Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT/SBM

Métodos iterativos na resolução de equações

William Canellas Batista

Orientador
Prof. Marcelo Miranda Viana da Silva, PhD

Abril - 2014
IMPA

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT/SBM

Métodos iterativos na resolução de equações

William Canellas Batista

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática em rede nacional pelo PROFMAT

Aprovada pela comissão examinadora:

Marcelo Miranda Viana da Silva, Phd.
IMPA - Orientador

Victor Augusto Giraldo, Phd.
UFRJ

Paulo Cezar Pinto Carvalho, Phd.
IMPA - Coordenador Acadêmico - PROFMAT

Rio de Janeiro, Abril - 2014
IMPA

“Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes”.

Isaac Newton

Agradecimentos

A Deus, por me conceder esta oportunidade, pois sem Ele nada seria.

Aos meus pais Sandra e Raimundo por toda a dedicação e apoio incondicional durante minha caminhada.

À minha esposa e filhas por todo incentivo e perseverança nessa jornada.

Ao professor Marcelo Viana pela paciência, confiança e fundamentação na orientação, e por todo o incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Ao professor Victor Giraldo, por suas contribuições e observações inestimáveis para conclusão deste trabalho.

Ao professor Paulo Cezar Carvalho, por suas considerações e impressões valiosas sobre o texto.

Ao professor Cesar Farah, pelo convívio, apoio, compreensão e amizade.

Às professoras Letícia Rangel e Daniella Assemany do CAp-UFRJ pela solicitude e disponibilidade na concretização da proposta deste trabalho.

Ao professor Emílio e meus alunos do CPO pela inestimável contribuição a esta proposta.

À todos os professores do curso, que foram tão importantes em minha vida acadêmica e que idealizaram e concretizaram esta importante iniciativa.

Aos amigos da Turma PROFMAT-2012 que participaram desta etapa de minha vida, pelo incentivo, convívio e apoio constantes.

À todos os professores e amigos, que contribuíram direta ou indiretamente com esta proposta

Dedicatória

As minhas amadas, esposa Ana Lucia e filhas Beatriz e Gabrielle, que com muito amor, carinho e dedicação, não mediram esforços para que eu concretizasse mais este sonho. Esperando que um dia possa fazer o mesmo por elas.

Resumo

Este trabalho tem por finalidade apresentar, a professores e estudantes do Ensino Médio, certos métodos numéricos para resolução de equações. Ele tem duas motivações principais. Por um lado, a resolução de equações por meio de métodos numéricos constitui uma oportunidade importante para que o aluno tenha contato concreto com noções relevantes do Cálculo, tais como sequências e derivada, permitindo aprofundar a sua compreensão sobre esses temas. Por outro, também visamos encorajar outros professores a tirarem proveito das novas ferramentas, proporcionadas pelo desenvolvimento tecnológico, as quais podem e devem ser utilizadas cada vez mais na prática pedagógica, permitindo ao aluno realizar experimentos, aprofundar conceitos e formular conjecturas, proporcionando uma aprendizagem significativa.

Palavras-Chave: Método iterativo simples, método de Newton, método de Dandelin-Graeffe, sequências e aplicações.

Abstract

This work aims at presenting to teachers and high school students, some numerical methods for solving equations. It has two main motivations. On the one hand, solving equations by numerical methods provides an important opportunity for the student to have real contact with relevant notions of Calculus, such as sequences and derivative, allowing to deepen their understanding of these themes. Secondly, we aim to also encourage other teachers to take advantage of new tools offered by technological development, which can and should be used increasingly in educational practice, allowing students to conduct experiments, deepen concepts and formulate conjectures, providing a meaningful learning.

Keywords: Simple iterative method, Newton's method, Dandelin-Graeffe method, sequences and applications.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Com o advento da computação e sua aplicação em diversas áreas sejam elas acadêmicas e/ou profissionais, a resolução de problemas modelados por equações algébricas e transcendentes, historicamente, faz parte de todo o desenvolvimento alcançado pela civilização atual e deve ser inserida na formação básica, onde o docente desempenha um papel importantíssimo na formação do cidadão.

Partindo deste princípio, este trabalho tem como principais objetivos:

- Apresentar os métodos iterativos como ferramentas para a resolução de equações e instrumentos para concretizar e consolidar a aprendizagem de conceitos relativos a sequências de modo geral, visto que a abordagem no Ensino Médio, em grande parte, é restrita apenas a sequências que representam progressões aritméticas e/ou geométricas, passando aos alunos a falsa impressão de que existem apenas estes tipos de sequências;

- Discutir sobre a resolução de equações por métodos numéricos, que dificilmente aparecem na Educação Básica, com a intenção de revisar as práticas pedagógicas, pois grande parte dos professores da Educação Básica e dos livros didáticos priorizam as soluções algébricas, o que na sociedade atual parece ser anacrônico;

- Proporcionar ao aluno uma abordagem que se utiliza do potencial tecnológico e ampliar, consideravelmente, a quantidade de equações que podem ser resolvidas na Educação Básica, que até, então, para os alunos pareciam muito complexas ou impossíveis de serem resolvidas.

Para esse efeito contar-se-á com: uma pesquisa que possa situar o tema "Métodos Numéricos" no contexto da Educação Básica e na formação dos professores, atividades estruturadas, visando apresentar tais métodos de forma mais acessível ao aluno do Ensino Médio, a exposição da relevância destes métodos através da aplicação das atividades e dos resultados obtidos com as mesmas e situações-problema, em que as equações originadas necessitem ser resolvidas, utilizando-se um método numérico.

No primeiro ano do Ensino Médio e mesmo antes disso, o discente se depara com equações, que em sua maioria são resolvidas pela mera manipulação de fórmulas. Como, por exemplo, as equações polinomiais de grau 2, mas a Modelagem Matemática de problemas reais não gera equações tão simples de serem resolvidas com recursos algébricos. Faz-se necessário, então, que tenhamos outras ferramentas, que sejam eficientes na resolução dessas equações, os métodos numéricos.

Ao longo deste trabalho serão explorados três desses métodos são eles: o Método Iterativo Simples, também conhecido por Método do ponto fixo, o Método de Newton[1] e o Método de Dandelin[2]-Graeffe[3].

Apesar dos métodos utilizarem conceitos de Cálculo Diferencial e Integral a ideia é mostrar para o discente do Ensino Médio que os métodos numéricos são extremamente eficazes na resolução de uma grande variedade de equações que surgem em problemas de diversas áreas. No entanto, sem a intenção de introduzir formalmente o Cálculo, mas apresentar os conceitos matemáticos nele empregados utilizando o potencial computacional hoje existente, pois faz parte da realidade da sociedade e deve, cada vez mais, ser introduzida no ambiente escolar.

Na antiguidade muitos povos desenvolveram a Matemática com o objetivo de solucionar problemas reais. Em particular, uma conjectura sobre as relações entre os lados de um triângulo retângulo, que hoje nos é conhecida por Teorema de Pitágoras. Mostrou-se extremamente eficaz no cálculo das dimensões de um terreno, na astronomia, na navegação, etc.

Os gregos, assim como outros povos antigos, já utilizavam métodos numéricos, mas concebiam suas unidades de medida apenas como valores inteiros e em alguns casos racionais. Muitos séculos foram necessários, para que chegassemos aos números reais e complexos.

Atualmente, a ciência que extrapola os limites do "micro ao macro", necessita de ferramentas e resultados cada vez mais precisos. Portanto, diante de um mundo informatizado, nada mais natural que utilizar esta tecnologia como facilitador de nossas atividades sejam elas acadêmicas e/ou profissionais.

> *"Energia elétrica, telecomunicações, computadores, aviões, veículos espaciais, para citar apenas alguns exemplos, simplesmente não estariam a nosso alcance se não dispuséssemos de um grande arsenal matemático com que tratá-los." (GARBI - 2009)*

Outro ponto importante são as relações filosófico-culturais que influenciam as práticas de ensino-aprendizagem. Para citar um exemplo temos o

[1]Isaac Newton ($*1643 - \dagger 1727$) foi o maior matemático inglês de sua geração. Ele lançou as bases para o cálculo diferencial e integral. Seu trabalho em óptica e gravitação o torna um dos maiores cientistas que o mundo conheceu.

[2]Germinal Pierre Dandelin ($*1794 - \dagger 1847$) matemático francês que contribuiu com estudos em geometria, estática, álgebra, probabilidade e com um método de aproximar as raízes de uma equação algébrica.

[3]Karl Heinrich Graeffe ($*1799 - \dagger 1873$) matemático alemão mais conhecido por seu método de resolução numérica de equações algébricas.

método de completar quadrados, que mesmo não sendo um processo numérico é pouco explorado no Ensino Fundamental, mas útil não só na resolução de equações de 2º grau como também, por exemplo, em geometria analítica, para determinar a equação reduzida das cônicas.

Porém, pela experiência adquirida nas atividades docentes e através de diálogos informais com outros professores podemos ver que culturalmente não temos o hábito de resolver equações de 2º grau completando quadrados e muitas vezes quando tentamos, logo somos desencorajados por situações como: *"Não tem uma fórmula para resolver isto?", "Existe uma maneira mais fácil para resolver?", ...*

Fica claro, que uma mudança na postura tanto de professores, como de alunos é necessária, para que possamos evoluir nas relações de ensino-aprendizagem. De forma, a contribuir de maneira eficaz com a sociedade, pois a Matemática é instrumento fundamental para entendermos o mundo contemporâneo.

Há, em muitas atividades, a necessidade de se trabalhar com valores reais aproximados. No caso de uma construção de pequeno porte, se usarmos $\sqrt{2} \approx 1,4$ ou $1,41$ ou ainda $1,414$, utilizando o metro como unidade de medida mais adequada. Essas diferentes aproximações não são significativas para o resultado final da construção, porém se tivéssemos verificando a distância entre dois corpos celestes, em milhões de quilômetros, a cada casa decimal temos uma melhor aproximação para essa distância.

Para determinar uma aproximação para um número real como, por exemplo: $\sqrt{2}, \log 6, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou para determinar raízes de funções em geral temos os métodos iterativos, que obedecendo a certas proposições proporcionam um valor aproximado e atenda as necessidades especificas de cada problema. Um método iterativo está diretamente associado a uma sequência de valores que, se for convergente, convergirá para a solução de nosso problema.

Basicamente, o método iterativo consiste em repetir uma determinada operação[4] um certo número de vezes até que nos seja fornecida uma aproximação, que satisfaça as condições do problema e, para tal, a sequência de valores deve ser convergente.

A sequência obtida pelas iterações funciona como composições da função $F(x)$ assim,

$$(x, F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots, F_n(x), \dots)$$

Onde $F_n(x) = F \circ F \circ F \circ \cdots \circ F(x)$ (n vezes) de forma recorrente temos: x_0 como aproximação inicial e $F(x)$ a função de iteração.

$$x_1 = F(x_0)$$

$$x_2 = F(x_1) = F(F(x_0)) = F_2(x_0)$$

$$x_3 = F(x_2) = F(F(F(x_0))) = F_3(x_0)$$

$$\vdots$$

[4]Entenda-se operação como a função de iteração aplicada a um ponto inicial x_0.

$$x_{n+1} = F(x_n) = F_n(x_0)$$

A exemplo das equações polinomiais de grau superior a 4, que muitos matemáticos estudaram por bastante tempo, a fim de determinar as suas soluções por meio de fórmulas que relacionassem seus coeficientes e suas raízes. Foi apenas no século XIX, que o matemático Galois[5] demonstrou a impossibilidade de resolver tais equações algebricamente, exceto em alguns casos particulares. Galois foi também um dos precursores da Álgebra Moderna e em um de seus trabalhos dá um tratamento analítico ao método de Legendre[6] para aproximações de raízes de equações algébricas, cujo procedimento era geométrico.

Por outro lado, situar o aluno no contexto sócio-cultural e histórico, possibilita uma maior percepção de mundo e apresenta a ele a oportunidade de se tornar um agente transformador do meio, sendo este aspecto apresentado nos PCNEM:

- *Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.*
- *Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.*
- *Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.*
- *Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.*

Diante da impossibilidade de resolver equações algébricas de grau superior a 4 e da dificuldade em resolver equações transcendentes, apenas com manipulação algébrica, faz-se necessário desenvolver outros processos de resolução. São os métodos numéricos, que evoluíram durante os séculos pela introdução de novas e revolucionárias notações, que utilizamos até hoje.

Existem muitos métodos iterativos, assim como diversos tipos de equações, então, de forma alguma deve-se adotar um determinado método numérico como "o único" ou "o melhor", pois cada um tem sua importância e, também, suas limitações. Sob este aspecto, vale destacar, que grande parte dos professores da Educação Básica ainda elegem uma forma de resolução em detrimento de outra. O que, do ponto de vista pedagógico é um grande prejuízo para a aprendizagem dos alunos. Para que isso não ocorra, o professor deve atentar para as diferentes formas de abordagem das questões propostas e analisar com cuidado o que for produzido por seus alunos.

[5]Evariste Galois ($*1811 - \dagger 1832$) matemático francês que desenvolveu a Teoria, batizada com seu nome, que trata da resolução de equações gerais de grau superior a 4.

[6]Adrien-Marie Legendre ($*1752 - \dagger 1833$) matemático francês cuja mais importante obra está relacionada com as funções elípticas.

Capítulo 2

Métodos numéricos na Educação Básica - Perspectiva dos professores

Uma pesquisa que nós realizamos e que contou com a participação de mais de 300 professores de Matemática, resultou em dados interessantes sobre as práticas pedagógicas, proporcionando uma visão mais ampla da realidade do Ensino de Matemática. Tal pesquisa tinha por objetivo situar o tema "Métodos Númericos"na Educação Básica e sua aplicação em sala de aula, e, ainda, a sua relação com o estudo de sequências.

A pesquisa apresentada aos professores contou com perguntas objetivas, considerando aspectos qualitativos e quantitativos. Mas, quando necessário foi reservado espaço, para que os docentes pudessem dar sua opinião ou fossem conduzidos a perguntas diferentes, dependendo da resposta dada à pergunta anterior. A parte inicial da pesquisa visa situar em que nível os professores lecionam e em qual rede trabalham. A segunda parte, avaliar como o estudo de sequências é conduzido. A terceira, verificar como os métodos numéricos estão inseridos na formação do professor e em sua prática docente. A quarta, analisar a relação do professor com o uso de novas tecnologias e, por fim, avaliar a possibilidade de introdução de métodos numéricos na Educação Básica. O formulário com as perguntas realizadas na pesquisa pode ser consultado em 9.

A pesquisa respondida por 353 docentes originou dados relevantes sobre a formação do professor, suas práticas pedagógicas com relação ao tema sequências e, ainda, sua familiaridade com métodos numéricos.

Analisando os dados na tabela abaixo.

Nível em que lecionam	Quantidade de professores	Percentual
Ensino Fundamental	257	38%
Ensino Médio	285	42%
Ensino Superior	134	20%

Tabela 2.1: Nível em que lecionam

Vemos que 80% dos professores atuam na Educação Básica.
E de acordo com os dados abaixo.

Atividades docentes	Quantidade de professores	Percentual
Rede pública	229	65%
Rede privada	29	8%
Ambas	95	27%

Tabela 2.2: Atividades docentes

Temos cerca de 92% dos profissionais pesquisados desempenhando suas atividades na rede pública de ensino.

Mesmo com a maioria dos professores de Matemática atuando na Educação Básica e na rede pública de ensino, surge uma questão muito importante: "Por que a educação pública possui índices tão ruins na disciplina de Matemática[1]?"

Independente das políticas públicas, que não é o objeto de estudo deste trabalho, existe um aspecto que pode e deve ser explorado, a prática pedagógica, ou seja, o papel que o professor deve desempenhar em sala de aula.

Sabemos da importância da Matemática para o mundo moderno, conforme GARBI(2009).

> *"Não há, portanto, exagero em se afirmar que vivemos em um mundo altamente dependente da Matemática e que ela está presente em tudo à nossa volta, embora a maior parte das pessoas não se aperceba disso e, não raro, afirme detestá-la."*

E, ainda, a Matemática desenvolva o raciocínio lógico-dedutivo, imprescindível a muitas outras áreas do conhecimento, que encontra-se em concordância com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM

[1]No PISA 2012, em Matemática, apesar de o Brasil ter evoluído, encontra-se nas últimas posições, ocupa a 58ª posição e, em Ciências, ocupa o 59º lugar. Segundo dados divulgados pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico). Os dados estão disponíveis em [17].

"Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional."

Um dos objetivos das atividades apresentadas é fazer o aluno estabelecer conexões entre conteúdos e perceber que a Matemática é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas e não está restrita a cálculos enfadonhos e dispendiosos. Isso pode ser feito por meio de tecnologias.

Os métodos iterativos geram sequências de números reais e ao investigar se são trabalhadas sequências mais gerais, diferentes de PA's e PG's, obtemos os seguintes resultados:

	Quantidade de professores	Percentual
Sim	188	53%
Não	165	47%

Tabela 2.3: Abordagem do conteúdo - Sequências

Isto mostra que aproximadamente metade dos professores pesquisados não abordam o conteúdo de sequências ou o fazem apenas restringindo as progressões aritmética e geométrica. Porém, esse tema é muito mais amplo e merece ter mais ênfase tanto no Ensino Fundamental como no Médio, seja a partir da busca por padrões ou por processos iterativos.

Quanto a trabalhar com a ideia de limite, o gráfico a seguir mostra, que poucos professores abordam este assunto, mesmo trabalhando com a soma dos infinitos termos de uma PG.

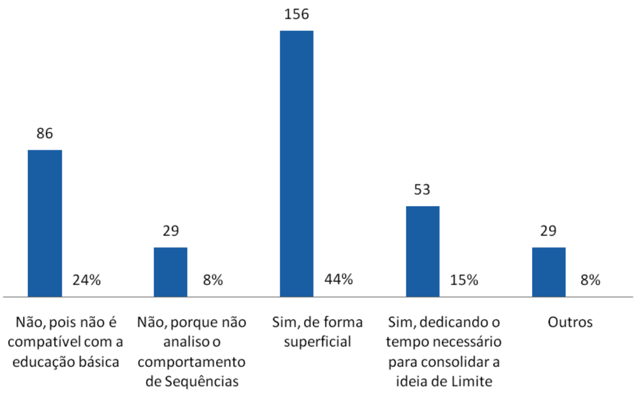

Figura 2.1: Abordagem da ideia de limite de sequências

Vemos que a maioria dos professores trabalham com sequências, analisando de forma superficial a ideia de limite. Enquanto, 15% dedicam o tempo necessário para introduzir este conceito, já os demais professores consideram que não é um assunto compatível com a Educação Básica ou não analisam o comportamento de sequências. Em "outros" convêm destacar a impressão dada pelos professores com algumas de suas justificativas:

- *"A falta de pré-requisitos de um ano para outro agrava o desenvolvimento dos conteúdos, sendo que dispenso um tempo grande para reforço."*
- *"Poucos livros tem o assunto."*
- *"Não tenho autonomia pedagógica para trabalhar certos conceitos. Me atenho aos conteúdos que serão abordados na rede onde trabalho."*
- *"Não, devido ao nível das turmas."*
- *"Nâo existe tempo hábil para vencer os conteúdos exigidos e ainda aprofundá-los."*

Isso sinaliza a necessidade de debate e reflexões sobre questões como currículo, material didático e autonomia pedagógica.

Por outro lado, quando questionados sobre resolver equações por métodos numéricos em seu curso de graduação, obtemos os seguintes dados:

	Quantidade de professores	Percentual
Sim	237	67%
Não	116	33%

Tabela 2.4: Resolução de equações por métodos numéricos na graduação

Vemos que 33% não viram métodos numéricos em seu curso de graduação, caracterizando uma deficiência na formação do futuro professor. Isso justifica a necessidade de elaboração de material e a discussão a respeito da introdução no Ensino Básico desse assunto. Visto que, muitas áreas como automação, economia, quimica, biologia, entre outras se utilizam de métodos iterativos para resolver problemas.

Mesmo sendo uma realidade distante, na educação pública, o uso de tecnologias está cada vez mais presente na prática pedagógica do professor de Matemática. Sobre trabalhar o conteúdo de sequências e resolução de equações usando tecnologias, obtemos os seguintes dados:

	Quantidade de professores	Percentual
Sim	225	64%
Não	128	36%

Tabela 2.5: Trabalharam ou trabalham utilizando tecnologias

Dos 64% entrevistados que trabalham ou trabalharam com recursos diversificados temos:

Recurso	Quantidade de professores	Percentual
Planilhas	178	31%
Calculadoras	123	21%
Software de Geometria Dinâmica	147	26%
Software Plotador de Gráficos	118	20%
Outros	10	2%

Tabela 2.6: Recursos tecnológicos trabalhados

sendo mencionados também, jogos e softwares tipo CAS[2].

Entretando, dos 36% que nunca trabalharam com tais recursos, alegaram os seguintes motivos, apresentados no gráfico seguinte.

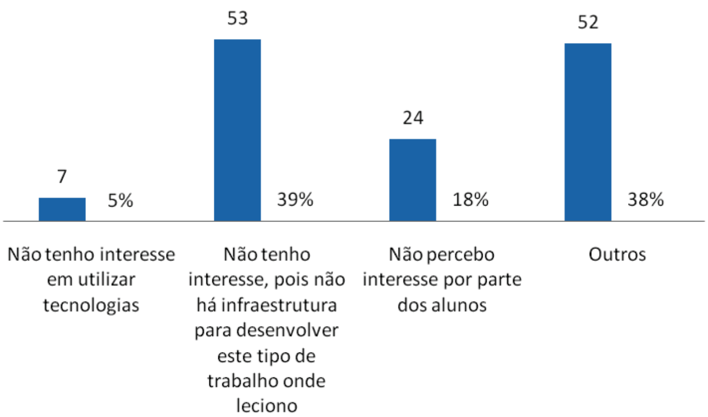

Figura 2.2: Motivo para não utilizar tecnologias

Em "outros" convém ressaltar que as justificativas foram: a de não conhecer tais recursos e/ou não saber trabalhar com os mesmos. Isto pode descrever mais uma lacuna na formação docente.

[2]CAS-Computer Algebra System são programas voltados para o cálculo em matemática simbólica como: Maple, Mathematica, Maxima, Yacas, entre outros.

Para resolver essa questão o docente deve em suas práticas pedagógicas estar atento as diversas metodologias para resolver um problema de Matemática e dar ênfase a procedimentos que apresentem uma maior aplicabilidade, envolvendo diferentes conceitos matemáticos.

Quanto a utilizar algum método numérico em sua prática docente apenas 119 professores, equivalente a 34%, já o fizeram, um percentual modesto, tendo em vista a importância e as aplicações deste assunto. Os métodos citados foram, em sua maioria, os aplicados por professores em cursos de graduação, porém nenhum método iterativo foi citado na Educação Básica, limitado apenas ao cálculo por estimativas.

Dentre os que nunca utilizaram tais métodos, temos os motivos apresentados na tabela seguinte:

Motivo	Quantidade de professores	Percentual
Não tive oportunidade	131	54%
Não conheço muito sobre Métodos Numéricos	100	41%
Outros	13	5%

Tabela 2.7: Motivo para não utilizar métodos numéricos

No grupo de professores que disseram "não ter oportunidade" podemos destacar alguns fatores que dificultam tais atividades, como a falta de laboratórios de Matemática, a forma como o currículo é estruturado e ainda a resistência por parte dos discentes, pois muitas vezes, não percebem que "o fazer Matemática", não se resume a mera manipulação de fórmulas. Por outro lado, um grupo considerável de professores alegam não ter conhecimento sobre esses métodos, o que reforça uma falha nos cursos de licenciatura. Enquanto, alguns alegaram:

- *"As dificuldades como o tempo para cumprir com os conteúdos."*
- *"Não faz parte do planejamento."*
- *"Não é compatível com o nível dos alunos."*

Se os professores consideram possível a introdução do tema na Educação Básica, temos:

	Quantidade de professores	Percentual
Sim	326	92%
Não	27	8%

Tabela 2.8: Consideram possível inserir métodos numéricos na Educação Básica

Os 8% contrários a essa proposta apresentaram os seguintes motivos:

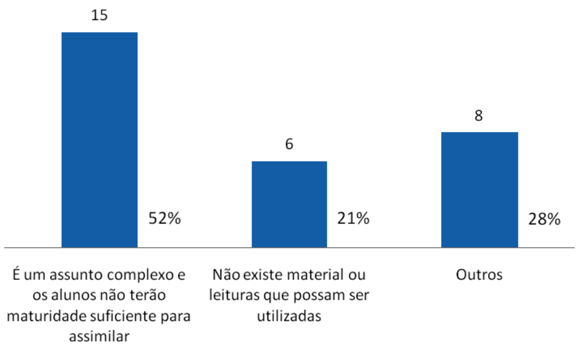

Figura 2.3: Motivo para não inserir métodos numéricos na Educação Básica

Os dados apresentados na pesquisa reforçam a necessidade de reestruturação das matrizes curriculares e de produção de material que contemplem o tema aqui proposto, sendo confirmados pelos PCNEM:

> *O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas... Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.*

E ainda,

> *...aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.*
> *Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.*

Na esperança de reverter as duas últimas alegações da pesquisa sobre a complexidade do assunto e a falta de material disponível, e de confirmar a relevância do tema para o Ensino Médio, as atividades sugeridas no capítulo 6 foram aplicadas a grupos de alunos de escolas públicas, cujos resultados são analisados no capítulo 8 deste trabalho.

Capítulo 3

Método Iterativo Simples

Algumas equações como por exemplo $ax^2 + bx + c = 0$ possuem soluções que podem ser obtidas apenas com manipulações algébricas simples, porém equações como $e^x = 2 + \cos 3x$ não dispõem de fórmulas para determinar suas soluções.

Então, o que fazer para resolver tais equações? Uma possível forma de abordar esta questão é a utilização de um método numérico.

O método iterativo simples consiste em resolver uma equação do tipo $x = \phi(x)$, aplicando sucessivamente a função ϕ. De modo que, se a sequência $x_{n+1} = \phi(x_n)$ for convergente, converge para uma solução da equação.

Iterando ϕ obtemos a sequência de números reais,

$$\begin{gathered} x_0 \\ \phi(x_0) = x_1 \\ \phi(x_1) = x_2 \\ \phi(x_2) = x_3 \\ \vdots \\ \phi(x_n) = x_{n+1} \end{gathered}$$

onde $\phi(x)$ é denominada função de iteração e x_0 é um valor inicial, convenientemente, escolhido.

Assim, para resolver uma equação mais geral do tipo $f(x) = 0$ podemos utilizar o método iterativo simples, se for possível estabelecer a seguinte equivalência:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = x$$

para alguma função ϕ.

A função de iteração não é única e a sequência poderá divergir dependendo da ϕ escolhida, mas com um pouco de criatividade e habilidade é possível determinar tal equivalência ao manipular $f(x) = 0$ de modo a obter uma $\phi(x)$, cuja sequência seja convergente.

Exemplo 3.1. *Encontre uma estimativa para raiz da equação* $x^2 - e^x = 0$.

O primeiro passo é construir o gráfico de $f(x)$ associada a equação, a fim de isolar a raiz. Temos, nesse caso, uma única raiz que se encontra no intervalo $[-1, 0]$.

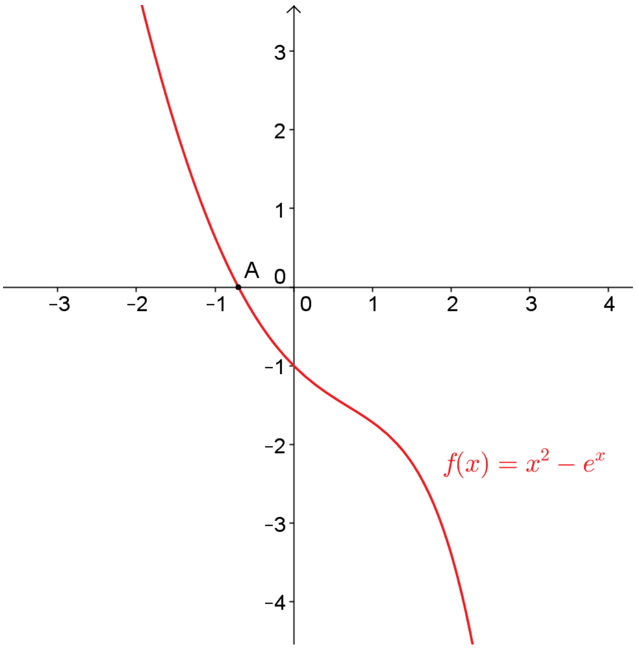

Figura 3.1: Gráfico de $f(x) = x^2 - e^x$

Neste ponto, um software[1] que construa o gráfico de funções, como o Winplot, é muito importante para a visualização da(s) raiz(ízes). O professor deve chamar a atenção dos alunos para uma avaliação quanto ao comportamento da função, a fim de verificar se o gráfico descrito no software condiz com a função dada, pois cada programa possui suas especificações e também limitações e o que neles são representados, não deve ser considerado como verdade absoluta.

Para determinar uma função de iteração, basta manipular a equação, para obter $x = \phi(x)$.

$$x^2 - e^x = 0$$

$$x^2 = e^x$$

$$x = \pm\sqrt{e^x}$$

Como a raiz é negativa, a escolha "natural" para função de iteração é $x = -\sqrt{e^x}$.

[1]Mesmo sem este recurso, considere ser possível a realização da atividade desde que o aluno tenha conhecimento sobre o comportamento das funções envolvidas e saiba construir os seus gráficos.

Vamos construir uma planilha[2] com os valores de n, x_n e $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

n	x_n	$\phi(x_n) = x_{n+1}$
0	$-1,0000000000$	$-0,60653066$
1	$-0,60653066$	$-0,73840315$
2	$-0,73840315$	$-0,69128605$
3	$-0,69128605$	$-0,707765096$
4	$-0,707765096$	$-0,701957409$
5	$-0,701957409$	$-0,703998746$
6	$-0,703998746$	$-0,703280563$
7	$-0,703280563$	$-0,70353315$
8	$-0,70353315$	$-0,703444304$
9	$-0,703444304$	$-0,703475554$
10	$-0,703475554$	$-0,703464562$

Tabela 3.1: Aproximação inicial $x_0 = -1$

Ao analisar o comportamento das sequências vemos que os valores ficam alternando em torno de um ponto, chamado de "ponto fixo atrator", portanto $-0,703464562$ é uma aproximação para raiz com 5 casas decimais.

Podemos visualizar o comportamento da sequência no gráfico seguinte:

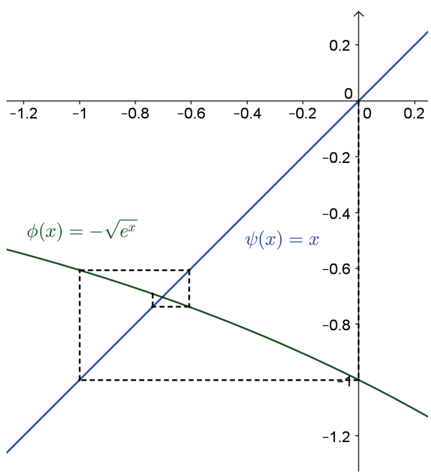

Figura 3.2: Gráfico de $\psi(x)$ e $\phi(x)$ com convergência alternada

[2]Se este recurso não estiver disponível, peça para os alunos construirem uma tabela e neste caso, os valores podem ser obtidos utilizando uma calculadora científica.

Para verificar a exatidão da aproximação, substituímos $x \approx -0,703464562$ na equação original, tal que $|f(x_{n+1})| \leq \delta$, onde δ é a precisão desejada. Desse modo,

$$|(-0,703464562)^2 - e^{-0,703464562}| \leq \delta$$
$$0,00000544 \leq 10^{-5}.$$

O leitor interessado poderá encontrar mais informações sobre erros de aproximações e precisão dos resultados em [3] e [9].

A garantia de que a sequência converge para o ponto fixo quando este é um ponto fixo atrator é dada pelo teorema enunciado a seguir.

Teorema 3.1. *Seja r uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada no intervalo $[a, b]$. Seja $\phi(x)$ uma função de iteração para equação $f(x) = 0$ que satisfaz:*

1. *$\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em $[a, b]$;*
2. *$|\phi'(x)| \leq M < 1$, para todo x pertencente a $[a, b]$;*
3. *Uma aproximação inicial x_0 tal que $x_0 \in [a, b]$.*

Então, a sequência obtida pela iteração de $\phi(x)$ converge para r.

Demonstração. Sendo r uma raiz, então

$$f(r) = 0 \Rightarrow r = \phi(r)$$

portanto,

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \Rightarrow x_{n+1} - r = \phi(x_n) - \phi(r)$$

como ϕ é contínua e diferenciável, pelo Teorema do Valor Médio, existe c_n pertencente ao intervalo entre c_n e r, tal que

$$\phi(x_n) - \phi(r) = \phi'(c_n)(x_n - r)$$

logo,

$$|x_{n+1} - r| = |\phi'(c_n)||x_n - r| \leq M|x_n - r|$$

pelo processo iterativo,

$$|x_1 - r| \leq M|x_0 - r|$$
$$|x_2 - r| \leq M|x_1 - r| = M^2|x_0 - r|$$
$$\vdots$$
$$|x_{n+1} - r| \leq M|x_n - r| = M^{n+1}|x_0 - r|$$
$$|x_{n+1} - r| \leq M^{n+1}|x_0 - r|$$

como $M < 1$, passando o limite quando $n \to \infty$ temos:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - r| \leq \lim_{n\to\infty} M^{n+1}|x_0 - r| = 0$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = r$$

□

Pela demonstração acima podemos ainda verificar que se $-1 < M < 0$ a convergência é alternada e se $0 < M < 1$ a convergência é monotônica.

Definição 3.1. *Um ponto fixo da função $\phi(x)$ é atrator quando $|\phi'(x)| < 1$ e repulsor quando $|\phi'(x)| > 1$.*

De fato, o ponto fixo é atrator, pois $-1 < \phi'(x) < 0$ para todo $x \in [-1, 0]$.

Exemplo 3.2. *Determinar uma aproximação para o número $\sqrt{2}$.*

O primeiro passo para resolver o problema é determinar a equação que forneça este resultado e em seguida, alguma função de iteração para a equação dada. Considere $x = \sqrt{2}$. Elevando ao quadrado obtemos a equação do tipo $f(x) = 0$ dada por $x^2 - 2 = 0$. Mas devemos determinar a função de iteração que satisfaça a equivalência $f(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = x$, ou seja, uma expressão do tipo $x = \phi(x)$. Somando x a ambos os membros chegamos a $x^2 + x - 2 = x$. Onde a função de iteração é $\phi(x) = x^2 + x - 2$.

Um fato importante a destacar é que a função de iteração não é única, pois decorre das operações que podemos efetuar, dependendo da escolha a sequência poderá ou não convergir.

Como exemplo, se a partir de $x^2 - 2 = 0$ e sabendo que $x \neq 0$ podemos multiplicar por x ambos os membros da equação e obter $x = \frac{x^3}{2}$ cuja função de iteração é:

$$\phi(x) = \frac{x^3}{2}$$

Trabalhando com a equação $x^2 + x - 2 = x$, podemos associá-las a duas funções, $\psi(x) = x$ e $\phi(x) = x^2 + x - 2$ e analisando os seus gráficos, claramente vemos que existem duas raízes reais que satisfazem a equação e a raiz positiva é a solução do problema.

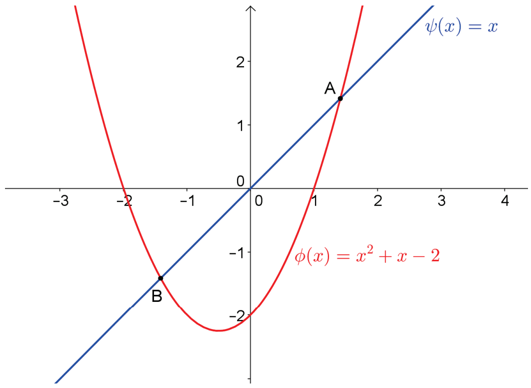

Figura 3.3: Gráfico de $\psi(x)$ e $\phi(x)$

Agora construímos as sequências x_n e x_{n+1}.

n	x_n	$\phi(x_n) = x_{n+1}$
0	1	0
1	0	-2
2	-2	0
3	0	-2
4	-2	0
5	0	-2
6	-2	0
7	0	-2
8	-2	0
9	0	-2
10	-2	0

Tabela 3.2: Aproximação inicial $x_0 = 1$

Vemos que a sequência x_{n+1} formada pelos termos $(0, -2, 0, -2, \ldots)$ não converge para nenhum valor. Testando outros valores iniciais na planilha podemos perceber que independente do valor inicial a sequência "extrapola", ou seja, tende a infinito ou fica alternando entre os valores 0 e -2, mas sem convergência.

A seguir tem início uma abordagem que integra álgebra e geometria proporcionando ao aluno uma percepção mais ampla dos conceitos matemáticos que estão sendo apresentados durante o processo de resolução. Vejamos de que forma isso ocorre.

Ao analisar o gráfico $\psi(x)$ e $\phi(x)$ relacionando com a sequência x_{n+1}.

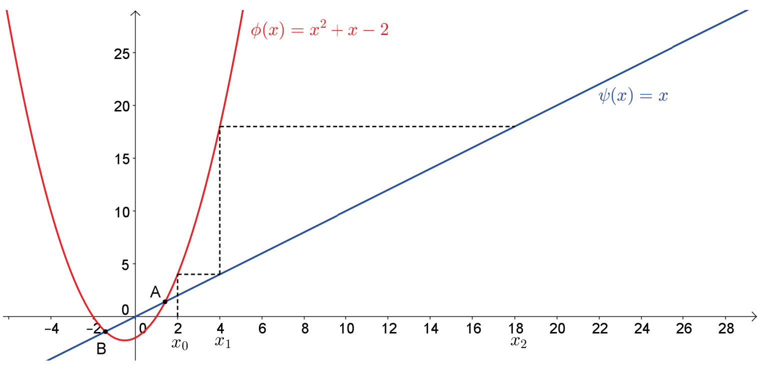

Figura 3.4: Gráfico de $\psi(x)$ e $\phi(x)$ com aproximação inicial $x_0 = 2$

Temos que a cada iteração os termos das sequências x_n e x_{n+1} são descritos pela linha poligonal que de acordo com o comportamento da função de iteração tendem a infinito ou simplesmente, divergem. Logo, pela definição 3.1, o ponto A é um ponto fixo repulsor. E portanto, a sequência de valores dada por x_{n+1} não convergirá para solução que desejamos.

Como podemos, então, proceder para obter uma solução para esta questão?

Sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, portanto, para sua representação decimal podemos apenas determinar uma aproximação. Retornando a função $\phi(x) = x^2 + x - 2$ vamos explorar a relação existente entre $\phi(x)$ e $\phi^{-1}(x)$ a sua inversa. Os gráficos de uma função e sua inversa possuem uma simetria em relação a reta $y = x$.

Teorema 3.2 (Teorema da Função Inversa)**.** *Se f é derivável em um intervalo I e se $f'(c) \neq 0$ para todo c pertencente a I, então*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

A demonstração deste teorema encontra-se detalhada em [20].

De fato, os gráficos de $\phi(x)$ e $\phi^{-1}(x)$ são simétricos em relação à reta $y = x$. Considere um ponto genérico (a, b) pertencente a $\phi(x)$, então, $\phi(a) = b$. Temos que $\phi^{-1}(b) = a$, portanto simétrico em relação à $y = x$, como podemos ver no gráfico seguinte:

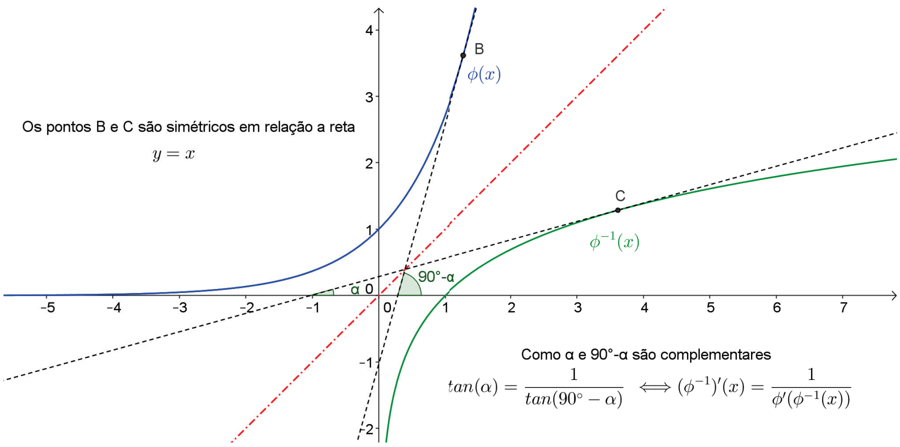

Figura 3.5: Gráfico da Simetria entre $\phi(x)$ e $\phi^{-1}(x)$

Daí, temos que a inversa de $\phi(x) = x^2 + x - 2$, obedecendo as restrições do domínio da função, é dada por:

$$\phi^{-1}(x) = \pm\frac{\sqrt{4x+9}-1}{2}$$

ou

$$\phi^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{4x+9}-1}{2}$$

Porém, somente a primeira definição de $\phi^{-1}(x)$ satisfaz a solução do problema, como podemos ver na figura a seguir:

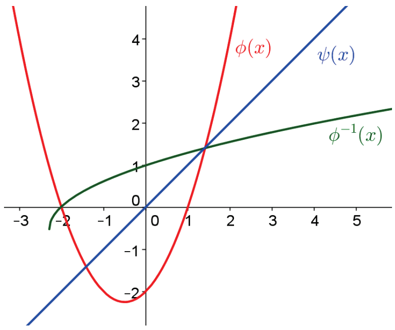

Figura 3.6: Gráfico de $\phi(x)$, $\phi^{-1}(x)$ e $\psi(x)$

Retomando o método, vamos construir uma tabela com as sequências x_n e x_{n+1} aplicando a nova função de iteração $\phi^{-1}(x)$

n	x_n	$\phi^{-1}(x_n) = x_{n+1}$
0	7	2,541381265
1	2,541381265	1,688922398
2	1,688922398	1,484671862
3	1,484671862	1,432529912
4	1,432529912	1,4189919
5	1,4189919	1,415461276
6	1,415461276	1,414539442
7	1,414539442	1,414298682
8	1,414298682	1,414235796
9	1,414235796	1,41421937
10	1,41421937	1,414215079

Tabela 3.3: Aproximação inicial $x_0 = 7$

Graficamente,

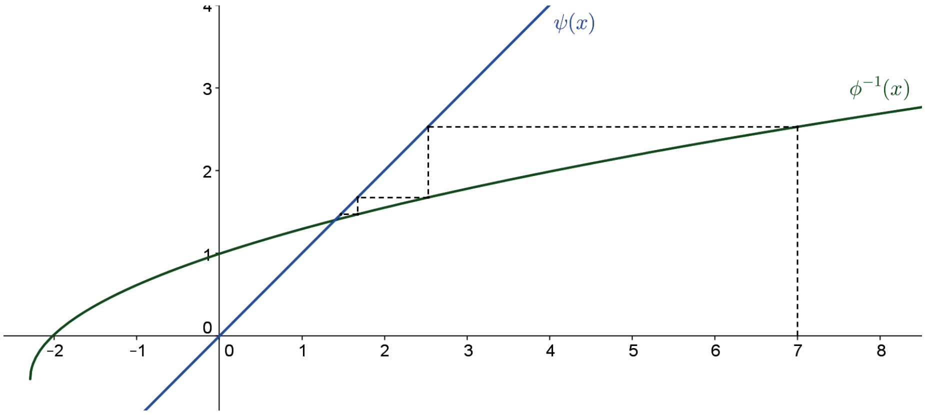

Figura 3.7: Gráfico de $\phi^{-1}(x)$ e $\psi(x)$ com aproximação inicial $x_0 = 7$

E pela sequência de números reais com alguns algarismos, estabilizando a cada nova iteração e pela definição de ponto fixo atrator, temos que $\sqrt{2} \approx 1,414215079$ com 5 casas decimais.

Capítulo 4

Método de Newton

O método de Newton é um método de ponto fixo, mas com uma vantagem em relação ao método iterativo simples, se a sequência obtida pelo processo iterativo for convergente, essa convergência é muito mais rápida. Porém, para aplicar este método é necessário conhecer a derivada da função associada a equação que se deseja resolver.

Com o auxílio de algum software como por exemplo o GeoGebra que possui uma janela CAS útil para o cálculo das derivadas e também a construção dos gráficos importante para interpretação geométrica da derivada (tangentes). O professor tem método de Newton uma excelente oportunidade para apresentar aos alunos o conceito de derivada, visto que este também é conhecido como método das tangentes.

Se a sequência (x_n) for convergente, então podemos garantir uma aproximação que satisfaça ao problema. O aspecto geométrico do método de Newton pode auxiliar muito na questão da visualização de sua funcionalidade.

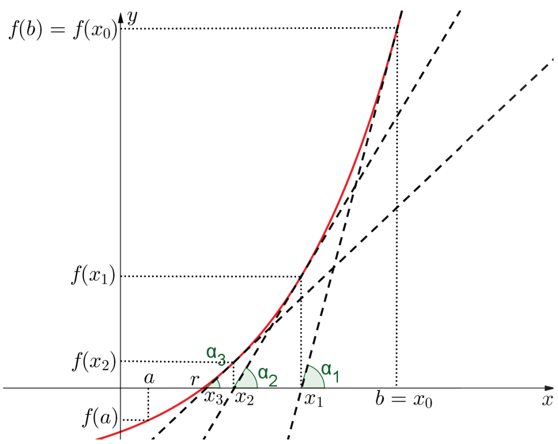

Figura 4.1: Interpretação geométrica do Método de Newton

A ideia é partir de uma aproximação inicial x_0 e traçar a tangente a curva $f(x)$ e iterar este processo até que se obtenha uma aproximação razoável para o problema.

Da geometria temos:

$$\tan \alpha_1 = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1) \Leftrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$\tan \alpha_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

logo, para resolver uma equação do tipo $f(x) = 0$ pelo método de Newton utilizamos a função de iteração definida por:

$$F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

onde, $F(x)$ é a função de iteração e $x_{n+1} = F(x_n)$ é uma aproximação para a solução da equação obtida recursivamente como abordado no método iterativo simples e $f'(x) \neq 0$.

Exemplo 4.1. *Calcular uma aproximação para* $\sqrt{7}$.

Fazendo $x = \sqrt{7}$ e elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos:

$$x^2 - 7 = 0$$

O nosso problema consiste em determinar a solução positiva para a equação acima. Então, considere a função $f(x) = x^2 - 7$, cuja primeira derivada é $2x$. Utilizando a função de iteração de Newton,

$$F(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$F(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2x_n}$$

simplificando,

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 7}{2x_n}$$

e como $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ já temos uma referência para o valor da raiz, ou seja, a raiz encontra-se no intervalo $2 < \sqrt{7} < 3$.

Com o auxílio de uma planilha, utilizando a função de iteração e o valor inicial $x_0 = 3$.

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	$3,000000000000$	$2,666666666667$
1	$2,666666666667$	$2,645833333333$
2	$2,645833333333$	$2,645751312336$
3	$2,645751312336$	$2,645751311065$
4	$2,645751311065$	$2,645751311065$

Tabela 4.1: Aproximação inicial $x_0 = 3$

Na quarta iteração o método nos fornece uma aproximação da ordem de 10^{12}. E se o valor inicial fosse $x_0 = 2$, o que aconteceria?

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	$2,000000000000$	$2,750000000000$
1	$2,750000000000$	$2,647727272727$
2	$2,647727272727$	$2,645752048381$
3	$2,645752048381$	$2,645751311065$
4	$2,645751311065$	$2,645751311065$

Tabela 4.2: Aproximação inicial $x_0 = 2$

Nos dois casos podemos conjecturar que a sequência (x_n) converge para o mesmo valor. A sequência sempre convergirá? A convergência independe do ponto inicial? Essas e outras questões devem ser levantadas e debatidas em sala de aula, para enriquecer a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

Podemos observar, também, pelo comportamento apresentado pelos valores, que a sequência $F(x_n) = x_{n+1}$ é formada pelos mesmos termos da sequência x_n exceto pelo termo x_0. Neste caso, a sequência $F(x_n)$ é uma subsequência de x_n. Isso quer dizer que se x_n converge para um número real r, então, $F(x_n)$ também converge para r.

Queremos mostrar que se a sequência acima definida, recursivamente, é convergente, então, converge para r. Onde r é a raiz de $f(x)$.

Teorema 4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável com f' continua num dado intervalo $I = [a, b]$ e $r \in I$. Se (x_n) é uma sequência obtida pelo método de Newton a partir de uma condição inicial x_0 e x_n tende a r, então $f(r) = 0$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = r$ e $F(x_n) = x_{n+1}$ obtida recursivamente a partir de x_n pelo método de Newton, então $F(x_n)$ também converge para r. Logo,

$$\lim_{n\to\infty}[x_n - F(x_n)] = 0$$

mas,

$$x_n - F(x_n) = x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x_n) = f'(x_n)\cdot[x_n - F(x_n)]$$

por hipótese f' é continua, então, $f'(x_n)$ tende para $f'(r)$, aplicando o limite quando n tende a ∞, temos:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f'(x_n)\cdot \lim_{n\to\infty}[x_n - F(x_n)] = f'(r)\cdot 0 = 0$$

como, f é continua em r, então, $f(r) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. □

Exemplo 4.2. *Determine as raízes reais da equação algébrica* $f(x) = -3x^5 + 21x^4 - 49x^3 + 39x^2 + 4x - 8 = 0$.

Conforme o gráfico de f a equação possui três raízes reais. Novamente, devemos destacar que o uso do software deve estar acompanhado por uma avaliação qualitativa da função, para que o aluno não tenha a falsa impressão de que o programa está sempre correto.

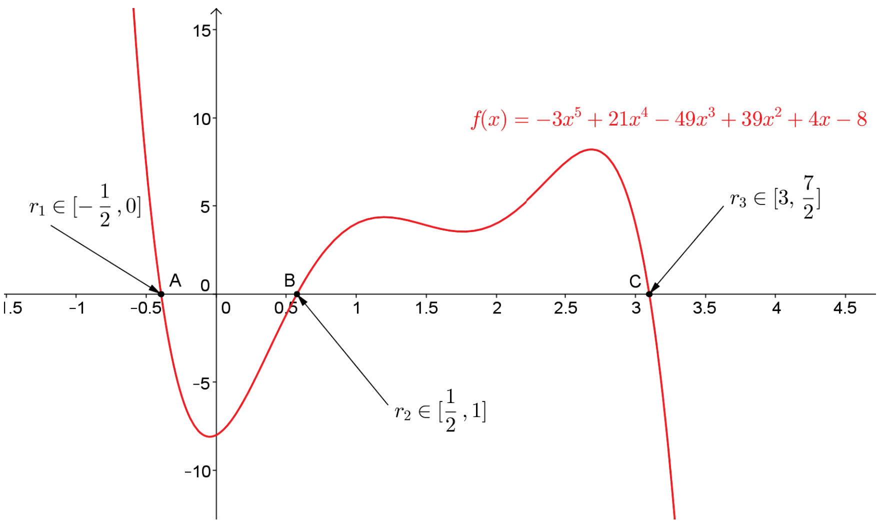

Figura 4.2: Gráfico de $f(x)$

Vimos que para utilizar o método de Newton é necessário ter conhecimento de algumas técnicas de derivação ou acesso a algum software como: GeoGebra, YACAS, MAXIMA ou WolframAlpha.

Sendo $f(x) = -3x^5 + 21x^4 - 49x^3 + 39x^2 + 4x - 8$, a sua derivada 1ª é dada por $f'(x) = -15x^4 + 84x^3 - 147x^2 + 78x + 4$. Usando uma planilha obtemos, para cada uma das aproximações iniciais $x_0 = 1$, $x_0 = 3$ e $x_0 = -1$, os seguintes resultados:

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	1	0
1	0	2
2	2	1
3	1	0
4	0	2
5	2	1

Tabela 4.3: Aproximação inicial $x_0 = 1$

Quando $x_0 = 1$, a sequência de valores não converge para nenhum valor.

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	$3,000000000000$	$3,125000000000$
1	$3,125000000000$	$3,100277838382$
2	$3,100277838382$	$3,099006843179$
3	$3,099006843179$	$3,099003595470$
4	$3,099003595470$	$3,099003595449$
5	$3,099003595449$	$3,099003595449$

Tabela 4.4: Aproximação inicial $x_0 = 3$

Para $x_0 = 3$ a sequência converge para raiz do intervalo $[3, \frac{7}{2}]$.

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	$-1,000000000000$	$-0,687500000000$
1	$-0,687500000000$	$-0,495460010648$
2	$-0,495460010648$	$-0,411080708154$
3	$-0,411080708154$	$-0,394433545321$
4	$-0,394433545321$	$-0,393823862756$
5	$-0,393823862756$	$-0,393823062878$

Tabela 4.5: Aproximação inicial $x_0 = -1$

Por outro lado, com $x_0 = -1$ temos uma sequência que converge para raiz do intervalo $[-\frac{1}{2}, 0]$.

Vimos anteriormente que se a sequência obtida pelo método de Newton for convergente, então converge para a raiz. Mas para que a sequência a ser gerada pelo processo iterativo seja convergente, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.1. *Sejam f e f' funções contínuas e diferenciáveis em um intervalo $I = [a, b]$ com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Para qualquer x_0 suficientemente próximo da raiz r, a sequência $x_{n+1} = F(x_n)$ obtida pelo método de Newton é convergente.*

Demonstração. Como o método de Newton é um método de ponto fixo, pelo método iterativo simples temos $F(x) = x$, então, $F'(x) = 0$.

Mas,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

derivando,

$$F'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

e como $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e f' é contínua e diferenciável em I.

$$F'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = 0$$

se, e somente se

$$f(x) = 0$$

o que ocorre quando $x = r$. □

O termo "suficientemente próximo" significa uma vizinhança suficientemente pequena e em [14], o leitor vai encontrar uma demonstração com o devido aprofundamento, com a introdução do conceito de ponto fixo das contrações.

Voltando ao exemplo e testando outros valores, mais "próximos" da raiz indicada pelo ponto B na figura 4, obtemos uma sequência que converge para terceira raiz real da equação. Como podemos ver na tabela a seguir para $x_0 = \frac{1}{2}$

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	$0,500000000000$	$0,573122529644$
1	$0,573122529644$	$0,575954246095$
2	$0,575954246095$	$0,575959500126$
3	$0,575959500126$	$0,575959500144$
4	$0,575959500144$	$0,575959500144$
5	$0,575959500144$	$0,575959500144$

Tabela 4.6: Aproximação inicial $x_0 = \frac{1}{2}$

Vale ressaltar, que para o aluno do Ensino Médio devem ser apresentados os conceitos relacionados com o método, como existência e unicidade da raiz, as retas tangentes à curva (noção de derivada 1ª) e a concavidade do gráfico da função (noção da derivada 2ª), e não demonstrações formais dos Teoremas do Cálculo.

Capítulo 5

Método de Dandelin-Graeffe

O método foi desenvolvido de forma independente pelos matemáticos Dandelin, Lobachevsky[1] e Graeffe, mas foi Graeffe quem mais se ocupou em determinar todas as raízes da equação, utilizando a quadratura das raízes.

O método de Graeffe consiste em determinar polinômios utilizando a transformação $x^2 = y$ a partir do polinômio original, k vezes, com k suficientemente grande e pode ser aplicado a equações de grau n. Para efeito de simplificação dos cálculos vamos exemplificar o método por uma equação polinomial de grau 3.

Considere a equação polinomial $ax^3+bx^2+cx+d = 0$, como o coeficiente líder é diferente de zero, dividindo toda a equação por a obtemos a seguinte equação polinomial $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, cujas raízes são as mesmas da equação original. Pelas Relações de Girard[2] trabalhadas no Ensino Médio temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\alpha$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \beta$$

$$x_1x_2x_3 = -\gamma$$

O método consiste em transformar

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

na equação,

$$x^3 + \alpha^{(n)}x^2 + \beta^{(n)}x + \gamma^{(n)} = 0,$$

[1] Nikolai Ivanovich Lobachevsky ($*1792$ – †1856) matemático russo mais conhecido por desenvolver trabalhos em geometrias não-euclidianas.

[2] Albert Girard ($*1595$ – †1632) era francês e viveu como refugiado religioso na Holanda. Trabalhou em álgebra, trigonometria e aritmética e apresenta em *Invention Nouvelle en l'Algèbre* seu trabalho sobre as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica.

cujas raízes são x_1^n, x_2^n e x_3^n. Para tal, deve-se reorganizar a equação da seguinte forma:

$$x^3 + \beta x^2 = -\alpha x^2 - \gamma^2,$$

elevando ambos os membros ao quadrado,

$$(x^3 + \beta x)^2 = (-\alpha x^2 - \gamma)^2$$

$$x^6 + 2\beta x^4 + \beta^2 x^2 = \alpha^2 x^4 + 2\alpha\gamma x^2 + \gamma^2$$

obtém-se

$$x^6 + (2\beta - \alpha^2)x^4 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x^2 - \gamma^2 = 0,$$

fazendo a transformação $x^2 = y$

$$y^3 + (2\beta - \alpha^2)y^2 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)y - \gamma^2 = 0.$$

A equação acima é denominada Transformada de Graeffe e podemos manter a variável x sem perda de generalidade, daí:

$$x^3 + (2\beta - \alpha^2)x^2 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x - \gamma^2 = 0,$$

cujas raízes são x_1^2, x_2^2 e x_3^2.

Repare que se fizermos:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = (-\alpha)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \alpha^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\beta = \alpha^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -(2\beta - \alpha^2)$$

Isto pode ser estendido as outras relações de Girard, repetindo este processo mais uma vez obteremos uma transformada de Graeffe, cujas raízes são x_1^4, x_2^4 e x_3^4. Efetuando k transformações, como esta, obtemos uma transformada de raízes x_1^n, x_2^n e x_3^n, com $n = 2^k$.

Outra forma de determinar a Transformada de Graeffe é através do produto $P(x) \cdot P(-x)$. Considere:

$$\begin{cases} P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) \\ P(-x) = (-x - r_1)(-x - r_2)\cdots(-x - r_n) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$Q(x) = P(x) \cdot P(-x) = (-1)^n(x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2)\cdots(x^2 - r_n^2),$$

cujas raízes são $r_1^2, r_2^2, \cdots, r_n^2$.

No caso da equação de grau 3, temos:

$$\begin{cases} P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ P(-x) = -x^3 + \alpha x^2 - \beta x + \gamma \end{cases}$$

$$P^2(x) = (-1)[x^6 + (2\beta - \alpha^2)x^4 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x^2 - \gamma^2],$$

transformando,

$$P^2(x) = (-1)[x^3 + (2\beta - \alpha^2)x^2 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x - \gamma^2],$$

de onde obtém-se a relação de recorrência entre os coeficientes:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_0 - \alpha_0^2 \\ \beta_1 = \beta_0^2 - 2\alpha_0\gamma_0 \\ \gamma_1 = -\gamma_0^2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \alpha_k = 2\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}^2 \\ \beta_k = \beta_{k-1}^2 - 2\alpha_{k-1}\gamma_{k-1} \\ \gamma_k = -\gamma_{k-1}^2 \end{cases}$$

Para resolver tal equação vamos considerar a seguinte proposição:

Proposição 5.1. *Seja i um número natural qualquer e $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i$ números complexos, tais que $|x_1| > |x_2| \geq |x_3| \geq \cdots \geq |x_i|$, então, a sequência*

$$\sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_i^n|}$$

converge para $|x_1|$

Demonstração. Vamos mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_i^n|} = |x_1|.$$

Considere $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|, \cdots, |x_i|)$.
Logo,

$$M^n \leq |x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_i^n| \leq |x_1^n| + |x_2^n| + |x_3^n| + \cdots + |x_i^n| \leq i \cdot M^n$$

$$M^n \leq |x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_i^n| \leq i \cdot M^n$$

$$M \leq \sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_i^n|} \leq i^{\frac{1}{n}} \cdot M,$$

como $|x_1| > |x_2| \geq |x_3| \geq \cdots \geq |x_i|$, passando o limite.
Temos:

$$M \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_i^n|} \leq M,$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_i^n|} = M = |x_1|.$$

□

Se a sequência converge para raiz $|x_1|$, supondo que $|x_{i-1}| > |x_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e pela proposição anterior são válidas as seguintes relações:

Relações 5.1.

$$|x_2| = \frac{|x_1 \cdot x_2|}{|x_1|}$$

$$|x_3| = \frac{|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3|}{|x_1 \cdot x_2|}$$

$$\vdots$$

$$|x_i| = \frac{|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_i|}{|x_1 \cdot x_2 \cdots x_{i-1}|},$$

restando analisar apenas os sinais das raízes.

Para que o método possa ser aplicado desta maneira, obrigatoriamente pelo menos uma raiz, em módulo, deve ser estritamente maior que as demais. Mas ao tratar de equações polinomiais temos muitas possibilidades a analisar, como raízes complexas conjugadas, múltiplas, com módulos iguais, etc.

Porém, nada impede que o método possa ser aplicado e explorado em outras situações. Para isto, basta que a análise das sequências seja feita com mais cautela e sejam empregados os conhecimentos adquiridos sobre multiplicidade, polinômios e complexos. Sendo assim, vamos apresentar alguns casos e aplicar o método com alguns exemplos de 3º e 4º graus, cujos conceitos envolvidos podem ser estendidos a equações de grau superior, mantidas as análises das particularidades de cada equação.

1º Caso: Equação de 3º grau com três raízes reais e distintas.

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Exemplo 5.1. *Determinar as soluções da equação polinomial*

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$$

A partir da equação $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ separar os termos de grau ímpar dos termos de grau par $x^3 - 7x = 4x^2 - 10$. Elevar ao quadrado ambos os membros da equação.

$$(x^3 - 7x)^2 = (4x^2 - 10)^2$$

$$x^6 - 30x^4 + 129x^2 - 100 = 0,$$

cuja Transformada de Graeffe é:

$$P^2(x) = x^3 - 30x^2 + 129x - 100 = 0.$$

Com o auxílio de uma planilha podemos repetir este processo facilmente e determinar os coeficientes dos polinômios transformados. Como apresentado na tabela abaixo.

k	P^{2^k}	Coef. Líder	α	β	γ
0	P	1	-4	-7	10
1	P^2	1	-30	129	-100
2	P^4	1	-642	10641	-10000
3	P^8	1	$-3,909 \cdot 10^5$	$1,004 \cdot 10^8$	$-1,000 \cdot 10^8$
4	P^{16}	1	$-1,526 \cdot 10^{11}$	$1,000 \cdot 10^{16}$	$-1,000 \cdot 10^{16}$
5	P^{32}	1	$-2,328 \cdot 10^{22}$	$1,000 \cdot 10^{32}$	$-1,000 \cdot 10^{32}$
6	P^{64}	1	$-5,421 \cdot 10^{44}$	$1,000 \cdot 10^{64}$	$-1,000 \cdot 10^{64}$
7	P^{128}	1	$-2,939 \cdot 10^{89}$	$1,000 \cdot 10^{128}$	$-1,000 \cdot 10^{128}$
8	P^{256}	1	$-8,636 \cdot 10^{178}$	$1,000 \cdot 10^{256}$	$-1,000 \cdot 10^{256}$

Tabela 5.1: Transformadas de Graeffe

n	$\sqrt[n]{\alpha}$	$\sqrt[n]{\beta}$	$\sqrt[n]{\gamma}$
2	$5,47723$	$11,35782$	$10,00000$
4	$5,03366$	$10,15654$	$10,00000$
8	$5,00041$	$10,00488$	$10,00000$
16	$5,00000$	$10,00001$	$10,00000$
32	$5,00000$	$10,00000$	$10,00000$
64	$5,00000$	$10,00000$	$10,00000$
128	$5,00000$	$10,00000$	$10,00000$
256	$5,00000$	$10,00000$	$10,00000$

Tabela 5.2: Raízes n-ézimas dos coeficientes de $P^n(x)$

Assim, pela Proposição 5.1, para cada uma das potências de $P(x)$ obtemos uma aproximação para $|x_1|$, $|x_1 \cdot x_2|$ e $|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3|$. Dessa forma, $|x_1| = 5,00000$, isto é, 5 ou -5 é uma das raízes de $P(x)$. Para descobrir qual delas é a raiz, o modo mais simples é verificar se $P(x_1) = 0$. Daí, $x_1 = 5$ e $|x_1 \cdot x_2| = 10$, então $x_2 = 2$ ou $x_2 = -2$ verificando temos $x_2 = -2$ e como $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -10$ obtemos $x_3 = 1$. Portanto, as raízes de $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ são: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 1$.

Como opção para analisar os sinais das raízes podemos utilizar a regra de sinais de Descartes[3].

[3] René Descartes ($*1596$ – $\dagger 1650$) filósofo francês cuja obra, *La géométrie*, apresenta uma integração entre álgebra e geometria conhecida como geometria cartesiana ou geometria analítica. Sua obra teve uma grande influência entre matemáticos e filósofos.

Teorema 5.1 (Regra de sinais de Descartes)**.** *Dado um polinômio de coeficientes reais* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$*, o número de raízes reais positivas* n^+ *é dado pelo número de variações de sinais na sequência de coeficientes de* $P(x)$*, ou menor que este número por um inteiro par (contadas as multiplicidades).*

A demonstração deste teorema encontra-se detalhada em [1].

Corolário 5.1. *O número de raízes reais negativas* n^- *é dado pelo número de variações de sinais na sequência de coeficientes de* $P(-x)$*, ou menor que este número por um inteiro par (contadas as multiplicidades).*

Neste exemplo,

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow n^+ = 2 \;\; ou \;\; 0$$

$$P(-x) = -x^3 - 4x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow n^- = 1,$$

de fato, temos duas raízes reais positivas e uma negativa. Podemos visualizar que as sequências geradas pelas raízes n-ézimas dos coeficientes de $P^n(x)$ são convergentes. Considere a equação polinomial de raízes a, b e c,

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0,$$

então, calculando a n-ézima potência das raízes podemos construir a seguite equação:

$$(x-a^n)(x-b^n)(x-c^n) = 0,$$

expandindo,

$$x^3 - (a^n + b^n + c^n)x^2 + (a^n b^n + a^n c^n + b^n c^n)x - a^n b^n c^n = 0$$

$$\begin{cases} |\alpha^n| = |a^n + b^n + c^n| \\ |\beta^n| = |a^n b^n + a^n c^n + b^n c^n| \\ |\gamma^n| = |a^n b^n c^n| \end{cases},$$

supondo, $a > b > c$ e pela Proposição 5.1,

$$\begin{cases} \sqrt[n]{|a^n + b^n + c^n|} = |a| \\ \sqrt[n]{|a^n b^n + a^n c^n + b^n c^n|} = |ab| \\ \sqrt[n]{|a^n b^n c^n|} = |abc| \end{cases}.$$

2º Caso: Equação de 3º grau com duas raízes complexas conjugadas de módulo maior que a raiz real.

Exemplo 5.2. *Determinar as soluções da equação polinomial*

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$$

Pelo mesmo processo aplicado no 1º caso, temos:

k	P^{2^k}	Coef. Líder	α	β	γ
0	$P(x)$	1	-6	21	-26
1	$P^2(x)$	1	6	129	-676
2	$P^4(x)$	1	222	24753	-456976
3	$P^8(x)$	1	$2,220 \cdot 10^2$	$8,156 \cdot 10^8$	$-2,088 \cdot 10^{11}$
4	$P^{16}(x)$	1	$1,631 \cdot 10^9$	$6,653 \cdot 10^{17}$	$-4,361 \cdot 10^{22}$
5	$P^{32}(x)$	1	$-1,330 \cdot 10^{18}$	$4,428 \cdot 10^{35}$	$-1,902 \cdot 10^{45}$
6	$P^{64}(x)$	1	$-8,836 \cdot 10^{35}$	$1,961 \cdot 10^{71}$	$-3,617 \cdot 10^{90}$
7	$P^{128}(x)$	1	$-3,886 \cdot 10^{71}$	$3,844 \cdot 10^{142}$	$-1,308 \cdot 10^{181}$

Tabela 5.3: Transformadas de Graeffe

n	$\sqrt[n]{\alpha}$	$\sqrt[n]{\beta}$	$\sqrt[n]{\gamma}$
2	$2,44949$	$11,35782$	$26,00000$
4	$3,86001$	$12,54316$	$26,00000$
8	$1,96469$	$12,99976$	$26,00000$
16	$3,76514$	$12,99987$	$26,00000$
32	$3,68444$	$13,00000$	$26,00000$
64	$3,64469$	$13,00000$	$26,00000$
128	$3,62487$	$13,00000$	$26,00000$

Tabela 5.4: Raízes n-ézimas dos coeficientes de $P^n(x)$

Podemos observar que são convergentes as 3ª e 4ª colunas. E pelas relações 5.1, calcula-se $x_3 = \pm 2$. Pelos valores de $P(x_3)$, obtemos uma raiz, $x_3 = 2$. Por outro lado, os valores apresentados na tabela anterior sugerem que $x_1 = x_2$ ou x_1 e x_2 são complexas conjugadas. Verificando os valores de $P(x_1)$ e $P(x_2)$ vemos que tais valores não são raízes da equação, e portanto, as mesmas são complexas. Mais adiante apresentamos como identificar se a equação possui raízes complexas conjugadas, analisando o comportamento das sequências geradas pelos coeficientes. Logo, $x_1 = u + vi = \rho e^{i\theta}$ e $x_2 = u - vi = \rho e^{-i\theta}$. Daí,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2u \\ x_1 \cdot x_2 = \rho^2 \end{cases}.$$

Sabemos que dada a equação polinomial $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 + x_2 = -\alpha - x_3$$

como,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 13 \end{cases},$$

então,

$$x_1 = 2 + vi \Rightarrow 4 + v^2 = 13 \Rightarrow v = 3$$

obtém-se, assim, as três raízes da equação: $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$ e $x_3 = 2$.

Neste caso, considere as raízes a e $\rho e^{\pm i\theta}$,

$$(x - a)(x - \rho e^{i\theta})(x - \rho e^{-i\theta}) = 0,$$

então pelo mesmo processo aplicado no caso anterior, podemos construir a seguinte equação:

$$(x - a^n)(x - \rho e^{i\theta n})(x - \rho e^{-i\theta n}) = 0$$

expandindo,

$$x^3 - (a^n + 2\rho^n \cos n\theta)x^2 + (2a^n \rho^n \cos n\theta + \rho^{2n})x - a^n \rho^{2n} = 0$$

temos três possibilidades:

- Se $\rho > |a|$, então, para n suficientemente grande,

  $$x^3 - 2\rho^n \cos n\theta x^2 + \rho^{2n} x - a^n \rho^{2n} = 0$$

  Pode se ver que a coluna dos coeficientes α sofre uma variação de sinais por causa de $\cos n\theta$ e as outras duas colunas fornecem os valores de a e ρ, restando apenas determinar parte real e parte imaginária das raízes complexas como já descrito anteriormente;
- Se $\rho < |a|$, então, para n suficientemente grande,

  $$x^3 - a^n x^2 + (2a^n \rho^n \cos n\theta)x - a^n \rho^{2n} = 0$$

  Aqui, a coluna que sofre a variação de sinal é a dos coeficientes de β e a análise é análoga ao item anterior;
- Se $\rho = |a|$, então, para n suficientemente grande,

  $$x^3 - (1 + 2\cos n\theta)\rho^n x^2 + (1 + 2cosn\theta)\rho^{2n} x - \rho^{3n} = 0$$

  Desse modo, a sequência dada pelos coeficientes γ converge para ρ^3, que determina a raiz real e o módulo das raízes complexas. Podemos observar também o comportamento das sequências dos coeficientes, onde a 4ª e 5ª colunas sofrem variação de sinal pelo fator $\cos n\theta$ e as potências da 4ª e 5ª colunas são, respectivamente, aproximadamente $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ das potências da 6ª coluna, pelos fatores ρ^n, ρ^{2n} e ρ^{3n}.

3º Caso: Equação de 3º grau com duas raízes complexas conjugadas de módulo igual a raiz real.

Exemplo 5.3. *Determinar as soluções da equação polinomial*

$$P(x) = x^3 - 11x^2 + 55x - 125 = 0$$

Nos exemplos anteriores, vimos que ao calcular as relações dadas em 5.1 determinamos a raiz real. E para determinar as raízes complexas o procedimento é idêntico ao caso anterior.

k	P^{2^k}	Coef. Líder	α	β	γ
0	$P(x)$	1	-11	55	-125
1	$P^2(x)$	1	-11	275	-15625
2	$P^4(x)$	1	429	-268125	-244140625
3	$P^8(x)$	1	$-7,203 \cdot 10^5$	$2,814 \cdot 10^{11}$	$-5,960 \cdot 10^{16}$
4	$P^{16}(x)$	1	$4,391 \cdot 10^{10}$	$-6,700 \cdot 10^{21}$	$-3,553 \cdot 10^{33}$
5	$P^{32}(x)$	1	$-1,533 \cdot 10^{22}$	$3,569 \cdot 10^{44}$	$-1,262 \cdot 10^{67}$
6	$P^{64}(x)$	1	$4,788 \cdot 10^{44}$	$-2,596 \cdot 10^{89}$	$-1,593 \cdot 10^{134}$
7	$P^{128}(x)$	1	$-7,484 \cdot 10^{89}$	$2,199 \cdot 10^{179}$	$-2,538 \cdot 10^{268}$

Tabela 5.5: Transformadas de Graeffe

n	$\sqrt[n]{\alpha}$	$\sqrt[n]{\beta}$	$\sqrt[n]{\gamma}$
2	3,31662	16,58312	125,00000
4	4,55108	22,75539	125,00000
8	5,39745	26,98724	125,00000
16	4,62550	23,12752	125,00000
32	4,93510	24,67551	125,00000
64	4,99031	24,95155	125,00000
128	5,03665	25,18324	125,00000

Tabela 5.6: Raízes n-ézimas dos coeficientes de $P^n(x)$

Observando as sequências apresentadas na tabela 5.5 vemos que ocorre $\rho = |a|$. E como $|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3|$ converge para 125, pois neste caso pela proposição 5.1, se $|x_1| = |x_2| = |x_3|$, então $\sqrt[n]{|x_1^n \cdot x_2^n \cdot x_3^n|} = \sqrt[n]{|x_1^{3n}|} = |x_1^3|$, logo temos uma raiz real e duas raízes complexas e conjugadas todas de mesmo módulo. Logo, $\rho^3 = 125 \Rightarrow \rho = 5$. Como $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ é positivo, $x_1 = 5$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 \cdot x_3 = 25 \end{cases},$$

então,

$$x_2 = 3 + vi \Rightarrow 9 + v^2 = 25 \Rightarrow v = \pm 4$$

Obtém-se assim as três raízes da equação: $x_1 = 5, x_2 = 3+4i$ e $x_3 = 3-4i$.

4º Caso: Equação de 3º grau com três raízes reais, sendo duas de mesmo módulo.

Exemplo 5.4. *Determinar as soluções da equação polinomial*

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0$$

Considere a equação polinomial $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, cujas raízes são $a, -a$ e b. Então, podemos construir a equação:

$$P^n(x) = (x - a^n)(x + a^n)(x - b^n) = 0,$$

expandindo,

$$P^n(x) = x^3 - b^n x^2 - a^{2n} x + a^{2n} b^n = 0.$$

Se $|a| > |b|$, as sequências que vão convergir são dadas pelas raízes n-ézimas de β e γ. Se $|a| < |b|$, as sequências que convergem são as raízes n-ézimas de α e γ.

Construindo a tabela com os coeficientes das transformadas temos:

k	P^{2^k}	Coef. Líder	α	β	γ
0	$P(x)$	1	-2	-25	50
1	$P^2(x)$	1	-54	825	-2500
2	$P^4(x)$	1	-1266	410625	-6250000
3	$P^8(x)$	1	$-7,815 \cdot 10^5$	$1,528 \cdot 10^{11}$	$-3,906 \cdot 10^{13}$
4	$P^{16}(x)$	1	$-3,052 \cdot 10^{11}$	$2,328 \cdot 10^{22}$	$-1,526 \cdot 10^{27}$
5	$P^{32}(x)$	1	$-4,657 \cdot 10^{22}$	$5,421 \cdot 10^{44}$	$-2,328 \cdot 10^{54}$
6	$P^{64}(x)$	1	$-1,084 \cdot 10^{45}$	$2,939 \cdot 10^{89}$	$-5,421 \cdot 10^{108}$
7	$P^{128}(x)$	1	$-5,877 \cdot 10^{89}$	$8,636 \cdot 10^{178}$	$-2,939 \cdot 10^{217}$

Tabela 5.7: Transformadas de Graeffe

n	$\sqrt[n]{\alpha}$	$\sqrt[n]{\beta}$	$\sqrt[n]{\gamma}$
2	$7,34847$	$28,72281$	$50,00000$
4	$5,96497$	$25,31403$	$50,00000$
8	$5,45276$	$25,00409$	$50,00000$
16	$5,22137$	$25,00000$	$50,00000$
32	$5,10949$	$25,00000$	$50,00000$
64	$5,05445$	$25,00000$	$50,00000$
128	$5,02715$	$25,00000$	$50,00000$

Tabela 5.8: Raízes n-ézimas dos coeficientes de $P^n(x)$

Pelas relações 5.1 e pela regra de sinais de Descartes temos $x_1 = 2$. Como o produto de duas raízes é -25, logo, $x_2 = 5$ e $x_3 = -5$.

5º Caso: Equação de 4º grau com dois pares de raízes complexas conjugadas de módulos distintos.

Exemplo 5.5. *Determinar as soluções da equação polinomial*

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 62x^2 - 178x + 325 = 0$$

Considere que as raízes da equação $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ sejam $\rho e^{\pm i\theta}$ e $\lambda e^{\pm i\phi}$. Então, a n-ézima Transformada de Graeffe é:

$$P^n(x) = (x - \rho^n e^{i\theta n})(x - \rho^n e^{-i\theta n})(x - \lambda^n e^{i\phi n})(x - \lambda^n e^{-i\phi n}) = 0.$$

Desenvolvendo,

$$x^4 - 2(\rho^n \cos n\theta + \lambda^n \cos n\phi)x^3 + (\rho^{2n} + 4\rho^n\lambda^n \cos n\theta \cos n\phi + \lambda^{2n})x^2$$

$$-2\rho^n\lambda^n(\rho^n \cos n\phi + \lambda^n \cos n\theta)x + \rho^{2n}\lambda^{2n} = 0.$$

Se $\rho > \lambda$ temos:

$$x^4 - 2\rho^n \cos n\theta x^3 + \rho^{2n}x^2 - 2\rho^{2n}\lambda^n \cos n\phi x + \rho^{2n}\lambda^{2n} = 0.$$

Se $\rho < \lambda$ temos:

$$x^4 - 2\lambda^n \cos n\phi x^3 + \lambda^{2n}x^2 - 2\lambda^{2n}\rho^n \cos n\theta x + \rho^{2n}\lambda^{2n} = 0.$$

Ocorre irregularidade nos sinais dos coeficientes das colunas de α e γ, e regularidade em β e δ.

Supondo $\rho > \lambda \Rightarrow \sqrt[n]{\beta} = \rho^2$, determinando a partir daí os módulos das raízes complexas.

k	P^{2^k}	Coef. Líder	α	β	γ	δ
0	$P(x)$	1	-10	62	-178	325
1	$P^2(x)$	1	24	934	8616	105625
2	$P^4(x)$	1	1292	$6,700 \cdot 10^5$	$1,231 \cdot 10^8$	$1,116 \cdot 10^{10}$
3	$P^8(x)$	1	$-3,292 \cdot 10^5$	$1,532 \cdot 10^{11}$	$-1,960 \cdot 10^{14}$	$1,245 \cdot 10^{20}$
4	$P^{16}(x)$	1	$1,981 \cdot 10^{11}$	$2,360 \cdot 10^{22}$	$3,811 \cdot 10^{31}$	$1,549 \cdot 10^{40}$
5	$P^{32}(x)$	1	$7,954 \cdot 10^{21}$	$5,421 \cdot 10^{44}$	$-7,210 \cdot 10^{62}$	$2,400 \cdot 10^{80}$
6	$P^{64}(x)$	1	$1,021 \cdot 10^{45}$	$2,939 \cdot 10^{89}$	$-2,597 \cdot 10^{125}$	$5,761 \cdot 10^{160}$

Tabela 5.9: Transformadas de Graeffe

n	$\sqrt[n]{\alpha}$	$\sqrt[n]{\beta}$	$\sqrt[n]{\gamma}$	$\sqrt[n]{\delta}$
2	$4,89898$	$30,56141$	$92,82241$	$325,00000$
4	$5,99537$	$28,61046$	$105,32703$	$325,00000$
8	$4,89419$	$25,01345$	$61,16837$	$325,00000$
16	$5,08229$	$25,02142$	$94,14896$	$325,00000$
32	$4,83497$	$24,99998$	$92,11094$	$325,00000$
64	$5,04970$	$25,00000$	$91,11714$	$325,00000$

Tabela 5.10: Raízes n-ézimas dos coeficientes de $P^n(x)$

Temos,

$$\rho^2 = 25.$$

Consequentemente,

$$\lambda^2 = 13.$$

Sendo as raízes $a \pm bi = \rho e^{\pm i\theta}$ e $c \pm di = \lambda e^{\pm i\phi}$, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2(a + c) = 10 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 2(\rho^2 c + \lambda^2 a) = 178 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + c = 5 \\ 13a + 25c = 89 \end{cases}.$$

Daí, $a = 3$ e $c = 2$. Portanto,

$$9 + b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$4 + d^2 = 13 \Rightarrow d = \pm 3,$$

então, as raízes são $3 \pm 4i$ e $2 \pm 3i$.

Uma desvantagem do método de Graeffe está na quantidade de raízes complexas, pois quanto mais raízes complexas, mais difícil a análise das sequências dos coeficientes das equações transformadas.

6º Caso: Equação com raízes múltiplas.

Exemplo 5.6. *Determinar as soluções da equação polinomial*

$$P(x) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0$$

Os casos que apresentem raízes com multiplicidade $m > 1$ podem ser resolvidos determinando o MDC entre $P(x)$ e sua derivada $P'(x)$, pelo algoritmo de Euclides. Assim, os zeros do MDC são raízes múltiplas de $P(x)$.

Considere a equação $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, cujas raízes são a, a, b e c.

O comportamento das sequências é semelhante ao do 4º caso e pode ser explorado da mesma forma ou como opção verificar o $MDC[P(x), P'(x)]$.

Nesse caso, $P'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 46x - 28$ e $P''(x) = 12x^2 - 48x + 46$. Daí, $MDC[P(x), P'(x)] = x - 2$ e $MDC[P(x), P''(x)] = 1$.

Dizemos que 2 é raiz de multiplicidade 2, pois é fator comum de $P(x)$ e $P'(x)$, mas não de $P''(x)$.

Pelo método de Graeffe,

k	P^{2^k}	Coef. Líder	α	β	γ	δ
0	$P(x)$	1	-8	23	-28	12
1	$P^2(x)$	1	-18	105	-232	144
2	$P^4(x)$	1	-114	$2,961 \cdot 10^3$	$-2,358 \cdot 10^4$	$2,074 \cdot 10^4$
3	$P^8(x)$	1	$-7,074 \cdot 10^3$	$3,432 \cdot 10^6$	$-4,334 \cdot 10^8$	$4,300 \cdot 10^8$
4	$P^{16}(x)$	1	$-4,318 \cdot 10^7$	$5,647 \cdot 10^{12}$	$-1,849 \cdot 10^{17}$	$1,849 \cdot 10^{17}$
5	$P^{32}(x)$	1	$-1,853 \cdot 10^{15}$	$1,592 \cdot 10^{25}$	$-3,418 \cdot 10^{34}$	$3,418 \cdot 10^{34}$
6	$P^{64}(x)$	1	$-3,434 \cdot 10^{30}$	$1,267 \cdot 10^{50}$	$-1,168 \cdot 10^{69}$	$1,168 \cdot 10^{69}$
7	$P^{128}(x)$	1	$-1,179 \cdot 10^{61}$	$8,024 \cdot 10^{99}$	$-1,365 \cdot 10^{138}$	$1,365 \cdot 10^{138}$
8	$P^{256}(x)$	1	$-1,390 \cdot 10^{122}$	$3,219 \cdot 10^{199}$	$-1,864 \cdot 10^{276}$	$1,864 \cdot 10^{276}$

Tabela 5.11: Transformadas de Graeffe

n	$\sqrt[n]{\alpha}$	$\sqrt[n]{\beta}$	$\sqrt[n]{\gamma}$	$\sqrt[n]{\delta}$
2	$4,24264$	$10,24695$	$15,23155$	$12,00000$
4	$3,26758$	$7,37666$	$12,39237$	$12,00000$
8	$3,02836$	$6,56056$	$12,01191$	$12,00000$
16	$3,00057$	$6,26594$	$12,00002$	$12,00000$
32	$3,00000$	$6,13138$	$12,00000$	$12,00000$
64	$3,00000$	$6,06534$	$12,00000$	$12,00000$
128	$3,00000$	$6,03258$	$12,00000$	$12,00000$
256	$3,00000$	$6,01627$	$12,00000$	$12,00000$

Tabela 5.12: Raízes n-ézimas dos coeficientes de $P^n(x)$

Pela coluna $\sqrt[n]{\alpha}$ obtemos a maior raiz em módulo e verificando, obtemos $x_1 = 3$, e pelas relações 5.1 temos $x_4 = 1$, e como $x_2 = x_3 = 2$ as raízes de $P(x) = 0$ são: simples 1 e 3 e dupla 2.

Mesmo limitando o estudo deste método a apenas alguns casos, existem muitas outras situações que podem ser exploradas e os conceitos aqui empregados podem ser estendidos a outras equações de grau superior a 4. Ainda podemos destacar, que o método de Dandelin-Graeffe fornece as raízes reais ou complexas, sem a necessidade de prévia verificação dos intervalos que as contém ou de um valor inicial de aproximação, como nos métodos iterativo simples e de Newton.

Do ponto de vista computacional, o método de Dandelin-Graeffe pode não ser viável pelas limitações do software durante sua implementação, o que pode ser resolvido aplicando as modificações propostas por Gregorio Malajovich e Jorge P. Zubelli nos artigos disponíveis em [15] e [16], sabendo que para alunos do Ensino Médio o aspecto mais relevante encontra-se nos conceitos envolvidos no método e uma planilha cumpre a função computacional de maneira satisfatória.

Capítulo 6

Atividades Sugeridas

6.1 Informações Gerais

Neste capitulo são sugeridas atividades para serem trabalhadas com alunos do 3º ano do Ensino Médio. O papel a ser desempenhado pelo professor é o de instigar os alunos a relacionarem os métodos iterativos com o estudo de sequências, propondo aos discentes uma poderosa ferramenta para resolução de diversos tipos de equações algébricas e transcendentes e, ainda, proporcionar ao aluno uma integração entre álgebra, aritmética e geometria, pouco exploradas na Educação Básica, utilizando-se do potencial tecnológico existente.

6.1.1 Recomendações ao Professor

Prezados colegas, professores, antes de aplicar as atividades em sala de aula, sugiro que seja realizada uma leitura de todo o material, pois existem muitos conceitos e resultados que podem não fazer parte da formação do aluno até o momento. Sendo assim, a abordagem não pode ser limitada a aplicação do método. É necessário que o aluno seja questionado sobre cada um dos passos a serem realizados durante as atividades. Este material deve ser encarado como uma proposta alternativa e que faz parte de uma demanda e uma tendência no ensino de Matemática e portanto, não é definitivo.

6.1.2 Objetivo

Apresentar aos alunos do Ensino Médio uma visão geral sobre métodos iterativos e a sua relação com o estudo de sequências, utilizando tecnologias e valorizando os conceitos matemáticos envolvidos.

6.1.3 Público-alvo

3º ano do Ensino Médio.

6.1.4 Pré-requisitos

Noções de Sequências, Números Complexos, Funções Reais, Polinômios e Equações Polinomiais.

6.1.5 Descrição da Atividade

As atividades foram elaboradas, para que o aluno possa se familiarizar com o processo, de forma progressiva, adquira confiança e perceba os conceitos que estão sendo trabalhados. Inicialmente, o professor deve apresentar um exemplo, dispondo de um conjunto de perguntas a serem direcionadas aos alunos em cada etapa do desenvolvimento. Em seguida, são propostos exercícios, em ordem crescente de dificuldade, que contemplem as diferentes possibilidades, que possam surgir durante o desenvolvimento.

6.1.6 Recursos Necessários

- Computador com internet e/ou software para plotar gráficos de funções;
- Planilha eletrônica;
- Calculadora(científica);
- Folhas A4.

6.2 Atividade - Método Iterativo Simples

A atividade, do ponto de vista pedagógico, apresenta algumas dificuldades que possam surgir durante a sua aplicação como por exemplo uma determinada função de iteração pode ou não convergir para a solução procurada.

Porém, nos exercícios sugeridos podem aparecer outras situações como a convergência alternada, não ter diretamente uma função de iteração, casos em que o professor deverá estar atento as possíveis dúvidas que por ventura possam ocorrer.

Exemplo 6.1. *Determinar a(s) solução(ões) da equação* $\ln 5x - x = 0$.

1. Na sua opinião, a equação tem solução? Sim ou Não, por que?

   Podemos manipular a equação de forma a obter a igualdade abaixo

   $$x = \ln 5x$$

   A fim de explorar a existência de raízes, o aluno pode fazer um esboço do gráfico das funções $\psi(x) = x$ e $\phi(x) = \ln 5x$, utilizando o Winplot, Gnuplot ou qualquer outro software para traçar gráficos de funções.

   O professor sempre deve trabalhar em conjunto com o software, uma análise qualitativa da função baseada nas suas características como domínio, imagem, intervalos de crescimento e decrescimento, entre outras. Para que os alunos possam certificar-se de que o gráfico obtido pelo software está de acordo com a função a ser trabalhada.

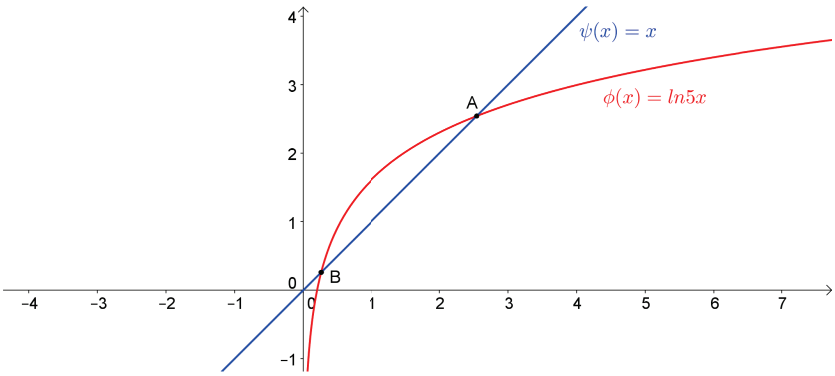

Figura 6.1: Gráfico de $\psi(x)$ e $\phi(x)$

Com a visualização do gráfico o aluno pode, conhecendo o comportamento das funções, verificar que a equação tem duas soluções reais e essas soluções são dadas pelos pontos de interseção dos gráficos de $\psi(x)$ e $\phi(x)$ que se encontram nos intervalos $[0, 1]$ e $[2, 3]$.

2. Como podemos determinar as soluções da equação?

   Podemos utilizar uma relação de iteração e tentar determinar tais interseções. Para este fim, devemos manipular nossa equação até obter a seguinte equivalência:

$$x = \phi(x) \Longleftrightarrow f(x) = 0,$$

   onde, $\phi(x_n)$ é chamada de função de iteração. A relação de iteração $x_{n+1} = \phi(x_n)$ para obter as soluções de uma equação é conhecida como Método Iterativo Simples.

3. Usando a planilha construir uma coluna para n, uma para x_n e outra para $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Escolher o valor inicial x_0 e utilizar diversos valores iniciais.

   Como já haviamos feito a manipulação da expressão no ínicio da atividade temos a relação:

$$x = \ln 5x \Longleftrightarrow x_{n+1} = \ln 5x_n,$$

   onde nossa função de iteração é $\phi(x) = \ln 5x$.

4. Verificar o comportamento dos valores de x_n e x_{n+1}.

   Espera-se que o aluno verifique que as sequências estão “se aproximando” de um determinado ponto. No nosso exemplo, o ponto A. Logo, a abscissa

n	x_n	$\phi(x_n) = x_{n+1}$
0	6	3,401197382
1	3,401197382	2,833565453
2	2,833565453	2,650973709
3	2,650973709	2,584364922
4	2,584364922	2,558917712
5	2,558917712	2,549022313
6	2,549022313	2,545147791
7	2,545147791	2,543626632
8	2,543626632	2,543028783
9	2,543028783	2,542793717
10	2,542793717	2,542701278

Tabela 6.1: Aproximação inicial $x_0 = 6$

deste ponto é candidato a raiz da equação. E, de fato, sabemos que é uma das raízes da equação, pois é um ponto de interseção dos gráficos de $\psi(x)$ e $\phi(x)$.

5. A sequência de valores obtidos parece ser convergente? Ou seja, existe um limite para sequência?

   Nesse ponto muitos alunos estarão convencidos da convergência, então, o que fazer com os céticos? Analisar graficamente o que ocorre com a sequência, no caso particular, $x_0 = 6$.

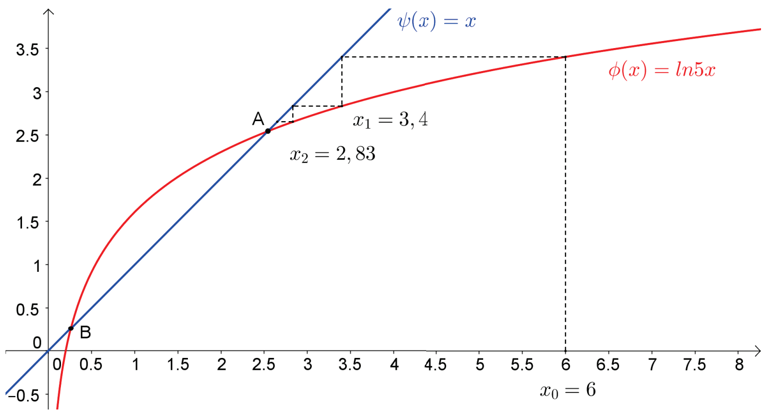

Figura 6.2: Interpretação Geométrica - Método Iterativo Simples

Aplicando x_0 na função de iteração temos x_1, aplicando x_1 temos x_2 e, assim, sucessivamente, até obtermos um possível valor aproximado para raiz com precisão de algumas casas decimais. Para comprovar recorremos a análise da aproximação da raiz realizada em 3.

Vejamos por que isso ocorre:

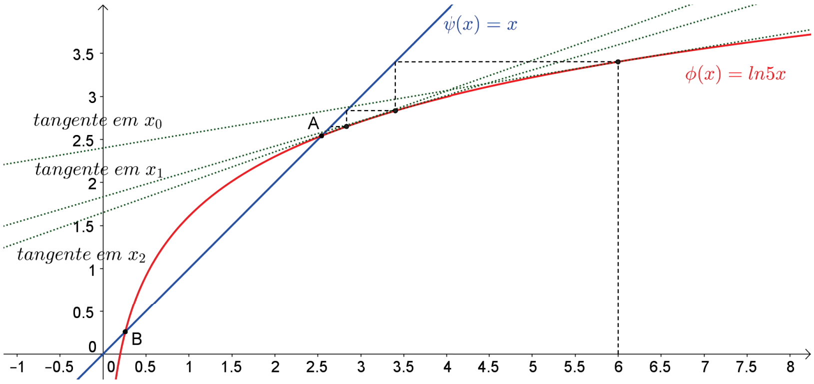

Figura 6.3: Retas tangentes à curva

Da geometria analítica, sabemos que a inclinação da reta é dada pela tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x. Então, o que podemos dizer dos coeficientes angulares das retas que são tangentes à curva em relação à função $\psi(x) = x$. A função $\psi(x) = x$ tem coeficiente angular igual a 1, enquanto todas as outras tem coeficientes menores que 1. Essa informação ajuda a compreender a definição de "ponto fixo atrator" dada em 3.1, portanto, a sequência converge para o ponto A e x_A de fato é raiz da equação.

6. Quantos algarismos estabilizaram na sequência?

   Ver quantos são os algarismos que estabilizaram e em que iteração isso ocorreu. Na 11ª iteração, temos $x_{11} = 2,542701278$, substituindo na equação verificamos que satisfaz $|f(x_A| \leq \delta$ para $\delta = 10^{-4}$.

7. A sequência convergiria para este resultado, independente da valor inicial?

   Verificar outros valores e ver o que acontece. Como graficamente temos duas raízes, podemos testar valores antes da 1ª raiz, entre as duas raízes e após a 2ª raiz.

8. Podemos encontrar a outra raiz por este método?

   Após testar diversos valores, verificamos que uns geram erro e outros convergem para mesma raiz. O que acontece com os valores da sequência quando $x_0 = 0,259$ e $x_0 = 0,26$?

9. Como podemos interpretar este resultado?

Dizemos que a outra raiz é um ponto fixo "repulsor". Pois, analisando as tangentes à curva antes da 1ª raiz verificamos que os seus coeficientes angulares são todos maiores que 1 e, portanto, a sequência diverge.

10. O que podemos fazer, então, para determinar esta outra raiz?

    Relembrando o conceito de função inversa e o que ela representa graficamente, ou seja, a simetria em relação à reta $y = x$. Temos exatamente os mesmos pontos como soluções da equação original.

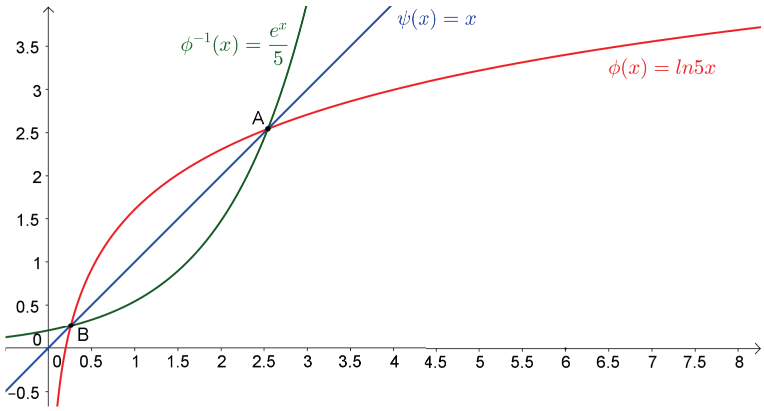

Figura 6.4: Gráficos de $\phi^{-1}(x)$,$\phi(x)$ e $\psi(x)$

Voltando à planilha inserimos uma nova coluna com a função inversa de $\phi(x) = \ln 5x$ que é dada por:

$$\phi^{-1}(x) = \frac{e^x}{5}$$

Atribuindo valores diversos para x_0 verificamos que o ponto B passou a ser atrator e o ponto A repulsor.

Dessa forma conseguimos determinar numericamente as soluções da equação $\ln 5x - x = 0$. As duas raízes são aproximadamente:

A 1ª com 4 casas decimais exatas e a 2ª com 5 casas decimais.

n	x_n	$\phi^{-1}(x_n) = x_{n+1}$
0	1	$0,543656366$
1	$0,543656366$	$0,344458539$
2	$0,344458539$	$0,282245118$
3	$0,282245118$	$0,265220746$
4	$0,265220746$	$0,260743747$
5	$0,260743747$	$0,259579007$
6	$0,259579007$	$0,259276841$
7	$0,259276841$	$0,259198508$
8	$0,259198508$	$0,259178205$
9	$0,259178205$	$0,259172943$
10	$0,259172943$	$0,259171579$

Tabela 6.2: Aproximação inicial $x_0 = 1$

x_A	Equação no ponto x_A	x_B	Equação no ponto x_B
$2,542701278$	$-0,0000363$	$0,259171579$	$0,000001363$

Tabela 6.3: Raízes de $\ln 5x - x = 0$

Conclusões

- Não existe uma única função de iteração, cada equação pode ser escrita da forma que o aluno considere mais conveniente, e a partir daí, a função de iteração poderá ou não convergir;
- O aluno pode facilmente investigar outras funções de iteração ou trabalhar com a função inversa da função de iteração;
- A convergência ocorre quando $|\tan\theta_n| < 1$, isto é, o ponto fixo é atrator e diverge quando $|\tan\theta_n| > 1$, ou seja, é um ponto fixo repulsor; $\tan\theta_n$ são os coeficientes angulares das retas tangentes à curva nos pontos x_n;
- A derivada de uma função representa o coeficiente angular da reta tangente à função num ponto x dado.

Exercícios Sugeridos

1. Determinar as soluções da equação $\operatorname{sen} 2x - x = 0$, com aproximação de 6 casas decimais;
2. Determinar as raízes reais da equação $3x^4 - x - 3 = 0$;
3. Verificar quantas soluções possui a equação $e^x + \cos x - 5 = 0$ e determinar a(s) solução(ões) com aproximação de 7 casas decimais;

4. Obter a maior raiz da equação $x^2 + 2x + 1 - e^x = 0$ com aproximação de 10^{-9};

5. Utilizando o método apresentado, determinar uma aproximação para $\sqrt{5}$ com 8 casas decimais corretas;

6. Você ouviu falar sobre o número de ouro ou a razão áurea? Este número é representado por $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Determinar uma aproximação com 10 casas decimais para o número ϕ;

7. Determinar todas as raízes da equação $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$ com uma precisão de 10^{-5};

8. Calcular as raízes da equação $(4 + x^2)(e^x - e^{-x}) = 18$ com uma precisão de 10^{-6};

9. Determinar a maior raiz positiva de $5x - 8\log x = 8$ com aproximação de 10^{-5};

10. Determinar as raízes da equação $2\sqrt{x} = \cos\frac{\pi x}{2}$ com uma precisão de 10^{-4}.

6.3 Atividade - Método de Newton

Para utilizar este método é necessário que o aluno conheça a derivada da função, e assim, obter a função de iteração. Fica a critério do professor mostrar algumas técnicas de derivação, como por exemplo de funções polinomiais, cuja derivação é bem simples ou utilizar o GeoGebra, pois o objetivo principal da atividade é apresentar ao discente uma nova ferramenta para resolução de equações e reforçar os conceitos matemáticos que servem de base para o método e relacioná-los com o conteúdo de sequências.

Exemplo 6.2. *Determinar com precisão de* 10^{-8} *a solução da equação* $e^x = 2 + \cos 3x$.

1. Na sua opinião, a equação tem solução? Sim ou Não, por que?

   Esse questionamento inicial é muito importante para iniciar o debate sobre o problema, pois muito provavelmente, não haverá unanimidade nas respostas. Uma forma de responder a esta questão é através da análise do comportamento da função, associada a construção do gráfico correspondente a equação. Como esta função é resultado da operação entre as funções exponencial e trigonométrica, torna-se díficil para o aluno do Ensino Médio analisar seu comportamento, mas isto pode ser resolvido, analisando as funções associadas, separadamente, por exemplo: $\psi(x) = e^x$ e $\phi(x) = 2+\cos 3x$, cuja interseção dos gráficos representa a raiz da equação, conforme a figura seguinte:

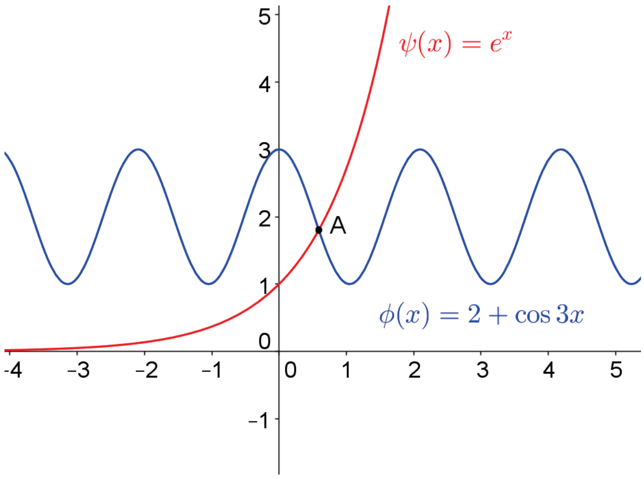

Figura 6.5: Gráfico de $\psi(x)$ e $\phi(x)$

ou pelo gráfico de $f(x) = e^x - 2 - \cos 3x$,

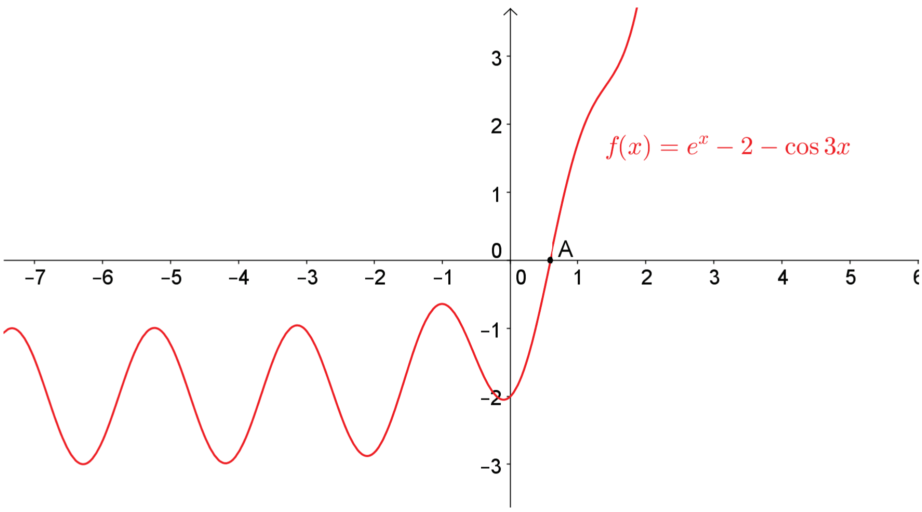

Figura 6.6: Gráfico de $f(x)$

O professor ao abordar estas duas formas de representação da equação, proporciona ao aluno enriquecer e concretizar sua percepção sobre o comportamento de funções e suas operações. É possivel ver que existe uma única solução real para a equação, dada pela abscissa do ponto A localizada no intervalo $[0, 1]$.

2. Como podemos determinar as soluções da equação?

   A ideia é obter uma sequência de aproximações sucessivas a partir da relação de iteração: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Usando o GeoGebra, a derivada de f é: $f'(x) = e^x + 3\,\text{sen}\,3x$.

   E a função de iteração dada por:

$$F(x) = x - \frac{e^x - 2 - \cos 3x}{e^x + 3\,\text{sen}\,3x}$$

3. Construir um tabela para as sequências n, x_n e x_{n+1}.

   Com auxílio de uma planilha e conhecendo o intervalo onde se encontra a raiz.

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	$1,000000000000$	$0,456247909473$
1	$0,456247909473$	$0,594065856350$
2	$0,594065856350$	$0,589604263575$
3	$0,589604263575$	$0,589604348608$
4	$0,589604348608$	$0,589604348608$

Tabela 6.4: Aproximação inicial $x_0 = 1$

4. As sequências obtidas parecem ser convergentes, isto é, tendem a algum valor?

   Vejamos o gráfico de $f(x)$ e da tangente a essa curva com a aproximação inicial $x_0 = 1$.

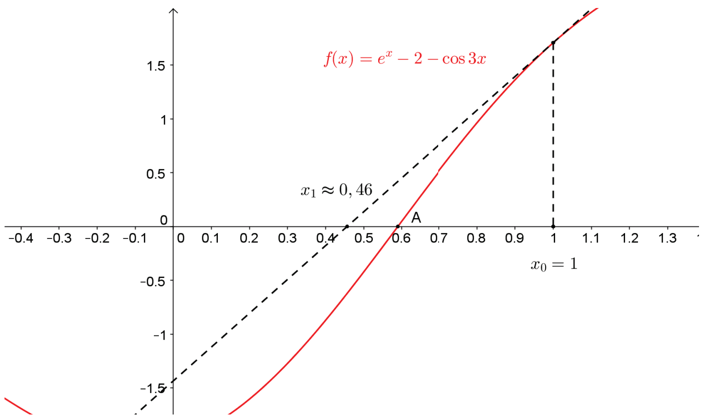

Figura 6.7: Gráfico de $f(x)$ e da sua tangente em $x_0 = 1$

A maioria dos alunos deverá concordar que ocorre a convergência, então, como justificar a alunos do Ensino Médio?

O método de Newton também é conhecido como método das tangentes. Devemos analisar a relação existente entre as tangentes e a sequência obtida. Pelo comportamento das sequências e a sua interpretação geométrica, pode se concluir que as sequências são convergentes.

De fato, pela proposição 4.1 se x_0 for tomado suficientemente próximo da raiz r, i.e, x_0 pertence a uma vizinhança de r. Isto implica que $x_0 \in [r-\delta, r+\delta]$ e $\delta > 0$. Geometricamente, este conceito está associado à convexidade da curva como podemos ver no gráfico seguinte:

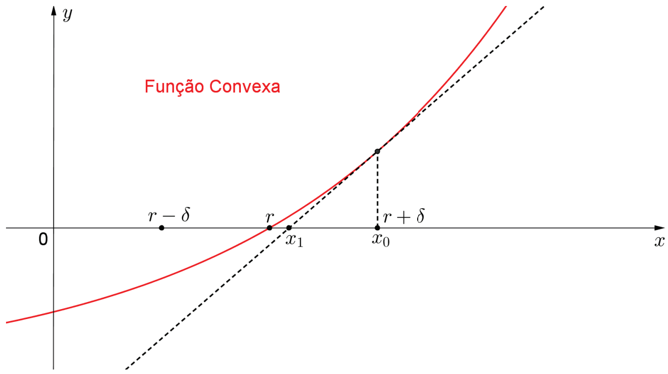

Figura 6.8: Gráfico - função convexa - x_0 à direita da raiz

Com x_0 à direita da raiz, a sequência tem convergência monótona. Porém, se x_0 estiver à esquerda da raiz pode ocorrer a convergência caso em alguma iteração se tenha uma aproximação pertencente a vizinhança de r, ou seja, temos uma subsequência convergente. Como na figura seguinte.

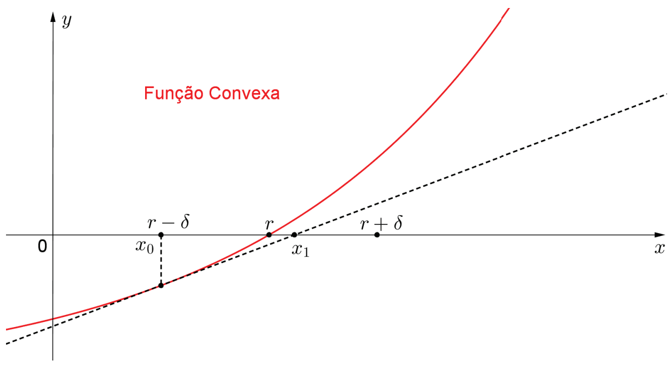

Figura 6.9: Gráfico - função convexa - x_0 à esquerda da raiz

Analogamente, podemos mostrar tal convergência quando a função for côncava.

5. Quantos algarismos estabilizaram na sequência?

   Nesse momento, os alunos devem perceber que a quantidade de algarismos que estabilizaram na sequência é muito superior e ocorre muito mais rápido se comparado com o método iterativo simples, na ordem de 10^{12} casas decimais na quarta iteração.

6. A sequência convergiria para este resultado, independente da valor inicial?

   Ao testar outros valores, mais distantes da raiz, os discentes devem perceber que a sequência pode convergir como por exemplo para $x_0 = 3$, mas só após 20 iterações é possível chegar ao mesmo valor para r e que para outros valores a sequência diverge. Então, podemos destacar que o método de Newton é muito eficaz, porém necessita de uma aproximação inicial conveniente.

7. Como podemos interpretar este resultado?

   Para aplicar o método de Newton devemos inicialmente verificar e isolar um intervalo suficientemente pequeno e que contenha uma única raiz. Sendo assim, poderemos garantir a convergência para esta raiz. Logo, a solução pedida para a equação é dada por $x \approx 0,58960434$.

Conclusões

- Comparando com o método iterativo simples, a convergência pelo método de Newton é muito mais rápida;
- A dificuldade para utilizar o método por necessitar da derivada é contornada com a interpretação geométrica deste conceito, usando as retas tangentes. E, é possível determinar a função derivada com o software Geogebra ou outros já mencionados;
- A convergência ocorre quando tomamos como aproximação inicial um x_0 "suficientemente próximo" da raiz;
- Como o objetivo é aplicar a atividade para alunos de Ensino Médio, optou-se pelo critério de convergência local do método, pois deseja-se analisar o comportamento das sequências e não garantir antecipadamente a sua convergência.

Exercícios Sugeridos

1. Quantas e quais são as raízes da equação $\ln x - 2^x = -2$. Dê uma aproximação com 8 casas decimais;
2. Determinar a menor raiz positiva da equação $e^x = \tan x$ com 10 casas decimais corretas;

3. Achar a raiz de $\cos x + \ln x + x = 0$ com precisão de 10^{-5};

4. Utilizando o método de Newton, determinar uma aproximação para $\sqrt{5}$ com 8 casas decimais corretas, compare com o método iterativo simples e verifique quantas iterações foram necessárias em cada um dos métodos;

5. Encontre uma aproximação com 6 casas decimais para a raiz real da equação $x^5 + x^3 + x^2 + x - 25 = 0$;

6. Determine todas as raízes reais de $\cos x - 3x \ln |x| = 0$ com 5 casas significativas corretas;

7. Dada a equação polinomial $36x^5 + 93x^4 - 11x^3 - 20x^2 + x + 1 = 0$, determinar:

   a. A localização de todas as suas raízes, apresentando os intervalos que as contém;

   b. Todas as raízes, com 10 casas significativas exatas e mostrar se existem raízes múltiplas.

8. Dada a equação
$$\frac{1}{x^3} - x^2 + 3 = 0$$
   determinar todas as suas soluções com 7 casas decimais corretas;

9. Sendo $\operatorname{sen} x + \cos 3x = \ln 5x - 3$, determinar:

   a. Quantas raízes reais a equação possui bem como os intervalos que as contém;

   b. As raízes menor, maior e intermediária. Com 12 casas significativas exatas.

10. Determinar as duas menores raízes da equação $\operatorname{sen}(\cos(\sqrt{3x}))$ com aproximação de pelo menos 6 casas decimais corretas.

6.4 Atividade - Método de Dandelin-Graeffe

O método de Dandelin-Graeffe utiliza a quadratura das raízes, então, supondo que as raízes de $P(x) = 0$ são $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i$, deve-se obter uma transformação de $P(x) = 0$, tal que, a transformada $P^2(x) = 0$ tenha raízes $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots, x_i^2$, repetindo este processo até obter $P^n(x)$, com n suficientemente grande.

Exemplo 6.3. *Determinar as raízes da seguinte equação polinomial:*

$$x^5 - 3x^4 - 53x^3 + 171x^2 + 304x - 420 = 0$$

1. Dada a equação, como podemos obter a transformada usando a quadratura das raízes?

   Um processo para realizar esta operação consiste em separar os termos de ordem par dos termos de ordem ímpar. Vejamos o que ocorre com uma equação geral.

   $$x^5 + \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0$$
   $$x^5 + \beta x^3 + \delta x = -(\alpha x^4 + \gamma x^2 + \varepsilon)$$

   Elevando ambos os membros ao quadrado e reorganizando os termos,

   $$x^{10} + (2\beta - \alpha^2)x^8 + (\beta^2 + 2\delta - 2\alpha\gamma)x^6 + (2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon - \gamma^2)x^4 + (\delta^2 - 2\gamma\varepsilon)x^2 - \varepsilon^2 = 0$$

   Fazendo $x^2 = x$ sem perda de generalidade,

   $$x^5 + (2\beta - \alpha^2)x^4 + (\beta^2 + 2\delta - 2\alpha\gamma)x^3 + (2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon - \gamma^2)x^2 + (\delta^2 - 2\gamma\varepsilon)x - \varepsilon^2 = 0$$

2. Como este processo pode ser aplicado para determinar as raízes da equação?

   A ideia é repetir este processo até que tenhamos uma k-ésima transformada P^n, onde $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ e "suficientemente grande", tal que as raízes desta transformada sejam x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n e x_5^n.

   Sabendo que os coeficientes são obtidos recursivamente por:

   $$\begin{cases} \alpha_n = 2\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}^2 \\ \beta_n = \beta_{n-1}^2 + 2\delta_{n-1} - 2\alpha_{n-1}\gamma_{n-1} \\ \gamma_n = 2\beta_{n-1}\delta_{n-1} - 2\alpha_{n-1}\varepsilon_{n-1} - \gamma_{n-1}^2 \\ \delta_n = \delta_{n-1}^2 - 2\gamma_{n-1}\varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1}^2 \end{cases}$$

   Com o auxílio de uma planilha podemos determinar as trasformadas de Graeffe.

P^{2^k}	Coef. Líder	α	β	γ	δ	ε
$P(x)$	1	-3	-53	171	304	-420
$P^2(x)$	1	$-1,2 \cdot 10^2$	$4,4 \cdot 10^3$	$-6,4 \cdot 10^4$	$2,4 \cdot 10^5$	$-1,8 \cdot 10^5$
$P^4(x)$	1	$-4,3 \cdot 10^3$	$5,5 \cdot 10^6$	$-2,0 \cdot 10^9$	$3,3 \cdot 10^{10}$	$-3,1 \cdot 10^{10}$
$P^8(x)$	1	$-7,8 \cdot 10^6$	$1,3 \cdot 10^{13}$	$-3,8 \cdot 10^{18}$	$9,7 \cdot 10^{20}$	$-9,7 \cdot 10^{20}$
$P^{16}(x)$	1	$-3,6 \cdot 10^{13}$	$9,9 \cdot 10^{25}$	$-1,4 \cdot 10^{37}$	$9,4 \cdot 10^{41}$	$-9,4 \cdot 10^{41}$
$P^{32}(x)$	1	$-1,1 \cdot 10^{27}$	$8,8 \cdot 10^{51}$	$-2,0 \cdot 10^{74}$	$8,8 \cdot 10^{83}$	$-8,8 \cdot 10^{83}$
$P^{64}(x)$	1	$-1,2 \cdot 10^{54}$	$7,7 \cdot 10^{103}$	$-4,2 \cdot 10^{148}$	$7,7 \cdot 10^{167}$	$-7,7 \cdot 10^{167}$

Tabela 6.5: Transformadas de Graeffe

3. Como determinar as raízes?

   Supondo que as raízes sejam todas distintas, em módulo, pela proposição 5.1, obtemos os seguintes resultados:

n	$\sqrt[n]{\alpha}$	$\sqrt[n]{\beta}$	$\sqrt[n]{\gamma}$	$\sqrt[n]{\delta}$	$\sqrt[n]{\varepsilon}$
2	$10,72381$	$66,65583$	$252,95256$	$485,85595$	$420,00000$
4	$8,11610$	$48,41812$	$212,44714$	$426,69353$	$420,00000$
8	$7,27373$	$43,40249$	$210,02245$	$420,20490$	$420,00000$
16	$7,03759$	$42,14995$	$210,00001$	$420,00040$	$420,00000$
32	$7,00158$	$42,00386$	$210,00000$	$420,00000$	$420,00000$
64	$7,00001$	$42,00001$	$210,00000$	$420,00000$	$420,00000$

Tabela 6.6: Raízes n-ézimas dos coeficientes de $P^n(x)$

   Como $\alpha^{(n)} = |x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n|$, então $\sqrt[n]{\alpha} = |x_1| = \pm 7$

4. Como saber se os resultados obtidos são raízes da equação?

   Para isso, basta determinar o valor numérico de $P(7)$ e de $P(-7)$.

$$P(7) = 7^5 - 3 \cdot 7^4 - 53 \cdot 7^3 + 171 \cdot 7^2 + 304 \cdot 7 - 420 = 1512$$

   E

$$P(-7) = (-7)^5 - 3 \cdot (-7)^4 - 53 \cdot (-7)^3 + 171 \cdot (-7)^2 + 304 \cdot (-7) - 420 = 0$$

   Portanto, $x_1 = -7$ é raiz da equação.

5. Como determinar as demais raízes da equação?

   O processo é semelhante,

$$\begin{cases} \sqrt[n]{\beta} = |x_1x_2| = \pm 42 \Rightarrow x_2 = \pm 6 \\ \sqrt[n]{\gamma} = |x_1x_2x_3| = \pm 210 \Rightarrow x_3 = \pm 5 \\ \sqrt[n]{\delta} = |x_1x_2x_3x_4| = \pm 420 \Rightarrow x_4 = \pm 2 \\ \sqrt[n]{\varepsilon} = |x_1x_2x_3x_4x_5| = \pm 420 \Rightarrow x_5 = \pm 1 \end{cases}$$

Logo, substituindo os possíveis valores, obtemos assim todas as raízes da equação $P(x) = 0$.

$$\begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = -2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Conclusões

- O método de Dandelin-Graeffe utiliza o conceito de convergência de sequências para cada coeficiente da equação;
- O método não necessita de nenhuma aproximação ou verificação inicial;
- A integração com outros conceitos, como números complexos, possibilita a análise de raízes complexas;
- É muito eficaz quando as raízes possuem módulos distintos;
- Uma desvantagem ocorre quando a equação polinomial possui muitas raízes complexas.

Exercícios Sugeridos

1. Determinar uma aproximação para as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 10x - 10 = 0$.
2. Dado o polinômio $P(x) = x^5 - 17x^4 + 109,55x^3 - 331,33x^2 + 464,2104x - 236,4768$, obter todas as suas raízes;
3. Encontrar as raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 4x - 1 = 0$;
4. Determinar as raízes da equação $-0,2582x^2 - 0,7562x + 0,9925 = 0$;
5. Dada a equação $5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0$, calcular todas as suas raízes;
6. Obter as raízes da equação $x^4 - 19x^3 + 63x^2 + 475x - 2200 = 0$;
7. Encontrar todas as raízes do polinômio $P(x) = x^5 - 34x^3 + 36x^2 + 297x - 540$;

8. Pelo método de Dandelin-Graeffe também é possível determinar as raízes complexas de uma equação polinomial, para isso devem ser empregados alguns conceitos relacionados aos números complexos e equações algébricas em conjunto com a análise das sequências obtidas pelos coeficientes. Dessa forma, determinar as raízes reais e complexas da equação $x^4 + x^3 - 5x^2 + 201x - 406 = 0$;

9. Considere o polinômio $P(x) = x^6 - 17x^5 + 105x^4 - 325x^3 + 614x^2 - 198x - 1260$, determinar as soluções da equação $P(x) = 0$;

10. Utilizando apenas uma equação polinomial, determinar uma aproximação para os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ e $\sqrt{13}$ com 4 casas decimais significativas;

11. Sabendo que a equação $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$ possui apenas três raízes reais. Elabore um roteiro, para resolução de equações de 7º grau contendo as expressões recursivas para os coeficientes e aplique na equação dada. Em seguida, obtenha todas as suas raízes.

12. Tendo como base o método de Dandelin-Graeffe, elabore uma planilha para determinar todas as raízes da equação $2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1 = 0$, com 5 casas significativas corretas.

Capítulo 7

Aplicações dos métodos iterativos na resolução de problemas

Atividades através de problemas visando trabalhar com a contextualização aplicando os métodos abordados ao longo do trabalho.

7.1 Problemas

7.1.1 Aplicação em Finanças

Como já citado anteriormente, os PCNEM prezam pelas habilidades que o aluno deve desenvolver de tal forma que em sua vida profissional ou pessoal utilize-as de forma consciente e coerente.

Exemplo 7.1. *O preço à vista (PV) de um imóvel é R\$ 312.000,00, mas pode ser financiado com uma entrada (E) de R\$ 91.051,90 e 12 (P) prestações mensais (PM) de R\$ 26.000,00. Determinar os juros (j) sabendo que:*

$$\frac{1-(1+j)^{-P}}{j} = \frac{PV-E}{PM}$$

Quais serão os juros se o plano de pagamento for uma entrada de R\$ 112.000,00 e 18 prestações mensais de R\$ 20.000,00? Analise a melhor opção de finaciamento.

Para que o consumidor possa comparar qual plano de financiamento é mais vantajoso é necessário determinar as taxas de juros que estão sendo aplicadas nas propostas apresentadas. Fazendo $x = 1 + j$ e $k = \frac{PV-E}{PM}$, temos:

$$\frac{1-x^{-P}}{x-1} = k$$

Multiplicando por x^P,

$$\frac{x^P - 1}{x - 1} = kx^P$$

$$f(x) = kx^{P+1} - (k+1)x^P + 1 = 0.$$

Então, para determinar a taxa de juros cobrada, basta encontrar a raiz da equação acima.

1ª Situação: Determinando k e substituindo em $f(x)$,

$$k = \frac{PV - E}{PM} \Rightarrow k = \frac{312.000,00 - 91.051,90}{26.000,00} \approx 8,498.$$

Então,

$$f(x) = 8,498x^{13} - 9,498x^{12} + 1 = 0$$

Sabemos que $x = 1$ é raiz da equação, mas isto implicaria em "zero" de juros o que na verdade não ocorre. Graficamente,

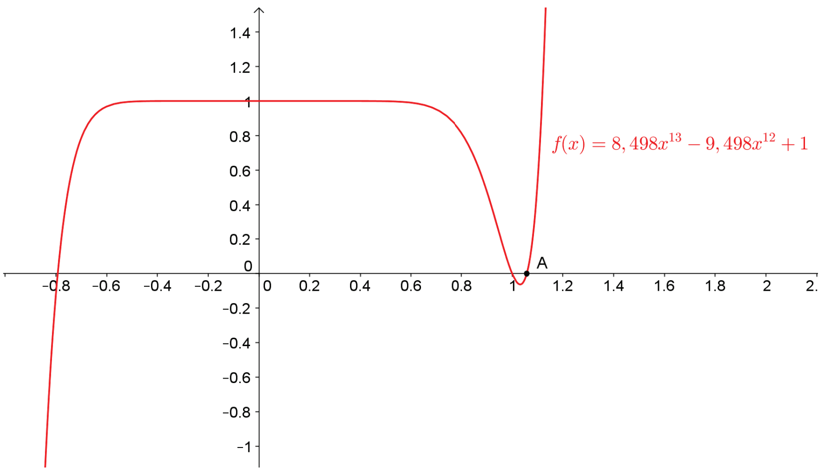

Figura 7.1: Gráfico de $f(x)$

Verificamos que a outra raiz encontra-se no intervalo $[1; 1,2]$. Derivando f temos $f'(x) = 110,474x^{12} - 113,976x^{11}$.

Utilizando o método de Newton e uma aproximação inicial $x_0 = 1,1$ obtemos os valores apresentados na tabela seguinte.

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	$1,100000000000$	$1,075445450277$
1	$1,075445450277$	$1,062336634961$
2	$1,062336634961$	$1,058021954991$
3	$1,058021954991$	$1,057547242609$
4	$1,057547242609$	$1,057541679072$
5	$1,057541679072$	$1,057541678312$

Tabela 7.1: Aproximação inicial $x_0 = 1,1$

Como $x \approx 1,0575$, então, a taxa de juros aplicada é $j \approx 5,75\%$.

2ª Situação: Substituindo os novos dados em $kx^{P+1} - (k+1)x^P + 1 = 0$, obtém-se:

$$g(x) = 10x^{19} - 11x^{18} + 1 = 0$$

Novamente, $x = 1$ é raiz da equação, mas não é solução para o problema. Então, graficamente

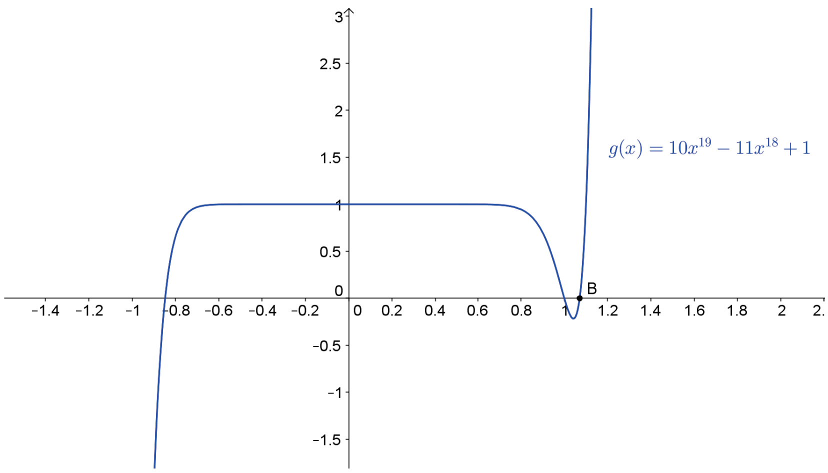

Figura 7.2: Gráfico de $g(x)$

A outra raiz encontra-se também no intervalo $[1; 1,2]$ Derivando g temos $g'(x) = 190x^{12} - 198x^{11}$. Utilizando o método de Newton e a aproximação inicial $x_0 = 1,1$ obtemos os seguintes valores:

n	x_n	$F(x_n) = x_{n+1}$
0	$1,100000000000$	$1,082014121009$
1	$1,082014121009$	$1,073147497629$
2	$1,073147497629$	$1,070945417211$
3	$1,070945417211$	$1,070818014769$
4	$1,070818014769$	$1,070817602349$
5	$1,070817602349$	$1,070817602344$

Tabela 7.2: Aproximação inicial $x_0 = 1,1$

Como $x \approx 1,0708$, então, a taxa de juros aplicada é $j \approx 7,08\%$.

Na primeira situação o valor final do imóvel é de $R\$$ 403.051,90, enquanto na segunda é de $R\$$ 472.000,00. A melhor opção é a que possui a menor taxa de juros e portanto a 1ª opção é a mais favorável ao comprador.

Devemos destacar que nem sempre o menor valor pago é a melhor opção, o que pode ser verificado facilmente criando e investigando outras situações. De posse de recursos computacionais tal tarefa fica mais simples e proporciona ao aluno explorar e sedimentar os conceitos matemáticos.

7.1.2 Aplicação em Engenharia Ambiental

Muitas profissões dependem de conhecimentos matemáticos para representar fenômenos físicos e biológicos, um exemplo desta aplicação encontra-se na concentração de oxigênio em um rio com o despejo de resíduos poluentes. E com o desenvolvimento da indústria e da tecnologia surgem novos problemas, que necessitam de atenção e estudo para serem solucionados.

Através da Modelagem Matemática, que não é o objetivo deste capítulo, o aluno deve perceber a necessidade da utilização do método numérico como sendo uma ferramenta eficiente na resolução do problema.

Para calcular o nível de concentração de oxigênio c, em mg/l, em um rio, em função da distância d, em km, medida a partir do local de descarga dos poluentes, obtém-se a seguinte função:

$$c = 10 - 20(e^{-0,2d} - e^{-0,75d})$$

Exemplo 7.2. *Determinar, usando um método iterativo, a distância para qual o nível de oxigênio desce para o valor* $5mg/l$, *pela primeira vez. Com 5 casas decimais significativas.*

Pelos dados apresentados no enunciado devemos resolver a seguinte equação:

$$5 = 10 - 20(e^{-0,2d} - e^{-0,75d}) \Rightarrow 0 = 5 - 20(e^{-0,2d} - e^{-0,75d})$$

Considerando o método de Newton, basta determinar a derivada da função $f(d) = 5 - 20(e^{-0,2d} - e^{-0,75d})$.

$$f'(d) = 4e^{-0,2d} - 15e^{-0,75d}$$

Utilizando uma planilha com as colunas n, d_n e d_{n+1} temos:

n	d_n	d_{n+1}
0	1,000000000000	0,494227546833
1	0,494227546833	0,596414297669
2	0,596414297669	0,602336552609
3	0,602336552609	0,602355464172
4	0,602355464172	0,602355464364

Tabela 7.3: Aproximação inicial $x_0 = 1$

Assim, a distância pedida é obtida na 4ª iteração e é dada por $d \approx 0,60235km$

7.1.3 Exercícios

1. O pH de soluções diluídas de ácido fraco é calculado pela fórmula:

$$[H_3O^+]^3 + K_a[H_3O^+]^2 - (K_aC_a + K_\omega)[H_3O^+] - K_\omega K_a = 0$$

Onde,

$pH = -\log[H_3O^+]$

K_a: Constante de dissociação do ácido

C_a: Concentração do ácido

K_ω: produto iônico da água

Calcular o pH de uma solução de ácido bórico a $24°C$, sabendo que:

$K_a = 6,5 \cdot 10^{-10}M$

$C_a = 1,0 \cdot 10^{-5}M$

$K_\omega = 1,0 \cdot 10^{-14}M^2$

2. Uma corrente oscilante num circuito elétrico é descrita por:

$$I = 9e^{-t}\,\text{sen}(2\pi t)$$

Com t em segundos. Determinar todos os valores positivos de t para os quais $I = 3,5$;

3. A concentração de uma bactéria poluente num lago é descrita segundo a expressão:
$$C = 70e^{-1,5t} + 2,5e^{-0,075t}$$
Encontrar o tempo para que a concentração seja reduzida para nove;

4. O deslocamento de uma estrutura está definido pela seguinte equação:
$$D = 8e^{-kt} \cdot \cos(\omega t)$$
Onde $k = 0,5$ e $\omega = 3$.

   a. Determinar graficamente uma estimativa inicial do tempo necessário para o deslocamento decrescer para 4;

   b. Usar o método iterativo simples e de Newton para determinar essa raiz.

5. A capacidade calorífica C_p, $(cal \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1})$, da água em função da temperatura $T(K)$ é dada por:
$$C_p(T) = 7,219 + 2,374 \cdot 10^{-3}T + 2,67 \cdot 10^{-7}T^2$$
Com $300 \leq T \leq 1500$. Para sabermos a que temperatura temos uma determinada capacidade calorífica c fazemos:
$$C_p(T) - c = 0$$
Em vista disto, em que temperatura a água tem capacidade calorífica igual a 10 $cal \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$?

Capítulo 8

Métodos numéricos na Educação Básica - Perspectiva dos alunos

A atividade referente ao método iterativo simples, detalhada em 6.2, foi aplicada a alunos de dois grupos bem distintos, o primeiro, discentes do 3º ano do Ensino Médio do CAp-UFRJ[1], em novembro de 2013, cuja trajetória dentro desta instituição foi moldada na resolução de problemas e nos conceitos matemáticos. Vale ressaltar, que este grupo de alunos já se encontravam de férias e foram até o colégio apenas para participar da atividade. O segundo, alunos concluíntes do Ensino Médio no Curso Preparatório Primeira Opção, em janeiro de 2014. Os quais, em sua grande maioria, não dispuseram da mesma metodologia aplicada ao primeiro grupo, em sua formação básica.

Os dados, aqui expostos, foram originados por um questionário de avaliação da atividade respondido pelos alunos após a conclusão da mesma. O questionário encontra-se em 9.

Inicialmente, a pergunta sobre o tipo de instituição em que eles cursaram a maior parte do Ensino Médio, resultou:

[1] O colégio de aplicação da UFRJ é conhecido por desenvolver atividades e projetos que visam a integração entre o Ensino Superior e a Educação Básica, através de estágio supervisionado para os licenciandos, uma grade curricular diferenciada, elaboração de diversificadas práticas pedagógicas e experimentação de variadas estratégias de ensino.

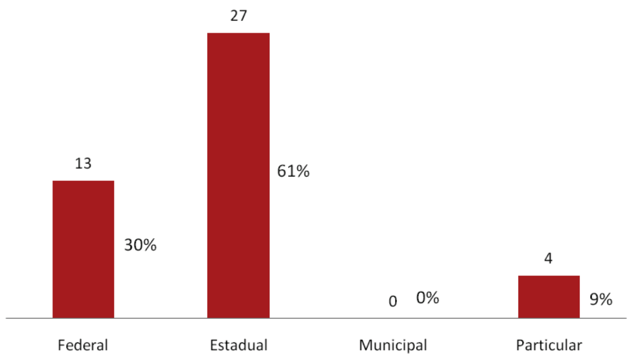

Figura 8.1: Tipo de Instituição

Quando questionados sobre outras formas de resolver uma equação, diferente da manipulação algébrica, obtemos os dados apresentados na tabela abaixo:

	Federal	Estadual	Particular
Sim	2	0	0
Não	11	27	4

Tabela 8.1: Resolução de equação diferente de manipulação algébrica

Vemos que apenas 5% disseram conhecer outras formas e estes encontram-se no grupo de alunos do CAp-UFRJ e 95% desconheciam outros processos. Estes dados mostram a necessidade de reformulação da prática docente, de modo a privilegiar métodos que permitam ao educando ter consciência dos conceitos matemáticos envolvidos no processo de resolução de equações e não limitar-se a aplicar fórmulas, o que mostra uma limitação dos nossos modelos atuais de ensino.

Sobre estudar sequências diferentes de PA's e PG's, temos:

	Federal	Estadual	Particular
Sim	13	1	0
Não	0	26	4

Tabela 8.2: Conhecem sequências diferentes de PA's e PG's

Outra informação importante que podemos extrair destes dados, encontra-se na metodologia que foi aplicada aos alunos ao longo do Ensino Médio, pois 32% conhecem outros tipos de sequências numéricas, sendo todos do CAp-UFRJ e apenas um de escola estadual, enquanto os demais 68%, não.

Ao analisar as respostas ocorreu um dado interessante, 100% dos participantes apontaram o gráfico das funções associadas ao método, como a principal ferramenta que auxiliou na visualização do comportamento da sequência. Como pode ser destacado no trecho do relatório da aluna C.:

> *"A análise gráfica foi bem mais fácil de entender (principalmente a parte da tangente, dos pontos atratores e repulsores). A minha maior dificuldade foi no Excel (já que não sei usar direito o programa, e analisar tabelas de números é mais desafiador do que analisar linhas em um gráfico)."*

Quando questionados sobre a utilização dos recursos tecnológicos, o uso da planilha foi um dos obstáculos que os alunos enfrentaram, pois apesar de ser um software comum, não tem seu potencial como recurso didático explorado, caracterizando uma deficiência na formação do aluno como cidadão, necessitando que sejam repensadas as práticas pedagógicas, tendo em vista valorizar as múltiplas competências a serem desenvolvidas nos educandos.

Tal dificuldade pode ser destacada no relatório do aluno I.:

> *"Uma das dificuldades para o desempenho da atividade foi a minha falta de conhecimento sobre o uso do excel."*

E no relatório da aluna Y.:

> *"...trabalhar com o excel foi complicado, uma vez que não tenho prática."*

Quando perguntados sobre que conceitos foram percebidos no método iterativo simples, obtém-se o seguinte resultado:

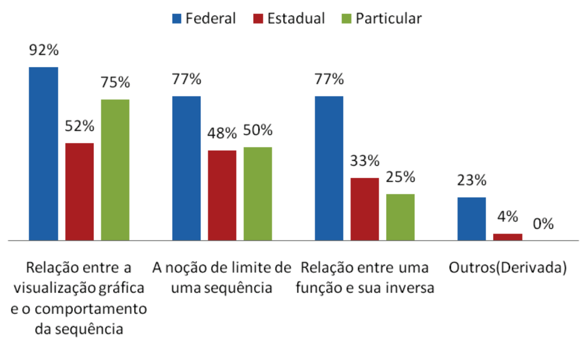

Figura 8.2: Conceitos percebidos no Método Iterativo Simples

A percepção dos alunos com formação na esfera federal foi superior aos demais em todos os conceitos apresentados, sendo citados também em "outros" a noção da derivada, pelas retas tangentes. Que pressupõe a importância da abordagem dos conteúdos de forma mais analítica, característica predominante no primeiro grupo.

Sobre a justificativa para a convergência da sequência, ou seja, a interpretação geométrica para a convergência e a definição de ponto fixo atrator e repulsor, temos o gráfico seguinte:

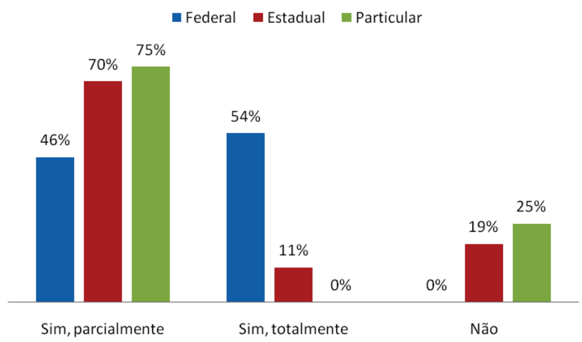

Figura 8.3: Compreensão da convergência da sequência

A maioria dos alunos de colégios estaduais, aproximadamente 70%, compreenderam parcialmente a justificativa. O que supõe uma possibilidade de melhoria da qualidade do ensino de Matemática, através de atividades que relacionem conteúdos, aliadas aos recursos tecnológicos.

Os alunos foram questionados, também, sobre a maior dificuldade para aplicação do método, observando o gráfico abaixo:

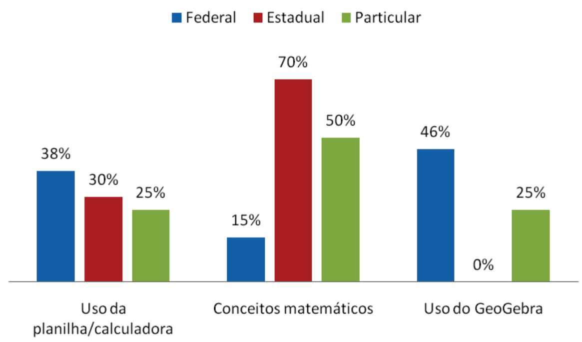

Figura 8.4: Maior dificuldade para aplicação do método

Para os alunos do CAp-UFRJ a maior dificuldade foi o uso das tecnologias em oposição aos alunos das escolas estaduais, enquanto os que vieram da escola particular ficaram divididos entre os conceitos matemáticos e o uso dos programas.

Sobre, qual foi o maior facilitador para a realização da atividade, foram apontados: Para os alunos de escolas estaduais e particulares o que mais faci-

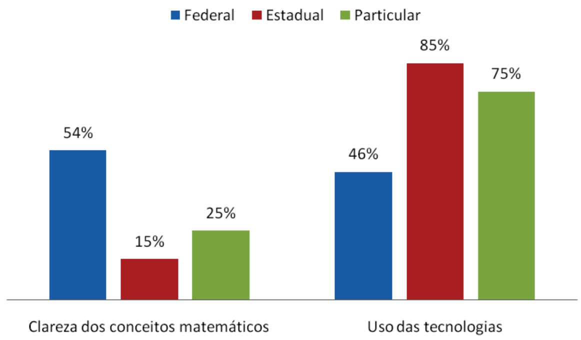

Figura 8.5: Maior facilitador para realização da atividade

litou a aplicação da atividade foram a utilização dos recursos computacionais, enquanto o outro grupo ficou dividido entre o uso dos recursos e os conceitos matemáticos.

Por fim, foi solicitado que atribuissem uma nota de zero a cinco sobre a importância do método na resolução das equações apresentadas, no Ensino Médio. Sendo zero, sem importância e cinco, muito importante. Temos:

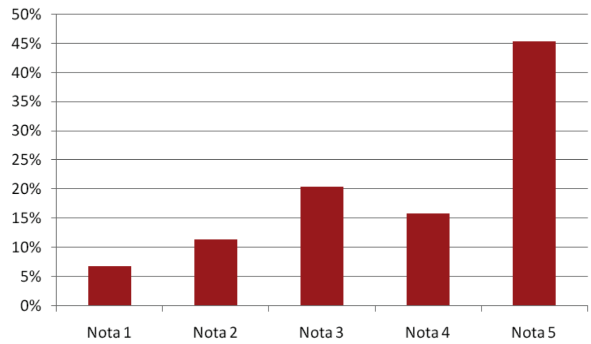

Figura 8.6: Nota atribuída pelos alunos à importância do método para o Ensino Médio

Vemos que, aproximadamente, 80% dos alunos sinalizaram importante o uso do método iterativo como uma ferramenta eficaz na resolução de equações, que inicialmente, para eles não tinham solução.

Capítulo 9

Considerações finais

Diante de tudo o que foi exposto neste trabalho, a pesquisa com os professores mostrou a necessidade de reformulação dos cursos de Licenciatura em Matemática e dos conteúdos de Ensimo Médio. Pois, muitos professores desconhecem os métodos iterativos e pudemos comprovar com a aplicação da atividade tratar-se de um assunto que possui um grande potencial, que permite integrar álgebra, geometria e recursos computacionais, mas não explorado neste nível de ensino.

São muitas as dificuldades em realizar as atividades sejam elas por falta de recursos, por apresentar resistência dos alunos, dos professores e até mesmo do grupo escolar, mas cabe a nós, professores, buscar meios para senão resolver, ao menos, contornar tais dificuldades. E cada vez mais apresentar propostas que possam ser amplamente debatidas e divulgadas em prol de uma educação pública e de qualidade.

Independente dos grupos, ambos apresentaram uma resposta positiva quanto a sua receptividade e aceitação, o que contribuiu de modo substancial para confirmar a importância do tema na Educação Básica e mostrar que uma metodologia diferenciada como a do CAp-UFRJ faz diferença no crescimento pessoal e intelectual do discente. Mas, não é fator determinante para que isso ocorra, pois mesmo sem este critério a longo prazo, os alunos de escolas estaduais e particulares apresentaram resultados satisfatórios mediante uma abordagem conceitual e integrada. Neste sentido, os professores e a comunidade escolar devem revisar suas práticas de modo a tornar o processo de ensino-aprendizagem mais eficiente e de acordo com a realidade de cada grupo.

A apresentação dos métodos iterativos como ferramentas eficientes na resolução de equações e sua abordagem por meio de sequências numéricas, proporcionou aos alunos um novo olhar sobre dois temas principais: as sequências numéricas de forma mais ampla, bem diferente do que é praticado atualmente, restrito a manipulação de fórmulas em progressões aritméticas e geométricas; e a resolução de equações, antes limitadas a casos isolados, acrescentado consideravelmente a quantidade de equações que podem ser resolvidas com aplicação dos métodos iterativos expostos.

Sob a ótica da prática pedagógica, devemos aprofundar os debates acerca do currículo de Matemática e materiais que possam inserir gradativamente está proposta na Educação Básica. Pois, priorizar soluções algébricas não condiz com o mundo moderno, sendo este trabalho um precursor da discussão e um material didático inicial ao desenvolvimento desta proposta.

A partir dos dados apresentados, o método iterativo simples é uma ferramenta útil e foi adaptada à Educação Básica de maneira satisfatória. Proporcionando ao aluno uma relação entre conceitos matemáticos, que embora sejam trabalhados de forma isolada, aqui mostram-se interligados e dependentes um do outro. A questão da visualização e da experimentação são outros aspectos positivos para inserção de tais atividades, pois encontram-se em consonância com os PCNEM e a utilização dos recursos computacionais.

> *"Quando o aprendizado das Ciências e da Matemática, além de promover competências como o domínio de conceitos e a capacidade de utilizar fórmulas, pretende desenvolver atitudes e valores, através de atividades dos educandos, como discussões, leituras, observações, experimentações e projetos, toda a escola deve ter uma nova postura metodológica difícil de implementar, pois exige a alteração de hábitos de ensino há muito consolidados".*

Embora as atividades sobre os métodos de Newton e Dandelin-Graeffe não tenham sido aplicadas aos alunos partilham dos mesmos objetivos. E desse modo são propostas viáveis por possuírem as mesmas características focadas nos conceitos matemáticos e principalmente na relação com o estudo de sequências.

O método de Newton como citado anteriormente necessita da derivada da função, mas proporciona ao educando do Ensino Médio um primeiro contato com o cálculo diferencial, mesmo que os objetivos não estejam centrados nos conteúdos da graduação. Para isto, temos: a interpretação geométrica da derivada, pelas retas tangentes à curva da função e o limite de sequências, pela noção de convergência. Consolidando conceitos adquiridos durante a Educação Básica através de uma linguagem mais simples e acessível.

Quanto ao método de Dandelin-Graeffe, que se utiliza da quadratura das raízes, poder determinar as raízes de uma equação polinomial de grau ≥ 4 proporciona ao educando uma ferramenta eficiente e um processo que pode ser generalizado para equações polinomiais em geral, visto que não existe como determinar tais raízes por processos puramente algébricos, exceto em alguns poucos casos particulares.

Resolver algebricamente uma equação para maioria dos alunos do Ensino Médio é a única forma conhecida e muitos professores desconhecem os métodos iterativos. A introdução destes métodos numéricos amplia de forma substancial a perspectiva dos alunos sobre o que significa fazer Matemática e dos professores sobre como utilizar, no processo pedagógico, as novas tecnologias a seu favor. Sendo assim, acreditamos que o potencial do tema explorado proporciona verdadeiras transformações no pensamento de alunos e professores.

Referências Bibliográficas

[1] Araújo, A. L. M. *Análise Numérica - Engenharias Mecânica e de Materiais*, F.C.T.U.C. 2002, 2º capitulo, Disponível em: http://www.uc.pt/fctuc/dmat. Acesso em: fev 2014.

[2] ÁVILA, G. *Análise Matemática para licenciatura*, Edgard Blücher, São Paulo, 2002.

[3] BARBOSA, R. M. *Cálculo Numérico: Cálculos aproximados* - Coleção de Matemática Aplicada - V.3, Livraria Nobel, São Paulo, 1975.

[4] BARROSO, L. C. et all *Cálculo Numérico com aplicações*, Harbra, São Paulo, 1987.

[5] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*, Ministério da Educação - Secretaria da Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2000.

[6] CHERKASOVA, M. P. *Collected problems in numerical methods*, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen The Netherlands, German, 1972.

[7] COURANT, R. e ROBBINS, H. *O que é Matemática?*, Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2000.

[8] CRONVICH, L. L. *A American Mathematical Monthly* - V.46, Nº 4, Abril 1939, pp. 185-190, Disponível em: http://www.jstor.org. Acesso em: out 2013.

[9] CAMPOS, FREDERICO F. *Algoritmos Numéricos*, 2. ed. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2007.

[10] GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências*, Livraria da Física, São Paulo, 2009.

[11] GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*, Livraria da Física, São Paulo, 2007.

[12] HEFEZ, A. e VILLELA, M. L. T. *Polinômios e Equações Algébricas* - Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[13] HUTCHINSON, C. A. *A American Mathematical Monthly* - V.42, Nº 3, Março 1935, pp. 149-161, Disponível em: http://www.jstor.org. Acesso em: out 2013.

[14] LIMA, E. L. *Análise Real - Volume 1* - Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[15] MALAJOVICH, G. e ZUBELLI, J.P. *On the Geometry of Graeffe Iteration*, Journal of Complexity, Volume 17, Issue 3, setembro 2001, Pág. 541-573, Disponível em: http://arxiv.org/pdf/math/9908149v1.pdf. Acesso em: mar 2014.

[16] MALAJOVICH, G. e ZUBELLI, J.P. *Tangent Graeffe Iteration*, Numerische Mathematik, Volume 89, Número 4, outubro de 2001, Disponível em: http://arxiv.org/pdf/math/9908150v1.pdf. Acesso em: mar 2014.

[17] OCDE *Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico*, Disponível em: http://www.oecd.org. Acesso em: dez 2013.

[18] SANTOS, J. D. dos e SILVA, Z. C. da *Métodos Numéricos* - Ed. Universitária da UFPE, Recife, 2006.

[19] SEBASTIÃO E SILVA, J. *Compêndio de Matemática* - Ed. GEP, Lisboa, 1975.

[20] VIANA, M. *Noções de Cálculo* - Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[21] WHITTAKER, E. T. e ROBINSON, G. *The Calculus of Observations*, Blackie & Son, London, 1940.

Anexo A

Pesquisa sobre métodos numéricos

1. Você leciona ou lecionou em qual(is) níveis?

   ( ) Ensino Fundamental
   ( ) Ensino Médio
   ( ) Ensino Superior

2. Onde você desempenha suas atividades docentes?

   ( ) Rede Pública
   ( ) Rede Privada
   ( ) Ambas

3. Você já trabalha ou trabalhou com o conteúdo de Sequências de modo mais abrangente, isto é, além de PA's e PG's?

   ( ) Sim
   ( ) Não

4. Quanto a ideia de Limite (Convergência de Sequências), você já abordou este assunto?

   ( ) Não, pois não é compatível com a educação básica
   ( ) Não, porque não analiso o comportamento de Sequências
   ( ) Sim, de forma superficial
   ( ) Sim, dedicando o tempo necessário para consolidar a ideia de Limite
   ( ) Outros

5. Em seu curso de graduação foram abordados Métodos Numéricos para a resolução de equações?

   ( ) Sim
   ( ) Não

6. Você conhece algum modo de trabalhar o conteúdo de Sequências e Resolução de Equações utilizando tecnologias como: planilhas, calculadoras, softwares, etc?

   ( ) Sim
   ( ) Não

   Se sim,

7. Qual(is)?

( ) Planilhas
( ) Calculadoras
( ) Software de Geometria Dinâmica
( ) Software Plotador de Gráficos
( ) Outros

Se não,

8. Por qual(is) motivo(s)?

( ) Não tenho interesse em utilizar tecnologias
( ) Não tenho interesse, pois não há infraestrutura para desenvolver este tipo de trabalho onde leciono
( ) Não percebo interesse por parte dos alunos
( ) Outros

9. Você já utilizou Métodos Numéricos para estimar valores ou resolver equações com seus alunos?

( ) Sim
( ) Não

Se sim,

10. Qual(is)?

Se não,

11. Por qual(is) motivo(s)?

( ) Não tive oportunidade
( ) Não conheço muito sobre Métodos Numéricos
( ) Outros

12. Você considera que seja possível inserir Métodos Numéricos como outra forma de abordar resolução de equações?

( ) Sim
( ) Não

Se não,

13. Por qual(is) motivo(s)?

( ) É um assunto complexo e os alunos não terão maturidade suficiente para assimilar
( ) Não existe material ou leituras que possam ser utilizadas
( ) Outros

Anexo B

Questionário para avaliação da atividade - Método iterativo simples

1. Você cursa ou cursou a maior parte do En-sino Médio em escola:

   ( ) Federal
   ( ) Estadual
   ( ) Municipal
   ( ) Particular

2. Você conhecia outras formas para resolver uma equação, diferente da manipulação algé-brica?

   ( ) Não
   ( ) Sim, Quais:

3. Você já estudou sequências numéricas de modo mais abrangente, ou seja, além de PA's e PG's?

   ( ) Não
   ( ) Sim

4. Qual a sua opinião quanto a utilização de recursos tecnológicos na resolução de equa-ções?

5. Que conceitos matemáticos foram percebi-dos no método iterativo simples?

   ( ) Relação entre a visualização gráfica e o comportamento da sequência;
   ( ) A noção de limite de uma sequência - con-vergência e divergência;
   ( ) Relação entre uma função e sua inversa
   ( ) Outros, especifique:

6. O gráfico das funções associadas ao méto-do auxiliaram na visualização do comporta-mento da sequência?

   ( ) Sim
   ( ) Não

7. A justificativa para a convergência da se-quência foi compreendida?

   ( ) Sim, parcialmente
   ( ) Sim, totalmente
   ( ) Não

8. Na sua opinião, qual foi a maior dificuldade para aplicação do método?

   ( ) Uso da planilha/calculadora

   ( ) Conceitos matemáticos

   ( ) Uso do GeoGebra

   ( ) Outros, especifique:

9. Na sua opinião, qual foi o maior facilitador para a realização da atividade?

   ( ) Clareza dos conceitos matemáticos

   ( ) Uso das tecnologias

   ( ) Outros, especifique:

10. Numa escala de 0 a 5, como você conside-ra a aplicação deste método na resolução de equações para o Ensino Médio? Justifique. (0-sem importância/5-muito importante)

11. Elabore um relatório apresentando as facilidades e dificuldades encontradas na realização da ativi-dade, destacando os conceitos matemáticos que, na sua opinião, são os mais importantes.