Universidade Estadual de Santa Cruz

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ensino de Geometria por secções

por

Gustavo Souza de Melo †

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Ilhéus - BA

Orientadora: Mariana Pinheiro Gomes da Silva

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes
obtido através da SBM.

Gustavo Souza de Melo

ENSINO DE GEOMETRIA POR SECÇÕES

Ilhéus
2013

Gustavo Souza de Melo

ENSINO DE GEOMETRIA POR SECÇÕES

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof. Dr[a]. Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Universidade Estadual de Santa Cruz

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Ilhéus
2013

M528 Melo, Gustavo Souza de.
Ensino de geometria por secções / Gustavo Souza de Melo. – Ilhéus, BA: UESC, 2013.
76f. : il.

Orientadora: Mariana Pinheiro Gomes da Silva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Material didático. 3. Ensino – Meios auxiliares. I. Título.

CDD 516

Gustavo Souza de Melo

ENSINO DE GEOMETRIA POR SECÇÕES

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 27 de fevereiro de 2013:

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Prof. Drª. Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Orientadora

Fabíolo Moraes Amaral

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Ilhéus - 2013

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado ao grande amigo professor Dr Sergio Mota Alves, uma pessoa que defino como independente, dinâmico e protetor, que se destaca pela sua força de vontade e originalidade.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

Primeiramente a **Deus**, pela vida, por permitir nela encontrar tantas pessoas especiais e por não me deixar abater nos momentos pessoais de extrema dificuldade dos últimos anos. Aos colegas Rodrigo, Leoncio e toda turma do PROFMAT 2011 por eles represetados nos quais em momentos de dificuldades forneceram a parceria para vencermos esta jornada.
À **Capes** pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

RESUMO

O estudo da Geometria deve oferecer aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resoluções de situações-problema, sendo capazes de usar diferentes formas para representar figuras planas e espaciais. Estabelecer fórmulas para cálculos de medidas e, por meios de equações, estabelecer uma relação entre a Geometria e Álgebra. Esse trabalho traz uma proposta de ensino de Geometria por secções de materiais manipuláveis de baixo custo para assegurar que todos os alunos envolvidos possam participar desse processo de maneira ativa, seguindo três pressupostos básicos para a metodologia de ensino: conceitos, práticas textuais e aplicação de conceitos em materiais manipuláveis.

Palavras chave:Geometria, material manipulável, secções, cônicas

ABSTRACT

The study of geometry should create opportunities for students to develop the ability to resolutions of problem situations, being able to use different ways to represent spatial figures and plane figures, establishing formulas for calculations and measurements by means of equations, establish a relationship between the geometry and algebra. This work presents a proposal for teaching geometry by sections of manipulatives low cost to ensure that all students involved can participate in this process actively, following three basic assumptions for the teaching methodology: concepts, practices and textual application of concepts in manipulable material.

keywords: Geometry, manipulatable materials, sections, conics.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

> (...)A educação deve transmitir, de fato, de forma maciça e eficaz, cada vez mais saberes e saber-fazer evolutivos, adaptados à civilização cognitivas, pois são as bases da competência do futuro.(...) [5]

Estimular, orientar e facilitar o desenvolvimento das aptidões dos alunos, não apenas são essas as metas do educador de Matemática mas é uma recomendação fundamental para que se atinjam os objetivos da educação. O educador assumiu assim o papel de orientador das ações entre o conhecimento científico e suas aplicações, para que o educando seja capaz da autossuficiência na sua formação cidadã, cultural e intelectual.

É imposta ao educador a missão da escolha dos conteúdos a serem abordados por importância e relevância à formação continuada do indivíduo, mostrando o conhecimento adquirido ao logo da história do homem para ser aplicado no mundo moderno assim como em futuras descobertas.

O ensino da matemática, nesse olhar, implica em uma prática na sistematização e na orientação de como o indívíduo interage com o mundo, com os elementos que o cercam, nas aplicações de novas tecnologias e novos horizontes. Com uma visão holística da educação, o professor de Matemática deve atentar-se e respeitar os conhecimentos intuitivos que o aluno traz como bagagem cultural e intelectual.

Com a democratização da educação, ofertando esse serviço a grande parte da população, a clientela tornou-se diversificada quanto as suas origens, classes sociais, culturais e econômicas, tornando essa missão complicada, mas não impossível ao educador. Esses desafios fazem com que o profissional busque recursos pedagógicos para a obtenção de seus objetivos aprimorando sua prática de mediação do conhecimento. Essa busca é desafiadora, instigante e renova as forças para uma qualidade melhor da educação.

Mesmo com os esforços políticos nas últimas décadas, fomentação de recursos financeiros, as escolas com a expansão do sistema educacional no Brasil não supriram ainda todas as suas necessidades estruturais. Com o advento do uso tecnológico, eminente na sociedade atual, comunidades escolares ainda são desprovidas de equipamentos modernos como microcomputadores, por exemplo, para a aplicação de metodologias.

A escolha de um recurso educacional não passa apenas pela análise do custo-benefício, mais principalmente se este recurso estará ao alcance de todos os alunos, oferecendo-lhes qualidade, acessibilidade econômica e aplicação do conhecimento.

Quando nos deparamos com dificuldades financeiras na escola é preciso desenvolver recursos pedagógicos e dele tirar o máximo de informações possíveis e ainda permitir que todos os alunos tenham acesso, garantindo aos mesmos a qualidade necessária. Trabalhar com materiais manipuláveis com custos acessíveis a comunidade escolar é de fundamental importância para a aplicabilidade do contexto: *compreensão - aprendizagem- aplicação dos resultados*

Não bastante esses desafios aos educadores de Matemática, surge a necessidade de adequar o currículo de acordo com o ano de ensino, idade e as necessidades do indivíduo, atentando-se ao momento histórico em que este se insere.

A necessidade da unificação do currículo na área de Matemática sofre resistência por parte de um grupo que pede a liberdade e autonomia para decidir o conteúdo que será melhor para seus alunos. No entanto, observa-se que quando os envolvidos no sistema educacional tendem a mudar de localidade aparece a repetição, a superposição e a falta de conteúdos. Estes entraves são constantes com a migração de alunos bem como mudanças de profissionais nas instituições de ensino.

Para minimizar esse transtorno produzido ao educando, são comuns os dirigentes escolares, grupo pedagógico e professores escolherem um currículo mínimo para ser ministrado nas unidades escolares, priorizando tais conteúdos em detrimento de outros essenciais na formação do aluno. No ensino da Matemática, o conteúdo mais sacrificado nos últimos anos, foi dos conceitos de geometria.

Não podendo descartar a importância também dos benefícios das novas tecnologias da informação e comunicação oferecido no processo ensino-aprendizagem, esperamos que esses recursos possam ser trabalhados junto com os recursos de manipulação de materiais concretos tornando tais experiências mais ricas ao crescimento intelectual do educando.

Baseado em um conjunto de três ações para alcançar os objetivos propostos: conceituação, prática contextual e aplicação em materiais manipuláveis, este trabalho foi aplicado em uma escola estadual do interior do estado da Bahia, com um publico alvo composto de alunos do ensino médio, sempre levando-se em consideração a busca equilibrada dessas ações para galgar-se os objetivos.

A plasticina, material manipulável escolhido para ser um recurso pedagógico, se mostrou eficiente na aplicação dos conceitos matemáticos dos poliedros e dos prismas, onde o aluno construiu e formalizou nas práticas contextuais, os conceitos e definições, ajudando-o perceber a diferença dos poliedros convexos dos não convexos, as diagonais de faces e diagonais do poliedros, assuntos estes abordados com êxito. A construção de prismas e o estudos de seus conceitos aparecem no capítulo 4, onde pode ser percebido a influência do recurso pedagógico na aplicação do conteúdos trabalhados.

No capítulo 5, apresentamos como recurso o sabão em barra, elemento usado por meio de secções a construção dos hexaedros regulares, onde se verifica a analise das seções planas formadas pelas seções no cubo. O aluno pode aplicar os conceitos matemáticos para escolher as formas e locais dos cortes, para que o elementos propostos nas práticas textuais pudessem ser verificados.

Com o corte de hexaedros, aparecem naturalmente os sólidos das pirâmides, ainda com o recurso da barra de sabão, no capítulo 6, onde percebe-se as aplicações dos conceitos matemáticos no cálculo do apótema e áreas de pirâmides através do material concreto.

Resgatando um conteúdo matemático muito importante por suas aplicações, verificou-se que a casquinha de biscoito para sorvete apresentou-se como recurso importante para aplicar os conceitos das cônicas. No capítulo 7, este trabalho aborda soluções na aplicação do material concreto para fazer uma representação da elipse.

No capítulo 8, aborda-se o conceito de parábolas e hipérbole. Quando secciondado o cone, a cunha formada pela seção plana pode levar a confudir entre parábola e hipérbole, assim neste capítulo aparecem uma revisão e um complemento para diferir as seções planas com formato de parábola e hipérbole.

A avaliação é importante em qualquer processo, assim o capítulo 9 trazemos uma avaliação detalhada de todo percurso, uma avaliação de cada material empregado neste trabalho, bem como a relação custo benefício. Abordando ainda com relatos dos envolvidos, a importância da aplicação dos conteúdos matemáticos no material manipulável.

Com a certeza de que este trabalho, foi apenas um passo na pesquisa de metodologias para aprimorar o ensino da Matemática que findamos sujerindo no capítulo 10, algumas indagações e algumas respostas possíveis para cada dúvida. Esse trabalho esta direcionado para o educador que se preocupa com a qualidade e equidade dos conceitos matemáticos na sociedade moderna.

CAPÍTULO 2

MOTIVAÇÃO

Nosso objetivo neste capítulo é situar o leitor com a escolha dos materiais manipulavéis, tanto quanto a motivação quanto a fundamentação teórica. Destacando as leis que regem a educação básica brasileira para fundamentar o uso de recursos pedagógicos a fim de que alcançaremos os objetivos educacionais.

2.1 Escolhendo Materiais Manipuláveis

Estudando em grupo para o curso de Geometria no programa de pós graduação PROFMAT, aplicado na Universidade Estadual de Santa Cruz, fomos defrontados com a seguinte situação problema:

> Um cubo de aresta a é seccionado por planos que cortam, cada um, todas as arestas concorrentes em um vértice em um ponto que dista x (para $x < \frac{1}{2}a$) desse vértice. Retirando-se as pirâmides formuladas, obtém-se um poliedro. Descreva esse poliedro e calcule o número de diagonais.[8]

(Situação problema encontrado na coleção do professor de Matemática, volume 2, página 249, SBM).

O grupo, ao tentar resolver tal situação problema, buscou recursos tecnológicos porém não foi satisfatória a visualização do objeto em estudo. Foi então sugerido que fosse feito um modelo concreto para visualizar a resposta elaborada de maneira abstrata e construída com um software matemático. Um dos componentes do grupo de estudo trouxe uma peça de sabão em barra e, por secções, foi construído o objeto e o convencimento de todos foi feito pela visualização do sólido construído.

Essa forma de aprendizagem que nos foi propiciada de alguma maneira poderia ser levada aos alunos da educação básica? Assim começou o questionamento desse grupo de alunos/professores que passaram a idealizar situações de utilização desse método na prática pedagógica.

Dessa forma surgiram os questionamentos de como poderíamos tornar o ensino da matemática no campo da geometria mais dinâmico e eficiente ou pelo menos mais prazeroso para o educando. Nessa perspectiva surgiu o pensamento em aplicar materiais manipuláveis nas aulas de matemática em especial quando se tratar de conteúdos geométricos.

Mas para evitar erros e minimizar possíveis problemas no percurso das pesquisas e das atividades aplicadas, foram feitas algumas afirmações por esse grupo no qual se destacaram as seguintes.

O trabalho com materiais manipuláveis não pode se tornar apenas uma transposição didática meramente qualitativa e sim de uma experiência que permita o educando estabelecer relações de semelhanças e diferenças, verificando regularidades e padrões, estabelecendo um elo entre os diferentes saberes disponíveis na sociedade moderna além de compreender e formular uma comunicação com as devidas representações simbólicas matemáticas.

A escolha do recurso didático a ser trabalhado na educação matemática requer um sério planejamento pois deve priorizar os objetivos a serem alcançados, a disponibilidade desses recursos, a adequação ao conteúdo, a coerência com a qual se pretende alcançar os objetivos pedagogicamente, se oferecem riscos a quem os manipula entre outras observações.

E essas observações foram muito bem avaliadas por que busca-se recursos na educação matemática de materiais manipuláveis para seccionar sólidos geométricos. E, quando se pretende seccionar algo, é lógico que tem que se pensar em materiais cortantes, os quais requerem um cuidado particular para evitar acidentes físicos.

Porém notou-se que estes desafios são pequenos frente o desejo do trabalho com materiais concretos na educação matemática em sala de aula. A justificativa para isso é simples, não é somente o conteúdo que motiva o educando, mas basicamente como o educador irá trabalhar tais conteúdos.

O educador deve escolher, na medida do possível, atividades que possam articular as diferentes áreas do conhecimento para buscar o estímulos das funções mentais (como percepção, memória, atenção e imaginação) e ainda integrar os conceitos de espaço, tempo e generalizações, entre outros. Com isso a manipulação de materiais concretos obteve um grande destaque como recurso para o trabalho em sala de aula.

Entende-se que no processo de ensino-aprendizagem o educador deve fornecer situações em que se possibilitem que o educando estimule a curiosidade, as indagações sobre novos conhecimentos ou avanços aos conhecimentos já outrora adquiridos e consolidar os conceitos, levando-se em consideração que o conhecimento está intimamente ligado a forma de apresentação das atividades propostas pelo professor.

Para escolher a atividade é importante fazer uma pequena leitura da estrutura cérebral. Observamos que o conhecimento é produto de relações internas cerebrais e a aprendizagem é subjetiva e relacional. Não é algo que se define de fora para dentro, mas de dentro para fora. O que não é aceito pelo cérebro é facilmente descartado. Quanto mais relações se estabelecem entre informações novas e registros cerebrais armazenados maiores são as consequências da aprendizagem.

Assim, em qualquer situação de aprendizagem, é necessário que o educador considere o seu público e é de suma importância que o educador esteja atento as características do educando. Para criar estratégias de atividades pedagógicas tem que se levar em conta o objetivo de formar seres críticos e autônomos, capazes de distinguir conhecimentos historicamente construídos de conhecimentos imutáveis e acabados, perceber que o conhecimento é contínuo e que as possibilidades de novas descobertas estão sempre abertas.

O que se quer é permitir uma sala rica em elementos manipuláveis para que o educando possa observar, construir e dirigir seus conhecimentos a todo instante.

E porque usar o material concreto? A matemática foi desenvolvida em primeiro lugar e acima de tudo para ajudar a entender o ambiente físico, matemática deve ser ensinada e difundida por ser uma ferramenta fundamental, para resolver as primeiras necessidades diárias que se manifestam no comércio, em atividades que exigem quantificar o tempo que se passa, a distância, verificar capacidade líquida, de peso, para descrever um objeto, transformação ou posição no espaço, uma linha, uma forma. E pensa-se que os materiais concretos proporcionam ao educando experiências táteis, visíveis e associativas para ajudar a entender conceitos abstratos e validar ou compreender as conclusões mentais por eles elaborados.

2.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é encontrar ferramentas pedagógicas para fazer uma transposição didática de elementos de geometria na perspectiva de que se possa visualizar e construir o conhecimento sobre formas geométricas, curvas e planos, equações e conceitos geométricos e que essa uma ferramenta pedagógica tenha um caráter de confluência entre a construção e visualização de modelos matemáticos e seus conceitos formais.

Assim, deve-se sempre ter como foco principal fornecer, orientar e valorizar os diversos tipos de conhecimento quantitativos e qualitativos contextualizando a relação teórica e prática, valorizando a interdisciplinaridade, respeitando os conceitos que os alunos observam na realidade e principalmente fomentar um embate de visões e opiniões para que se construa conhecimento de caráter científico sobre o contexto por eles já elaborados.

2.2.1 Pressupostos teóricos

A Lei N° 9394/96, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, no artigo 21, compõe a educação escolar em dois níveis: Educação Superior e Educação Básica, formada pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.
O artigo 32 trata dos objetivos fundamentais da Educação Básica com as seguintes finalidades:

- I - o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
- II - a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
- III - o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores;
- IV -o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

Destacamos também como é redigido o artigo desta lei em que trata dos objetivos do Ensino Médio:
Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos,

terá como finalidades:

- I- a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
- II- a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
- III- o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- IV- a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Ainda destacamos o seguinte artigo:
Art. 36. O currículo do ensino médio observará o disposto na Seção I deste Capítulo e as seguintes diretrizes:

- I - destacará a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura; a língua portuguesa como instrumento de comunicação, acesso ao conhecimento e exercício da cidadania;
- II - adotará metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes;
- III - será incluída uma língua estrangeira moderna, como disciplina obrigatória, escolhida pela comunidade escolar, e ma segunda, em caráter optativo, dentro das disponibilidades da instituição;
- IV – serão incluídas a Filosofia e a Sociologia como disciplinas obrigatórias em todas as séries do ensino médio

Esse trabalho busca recursos pedagógicos eficientes para proporcionar essas concepções para o ensino da Matemática aos alunos da modalidade de ensino fundamental e ensino médio quando trabalhado com o conteúdo de geometria. Atentando para essas fundamentações regulamentadoras da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

2.2.2 A Matemática no Ensino Médio

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio os conhecimentos de Matemática devem ser trabalhados para garantir um valor formativo, no qual o aluno desenvolva a capacidade de formular questões, estabelecer hipóteses, apresentar exemplos e contra-exemplos, verificando se a situação problema tem ou não solução, criar modelos abstratos e relacioná-los com modelos concretos, valorizando o conhecimento matemático para resolução de problemas de aplicação ou meramente para a manipulação teórica.

Destaca-se ainda que o estudo de Geometria deve possibilitar ao educando a possibilidade de resolução de situações-problemas encontradas no quotidiano, além de trabalhar com as diferentes formas e figuras planas e espaciais, tanto abstratamente quanto as encontradas no ambiente físico.

As atividades propostas devem proporcionar a consolidação dos conceitos, tanto os já aprendidos nas etapas anteriores como as novas descobertas, alem de possibilitarem relacionar os estudos das propriedades geométricas com equações, fazendo um elo entre Geometria e Álgebra.

Atenta-se que para que a articulação entre Álgebra e Geometria tenha significado é fundamental usar recursos para o entendimento de equações via formas geométricas, e o entendimento de formas geométricas via a abstração e as equações.

Deve o aluno nessa fase, desenvolver o propósito e a lógica das investigações nos temas abordados no conteúdo de Matemática e construir um conhecimento significativo é uma meta do ensino de matemática. Os alunos devem ainda desenvolver o exercício da crítica nas discussões dos resultados, arguir soluções convincentes com base em teoremas e definições.

Para o pesquisador Elon Lages Lima a Matemática é uma linguagem precisa e geral, que exprime princípios científicos, é desafiadora em soluções de problemas lúdicos entre outras aplicações, instrumental em suas aplicações em simples problemas cotidianas, como em complexos sistemas tecnológicos e na sua forma de formulação de teorias de modelos abstratos e situações concretas.

Com o pensamento de colocar o aluno como ator principal no processo de ensino da matemática, o educador se põe no papel de mediador, gerador de situações que propiciem o aluno formular conjecturas, concepções e construir seu próprio conhecimento matemático, com uma arte entre as conexões em suas diversas teorias.

2.3 Objetivos específicos

Ao pensarmos no ensino de matemática compartilhamos com a ideia da existência de três componentes para a formação de um ser crítico, capaz de intervir de maneira correta nas situações e problemas encontrados pelo indíviduo no âmbito social, que são: *Conceituação, Prática contextual* e *Aplicações.* Esses três componentes quando trabalhados de forma correta com o educando, permitem que os objetivos possam ser alcançados na prática docente.

- Conceituação: Formulação das definições, observação as proposições, lemas e corolários, o raciocínio dedutivo, formulação de hipótese e suas conclusões, o elo entre os diferentes conceitos, a leitura das diferentes formas e termos.
- Prática contextual: Trabalhar com expressões algébricas e expressões numéricas, aplicar fórmulas e construções geométricas elementares. Desenvolver atividades de maneira algébrica pela memorização.
- Aplicação: A aplicação das noções e teorias para obtenção de resultados, concluir e fazer previsões em situações cotidianas, relacionar os conhecimentos matemáticos com outras áreas do conhecimento. Fazer corretamente o uso de materiais manipulavéis. Ser capaz de buscar novos desafios.

Assim priorizamos esse trabalho com o objetivo específico de trazer uma proposta pedagógica capaz de interagir com o educando num trabalho equilibrando esses três componentes afim de que ele desperte o interrese e desenvolva a sua capacidade de investigação se tornando autodidata.
Para tanto temos os seguintes objetivos específicos:

- Conceituar de maneira precisa as formas geométricas.
- Fazer demonstrações de teoremas que serão usados nas aplicações.
- Produzir de forma coesa elementos e conceitos algébricos nas equações que representam volume, gráficos e razões entre grandezas.
- Formalizar com expressões numéricas as representações de comprimento, área e volume.
- Usar as secções de sólidos geométricos como aplicações dos conhecimentos adquiridos em sala de aula.

- Instigar ao educando visões sobre descobertas de outros conceitos matemáticos, relacionados à associação direta entre o conteúdo e o material manipulado.

2.4 Metodologia

Ao final do século XX a comissão internacional sobre a educação, presidida por Jacques Delors, produziu um relatório para UNESCO[1] e o publicou em forma de livro intitulado[2] *Educação: um tesouro a descobrir*, afirmando que educadores são desafiados buscar atividades pedagógicas para seguir princípios para a educação básica, destacando-se os quatro pilares da educação:

- **Aprender a conhecer**: o educando deve ser estimulado a buscar conhecimentos necessários para sua formação, onde possa beneficiar-se das oportunidades oferecidas pelo processo educativo.
- **Aprender a fazer**: fazer experiências no âmbito laboral ou social, para numa qualificação profissional ser apto a enfrentar as adversidades encontradas e superá-las.
- **Aprender a viver juntos**: construir o respeito pela diferença que o outro traga, sendo capaz de realizar trabalhos comuns com a ideologia do respeito pelo o próximo e pela formação da paz e compreensão mútua.
- **Aprender a ser**: para melhor desenvolver sua estima, sua capacidade de autonomia, suas responsabilidades, potencializando o máximo seus raciocínios, sentidos éticos e aptidões para a comunicação.

Essa perspectiva de privilegiar a educação como o todo deve ser uma preocupação de qualquer trabalho pedagógico, sabe-se que isso não é, e não pode se resumir, a uma disciplina ou trabalho específico, mas um esforço coletivo deve ser feito para que os trilhos escolares do aluno tenham essas concepções.

2.4.1 Escolha do conteúdo

A geometria euclidiana foi escolhida para este trabalho por apresentar dificuldades de aprendizagem na educação básica, mesmo sendo sabido que quando bem conceituado pelo

[1]UNESCO é a sigla para Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura.

[2]Título original: Learning: the treasure within; report to UNESCO of the International Commission on Education for the Twenty-first Century

mediador, está intimamente ligado a boas argumentações lógicas do educando. Permite ainda um despertar das curiosidades históricas, de fazer novas conjecturas e auxiliar na organização de ideias matemáticas.

Os conteúdos abordados nessa proposta foram **poliedros, prismas, pirâmides, hexaedros e cônicas,** relacionando a Álgebra e aos elementos da Geometria espacial.

2.4.2 Público alvo

Os trabalhos foram realizados em uma escola estadual da Bahia de educação básica, com um público de 1945 alunos. A escola está localizada na cidade de Itamaraju distante 755 quilômetros da capital baiana. A cidade tem aproximadamente 63 069 habitantes.(dados do senso 2010 do IBGE[3]).

Pelo fato desse trabalho ser realizado no período de finalização do ano letivo de 2012, numa reunião com professores de Matemática da unidade escolar ficou acertado que eles indicariam quinze alunos do terceiro ano do ensino médio, dos três turnos, sem escolher alunos regulares de matemática do aplicador do projeto.

Por medida do sigilo da identidade dos alunos participantes e professores da unidade escolar, serão nesse trabalho, apresentados por um número escolhido por ordem alfabética assim no trabalho será citados os *Aluno 01, Aluno 02,. . . , Aluno 14, Aluno 15*, e os professores dessa unidade como *Pro A, Pro B, Pro C, . . . Pro G.*

2.4.3 Cronograma

Em novembro de 2012 foram organizadas as atividades de planejamento, levantamento de referenciais teóricos, aquisição de recursos que seriam aplicados e divulgação na comunidade escolar. Em dezembro do mesmo ano, foi realizada a estruturação das atividades pedagógicas, seleção dos participantes, execução e avaliação dos trabalhos pedagógicos, no qual foram aplicados em forma de mini-curso, com duração de seis dias com quatro horas/aula diárias, no período de dezembro de 2012.

Em janeiro e fevereiro de 2013, foram feitas a construção dos relatórios e divulgação dos resultados a comunidade escolar e a comunidade acadêmica.

[3]IBGE é a sigla para Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

2.4.4 Recursos

Em dezembro de 2012 a unidade escolar em que o projeto foi aplicado não tinha a disposição um ambiente informatizado ou recursos tecnológicos a serem aplicados como recurso pedagógico. Percebendo a dificuldade que a escola apresentava e diante das necessidades de um estudo com uso de materiais manipuláveis com baixo custo, tanto pela necessidade local como pela necessidade de futuras aplicações em atividades com os alunos, foram escolhidos como recursos principais os elementos: **plasticina**, **sabão em barra** e **cascas de biscoito para sorvete em forma de cone**.

Plasticina

Plasticina é uma massa de modelar, feita artesanalmente na unidade escolar onde se usa amido de milho, água, bicarbonato de sódio, óleo de soja e corante alimentar e cozida em fogo brando.

Sabão em barra

Foram solicitados dois quilogramas de sabão em barra emprestados do setor de limpeza da escola, as barras de sabão usadas nas atividades foram reutilizadas na limpeza das louças da cantina, as raspas e sobras do sabão também foram reaproveitadas.

Casca para sorvete

As cascas para sorvete de biscoito foram adquiridas em uma loja de artefatos industrializados para estes fins. As casquinhas de biscoitos para sorvetes em forma de cone apresentaram um custo de R$ 0,08 por unidade em dezembro de 2012, foram usadas 45 unidades, uma média de três unidades para cada aluno.

2.4.5 Avaliação

Será avaliado nas aplicações dessas atividades, as atitudes e procedimentos do envolvidos, as formas de investigação e comunicação dos resultados, além de verificar a relação entre conceitos matemáticos e aplicações em situações desafiadoras e de construção, aplicando métodos matemáticos, reconhecendo limites e valorizando potencialidades.

A avaliação estará presente em todo o trabalho usando os mais diversos instrumentos avaliativos, desde aos relatos à correção da manipulação de cada conceito.

CAPÍTULO 3

POLIEDROS

Conjunto convexo

Um conjunto de pontos chama-se convexo se, quaisquer que sejam dois pontos distintos desse conjunto, o segmento que tem esses pontos por extremidades está contido nesse conjunto. Ver Figura(3.1)

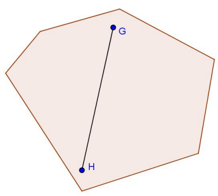


Figura 3.1: *Conjunto convexo*

Conjunto não convexo

Um conjunto não vazio de pontos que não satifaz a condição de conjunto convexo é chamado de não convexo. Exemplo Figura (3.2)

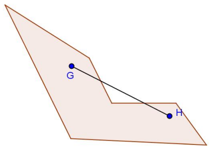


Figura 3.2: *Conjunto não convexo*

3.1 Região Poligonal Convexa

Consideremos um polígono G, contido em um plano α, separando esse plano em dois conjuntos α_1 e α_2 tais que:

I. α_1 é convexo e α_2 não é convexo;

II. $\alpha_1 \cap \ \alpha_2 = \emptyset$

III. $\alpha_1 \ \cup \ \alpha_2 \cup \ G = \alpha$.

Denominaremos de região poligonal convexa o conjunto $G \ \cup \ \alpha_1$ e conjunto não convexo α_2 chamado de região exterior do polígono G. Ver Figura(3.3)

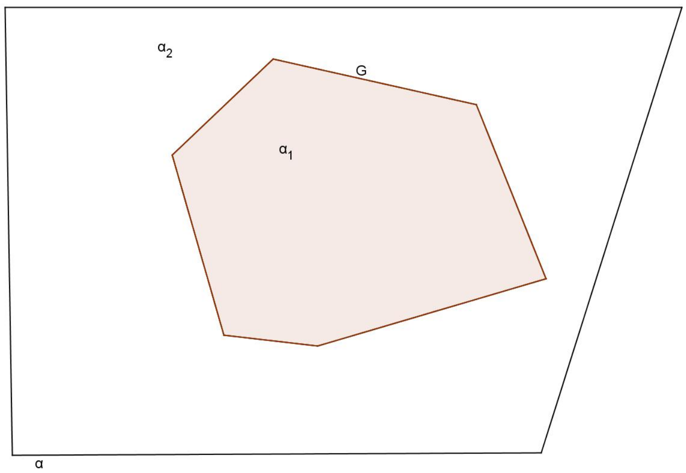


Figura 3.3: *Região poligonal convexa*

3.2 Poliedro

Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um destes polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Cada um destes polígonos chama-se uma face do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado vértice do poliedro.

3.3 Poliedro convexo

Consideremos um conjunto G obtido pela união de n, $n \geq 4$, regiões poligonais convexas tais que:
I- Não há duas regiões poligonais contidas em um mesmo plano;
II- Cada lado de qualquer uma das regiões poligonais é lado de duas e somente duas regiões poligonais do poliedro;
III- O plano que contém qualquer uma dessas regiões deixa as demais em um mesmo semi-espaço.
Visualizemos como exemplo, Figura(3.4), uma caixa de sapatos com a tampa teremos um conjunto G obtido pela união de regiões poligonais, obedecendo as condições (I), (II) e (III).

Figura 3.4: *Caixa de sapato sem rótulo*

Todo conjunto G obtido pela reunião de regiões poligonais, satisfazendo às condições (I), (II) e (III), separa o espaço E em dois conjuntos E^a e E^b tais que :
E^a é convexo e E^b não é convexo; $E^a \cap E^b = \emptyset$; $E^a \cup E^b UG = E$
Chama-se **Poliedro convexo** a reunião do conjunto G com o conjunto convexo E^a, ou seja, $G \cup E^a$
Exemplos, as Figuras (3.5) e (3.6)

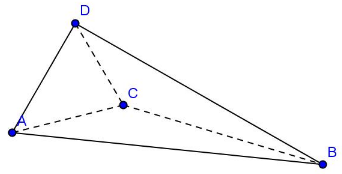


Figura 3.5: *Poliedro convexo*

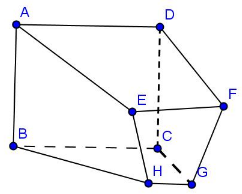


Figura 3.6: *Poliedro convexo*

- As regiões poligonais de G são chamadas de **Face** do poliedro convexo.

- Cada lado de uma face é chamada de **Aresta** do poliedro convexo.

- Cada vértice de uma face qualquer é chamado de **Vértice** do poliedro convexo.

- Cada diagonal do polígono das faces do poliedro convexo é chamada de **Diagonal de face**.

- Cada segmento de reta que os tem como extremos dois vértices que não pertencem a uma mesma face é chamada de **Diagonal do Poliedro**.

- O conjunto G é chamado de **Superfície** do poliedro convexo.

- O conjunto convexo E^a é chamado de **Interior** do poliedro convexo.

- O conjunto não convexo E^b é chamado de **Exterior** do poliedro convexo.

- **Relação de Euler**: Em um poliedro convexo vale a relação $V + F = A + 2$ onde, V é o número de vértices do poliedro, F é o número de faces do poliedro, A é o número de arestas do poliedro.

- **Secção de um poliedro**: É a intersecção de um plano com o poliedro. Se essa intersecção não for um conjunto vazio ou unitário, será gerado uma figura plana.

3.4 Nomenclatura

Os poliedros, convexos ou não, são denominados de acordo ao número de faces que possuem. Exemplo de poliedros.

Número de faces	Nome do poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro

3.5 Prática contextual

Separados em grupos de três componentes, os alunos foram defrontados com atividades para que resolvessem com as técnicas e aplicação dos conceitos apresentados. Estipulado um tempo de dez minutos para que eles pudessem formular suas respostas.

Aos alunos foram feitas as seguintes perguntas:

(a)Considere um poliedro convexo $ABCDEF$ que tem como o polígono da base um triângulo DEF assim como a figura (3.7) quantas arestas possui esse poliedro?

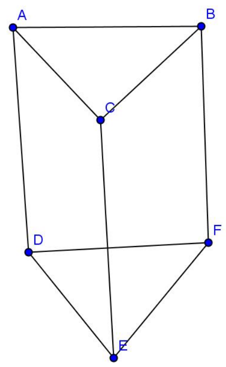


Figura 3.7: *Poliedro convexo*

(b) Um tetraedro, onde todas suas faces são triângulos equiláteros, tem quantos vértices? Quantas arestas? Quantas diagonais de face? Quantas são as diagonais do poliedro?

(c) Existe poliedro convexo que possua o número de vértices igual ao número de arestas? Justifique sua responta em relação a afirmativa.

(d) Num dodecaedro convexo todas suas faces são pentagonais. Quantas arestas possui esse poliedro?

Avaliação

Após dez minutos passados, abriu-se o espaço para que cada grupo pudesse colocar as suas respostas. Entre os cinco grupos formados, quatro acertaram ao quesito (a).
No quesito (b) todos acertaram as três primeiras indagações, mas nenhum grupo acertou a quantidade das diagonais do poliedro.
No quesito (c) todos os grupos acertaram a questão porém um grupo não soube explicar o porquê.
No quesito (d) todos os grupos acertaram.

3.6 Aplicação de materiais manipuláveis

Nessa atividade foram divididos a turma em três grupos de cinco membros, cada um grupo recebeu uma quantidade de plasticina e foram atribuidas as seguintes tarefas e questionamentos, para serem realizados em um tempo de vinte e cinco minutos.

(a) Faça com a massa plasticina, um poliedro convexo e um outro poliedro não convexo. Use uma secção para mostrar que o poliedro não é convexo.

(b) Faça uma marcação no poliedro que você construiu para mostrar as diagonais da face.

(c) Com uma secção tente mostrar uma diagonal do poliedro.

Avaliação

No decorrer das atividades foi percebido que todos os alunos estavam envolvidos no processo de construção dos sólidos com a plasticina, onde ainda cada um ao fazer o seu sólido ajudava na construção dos sólidos dos demais colegas do grupo. Cada membro tentava colocar suas ideias para atingir os objetivos dos questionamentos. Todos os grupos conseguiram construir vários poliedros, tanto o convexo quanto o não convexo.

Todos os grupos escolheram um poliedro e mostraram com riscos as diagonais de face.

Um grupo construiu um poliedro que não possuia diagonal, assim voltamos ao quesito da atividade de manipulação para responder a questão de quantas diagonais tem o tetraedro com as faces triangulares. Os demais escolheram um prisma para mostrar a diagonal do poliedro.

Terminado as atividades os alunos tiveram um tempo de cinco minutos para que fizessem uma autoavaliação e desse processo foram coletados alguns depoimentos dos alunos:

- *aluno 03* : *O fato de trabalhar com a massinha, mostrou com clareza as diagonais da face.*
- *aluno 07* : *Adorei trabalhar com essa massinha, eu fiz um poligono não convexo e ainda pude explicar com uma folha de papel o motivo dele não ser convexo.*
- *aluno 12* : *Cortei uma diagonal do poliedro e ainda consegui visualizar como medir seu comprimento.*
- *Aluno 13*: *Gostei da atividade, pela primeira vez consegui captar algo de geometria espacial.*

3.7 Registro fotográfico

Na Figura (3.8) o aluno prepara uma quantidade de plasticina para fazer as secções e construir um poliedro, nesse processo de manipulação o aluno constrói mentalmente uma ideia de como serão feito os cortes para construir o sólido solicitado. Figura (3.9) mostra o aluno fazendo as secções na massa de plasticina para contruir o poliedro. Figura (3.10) o aluno mostra por meio de uma representação de um plano, uma folha de papel, que uma secção numa face do poliedro divide o sólido em dois semi-espaços. Figura (3.11) a contrução de um poliedro pelas secções na massa de plasticina, em especial um poliedro convexo. A Figura (3.12) traz a imagem do aluno representando as diagonais de faces em um poliedro não convexo.

Figura 3.8: *Manipulando plasticina*

Figura 3.9: *Secções na plasticina*

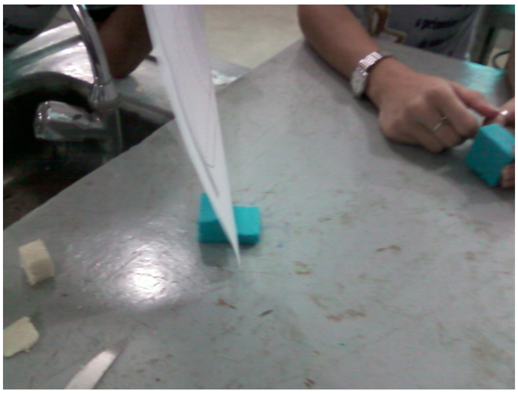


Figura 3.10: *Mostrando o poliedro não convexo*

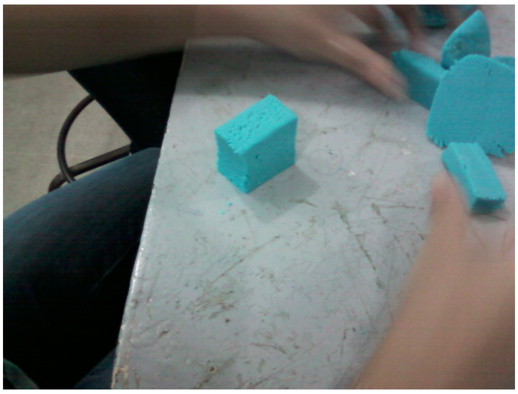


Figura 3.11: *Poliedro convexo*

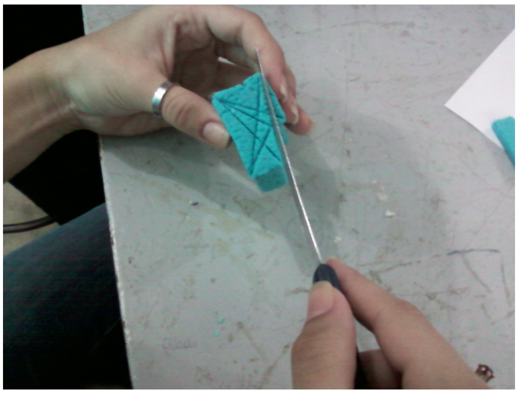


Figura 3.12: *Diagonais de face*

CAPÍTULO 4

PRISMAS

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e uma região poligonal convexa $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ contidas no plano α.

Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a reta s, de tal forma que tenha uma extremidade do vértice do polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ e o outro extremo pertencente ao plano β formando o polígono $B_1B_2B_3 \cdots B_n$. Todos esse segmentos de retas reunidos é um poliedro chamado de **Prisma**.(Figura (4.1)).

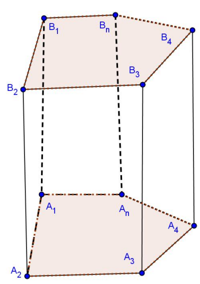


Figura 4.1: *Prisma*

4.1 Elementos do Prisma

- As regiões poligonais $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ e $B_1B_2B_3 \cdots B_n$ são definidas como bases do prisma.

- As faces, com excessão das bases, são chamados de faces laterais dos prisma.

- Os vértices das faces são chamados de vértices do prisma.

- As distâncias entre os planos das bases são chamados de altura do prisma.

- A soma das áreas de todas as faces do prisma, incluindo as duas bases, são chamados de área total do prisma.

- A soma das áreas de todas as faces laterais são chamados de área lateral do prisma.

- Todo segmento de reta cujos extremos são vértices que não pertecem a uma mesma face do prisma é chamado de diagonal do prisma.

4.2 Secção transversal de um prisma

Secção transversal de um prisma é qualquer intersecção não vazia do prisma com um plano paralelo às suas bases.

Toda secção transversal de um prisma é uma região poligonal congruente às bases.

4.3 Nomenclatura

Um prisma é classificado de acordo com o número de arestas de uma base.

Exemplo de prismas.

Poligono da Base	Nome do prisma
Triângulo	Prisma triangular
Quadrado	Prisma quadrangular
Pentágono	Prisma pentagonal
Hexágono	Prisma hexagonal

4.4 Prismas notáveis

4.4.1 Prisma reto

Um prisma é reto se, e somente se, suas retas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Caso o prisma não seja reto ele é chamado de prisma oblíquo.

4.4.2 Polígono regular

Um polígono é regular se, e somente se, o polígono é equiângulo (todos os ângulos internos são congruentes) e equilátero (todos os lados são congruentes).

4.4.3 Prisma regular

Um prisma é regular se, e somente se, é reto e seus polígonos das bases são regulares.

4.4.4 Paralelogramo

Um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos são chamados de paralelogramo, e neles encontramos as seguintes propriedades: os lados opostos são iguais, os ângulos opostos são iguais e suas diagonais se cortam em um ponto médio.

4.4.5 Paralelepípedo

Todo prisma cujos os poligonos das bases são paralelogramos são chamados de paralelepípedo.

Paralelepípedos reto-retângulo

Todo paralelepípedo reto cujos polígonos da bases são retângulos é chamado de paralelepídedo reto-retângulo.

Cubo

O cubo ou hexaedro regular é um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas têm a mesma medida.

4.5 Prática contextual

Divididos o grupo em seis duplas e um trio, foi solicitado que eles elaborassem respostas para as seguintes atividades com objetivo de manipular os conceitos de prismas. O tempo estipulado para que cada grupo resolvesse todas as questões foi de trinta minutos.

1. As dimensões comprimento, largura e altura de um paralelepípedo reto-retângulo são 10 cm, 6 cm e 9 cm. Calcular as medidas das diagonais das faces desse paralelepípedo.

2. Calcular a área total de um paralelepípedo cujas dimensões de comprimento, largura e altura são 4 cm, 8 cm e 5 cm.

3. Um paralelepípedo reto-retângulo tem uma área total igual 352 m^2 e suas dimensões são diretamente proporcionais a 1, 2, 3. Determinar a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

4. A medida da aresta de um cubo é de 4 cm. Determinar a medida da diagonal desse cubo e a área lateral desse cubo.

5. Demonstrar que a diagonal de um paralelepípedo reto-retangulo é dado por $d_p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

6. A diagonal de uma face de um cubo mede $6\sqrt{2}$. Deteminar a medida de uma diagonal desse cubo.

Avaliação

Transcorridos os trinta minutos as atividades foram recolhidas e corrigidas, com os seguintes resultados.
Cinco grupos acertaram a questão 1. Um grupo errou na parte da aritmética, outro grupo não conseguiu fazer. No quesito 2 seis grupos acertaram e um grupo não consegui fazer a questão. No quesito 3 nenhum grupo acertou. Todos os grupos acertaram o quesito 4 . Dois grupos acertaram o quesito 5. Três grupos acertaram o quesito 6.

4.6 Aplicação de materiais manipuláveis

Os alunos foram redistribuidos em três grupos de cinco membros. Cada grupo foi convocado a manipular a plasticina e contruir paralelepípedos com medidas aleatórias e tirar conclusões sobre as medidas da área lateral, área total e as medidas dos comprimentos das diagonais das faces e diagonais do seu prisma.

Foram distribuidos novamentes as mesmas atividades da parte de manipulação anterior e depois de 40 minutos novamente recolhidos.

Avaliação

Todos os grupos construiram os prismas solicitados. Fizeram as medidas das arestas e calcularam as áreas laterias, áreas das base. Os grupos conseguiram acertar as questões anteriores, mas apresentaram grande dificuldade na questão 3. Mesmo solicitado que construíssem um paralelepípedo com as medidas de proporção 1,2 e 3 para estas dimensões não foram feitas as representações algébricas corretamente.

4.7 Registro fotográfico

A figura (4.2) retrata um aluno construindo um paralelepípedo na massa de plasticina. Da aplicação a abstração é o que retrata a figura (4.3) onde o sólido no caderno foi feito para calcular as áreas laterais e áreas laterais do sólido de forma algébrica. Na figura (4.4) o aluno usa instrumentos de medida para construir arestas de mesmo comprimento na pasticina. Para verificar a diagonal do poliedro, figura(4.5), o aluno construiu o cubo e fez uma secção para marcar a diagonal do poliedro.

Figura 4.2: *Construindo o paralelepípedo*

Figura 4.3: *Cálculo algébrico do paralelepípedo*

Figura 4.4: *Construindo o cubo*

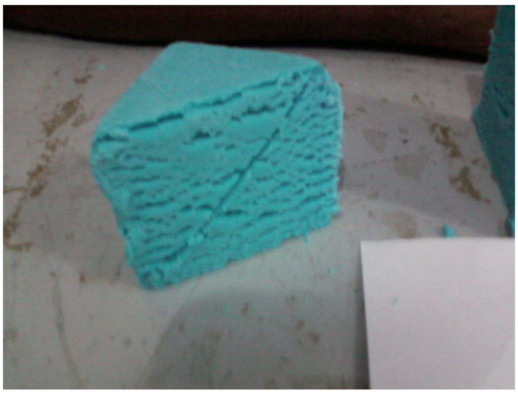


Figura 4.5: *Visualizando a diagonal do prisma*

CAPÍTULO 5

SECÇÃO NO CUBO

5.1 Escolha do Cubo

A escolha do hexaedro regular nessa atividade de estudar formas geométricas a partir das secções planas se deu pelo fato do hexaedro ser uma figura que permite um levantamento conjecturas bastante interessantes pela sua regularidade, permitindo que o aluno trabalhe com material manipulável e faça a relação com a parte algébrica. Isso conduz à produção contextual algébrica, alem de ser elo de ligação com algumas definições importantes da geometria (ponto médio, segmentos paralelos, plano mediador, pirâmides, entre outros).

5.2 Prática contextual

5.2.1 Cálculo de medidas

O grupo foi dividido em três grupos de cinco componentes onde se fez a proposta das seguintes atividades de pesquisa, a serem resolvidos algebricamente.

(a) Use barras de sabão e construa um hexaedro regular usando instrumentos de comparação para garantir que os comprimentos das arestas sejam congruentes.

(b)Identifique os vértices, as arestas e faces desse poliedro.

(c) Calcule a medida da área lateral e da área total, calcule a medida do volume desse sólido.

(d) Marque as diagonais de cada face desse poliedro, calcule o comprimento da diagonal de face e o comprimento da diagonal do poliedro.

(e)Encontre o ponto médio de cada aresta e calcule a distância entre os pontos médios pertencentes a face comum de cada aresta.

5.3 Aplicação de materiais manipuláveis

5.3.1 Formas das secções

Foram solicitados aos alunos que resolvessem as seguintes questões usando o material manipulável.
Em um cubo faça uma secção que passa pela diagonal de uma face e corte outras duas faces.
Identifique a forma geométrica da intersecção do plano com o hexaedro.
Classifique-o quanto aos comprimentos dos lados sem usar instrumento de comparação.
A secção separou o hexágono em dois novos sólidos geométricos. Justifique se os novos sólidos são polígonos, polígonos convexos, prismas, e elabore sua justificativa.

5.4 Prática contextual

5.4.1 Abstração

Nessa atividade os alunos foram divididos em cinco grupos de três componentes e foram distribuídos atividades para que respondessem sem fazer uso de secções. Poderiam visualisar o hexaedro por eles construído, porém não poderiam seccionar para elaborar suas conclusões.

1. No hexaedro regular $ABCDEFGH$, quantas arestas do poliedro devem intersectar o plano para a seção plana formada seja um quadrilátero?

2. Por uma secção de um plano no hexaedro regular $ABCDEFGH$, é formado uma seção pentagonal, quantas faces esse plano intersectou para tal forma aparecer?

3. Qual devem ser os pontos escolhidos para que uma secção divida o cubo em duas partes congruentes?

4. O plano de corte é feito paralelamente a duas diagonais de faces do cubo com aresta de medida de 8 cm. Determine o perímetro do triângulo na seção plana formada.

5.4.2 Avaliação da prática contextual e da aplicação em materiais manipuláveis

Durante as atividades foi percebida a efetiva participação de todos os alunos. Na primeira parte da atividade, durante o uso de materiais manipulavéis, apareceu uma difuculdade por parte de um grupo por escolher um sabão não macio, cujas suas linhas de cortes não ficaram precisas. Pórem todos os grupos conseguiram realizar as atividades a contento e fazer os devidos cálculos. Na segunda parte da manipulação, apenas um grupo não conseguiu corretamente fazer a questão 4, onde foram notados erros de cálculo.

No momento da autoavaliação destacam-se os seguintes comentários:

- ***Aluno 01***: *Na segunda parte das atividades deu vontade de cortar o cubo para visualizar as respostas.*
- ***Aluno 15***: *O sabão que escolhemos era muito duro e dificutou os cortes, não ficou perfeito nosso trabalho final.*
- ***Aluno 14***: *Ficou mais fácil realizar as atividades com o hexaedro na mão. Assim pudemos visualizar as secções.*

5.5 Registros fotográficos

As figuras (5.1), (5.2) e(5.3) retratam os alunos usando instrumentos de medida para construir por meio de secções em barras de sabão os cubos. Na figura (5.4) o aluno faz conferência quanto a medidas das arestas. Na figura(5.5) os alunos mostram os cubos construídos por secções na barra de sabão. As figuras(5.6) e (5.7) mostram as seções quadrangulares e triangulares encontradas por uma secção no cubo, por quatro e três faces respectivamente.

Figura 5.1: *Construindo o hexaedro*

Figura 5.2: *Construindo o hexaedro*

Figura 5.3: *Construindo o hexaedro*

Figura 5.4: *Medindo arestas*

Figura 5.5: *Cubo*

Figura 5.6: *Seção quadrangular*

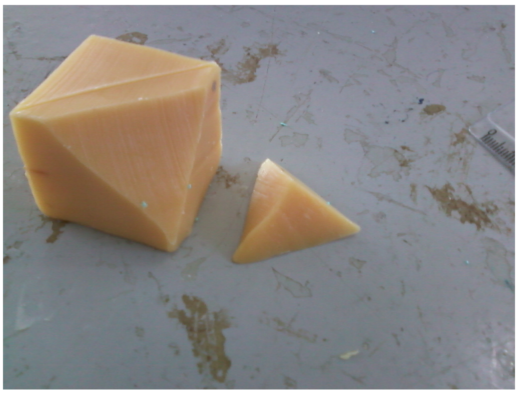


Figura 5.7: *Seção triangular*

CAPÍTULO 6

PIRÂMIDES

6.1 Definição

Sejam uma região poligonal convexa $A_1A_2A_3\ldots A_n$ contida em um plano α e um ponto V, não pertecente ao plano α. (Ver Figura(6.1)).

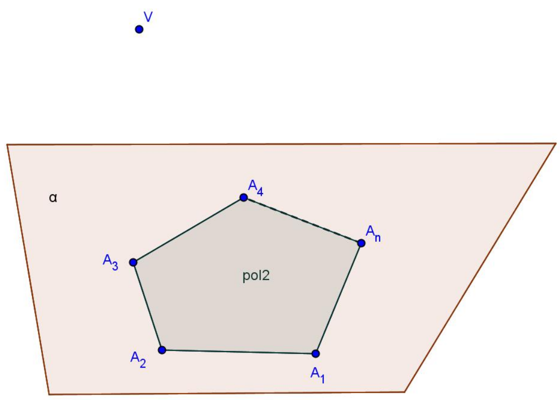


Figura 6.1: *Base poligonal e ponto V*

Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente à região poligonal e o outro extremo V. A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de pirâmide, de vértice V e base $A_1A_2A_3\ldots A_n$, (Figura(6.2)).

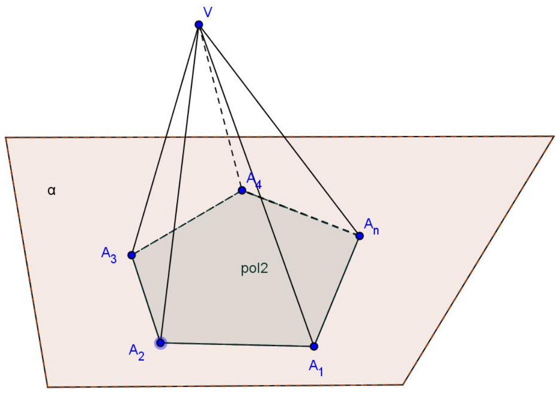


Figura 6.2: *Pirâmide*

6.1.1 Elementos da pirâmide

- O ponto V é chamado de vértice da pirâmide.
- A região poligonal $A_1A_2A_3\ldots A_n$ é chamada de base da pirâmide.
- O poligono $A_1A_2A_3\ldots A_n$ que limita a base é chamado de polígono da base da pirâmide.
- As faces laterais da pirâmide, são regiões triangulares com um vértice no ponto V.
- Os lados da base, são denominados de arestas da base da pirâmide.
- Arestas laterais são os lados de todos os triângulos com o vértice no ponto V.
- A distância entre o vértice V e o plano da base que contém o polígono $A_1A_2A_3\ldots A_n$ é chamado de altura da pirâmide.

6.1.2 Distância de ponto a plano

Considere um plano β e um ponto P do espaço. A reta perpendicular ao plano β passando por P intersecta este plano em um ponto R que é chamado de projeção ortogonal de P sobre β. Escolhendo um ponto Q qualquer de β formar-se um triângulo retângulo PRQ. O ponto Q pode ser escolhido tão longe quanto queira do ponto R, temos por construção, que o segmento que liga o ponto P ao ponto R é um cateto do triângulo PRQ, sendo então menor que a hipotenusa, o segmento com extremindades nos pontos PQ. Assim a distância entre o ponto P ao plano β é o segmento que une os pontos PR. (Ver Figura (6.3))

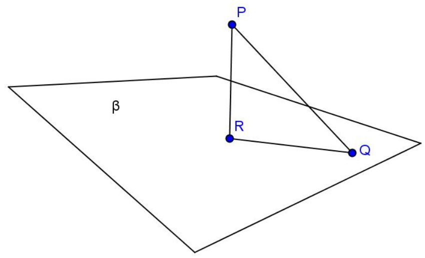


Figura 6.3: *Distância ponto a plano*

6.1.3 Nomeclatura

Uma pirâmide é classificada de acordo o polígono da base. Uma base triângular dá o nome a pirâmide de pirâmide triangular, e pirâmides quadrangulares são as pirâmides que tem como base um quadrilátero e assim sucessivamente.

6.1.4 Mediatriz

Definimos como mediatriz m de um segmento AB, o conjunto de todos os pontos do plano que equidistam das extremides A e B do segmento. Tal conjunto é formado por pontos do plano que cumprem a seguinte propriedade:

- Um ponto P pertence à mediatriz m de um segmento AB se, e somente se, os segmentos PA e PB são congruentes.
- A mediatriz m de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento passando por seu ponto médio M.

6.1.5 Polígono inscrito e circunscrito

Um polígono que tenha todos os seus vértices com intersecção com uma circunferência é dito inscrito a circunfêrencia, ou ainda dizemos que o polígono é inscritível a circunfêrencia.

Um polígono que tenha todos os seus lados tangentes a uma mesma circunferência é dito circunscrito à circunferência.

Mostrando-se que todas as mediatrizes passam em um mesmo ponto no polígono regular, mostra-se que todo polígono regular é, simultaneamente, inscritível e circunscrítivel em uma circunfêrencias de mesmo centro. O único polígono que não necessita ser regular para ser inscritível e circuncritível ao mesmo tempo é o triângulo.

6.1.6 Pirâmide regular

Uma pirâmide é regular se, e somente se, seu polígono da base é regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o centro do polígono da base.

Apótema

O segmentos de origem no centro dos círculos cincurscrito e inscrito, que são, perpendiculares aos lados de um polígono são chamados de apótemas.

- **Apótema de uma pirâmide regular:**
  É todo segmento de reta cujos extremos são os vértices da pirâmide e o ponto médio de um dos lados da base.
- **Apótema da base de uma pirâmide regular:**
  O apótema do polígono da base da pirâmide regular é chamado de apótema da base da pirâmide.

6.1.7 Medida nas pirâmides regulares

Em uma pirâmide regular, temos (Ver figura(6.4)):

- **h** a medida da altura da pirâmide.
- **l** a medida da aresta lateral da pirâmide.
- **b** a medida da aresta da base.
- **r** a medida da apótema da pirâmide.
- **R** a medida do raio da circunferência circuscrita ao polígono da base
- **m** a medida da apótema da pirâmide.

Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos as seguintes relações:

$$h^2 + r^2 = m^2 \tag{6.1}$$

$$m^2 + \frac{b^2}{4} = l^2 \tag{6.2}$$

$$h^2 + R^2 = l^2 \tag{6.3}$$

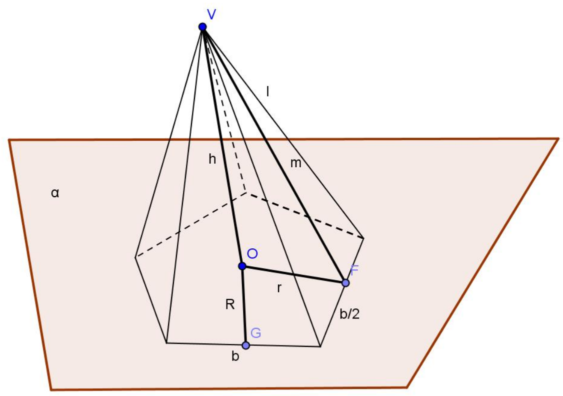


Figura 6.4: *Elementos para medidas*

6.2 Prática contextual

Em grupos de cinco alunos as seguintes atividades foram propostas:

1. Calcular a medida da altura de um tetraedro regular cujas as arestas têm a medidas iguais.

2. O apótema de uma pirâmide regular mede 12 cm e uma aresta da base medindo 10 cm. Calcular a medida de uma aresta lateral dessa pirâmide.

Avaliação

Os grupos tiveram muita dificuldade em elaborar as soluções das atividades solicitadas, sendo percebido principalmente o problema na escrita com o trato algébrico.

6.3 Aplicação de materiais manipuláveis

Com os alunos divididos em três grupos se propôs as seguintes de atividade.

(a) Aplicando as secções no cubo, retire pirâmides de base triângular e pirâmides de base retangular.

(b) Aplicando secções no cubo, construa uma pirâmide regular de base triângular. E descreva os motivos pelos quais a seção da base é um triângulo equilátero.

Avaliação

Os alunos conseguiram com êxito realizar as atividades com as secções, porém apresentaram uma grande dificuldade para justificar que os triângulos eram equiláteros das respectivas pirâmides regulares. Outra dificuldade apresentada foi no trato com as relações pitágoricas para encontrar as medidas na pirâmide.

> "Apesar da dificuldade na escrita gostei muito de fazer cortes no sabão e visualizar os elementos da pirâmide" (aluno 05)

> "Foi meu primeiro contato com esse contéudo e esses conceitos" (aluno12)

6.4 Registros fotográficos

A figura(6.5), mostra o momento em que o aluno usa um instrumento de medida para verificar a base da pirâmide triangular regular pela secção plana com o cubo. As figuras(6.6),(6.7),(6.8) e (6.9) mostram a construção da pirâmide por secção em cubos no sabão em barra.

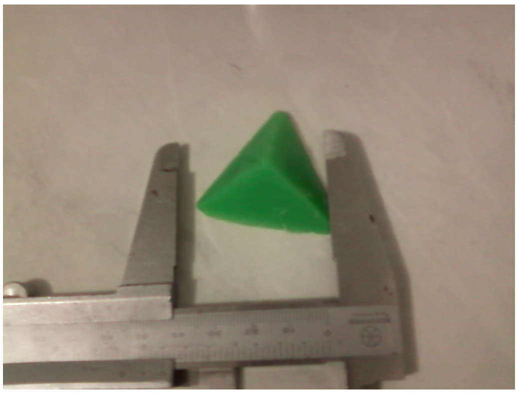


Figura 6.5: *Pirâmide*

Figura 6.6: *Pirâmide*

Figura 6.7: *Pirâmide*

Figura 6.8: *Pirâmide*

Figura 6.9: *Pirâmide*

CAPÍTULO 7

CÔNICAS

7.1 Apolônio

Apolônio foi grande matemático do século III a.C. nascido por volta de 262 a.C., em Perga, na Ásia e falecido por volta de 190 a.C. na cidade de Alexandria no oeste da Ásia. Era astrônomo e escritor de inúmeros conteúdos matemáticos, entre eles um grande obra intitulada *Secções Cônicas*, no qual descreve uma trabalho extenso sobre estas secções.

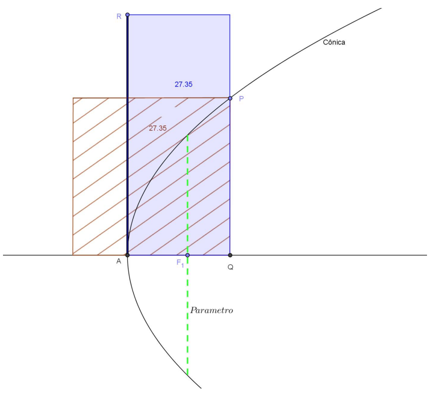
Antes desse trabalho os gregos já tinha conhecimentos das secções cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da secção meridiana, igual, maior ou menor que o ângulo reto, seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz.

Já Apolônio, seccionando um cone circular duplo, reto ou oblíquo obtinha todas as formas das seções planas, onde atribuiu os nomes de *elipse, parábola e hiperbole* tomados pela terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas. Os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta. Quando a base do retângulo coincidia com o segmento recebia o nome de *parabole*, quando a base era menor que o segmento denotava-se de *ellipsis* e de *hyperbole* quando a base do retângulo excedia o comprimento de reta.

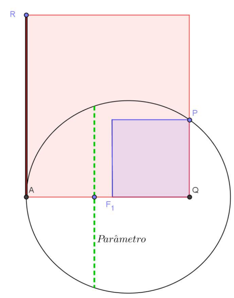
Antes mesmo da estruração da *Geometria Analítica*, Apôlonio descrevia as curvas:

Seja o segmento de uma cônica de eixo principal **AB**, **P** um de seus pontos e **Q** o pé da perpendicular por **P** a **AB**. Por **A**, que é o vértice da cônica, trace a perpendicular a **AB** e marque nela uma distância **AR** igual ao que chamamos hoje de *latus rectum* ou *parâmetro p*, da cônica. Aplique a **AR** um retângulo **AQ** como um dos lados e de área igual a $(\mathbf{PQ})^2$. Conforme a aplicação fique aquém do segmento de reta **AR**, coincida com ele ou exceda, Apolônio denominava a seção cônica de **elipse, parâbola** ou **hipérbole**.[11]

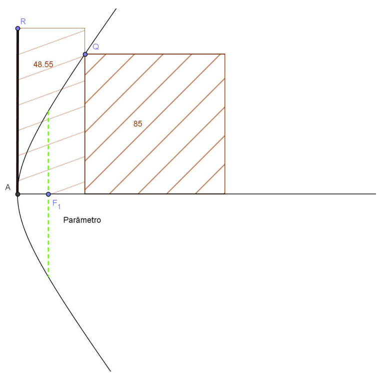
Observe na Figura (7.1).



[P]



[E]



[H]

Figura 7.1: *Definições das cônicas pela relação de área, P é a figura da parábola E é a figura da elipse, H é a figura da hipérbole.*

7.2 Elipse

7.2.1 Definição

Fixado dois pontos F_1 e F_2 de um plano α, tal que $F_1F_2 = 2c$, onde $c > 0$, chama-se elipse o conjunto de pontos P de α cuja a soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, onde $2a > 2c$.

7.2.2 Definição por secção

Elipse é a curva obtida através da intersecção um plano secante que intercepta um cone, e corta todas as suas geratrizes. Neste caso o plano não é paralelo a nenhuma geratriz do cone. Se o plano interceptar todas as geratrizes do cone e for também perpendicular ao eixo do cone, teremos um caso especial da elipse que é a circunferência.
Figura(7.2) representa a secção no cone feita em uma casquinha de biscoito para sorvete por um grupo de alunos após observarem a definição matemática.

Figura 7.2: *Secção em um cone*

7.2.3 Elementos da elipse

Observe a Figura (7.3), onde indetificaremos os seguintes elementos.

- Os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse.
- A distância entre F_1 e F_2 é chamado de distância focal da elipse com medida $2c$. A medida c é a semi-distância focal.
- O segmento A_1A_2 que passa pelos focos é o eixo maior da elipse com medida $2a$ com $a > 0$.
- O ponto C é o ponto médio do eixo maior da elipse, é também o centro da elipse.
- O segmento B_1B_2 que passa pelo ponto C e é perpendicular ao eixo maior da elipse é chamado de eixo menor da elipse.

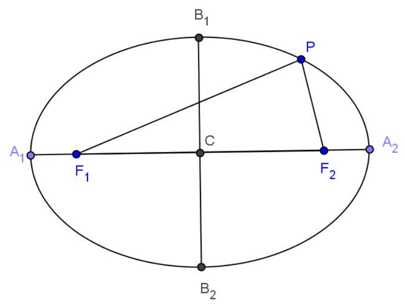


Figura 7.3: *Elementos da elipse*

7.2.4 Propriedades da elipse

(a) **O ponto C é o ponto médio do segmento B_1B_2.**

Demonstração:

Observando que o quadrilátero $B_1F_1B_2F_2$ é um losango, pelo caso de congruência lado, ângulo, lado, temos $B_1F_1 = B_1F_2 = B_2F_1 = B_2F_2$ e como as diagonais de um losango se interseptam perpendiculamente no ponto médio de cada uma, temos que o ponto C é o ponto médio do segmento B_1B_2.

(b) **O comprimeto do segmento $B_1F_1 = B_2F_2 = a$.**

Demonstração:

O triângulo B_1F_1C é congruente ao triângulo B_1F_2C pelo caso lado, ângulo, lado. Pelo fato do ponto C ser por definição o ponto médio do segmento F_1F_2 então o segmento F_1C é congruente ao segmento F_2C. Os triângulos B_1F_1C e B_2F_2C são retângulos em C por construção. O lado B_1C é comum aos dois triângulos. Assim concluimos que B_1F_1 é congruente à B_2F_2.

Observe que:

I $B_1F_1 = B_1F_2$ e que como B_1 pertence a elipse temos:

II $B_1F_1 + B_1 + F_2 = 2a$.

Substituindo **I** em **II** teremos:

$B_1F_1 + B_1 + F_1 = 2a \Rightarrow 2B_1F_1 = 2a$ logo $B_1F_1 = a$.

(c) **Sendo a distância focal de comprimento $2c$, $2a$ o comprimento do eixo maior e o eixo menor de comprimeto $2b$ temos que:**

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração:

Observe a figura(7.4), de fato se aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo F_2CB_1 teremos $a^2 = b^2 + c^2$.

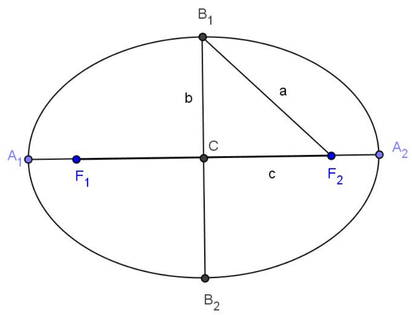


Figura 7.4: *Elementos da elipse*

(d) **O número $\mathsf{e} = \dfrac{c}{a}$ é denominado de execentricidade da elipse e é tal que** $0 < \mathsf{e} < 1$.

De fato, observando a Figura(7.4), o número $e = \dfrac{c}{a}$ é o valor do *cosseno* do ângulo agudo F_2 do triângulo B_1F_2C e como para um ângulo agudo α temos $0 < cos\ \alpha < 1$, temos o valor de $0 < \mathsf{e} < 1$.

7.2.5 Equação da elipse

A equação no plano cartesiano da elipse pode ser encontrada pela coordenada dos focos e o comprimento do eixo maior.
Sejam $F_1\ (x_1, y_1)$ e $F_2\ (x_2, y_2)$ e o comprimento do eixo maior de medida $2a$ e um ponto genérico $P(x, y)$ petercente a elipse. Pela definição $PF_1 + PF_2 = 2a$.
Assim temos :

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a. \tag{7.1}$$

7.3 Aplicação de materiais manipuláveis e prática contextual

Proposta:
Em uma casca de biscoito para sorvete (cone) faça um secção que corte todas as geratrizes e escreva a equação da seção plana formada pela intersecção do plano com o cone.

Esta proposta foi lançada aos alunos que estavam divididos em três grupos de cinco. Todos os grupos fizeram as secções porém na hora de marcar a intersecção e visualizar as medidas da cônica surgiu uma dificuldade, pois a casquinha para sorvete ao ser seccionada gera uma rebarba que dificulta o traçado perfeito da cônica com caneta ou lápis, os alunos então ao sentirem essas dificuldades, sugeriram alternativas de como extrair a intersecção entre o plano e cone.

7.3.1 Avaliação

Os alunos apresentaram uma grande criatividade, fizeram indagações e deram soluções importantes nas atividades propostas, desenvolveram as manipulações que foram propostas na atividades.

A sugestão do grupo do *aluno 12* para resolver este entrave foi de tirar xerox da casquinha para sorverte da parte seccionada, Figura (7.6), e com a folha fotocopiada recortar a região interna da elipse formada representada na fotocópia,(ver Figura(7.7)), dobrar ao meio para que se possa medir o comprimento do eixo maior, (ver Figura(7.9)),e do eixo menor, (ver Figura(7.8)), aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar o valor de c encontrar os focos e aplicar os valores na equação(7.1).

O grupo do *aluno 12* procedeu da seguinte maneira: Primeiro extraiu as seguintes medidas, $4,2cm$ para o eixo maior $3,1cm$, assim fizeram $2a = 4,2$ e $2b = 3,1$ logo $a = 2,1$ e $b = 1,55$. Com uso de uma calculadora encontraram o valor de c aplicando o teorema de Pitágoras: $(2,1)^2 = (1,55)^2 + c^2$, para o melhor cálculo aproximaram o valor de $c = \sqrt{2}$, assim os focos quando o centro da elipse está na origem do plano cartesiano é $F_1(-\sqrt{2},0)$ e $F_2(\sqrt{2},0)$ onde desenvolveram a seguinte equação.
Dado um ponto P genérico e os focos $F_1(-\sqrt{2},0)$ e $F_2(\sqrt{2},0)$ e o valor de $2a = 4,2$,temos:

$$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y-0)^2} = 4,2$$

Os outro dois grupos tiveram a opção de usar um material transparente para representar a seção da intersecção do plano com o cone (Figura(7.11)). Aplicaram um material transparente (Figura(7.10)) e com as devidas medições com uma régua escalonada na seção plana da elipise, desenvolveram a equação da cônica elaborada com método similar ao grupo anterior

7.4 Registros fotográficos

As figuras(7.5),(7.6), (7.7), (7.8) e (7.9) descrevem os passos que um grupo usou para encontrar a equação da elipse, já as figuras (7.10), (7.11) e (7.12) os passos que os outros grupos seguiram.

Figura 7.5: *Secção do cone*

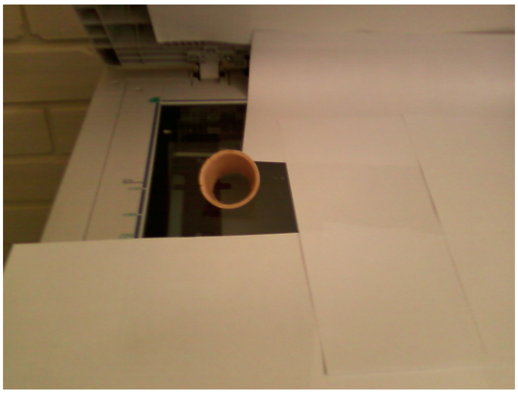


Figura 7.6: *Xerox da secção*

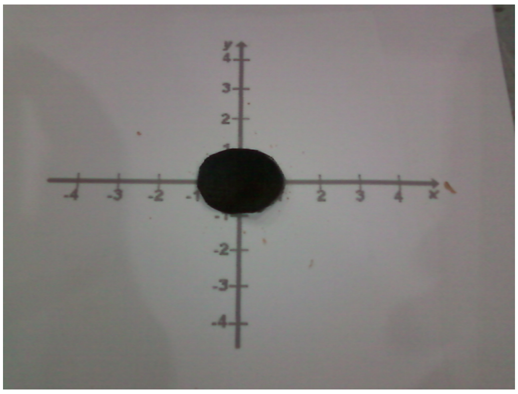


Figura 7.7: *Elipse recortada*

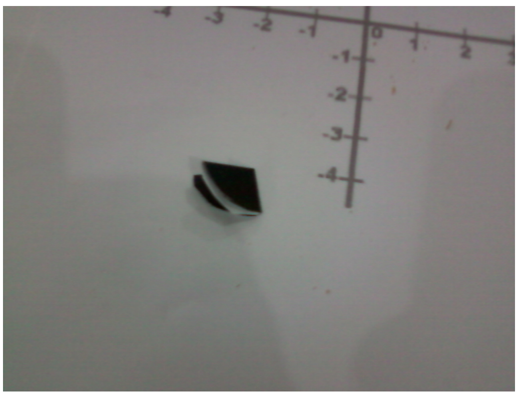


Figura 7.8: *Elipse recortada*

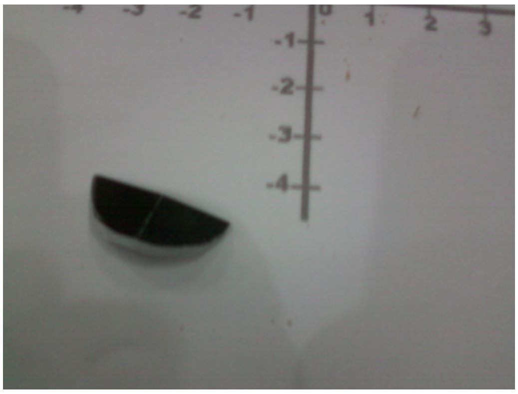


Figura 7.9: *Elipse recortada*

Figura 7.10: *Formas da elipse*

Figura 7.11: *Seção do cone*

Figura 7.12: *Plano de seção ao cone*

CAPÍTULO 8

PARÁBOLA E HIPÉRBOLE

8.1 Parábola

8.1.1 Definição

Dados uma reta r e um ponto F não pertecente a reta r de um plano α, chama-se parábola o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de r e F.

8.1.2 Definição por secção

A parábola é uma seção cônica gerada pela interseção de uma superfície do cone com um plano paralelo a uma linha chamada de geratriz. (ver Figura(8.1)).

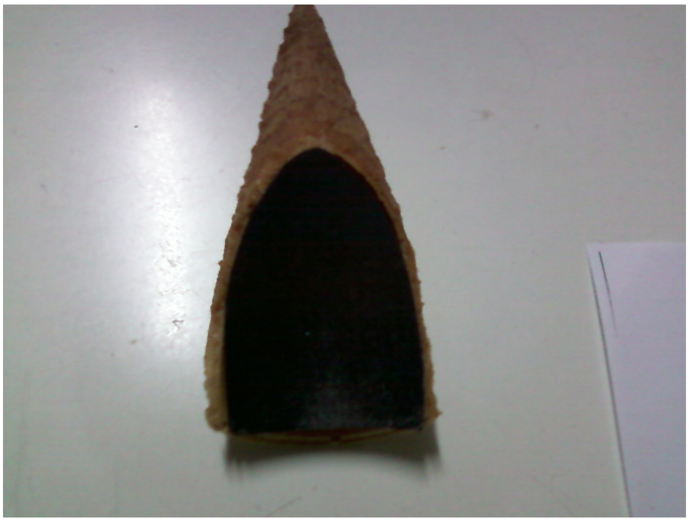


Figura 8.1: *Parábola na casca para sorvete*

8.1.3 Elementos da parábola

Com auxílio a Figura(8.2) podemos indentificar os seguintes elementos da parábola:

- O ponto F é o foco da parábola.
- A reta r é chamada de reta diretriz.
- A reta s que passa pelo ponto F e é perpendicular à reta diretriz é chamado de eixo de simetria.
- O ponto V, intersecção da parábola com o eixo s, é denominado vértice da parábola.
- A medida p entre o foco e a reta diretriz é chamada de parâmetro da parábola.

8.2 Equação da parábola

Considere o ponto $F(x_1, y_1)$ e a reta $r : ax + by + c = 0$, como o foco e a reta diretriz de uma parábola, considere ainda um ponto genérico $P(x, y)$:

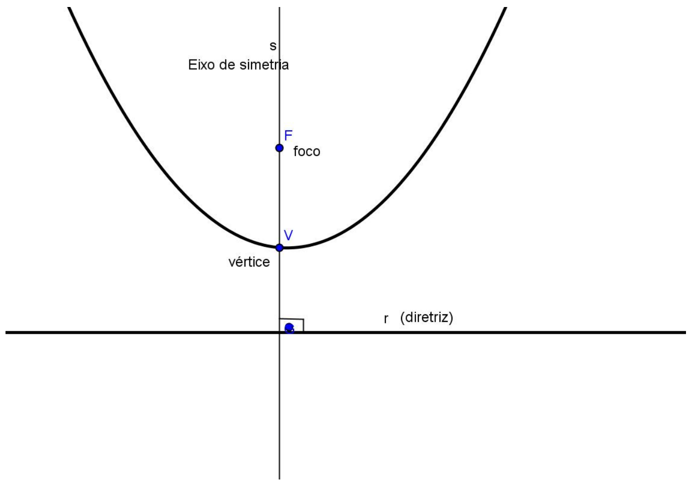


Figura 8.2: *Elementos da Parábola*

Impondo que a medida da distância do ponto P e a reta r é igual a medida da distância do ponto P ao foco então:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

8.3 Hipérbole

8.3.1 Definição

Fixados dois pontos no plano α, F_1 e F_2 tais que a medida da distância entre eles é igual a $2c$, $c > 0$, chama-se hipérbole o conjunto de pontos P de α cujas as diferenças entre a medidas das distâncias entre dos segmentos PF_1 e PF_2 é uma constante de valor $2a$ com $0 < 2a < 2c$.

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

Os pontos M, $N \in \alpha$ tais que $NF_1 - NF_2 = 2a$ determinam um ramo da hipérbole, e $MF_2 - MF_1 = 2a$ determinam o outro ramo da hipérbole. (Ver Figura(8.3)).

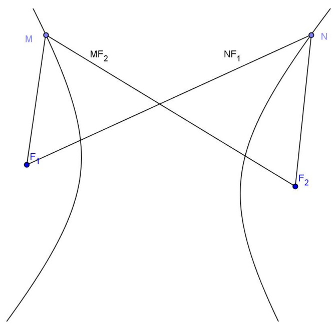


Figura 8.3: *Hipérbole*

8.3.2 Definição por secção

Considere um plano secante a um cone circular reto de duas folhas, de maneira que o ângulo que esse plano intersecta o cone é maior que o ângulo externo das retas geratrizes do cone circular reto.(Ver Figura(8.4))

8.3.3 Elementos da hipérbole

Indicaremos na figura (8.5) os elementos principais da hipérbole que serão usados no trabalho das equações para formalizar a representação dessa cônica.

- Os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole.

Figura 8.4: *Hipérbole em um cubo de duas folhas*

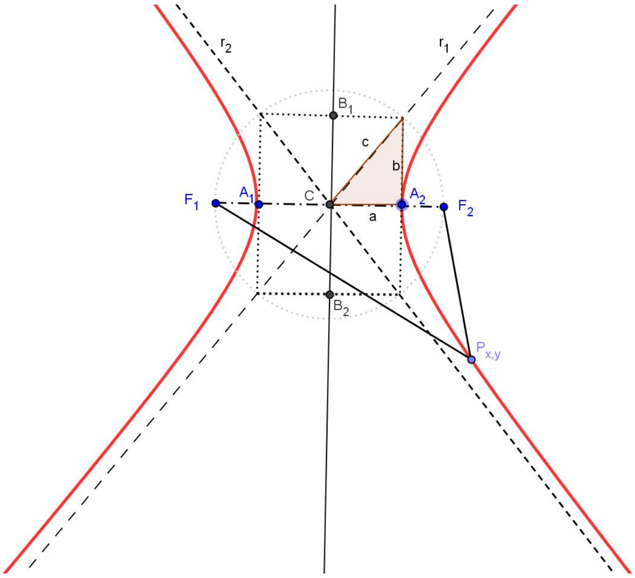


Figura 8.5: *Elementos da hipérbole*

- A distância entre os focos, de medida $2c$, com $c > 0$, é chamada de distância focal da hipérbole.
- Os pontos A_1 e A_2 são chamados de vértices da hipérbole.
- A distância entre os vértices da hipérbole é chamado de eixo real de medida $2a$, $a > 0$.
- O ponto C é chamado de centro da hipérbole.
- A distância entre os pontos B_1 e B_2 de medida $2b$, $b > 0$ é chamado de eixo imaginário da hipérbole.
- As retas r_1 e r_2, fundamentais para o esboço da hipérbole, são chamadas de retas assíntotas da hipérbole.
- Relação pitagórica notável na hipérbole:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- A grandeza escalar $e = \dfrac{c}{a}$ é chamada de excentricidade da hipérbole e este valor determina o quão abertos ou fechados são os ramos da hipérbole.

8.4 Prática contextual e aplicação em materiais manipuláveis

8.4.1 Prática contextual

No primeiro momento, em três grupos de cinco alunos, foram propostas as atividades algébricas para consolidação das equações das cônicas, hipérbole e parábola, com cinco quesitos e um tempo estipulado de 40 minutos para a resolução.

(a) Obter uma equação da hipérbole de focos $F_1(-4,4)$ e $F_2(4,-4)$, cujo o eixo imaginário mede $2\sqrt{7}$ unidades de medida.

(b) Obtenha a equação da parábola em que o ponto F é o foco de coordenadas $F(1,1)$ e a reta r de equação $r: y=-3$ é a diretriz.

(c) Obtenha a coordenada do vértice de uma parábola que tem como foco no ponto $F(1,2)$ a reta s de equação $s: x=4$ a diretriz.

(d) Determine a equação da hipérbole, com os focos nos pontos $F_1(-2,0)$ e $F_2(2,0)$, e o eixo real medindo $2u$.

(e) Sabendo que a reta r diretriz de uma parábola λ identifica-se pela equação $r: x+y-2=0$ e o foco F tem coordenadas $F(2,1)$, escreva a equação representativa de λ.

Avaliação

Decorridos 40 minutos as atividades foram recolhidas para a correção. Depois da correção foram repassadas novamente as definições e entregues para que eles pudessem refazer os quesitos inacabados e os que continham falhas. Todos grupos apresentaram dificuldades no desenvolvimento das operações aritméticas.

8.4.2 Aplicação no material manipulável

Foi solicitado aos grupos da atividade anterior que fizessem secções em uma casquinha para sorvete e representassem seções planas onde aparecem parábolas e um ramo de hipérbole.

Avaliação

Todos os grupos fizeram secção no cone de casquinha para sorvete, pórem surgiu a dificuldade em dizer qual era seção identificava a parábola e qual seção identificava a hipérbole, sendo nescessário fazer um breve resumo e repetir a atividade com os grupos.

8.5 Identificando as cônicas por secções

Para atender a questão de como identificar qual tipo de cônica pela seção de um plano com um cone foi aplicado o seguinte resumo:

> Considere um cone circular reto de duas folhas e considere as duas geratrizes desse cone formadas pela intersecção dele com um plano que passa por seu eixo. Chame de α o ângulo exterior ao cone formados por essas geratrizes, veja Figuras(8.6), (8.7) e (8.8). Em relação a uma das geratrizes, o plano que define uma parábola corta esse cone com o ângulo β, exterior ao cone, $\alpha = \beta$. Já a elipse é formada quando um plano corta o cone com um ângulo β menor que o ângulo α, e a hipérbole, com um ângulo β maior do que o ângulo α.

A figura(8.6) mostra com deve ser o ângulo do plano de intersecção com o cone para que se forme uma seção plana gerando uma parábola. A figura(8.7) mostra a variação do ângulo do plano intersector ao cone para que se tenha um hipérbole formada pela seção plana. A figura(8.8) representa a variação do ângulo do plano que intersecta o cone reto para formar a secção cônica da elipse.

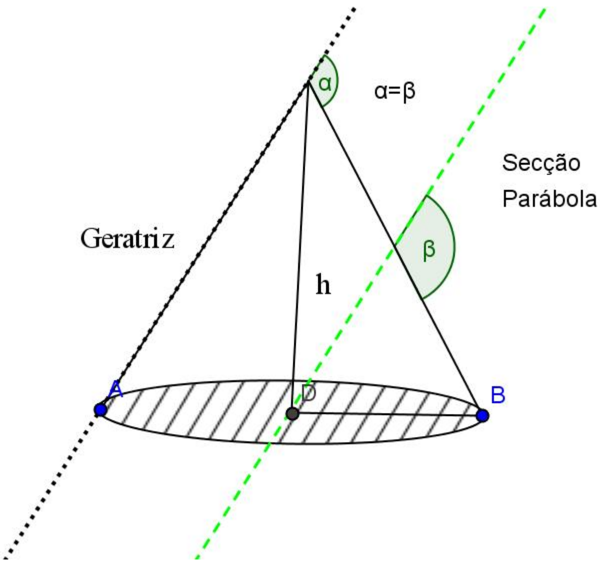


Figura 8.6: *Secção parábola*

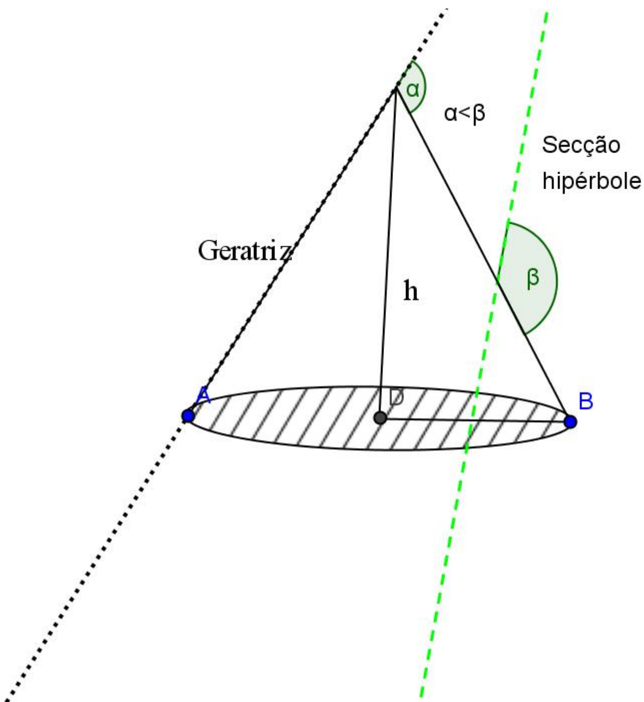


Figura 8.7: *Secção da hipérbole*

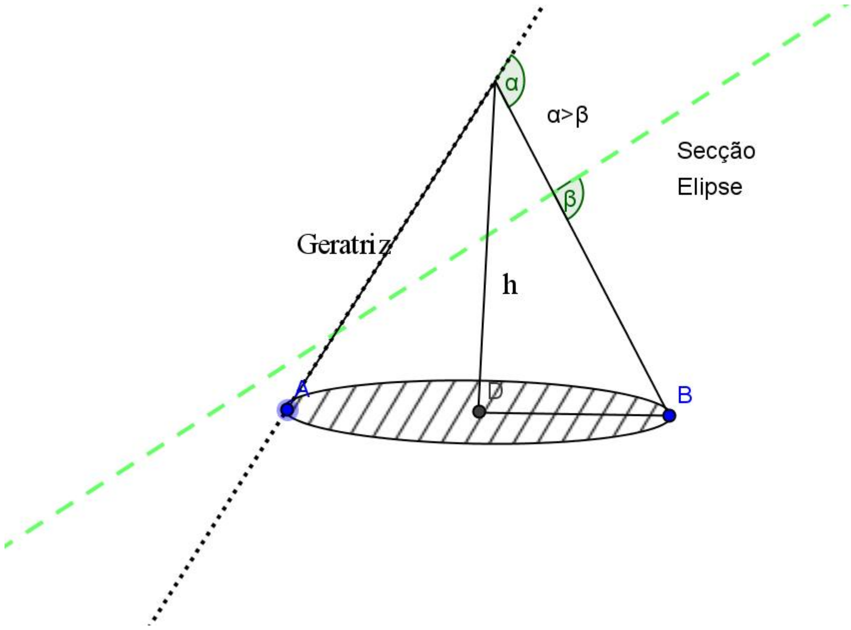


Figura 8.8: *Secção da elipse*

Registros fotográficos

As figura(8.9) e (8.10) foram apresentada pelos grupos no final das atividades com os devidos relatos e explicações de como devem ser as secções para obtenção das seções planas e indentificar as cônicas.

Figura 8.9: *Secções cônicas*

Figura 8.10: *Secções cônicas*

CAPÍTULO 9

AVALIAÇÃO GERAL

9.1 Avaliação

Depois de todo o processo das aplicações do método, a avaliação geral se faz necessário para se ter uma visão mais aprimorada da aplicação do trabalho. Nessa avaliação dar-se-á ênfase nas atitudes e valores dos envolvidos no processo bem como a compreensão e o poder de investigação por parte dos alunos na manipulação e aplicação dos conceitos matemáticos.

Analisamos para isso o conjunto de instrumentos que foram usados no decorrer das atividades, tanto as escritas quanto as orais. Além de analisar a maneira que se utilizaram os materiais manipuláveis, suas construções e exemplificações.
Nessa fase obtivemos os seguintes fatos positivos:

- Foi observado no decorrer do trabalho o avanço na confiança das colocações e conclusões dos alunos, elevando a autoestima e compreensão do conteúdo.
- Foi percebido avanço da utilização dos conceitos matemáticos aplicando diretamente nas intervenções a serem feitas no material concreto, tendo uma preocupação do conteúdo matemático antes de efetuar uma nova secção nos sólidos.
- Os alunos desenvolveram no decorrer dos trabalhos, a capacidade de comunicação, buscando usar corretamente as nomenclaturas dos sólidos e seções planas.

- Os alunos mostraram interesse em organizar seus trabalhos e registros, buscando quando solicitado, apresentá-los de forma coerente e adequada aos demais membros do grupo.
- Buscaram entender o enunciado das atividades de práticas textuais e aplicações dos conceitos matemáticos no materiais manipuláveis.
- Aplicar relações entre os conteúdos de Geometria e Álgebra foram buscados pelos alunos em representações por equações das seções planas encontradas pela secções.
- Vontade de aprender nas atividades sendo apenas registrado dois atrasos pelos alunos devidamente justificados, com a participação total nos seis dias de trabalhos.

Mais fatos importantes podemos relatar para tentar diminuir possíveis erros em aplicações futuras, já que os alunos tinham o material concreto em mãos, muitas vezes ficavam tentados pelo convencimento que a análise de algumas amostras já era o suficiente para elaborar suas justificativas matemáticas, além de destacar que quando ao serem defrontados com atividades abstratas buscavam o material manipulável para tentar solucioná-los. Nesse sentido o educador deve está atento para fazer as interferências adequadas para o alcance dos objetivos, e evitar que o recurso usado se torne mais atraente que os conteúdos matemáticos.

9.1.1 Avaliando os recursos

Ao se usar um recurso é nescessário analisar vantagens e desvantagens, benefícios e cuidados que se deve ter ao escolher tal recurso, inclusive a qualidade e a aplicabilidade dos conceitos matemáticos corretamente.

Plasticina

Essa massa de modelar, produzida a partir da manipulação de amido de milho e bicarbonato de sódio, se apresentou eficiente para a aplicação de conceitos de poliedros. Os alunos conseguiram seccionar de maneira prática para construir poliedros convexos e não convexos e obtiveram êxitos em marcar as diagonais de face porém, apresentaram algumas dificuldades nas secções para a visualização da diagonal dos poliedros.

Esse recurso tem a capacidade de ser explorado em mais de uma situação, basta amassar novamente e reconstruir um novo sólido. E desde que corretamente armazenado, pode durar por dias.

Seu custo é relativamente baixo. Para a aplicação dessa atividade com os quinze alunos foram usados 1,5 quilogramas de amido de milho.

Sabão em Barra

A escolha do sabão em barra pode facilitar as secções mas, a depender da consistência do sabão que se quer seccionar, as atividades mais difíceis pela rigidez da massa. Ao trabalhar com o sabão em barra foi percebido que os alunos tem uma preocupação maior com a sujeira por ele causada, com resíduos grudando na bancada e nos instrumentos de corte e que ainda deixa o caderno sem aderência para a escrita com caneta esferográfica. Mas se mostrou um recurso bem ecológico porque todo material usado foi devolvido para o setor de limpeza que reaproveitou na totalidade todo material usado.

Casca de biscoito para sorvete

Com um custo satisfatório ao trabalho, a casca para sorvete em forma de cone foi usada com grande diversidade, podendo o aluno entender como as cônicas são formadas por secções em cones retos de revolução. Apesar pela falta de tempo, não ter sido abordado com grande profundidade nesse trabalho, pode-se também ser explicado como as cônicas degeneradas aparecem.

Por ser um elemento comestível alguns alunos ficaram tentados a consumir nas atividades. Foi preciso salientar que como era elemento de manipulação não podiam ser consumidos pelo risco de contaminação, além de um aluno relatar que não estava totalmente confortável em está usando alimento na prática educativa. Porém, ficou convencido quando relatei que a plasticina usada por nós também era feita por alimentos e além de outras coisas que usamos no dia a dia e sua matéria prima também era usada na alimentação humana.

Outra dificuldade foi encontrada ao tentar, com a casquinha de sorvete, formar um cone reto com duas folhas. O Aluno 09 conseguiu fazer umedecendo as pontas da casquinha e introduzindo uma vareta para fixar os dois cones.

Autoavaliação dos alunos

Vivemos em uma sociedade da comunicação, valorizar a formas de expressão dos alunos é um dever do mediador para o conhecimento e ao convidar no final dos trabalhos que os alunos tecessem seus relatos de maneira oral, obtivemos os seguintes comentários:

> "(...) Eu estava preocupada com a chegada da conclusão do Ensino Médio, por não ter ainda escolhido minha profissão, mas essas atividades me mostraram que gosto de fazer e construir coisas. Agora tenho certeza que quero fazer Engenharia de Produção.(...)" (Aluno 09)

> "(. . .) Esse trabalho me mostrou que Matemática é aplicada nas mais diferentes formas, até no simples sorvete temos matemática.. . . Estou convencido que consigo fazer o curso de Engenharia Civil.(. . .)" (Aluno 04)

> " Vou fazer o curso de Direito, mas queria relatar que nunca vi com bons olhos o estudo de muitos conteúdos matemáticos porém essas manipulações, com as casquinhas para sorvete, destacam meu entusiasmo em estudar os conceitos das cônicas, que antes nem quis saber. (. . .)" (Aluno 13)

> "(. . .) Farei o curso de Direito, mais fiquei satisfeito em não sair do Ensino Médio com pavor da matemática, percebi que os conceitos geométricos têm grandes aplicações. " (Aluno 14)

> "(. . .) Quero fazer pedagogia, trabalhar com crianças nas séries iniciais do Ensino Fundamental e irei levar essa experiência para minha futura profissão. "(Aluno 02)

Fica a convicção nestes comentários o quanto os recursos didáticos auxiliam os educadores quando aplicados corretamente no alcance de seus objetivos. Ao aplicar as secções nos cones de casquinha para sorvete foi percebido a importância do recurso para o entendimento de um conteúdo das cônicas que sempre foram nessa unidade escolar trabalhados de maneira puramente abstrata.

O gratificante do trabalho foi que em Janeiro de 2013 foi feito um contato com boa parte dos alunos trabalhados nessa atividade, o Aluno 13 conseguiu uma bolsa pelo PROUNI e conseguiu ingressar no curso de Direito, o Aluno 04 conseguiu um financiamento e a aprovação em uma faculdade particular para cursar o curso de Engenharia Civil, o Aluno 14 e o Aluno 02 conseguiram ingressar nos cursos de Direito e Pedagogia por alcançarem a vaga no SISU por nota no Exame Nacional do Ensino Médio, Já o Aluno 09 não tinha ainda conseguido entrar no sistema universitário, porém mantinha os mesmos objetivos.

CAPÍTULO 10

APLICAÇÃO FUTURA DO MÉTODO

Nas avaliações de cada aplicação dos conteúdos matemáticos, foi percebido o envolvimento espontâneo dos alunos em todas as atividades que envolviam manipulação com os objetos. Surge uma ligação sobre conceitos de geometria em que os alunos foram atores e autores do processo de ensino aprendizagem, onde puderam praticar a suas deduções e análises de cada tema relacionado.

Nesse trabalho foi verificado o poder de argumentação dos alunos, usando como recurso visual os sólidos por eles construídos, para justificar suas conclusões, fórmulas e definições matemáticas. Fizeram relatos da importância do método pedagógico como o recurso dos materiais manipuláveis.

Trabalhar com secções em sólidos permitiu ao grupo de alunos despertarem o elo entre a Matemática e a Arte. Fazer formas e transformações geométricas com secções dos sólidos proporcionou aos participantes o poder da criação de novas formas o que despertou grande interesse em aprender os conceitos abstratos matemáticos para o embasamento dessas criações.

O uso de materiais manipulavéis também permitiu na prática pedagógica a formalidade das nomeclaturas de cada forma, priorizando a linguagem precisa e relacioná-las com as formas do contidiano. Permitiu que se possa verificar conceitos e definições com um rigor matemático, através da manipulação.

Com uma visão desafiadora para o ensino de Matemática deste século, esse trabalho levantou novas reflexões sobre o comportamento dos alunos em um trabalho com materiais manipuláveis. Os questionamentos que ficam são: Como as ferramentas tecnológicas poderem ajudar esse trabalho? Como aplicar esse método em séries iniciais do ensino fundamental? Como aprimorar o método para manipulação desses materiais? Qual o papel do professor de Matemática na aplicação do método? Como a interdisciplinaridade pode ser usada na prática desse método?

No meio de tantas indagações fica claro que esse trabalho não se finda aqui. E, para cada interrogação acima, uma possível linha de novas pesquisas serão citadas entre tantas outras.

Respostas parciais a estes questionamentos podem ser dadas.

Como as ferramentas tecnológicas poderem ajudar esse trabalho?

Com o uso de softwares livres o educador matemática poderia modelar as seções apreciadas nos sólido, para melhor aprofundar relacionar o objeto lúdico com o poder de abstração.

Porque aplicar esse método em series iniciais do ensino fundamental?

O uso desses recursos para o reconhecimento de formas como a aplicação, poderá ajudar o educando se torne capaz de relacionar formas e registros gráficos.

Como aprimorar o método para manipulação desses materiais?

Fazer novas pesquisas de materiais de custo acessível e de praticidade na manipulação dos alunos e formas possíveis de aquisição pela comunidade escolar.

Qual o papel do professor de Matemática na aplicação do método?

Pesquisar e fazer um levantamento bibliográfico de como melhorar sua prática pedagógica, seu papel de mediador e de pesquisador.

Como a interdisciplinaridade pode ser usada na prática desse método?

Associar-se com os professores de Artes, Biologia, Física, Química em uma pesquisa desde a construção de novos elementos a aplicação dos recursos usado neste trabalho, nas suas áreas de conhecimento.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. [**Lei das diretrizes e bases da educação nacional (1996)**].; VIEIRA, Esmeralda de Deus; PAES, Jose Roberto Franco Tavares; BRANDÃO, Violeta Terezinha Araujo. A nova LDB : Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. [Belo Horizonte]: C.T.E, 1996.

[2] BRASIL Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, vol. 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

[3] BRASIL, MINISTERIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Media e Tecnologia, 1999. 4 v.

[4] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introduão a geometria espacial.** 4ª ed Rio de Janeiro: SBM, 1999.

[5] DELORS, Jacques. **Educação: um tesouro a descobrir**. Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre educação para o século XXI. 8ª ed. São Paulo: UNESCO, Cortez ; Brasília, (DF): MEC: 2003.

[6] EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. 5ª ed. Campinas, São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2011.

[7] GARBI, Gilberto Geraldo **C.Q.D: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**, 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física,2010.

[8] LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino medio**, vol. 2, 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do professor de matemática).

[9] LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino medio**, vol. 3. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleçao do professor de matemática)

[10] LIMA, Elon Lages, **Matemática e Ensino**, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro BR, 2001.

[11] Morais FILHO, Daniel Cordeiro de, **Manual de Redação Matemática** 1ª ed. Campina Grande, Paraíba, 2010.

[12] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. 2ª ed Sao Paulo: Moderna, 2002.

[13] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. 3ª ed Sao Paulo: Moderna, 2002.