou problemas no momento da sua coloração, o aluno se perdeu onde deveria colocar os olhos da vaca, ou seja, ele perdeu a posição dela no desenho, com isso a pintura das orelhas e focinho também ficaram prejudicados, na entrega o aluno R. B. declarou *“Teve um momento que eu não sabia mais onde eu deveria colocar os olhos, onde tinha que pintar de preto, meus olhos se embaralhavam todo, pintar isso dá até um nó na cabeça”*. Pode-se perceber que no destaque em roxo, a rotação está perfeita, muito diferente do que está destacado em azul (figura 73).

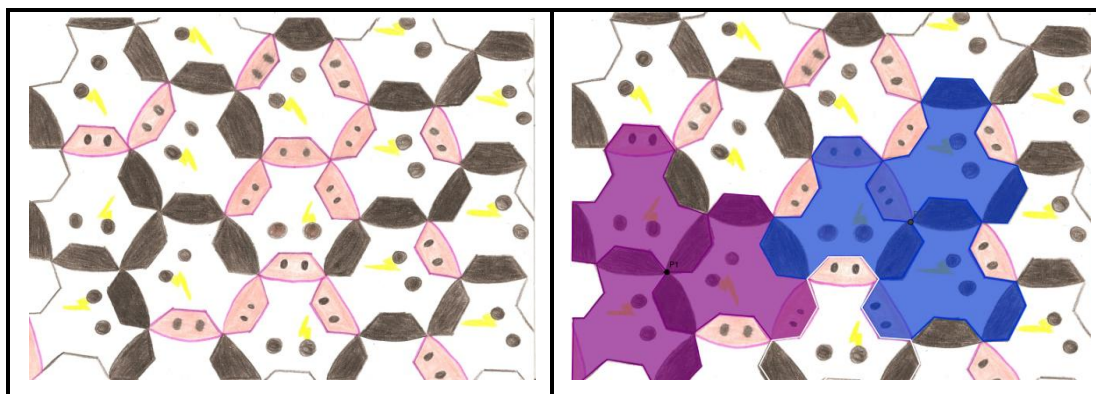


Figura 73: Obra do aluno R. B.



### 8.2.1.2 Construção de uma “carinha”

A obra dos alunos M. B. e N. F. (figura 74) também apresentou um problema parecido com a anterior, os alunos rotacionaram a figura corretamente, mas pecaram no momento da colocação dos olhos, com isso a rotação se perdeu, dando a impressão de que a transformação feita foi à translação, para isto, basta acompanhar os olhos das carinhas, eles estão transladados e não rotacionados como o desenho (figura 74).

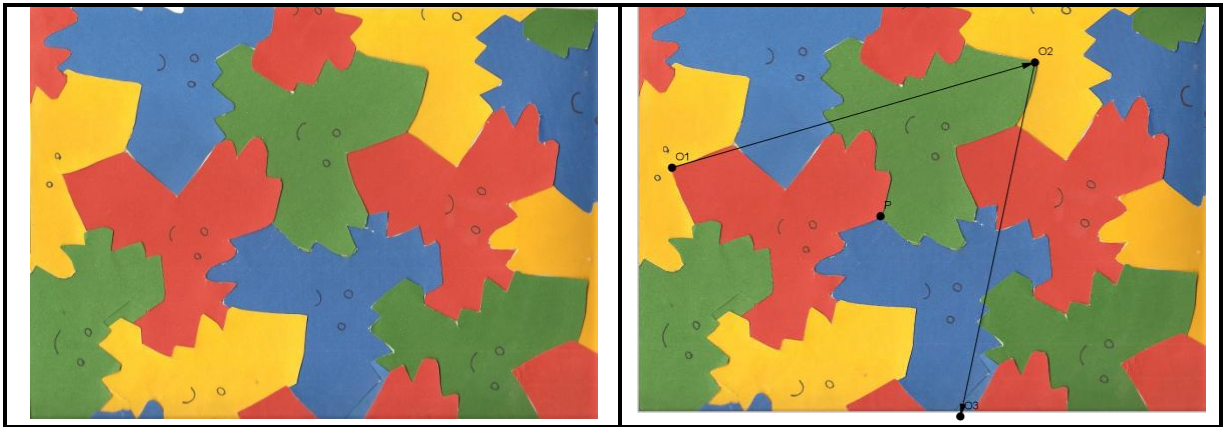


Figura 74: Obra dos alunos M. B. e N. F.

### 8.2.1.3 Construção de uma borboleta

Este trabalho (figura 75) apresentou problemas no momento de contornar a figura, a aluna A. C. arredondou demais as asas, criando um espaço livre entre as borboletas, o que não pode ocorrer na tesselação.



Figura 75: Obra da aluna A.C.

Pode-se perceber nas fotos retiradas da sua apresentação em PowerPoint (figura 76), o momento exato em que os espaços livres aparecem, comprova-se que a construção foi feita

corretamente e no momento em que ela começou a contornar a figura eles apareceram, para disfarçar ela os coloriu de preto.



Figura 76: Passo a passo do trabalho da aluna A. C.

## 8.2.2 Trabalho com o desafio da translação do quadrado com problemas

### 8.2.2.1 Construção de um pássaro

O desenho (figura 77) apresentou problemas no momento da sua coloração, os alunos escolheram cores muito claras e com pouco contraste tornando o desenho não muito interessante. No vídeo feito pelos alunos R. C. e V. H., foi justificada a escolha das cores: “As cores preto e branco foram escolhidas para simbolizar a bandeira de F1 relacionando a velocidade dos carros com os pássaros”. Para que se possa perceber melhor o desenho, foi feito um *Print screen* da tela do vídeo, com o fundo preto houve um realce melhor no desenho.



Figura 77: *Print screen* feito do vídeo dos alunos R. C. e V. H.

Nesta mesma proposta, mas com a utilização de cores mais contrastantes o trabalho das alunas R. F. e T. T. ficou com apelo visual melhor (figura 81).



Figura 78: Obra das alunas R. F. e T. T.

Na turma do segundo ano apenas dois trabalhos apresentaram problemas (figura 79), um foi na pintura, no desenho piloto eles utilizaram cores fortes, mas segundo eles “*Deu preguiça de fazer força no lápis*” na execução final, e no outro grupo eles usaram cartolina preta e coloriram com lápis branco, o que não funcionou.

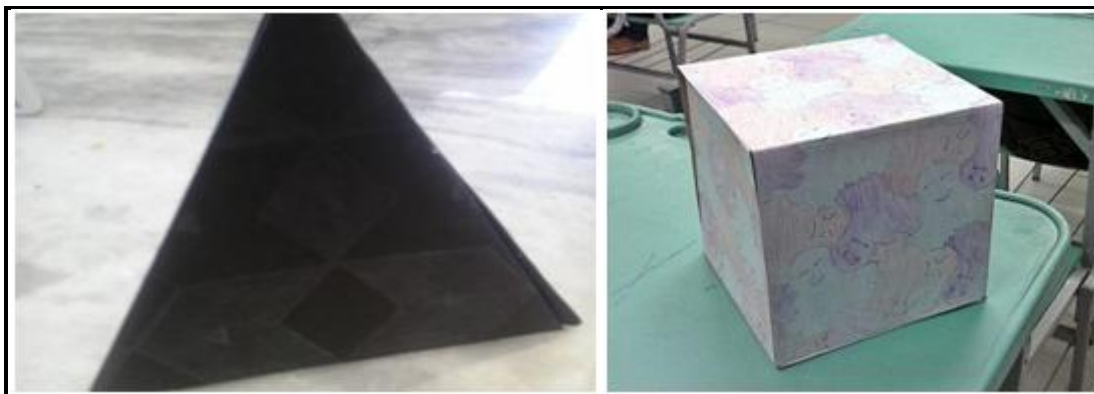


Figura 79 : Obra das alunas C.B., C. M. e C. B. & Obra das alunas L.P., W. S. e J. R.

### 8.2.3 Trabalhos sem problemas

Não poderia só apresentar as obras com problemas, pois elas foram a grande minoria, assim, dentre as que não possuíram contratempos, foram escolhidas algumas para serem incluídas neste trabalho.



Figura 80: Obra das alunas A. M., J. L. e C. G. & Obra das alunas B. T., P. Z. e B. L.

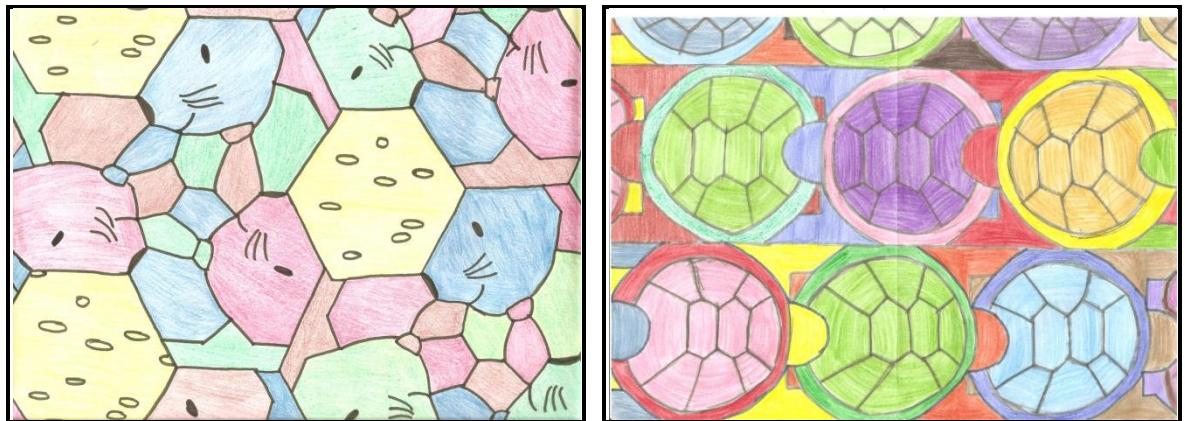


Figura 81: Obra da aluna K. P. & Obra da aluna A. F.



Figura 82: Obra dos alunos M. P. e H. L. & Obra da aluna R. G., B. V. e D. F.

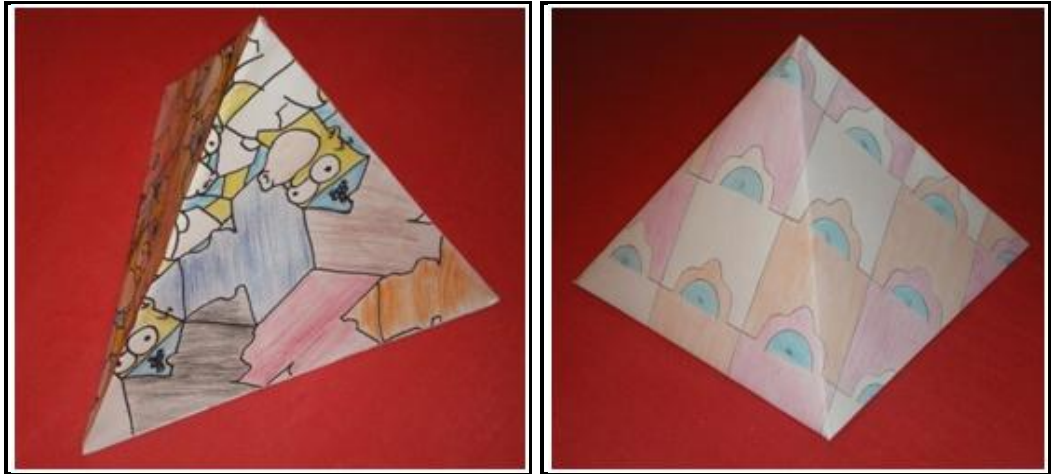


Figura 83: Obra dos alunos F. R. e L. B. & Obra dos alunos G. N. e L. S.



Figura 84: Obra dos alunos J. P. e V. L. & Obra dos alunos M. G., R. V. e A. F & Obra dos alunos L. M., M. S. e M. L.



Figura 85: Obra dos alunos A. B., L. M. e K. M. & Obra dos alunos A. R., E. O. e G. P & Obra dos alunos B. M., G. G. e L. L.

## 9 Considerações Finais

O impacto do trabalho nas turmas foi muito grande e positivo, comprovando que a atividade foi significativa e prazerosa para todos os envolvidos. Os alunos relataram que nem sonhavam com a existência de tanta Matemática por trás das obras de Maurits Cornelis Escher, para eles era tudo mágico e inalcançável e ficaram maravilhados por também serem capazes de produzir obras de arte.

Desta maneira acredita-se que este trabalho venha contribuir para mostrar que a Matemática não está fechada em si mesma, que podemos contextualizá-la com as Artes, de uma maneira intrigante e desafiadora, tentando assim responder de forma prazerosa a eterna pergunta: Para que serve a tal da Matemática?

Analisar as obras de Escher provocou no aluno a percepção da familiaridade entre os saberes matemáticos intuitivos usados pelo artista na criação de suas obras e as práticas da matemática no nosso ambiente escolar, assim a leitura de suas imagens ajudou os alunos a dar um maior sentido aos conteúdos geométricos, facilitando assim seu processo de construção do conhecimento.

Este trabalho teve como objetivo principal, ofertar ao educador matemático diferentes propostas que possibilitem transformar sua sala de aula num local em que o aluno amplie seus horizontes através da combinação da matemática e a arte, despertando nele um gosto por elas.

Como foi trabalhada apenas uma parte deste universo matemático-artístico deveras harmonioso, o leitor não só pode como deve fazer uma releitura das atividades, adaptando-as a sua realidade, pois o melhor aprendizado é feito “pondo a mão na massa”, ou seja, fazendo, tentando, não existindo fórmulas mágicas, bastando apenas interesse, curiosidade e o desejo de mudar.

## 10 Referencias Bibliográficas

- [ 1 ] M. C. Escher Company, B. V. *Biography of M. C. Escher*. Disponível em <http://www.mcescher.com/>. Acesso em: 21 dez. 2013;
- [ 2 ] Tjabbes, Pieter (Curador). *O mundo Mágico de Escher*. Centro Cultural Banco do Brasil. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em <http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2013;
- [ 3 ] Murari, Claudemir e Santos, Marli Regina dos. *Aprendendo Tesselacões de forma Lúdica*. Universidade Estadual Paulista. VIII ENEM. São Paulo, 2004. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/CC25102738844.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2013;
- [ 4 ] Gomes, Carlos Daniel Lopez. *Isometria*. Disponível em <http://pt.slideshare.net/carlosdaniellopezgomes/isometrias-ficha-de-reviso>. Rio de Janeiro, 2013. Acesso em: 21 dez. 2013;
- [ 5 ] Boavida, Ana Maria Roque. *O “mundo” da simetria reflectindo sobre desafios do PMEB*. PFCM da ESE/IPS, 2011. Disponível em: <http://pt.slideshare.net/3zamar/o-mundo-da-simetria-reflectindo-sobre-desafios-do-pmeb-ana-maria-boavida-pfcm-da-eseips>. Acesso em: 21 dez. 2013;
- [ 6 ] Watermann, I.; Franco, V. S., *Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino de Matemática*. Artigo produzido durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná (PDE), Universidade de Maringá, 2008/2009. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-8.pdf>. Acesso em: 06 Jan. 2014;
- [ 7 ] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Tessela%C3%A7%C3%A3o>. Acesso em: 21 dez. 2013;
- [ 8 ] <http://galileu.globo.com/edic/88/conhecimento2.htm>. Acesso em: 21 dez. 2013;
- [ 9 ] <http://www.nazariviajes.com/laalhambradegranaada/Alhambraapt.aspx>. Acesso em: 03 Jan. 2014;
- [ 10 ] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Alhambra>. Acesso em: 03 Jan. 2014;
- [ 11 ] <http://comjeitoearte.blogspot.com.br/2012/06/m-c-escher-era-um-fascinado-pela.html>. Acesso em: 03 Jan. 2014;
- [ 12 ] <http://www.mcescher.com/gallery/symmetry/>. Acesso em: 21 dez. 2013;
- [ 13 ] <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2013.

## **11 Anexos**



## Slides para confecção do Power Point da Aula 4

### Slide 1.



Mauritus Cornelis Escher, nasceu na Holanda em 1898, faleceu em 1970 e dedicou toda a sua vida às artes gráficas.

### Slide 2.

Suas técnicas permitiram que suas obras atingissem a estética impecável que poderemos observar.

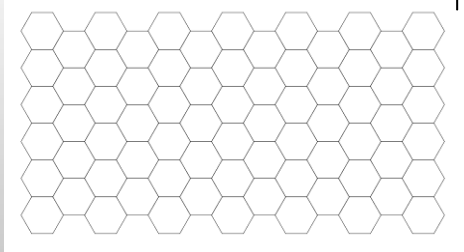
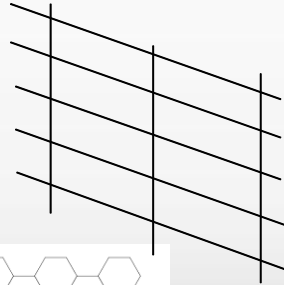
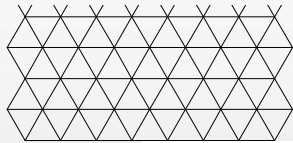
Ele também foi o artista que melhor utilizou conceitos avançados de matemática e geometria para embasar suas obras.

Ele mesmo uma vez declarou sua proximidade com a matemática:

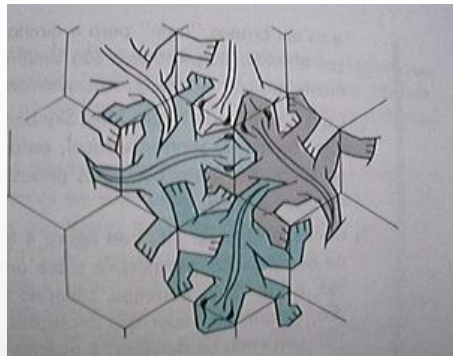
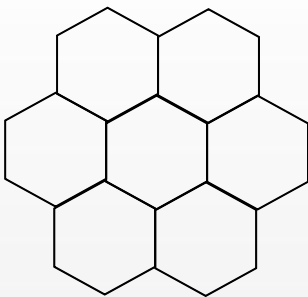
*"Embora não tenha qualquer formação e conhecimento das ciências exatas, sinto-me frequentemente mais ligado aos matemáticos do que aos meus próprios colegas de profissão."*

Slide 3.

As viagens por diferentes países inspiraram a mente de Escher. O contacto com a arte árabe despertou sua paixão pela pavimentação do plano.



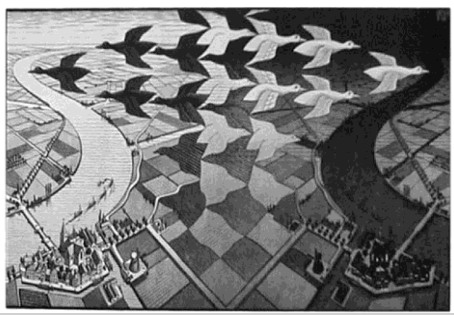
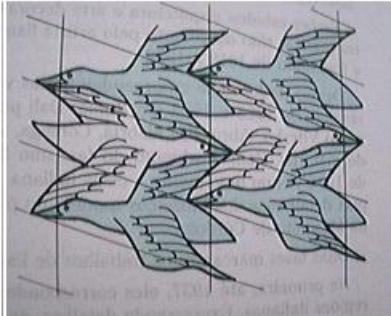
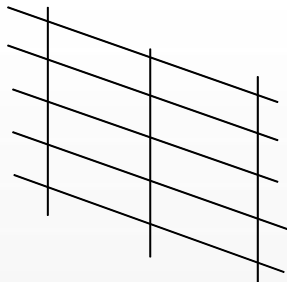
Slide 4.




Porém, no preenchimento de superfícies, ele substituiu as figuras abstrato-geométricas, por figuras concretas como pássaros, peixes, pessoas, répteis, etc.



Slide 5.



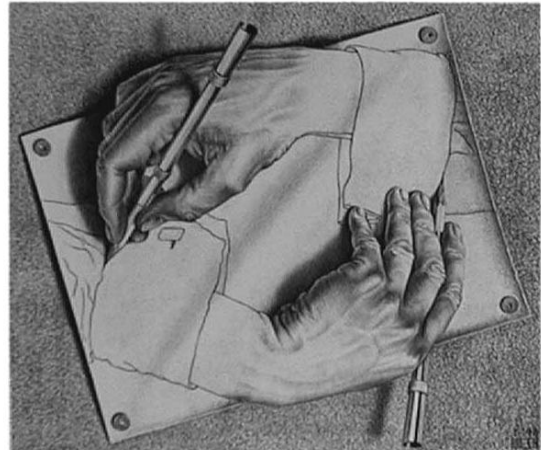
**“Day and night “**  
Xilogravura de 1939




Slide 6.

**“BRIGA” ENTRE O BI E O TRIDIMENSIONAL**

Um dos seus fascínios era a representação tridimensional dos objetos na inevitável bidimensionalidade do papel.



**“Drawing hands”**  
Litografia de 1948



Slide 7.

## ALGUMAS TÉCNICAS UTILIZADAS POR ESCHER

Slide 8.

### LITOGRAFIA : ESCRITA SOBRE PEDRA

Faz-se um desenho com tinta gordurosa numa pedra calcária polida. Acrescentam-se algumas camadas de produtos químicos que fixam a gordura na superfície da pedra. Aplica-se, com um rolo, a tinta litográfica que vai aderir apenas na parte gordurosa do desenho e ser repelida na parte branca umidecida. Prensa-se o papel litográfico sobre o desenho e a figura sai impressa espelhada.

Esta técnica baseia-se no princípio de que água e óleo se repelem.



Slide 9.

## XILOGRAVURA : ESCRITA SOBRE MADEIRA

O desenho é esculpido na madeira ficando em alto relevo. Com um rolo espalha-se a tinta. Pressionando um papel sobre a madeira, a figura sai impressa espelhada.



Slide 10.

## 📺 Vídeos

- Galeria de mosaicos: (identifique a figura padrão em cada uma delas)

<http://www.mcescher.com/Gallery/gallery-symmetry.htm>

- Mosaicos do Plano:

<http://www.youtube.com/watch?v=h2AWKgU0cN4&feature=related>

- Trabalhos escolares:

<http://www.youtube.com/watch?v=5-3tOa9CPb0>

Slide 11.

## TIPOS DE SIMETRIA

São tipos de simetrias no plano: Translação, rotação e reflexão.

No caso das obras observadas, percebemos que em alguns momentos essas imagens são rodadas e/ou invertidas.

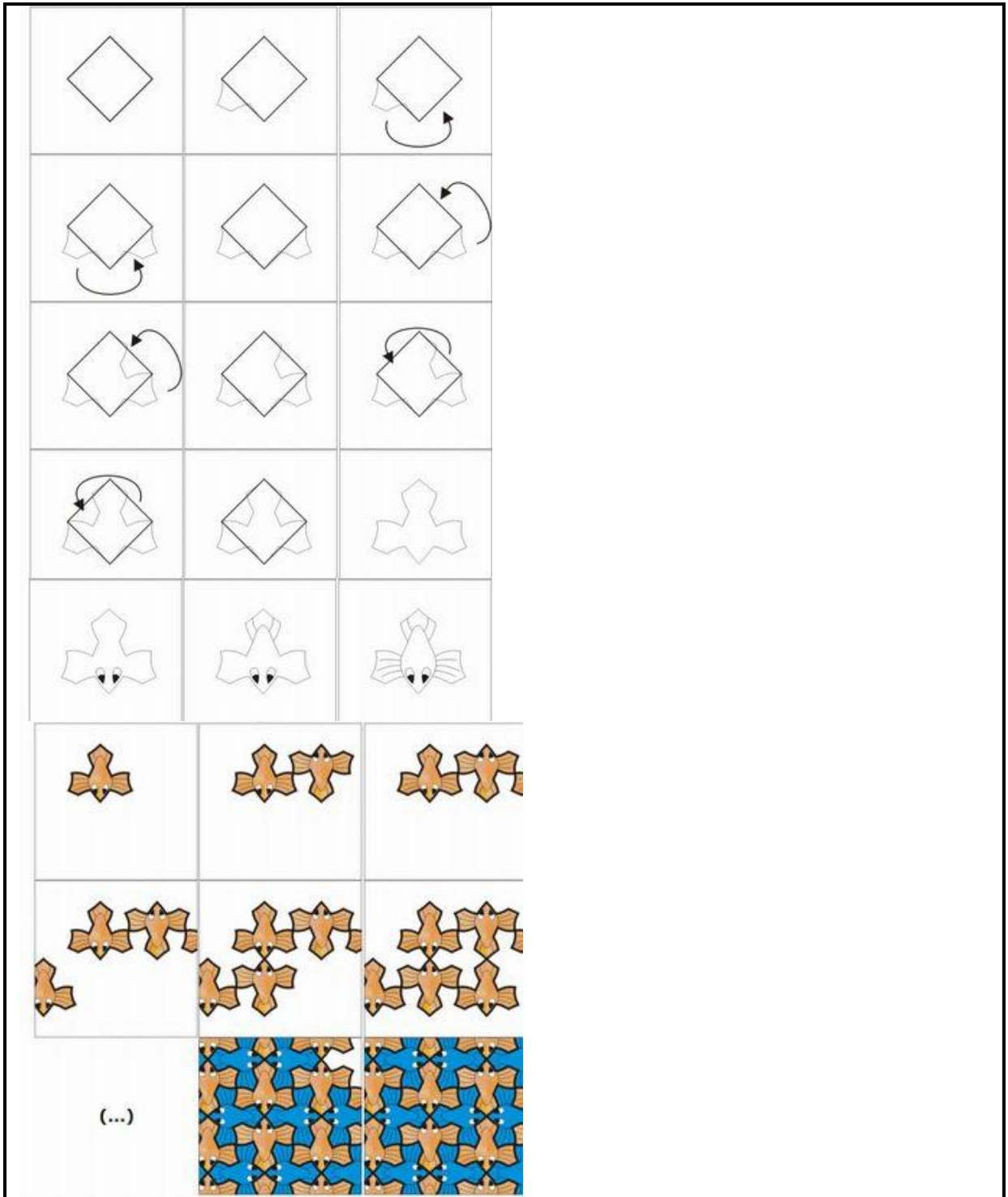
A simetria ocorre quando é possível encontrar, para qualquer figura, pelo menos uma transformação geométrica diferente da transformação idêntica, que a deixe invariante, isto é, alguns ou todos os pontos da figura podem mudar de posição, mas a figura, como um todo, fica a mesma.

Slide 12.

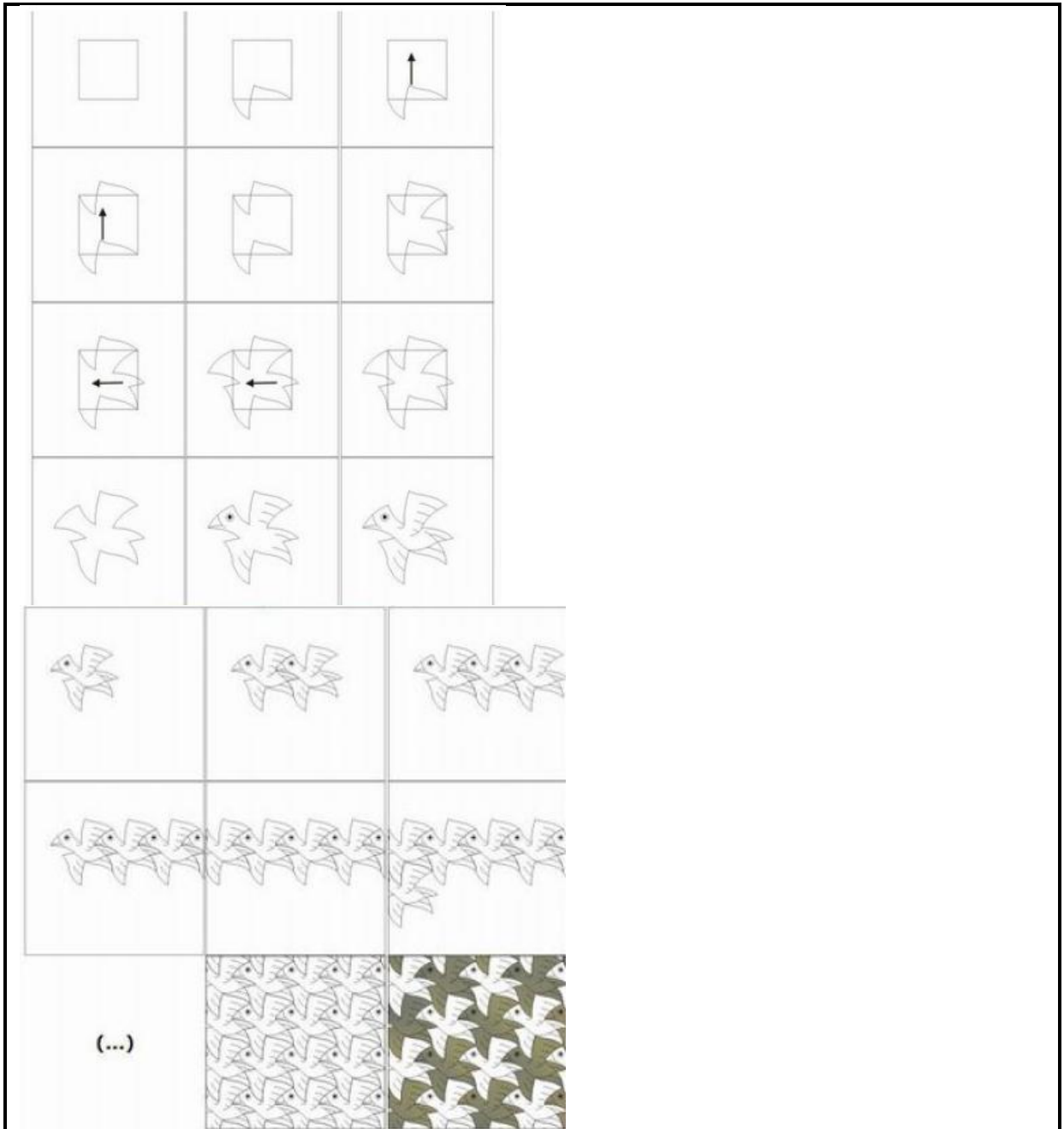
A simetria de Reflexão ocorre quando uma figura bidimensional possui este tipo de simetria e pode ser refletida em relação a um eixo linear (dito eixo de simetria), de modo a ser possível fazer-se corresponder ponto a ponto com a imagem original. Observe o desenho: [Desenho 1](#)

Na simetria de translação, a figura "desliza" sobre uma reta, mantendo-se inalterada. Observe o desenho: [Desenho 2](#)

A simetria de Rotação é a transformação de uma figura que obtemos girando cada um de seus pontos segundo um "arco" de circunferência ao redor de um ponto percorrendo um determinado "ângulo". Observe o desenho: [Desenho 3](#)

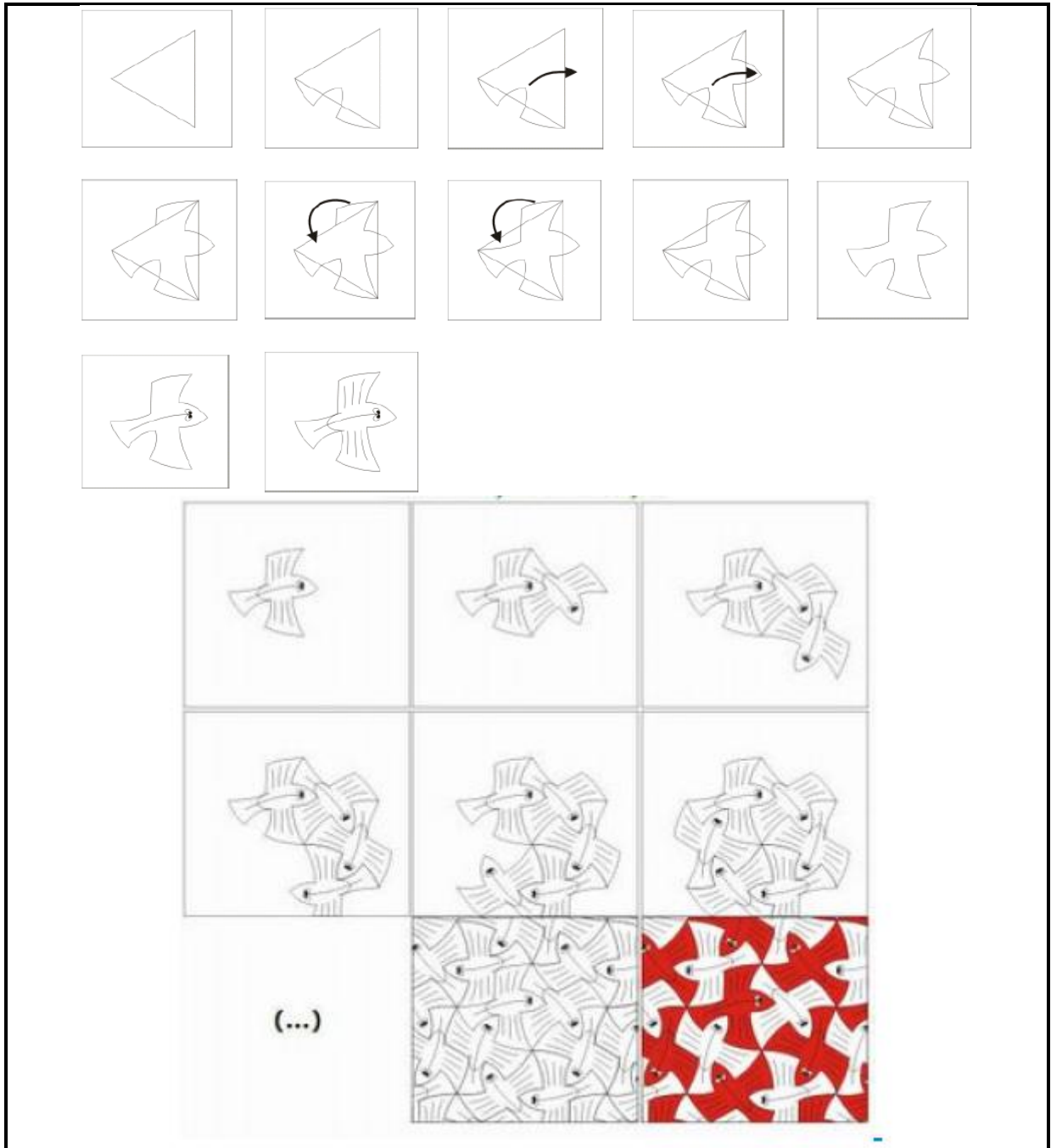


Desenho 1 : Pavimentação por Reflexão



Desenho 2 : Pavimentação por Translação

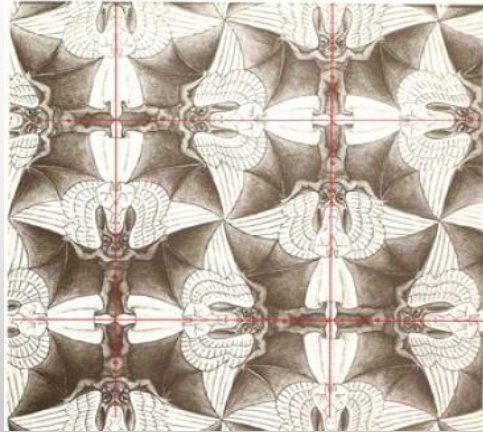




Desenho 3 : Pavimentação por Rotação

Slide 13.

Observar a obra abaixo que apresenta essa simetria. Imagine um espelho no lugar do traço vermelho. Vale lembrar que a simetria de reflexão não é a única identificada nesta obra. Podemos identificar mais de um tipo de simetria nas obras de Escher.



Slide 14.

## ✚ RECURSOS COMPLEMENTARES

- Criando um mosaico a partir de um modelo em Cartolina (som desligado)

[http://www.youtube.com/watch?v=Lg19NvW\\_sU](http://www.youtube.com/watch?v=Lg19NvW_sU)

<http://www.youtube.com/watch?v=iVXLU3SYCBw>

[http://www.youtube.com/watch?v=i9\\_bIsXCZDY&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=i9_bIsXCZDY&feature=related)

<http://www.youtube.com/watch?v=1f1tdd3enpg>

<http://www.youtube.com/watch?v=KOOBDC0RQ-k>

<http://www.youtube.com/watch?v=Lc4LGZwlcvs>

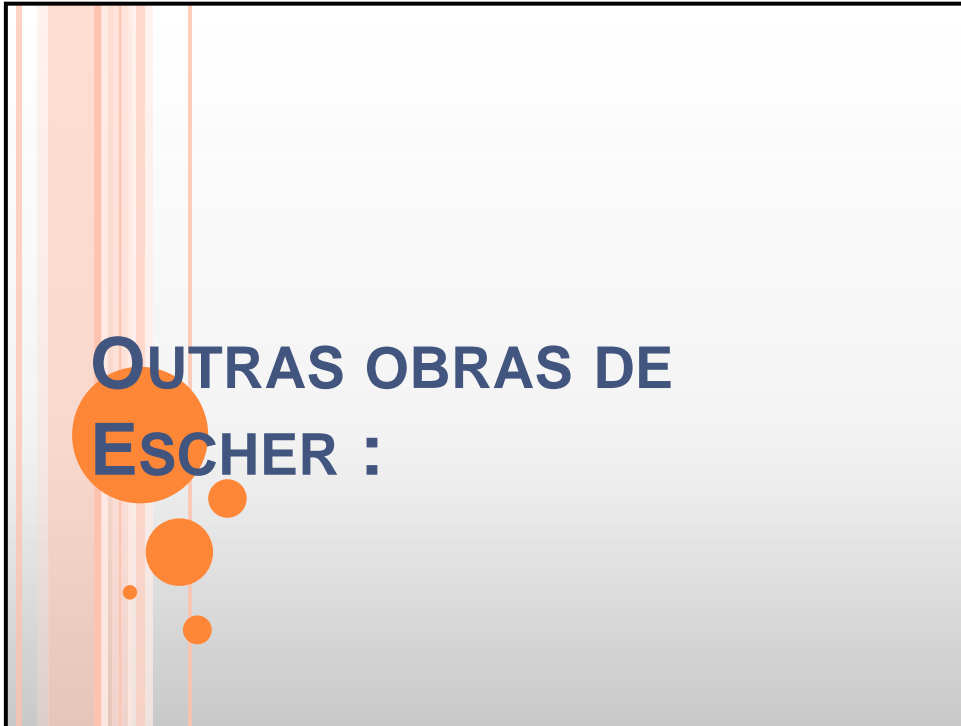
- Cavalos Voadores

[http://www.youtube.com/watch?v=NYGIhZ\\_HWfq&feature=fvw](http://www.youtube.com/watch?v=NYGIhZ_HWfq&feature=fvw)

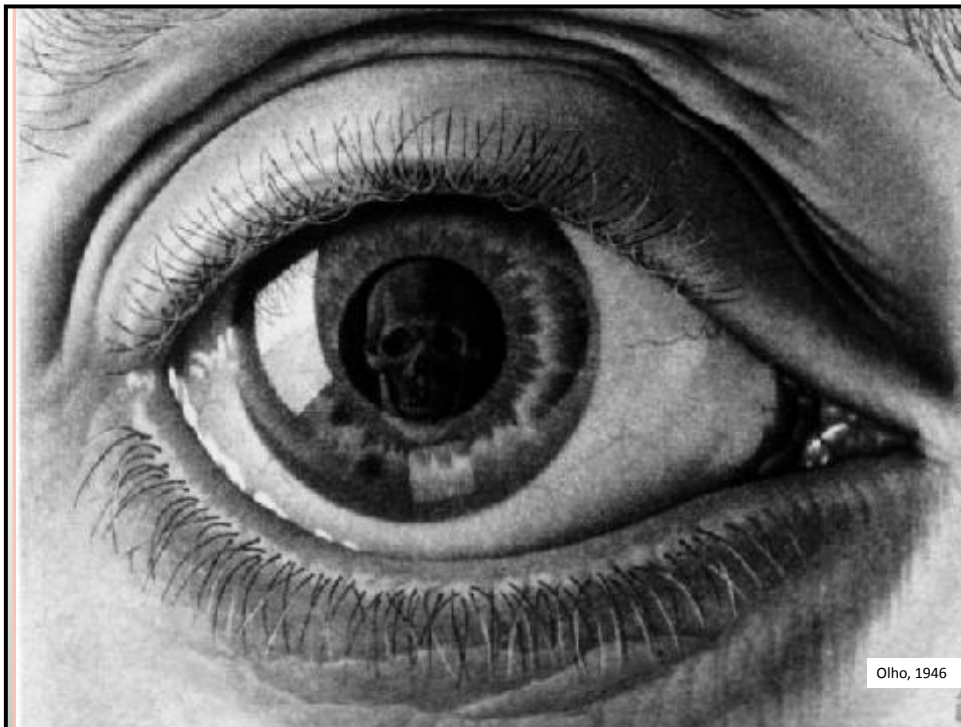
- Lagartos

[http://www.youtube.com/watch?v=T6L6bE\\_bTMO&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=T6L6bE_bTMO&feature=related)

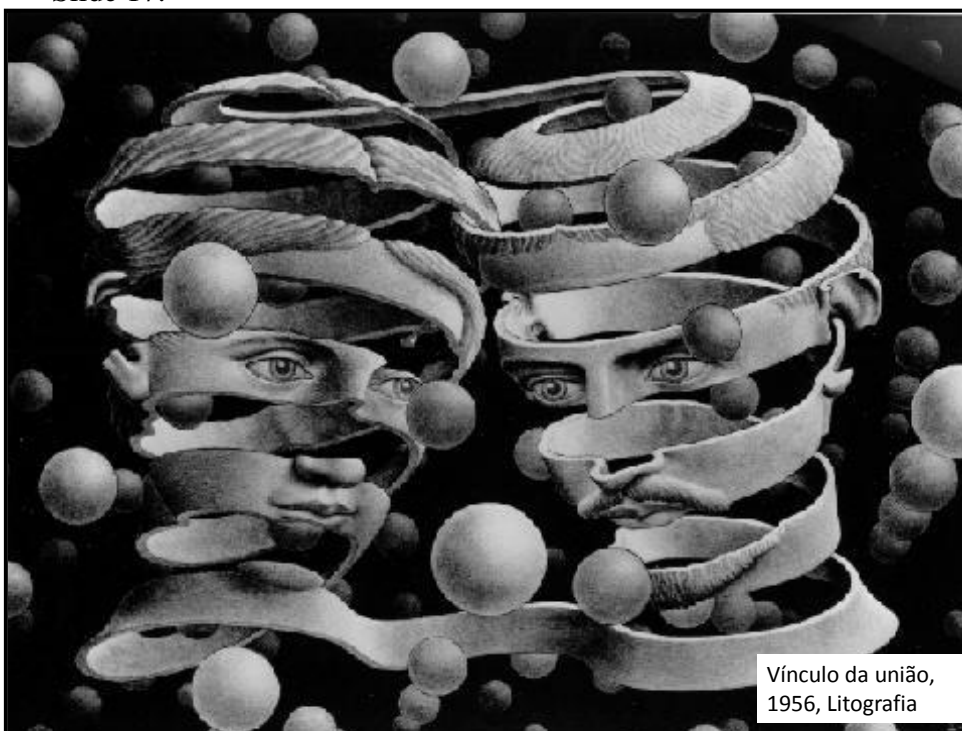
Slide 15.



Slide 16.

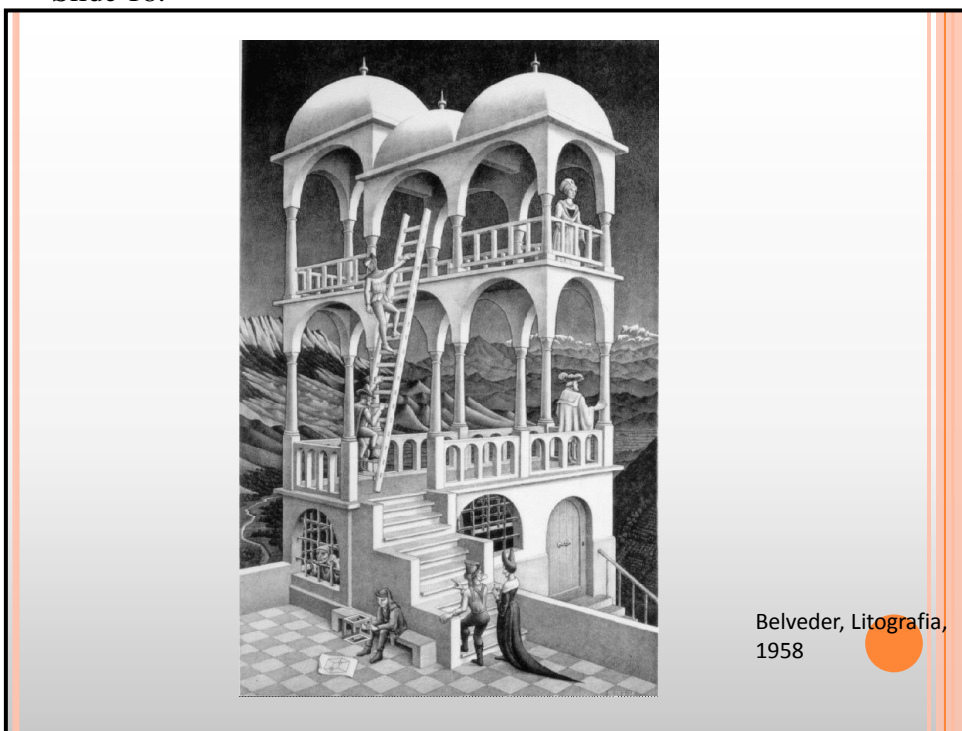


Slide 17.



Vínculo da união,  
1956, Litografia

Slide 18.



Belveder, Litografia,  
1958