PROFMAT-IMPA

Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos

Teodolito

Esther Zilkha

Orientador: Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro
2014

AGRADECIMENTO

Agradeço ao Impa e seu corpo Docente, que em muito contribuíram para o amadurecimento da minha formação acadêmica.

Ao Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho, que sempre se mostrou acessível.

Aos colegas de turma, que me socorreram inúmeras vezes, em especial ao colega Sergio Antoun Serrano que me deu suporte e orientação, para a elaboração deste trabalho, e esteve sempre pronto a colaborar.

Dedicatória

“Dedico este trabalho aos meus familiares, e em especial ao meu pai, que sempre foi um exemplo de superação e otimismo. Me ajudou a acreditar que sonhar é possível, mas ao longo desta trajetória teve que partir”.

Resumo

Nesta tese apresentamos a construção e utilização de mecanismos virtuais, o mais próximo possível da realidade, com o objetivo de facilitar a visualização do ensino de determinados conteúdos matemáticos. Para a construção foi utilizado o software GeoGebra, que por sua característica dinâmica, permite a interação entre aluno e instrumento. Na proposta contamos um pouco da história e detalhamos a construção do pantógrafo, do elipsógrafo, do relógio de pêndulo e engrenagens e do teodolito. Apresentamos a justificativa matemática para a utilização desses instrumentos e os conteúdos envolvidos na construção e funcionamento. Também mostraremos alguns comandos avançados do GeoGebra, que foram fundamentais para as construções. Completando o trabalho, apresentaremos sugestões de conteúdos que podem ser trabalhados com os alunos, em salas de aula do Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: GeoGebra, instrumentos e teodolito.

Sumário

Índice de Figuras

1. Introdução

O trabalho visa mostrar aos professores uma nova abordagem para utilização do software GeoGebra através da confecção de instrumentos virtuais, o mais próximo possível do instrumento real, inclusive com suas limitações físicas. Vale mencionar ainda que este trabalho configura da conclusão do curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). E foi desenvolvido parcialmente em grupo, visto que, o projeto que deu origem ao mesmo foi elaborado por Jean Carlo da Silva Cordeiro, Patrícia Mello Bittencourt, Sergio Antoun Serrano e Esther Zilkha e orientado pelo Professor PhD Paulo Cezar Pinto Carvalho.

O ideia do grupo foi utilizar o software GeoGebra para a construção de instrumentos, de forma a mostrar ao aluno a aparência e o funcionamento do elipsógrafo, do pantógrafo, do relógio de pêndulo e do teodolito. Cada integrante do grupo escolheu um instrumento, pesquisou o seu histórico, suas características de funcionamento, sua aplicabilidade e, por fim, fez a construção no GeoGebra. Como o objetivo do trabalho é também mostrar outra utilização deste software, foi descrita toda a sequência de comandos utilizada para a construção, bem como as dificuldades encontradas.

1.1. Justificativa

O ensino da matemática é um desafio diário para professores que encontram muita resistência por parte de seus alunos. Diversos artigos discutem sobre essa dificuldade de aprendizagem. Lorenzato (2006) indica que conceitos matemáticos de espaço, número e forma devem ser mostrados de diferentes maneiras aos alunos com o objetivo de desenvolver diversos processos mentais básicos para a aprendizagem matemática. Dentre esses processos, destacam-se a correspondência, a comparação e a classificação.

Em relação à Geometria, a Teoria dos Van-Hiele define cinco níveis de aprendizado: reconhecimento das formas, análise comparativa, argumentação lógica informal, dedução das demonstrações dessas argumentações e estabelecimento formal de teoremas. Assim, para o processo de ensino aprendizagem ser efetivo, deve seguir uma sequência que permita ao aluno expandir seus conhecimentos a partir da observação informal das figuras, evoluindo até compreender os sistemas axiomáticos da Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, o PCN, descrevem os conteúdos matemáticos necessários a cada ciclo da vida escolar do aluno. Também faz a análise dos objetivos a serem alcançados e a visão pedagógica da construção desse conhecimento. O PCN divide o ensino fundamental em 4 ciclos, cada um contendo duas séries e divide o conteúdo matemático em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação .

O Ensino Médio é dividido em 3 anos e o conteúdo de cada um desses anos é dividido em três temas estruturadores: Álgebra (números e funções), Geometria e Medidas e Análise de dados. O bloco de conteúdo de Espaço e Forma, do Ensino Fundamental, e o de Geometria e Medidas, do Ensino Médio, descrevem os conteúdos geométricos como parte importante do currículo da Matemática por desenvolver no aluno um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que ele vive. Além disso, o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem dos números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades.

O PCN sugere ao professor a prática das construções geométricas e a utilização de instrumentos para viabilizar a visualização e aplicação das propriedades das figuras e da construção de outras relações. Conforme Piaget (1967): “Todo conhecimento é ligado à ação de conhecer um objeto ou evento e assimilá-lo a um esquema de ação. Isto é verdade do mais elementar nível sensório motor ao mais elevado nível de operações lógico-matemáticas”.

Ao longo dos anos, a tecnologia digital tem evoluído e se tornado uma excelente ferramenta para o professor. Gravina e Santarosa (1998) analisaram a contribuição dos ambientes informatizados na aprendizagem matemática, verificando que esses ambientes, já naquela época, demonstravam ser ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. A principal vantagem é a possibilidade de alterar os limites entre o concreto e o formal.

Em seu trabalho, as autoras, mencionadas, citam Hebenstreint (1987): "o computador permite criar um novo tipo de objeto – 'os objetos concreto-abstratos'. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais". Dessa forma, a utilização dessas ferramentas é lícita e de excelentes resultados.

A proposta de criar, no GeoGebra, alguns instrumentos para a utilização em sala de aula está em consonância com as ideias desenvolvidas nos parágrafos anteriores. Os instrumentos foram criados para dar ao aluno a sensação de um instrumento real, favorecendo seu processo cognitivo de aprendizagem.

1.2. Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em oito capítulos. O primeiro capítulo faz uma contextualização sobre a proposta do trabalho e a prática educacional. O segundo capítulo descreve a origem e a utilização do programa GeoGebra. Neste capítulo são descritos alguns comandos especiais utilizados na confecção dos instrumentos. Esses dois capítulos são comuns aos quatro trabalhos. No terceiro capítulo, cada autor descreve seu instrumento, contando sua origem, construção e funcionamento. No quarto capítulo, é apresentada a sequência de construção de cada instrumento, listando os comandos utilizados. No quinto capítulo será apresentada a justificativa matemática para o funcionamento e utilização do instrumento. No sexto capítulo, cada autor apresenta sugestões para a utilização do seu instrumento em sala de aula. Os capítulos finais trazem a conclusão e as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2. Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos

2.1. Introdução:

A palavra GeoGebra surgiu da aglutinação das palavras Geometria e Álgebra e é o nome do aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License e escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

2.2. História

O GeoGebra foi objeto de tese de doutorado de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo, Áustria em 2001. Ele criou e desenvolveu esse software com o objetivo de obter um instrumento adequado ao ensino da Matemática em todos os níveis (do Ensino Fundamental ao Ensino Superior), combinando recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem É um software gratuito, de fácil download e com versão portável, muito útil, que pode ser acessada normalmente a partir de um pendrive. O programa é escrito em Java e, por ser multiplataforma, pode ser instalado com Windows, Linux ou Mac e apresenta, ultimamente, uma versão beta para Android e outra versão beta para 3D.

Sua popularidade tem crescido continuamente e hoje o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, com mais de **300.000** downloads mensais. O download do programa pode ser feito a partir do site oficial do programa, no link http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/ .Clicando na opção Software, é possível escolher para qual sistema operacional se deseja o download. Neste endereço há, ainda, a opção Portable, que disponibiliza o programa para utilização direta do pendrive, sem necessidade de instalação no computador. A versão para tablet (Android) ainda está em testes e funciona com limitações.

Foram criados institutos regionais, que são membros do IGI (International GeoGebra Institutes), cujo propósito é agregar interessados no uso do GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem, criando uma comunidade aberta que compartilhe seus conhecimentos no treinamento, suporte e desenvolvimento de materiais de apoio para alunos e professores, promovendo a colaboração entre profissionais e pesquisadores, com o objetivo de desenvolver materiais gratuitos para o ensino, a aprendizagem e a divulgação da matemática a todos os públicos. Esses Institutos oferecem suporte, promovem oficinas, fóruns de debate e de dúvidas.

São ao todo 62 Institutos GeoGebra em 44 países e o Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro, tem sua sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense e pode ser visitado no endereço http://www.geogebra.im-uff.mat.br/ . O Instituto GeoGebra em São Paulo é sediado na PUC-SP e pode ser visitado pelo endereço eletrônico http://www.pucsp.br/geogebrasp/ . Outros institutos podem ser localizados clicando na opção Community do site oficial.

O software permite realizar construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas ou com funções que podem ser modificados posteriormente de forma dinâmica. Equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. O software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos.

Uma características importante do GeoGebra é que todo elemento geométrico desenhado na janela de visualização, terá sua representação algébrica mostrada na janela de álgebra. E vice versa, pois se descrevermos a representação algébrica de um elemento na caixa de entrada, a janela de visualização mostrará a representação geométrica do mesmo.

2.3. Programa GeoGebra 2D

O programa possui uma interface amigável e é bastante intuitivo na maioria das vezes. Os comandos estão dispostos em ícones abaixo da linha dos menus. Além das Janelas de Visualização, de Álgebra e do campo entrada, visíveis na abertura de um novo arquivo, existem ainda a Janela de Protocolo de construção, que mostra a sequência de construção executada, e a janela para planilha, para utilizar entrada de dados do Excel.

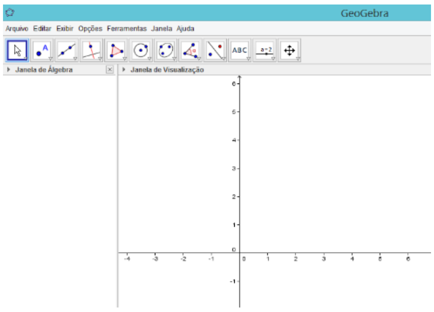


Figura 1 – Tela do GeoGebra 2D

No menu Opções pode ser escolhido o tamanho da fonte que se deseja usar durante todo o trabalho, esta pode ser alterada durante todo o processo de construção sem causar nenhum prejuízo.

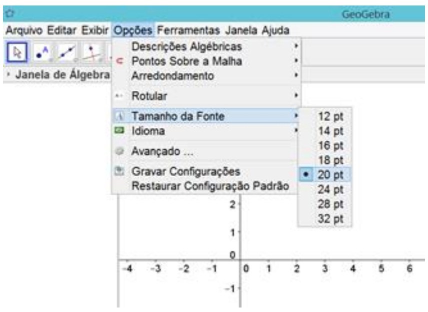
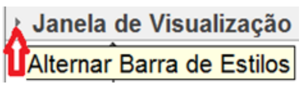
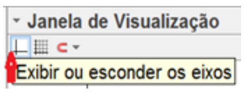


Figura 2 – O tamanho da fonte

Exibir ou esconder os eixos pode ser conseguido clicando em



e em seguida em



O Campo de Entrada se encontra abaixo da janela de visualização. Caso não esteja aparente, click em exibir no menu principal e em seguida click em Campo de Entrada.

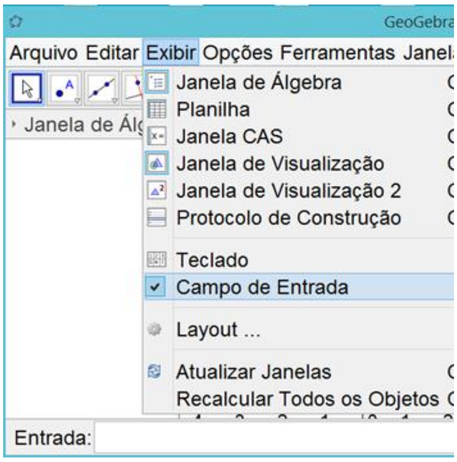


Figura 3 – Campo de Entrada

No capítulo 3 deste trabalho será descrita a sequência de comandos utilizada para a construção do instrumento e o endereço eletrônico do arquivo finalizado para utilização. Mas é importante destacar que, durante o processo de construção, além dos comandos básicos, também foi necessário estudar e utilizar comandos mais avançados que serão descritos abaixo e no decorrer da sequência de construção de cada instrumento.

2.3.1. Comando vetor

Esse comando e suas variações foram de muita utilidade para a construção do acabamento dos instrumentos construídos. A partir de um ponto central, utilizando os conceitos de vetor unitário e de translação de um ponto pelo vetor, foi possível criar pontos que estivessem vinculados ao movimento de outros pontos. Por exemplo:

Construa o ponto A.()

Construa o ponto B.()

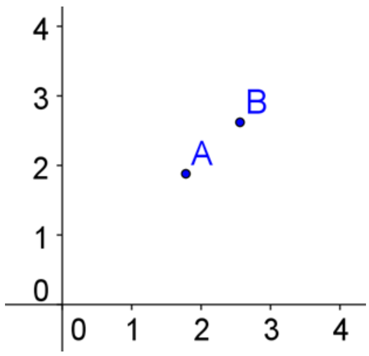


Figura 4 – Construção com vetores

No Campo de Entrada digite:

- Ampliar[-5,-5,18,7] e tecle enter. É uma sugestão para os limites dos eixos,.
- u=VetorUnitário[segmento[A,B]] e tecle enter. Criou-se o vetor u.
- C=A – u e tecle enter. Criamos o ponto C.
- D=A+3u e tecle enter. Construímos o ponto D.

Estes comandos poderão ser copiados e colados no Campo de Entrada do GeoGebra, para uso.

Para trabalhar no outro eixo é possível construir o vetor perpendicular ao vetor u. Observa-se que, ao mover o ponto B e, por consequência, o vetor AB, os pontos C e D acompanham o movimento.

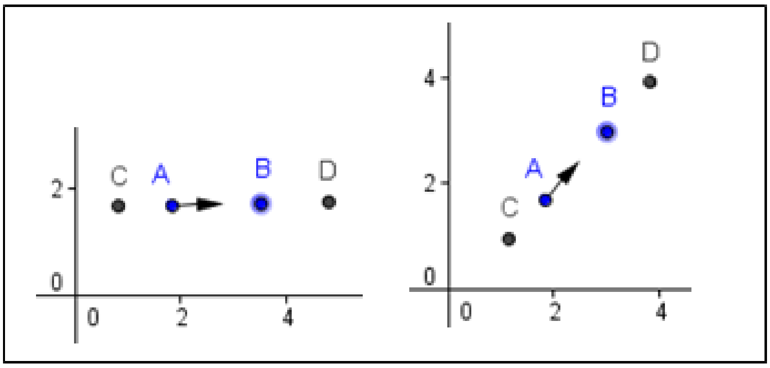


Figura 5 – Construção com vetores

2.3.2. Comando lista

O Comando lista permite fazer uma lista com pontos e foi muito utilizada para criar os vértices de alguns polígonos construídos. É um comando que diminui a quantidade de pontos listados na Janela de Álgebra, ao mesmo tempo em que permite manipulação de todos ao mesmo tempo. Por exemplo:

Digite na caixa de entrada “lista1={(1,1),(1,2),(2,3),(2,1.5)}”

- lista1={(1,1),(1,2),(2,3),(2,1.5)} e tecle enter. Foi criada uma lista de pontos na Janela de Álgebra.

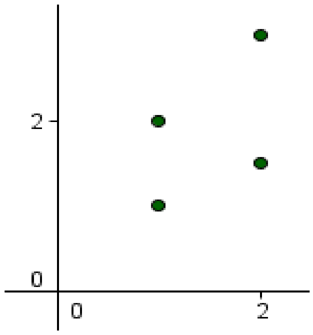


Figura 6 – Lista de pontos

2.3.3. Variáveis Booleanas

O programa possui um comando utilizado para exibir e esconder objetos, como mostra a figura abaixo. Esse comando cria uma variável booleana, que é relacionada aos outros elementos da construção. Também cria um pequeno botão, que ao ser acionado troca o valor da variável de true para false e vice versa.

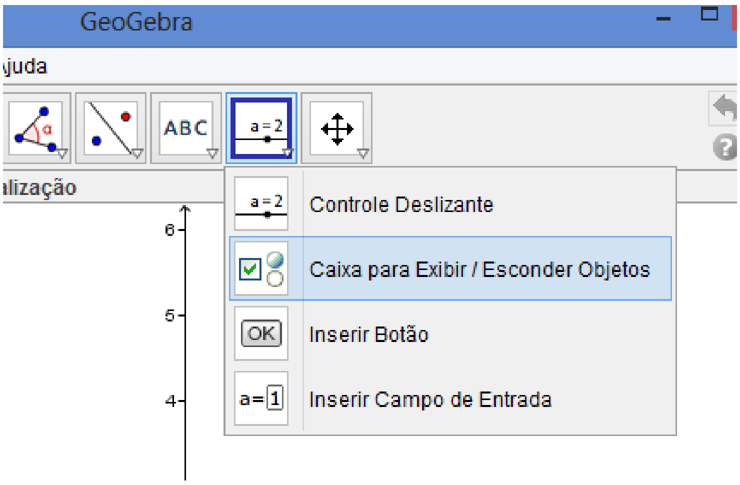


Figura 7 – Comando Exibir Objetos

Também é possível definir uma variável booleana através do campo de entrada, selecionar os elementos que a variável irá controlar e utilizá-la para programação.

2.3.4. Comandos de Definição

Em vários momentos durante a finalização dos instrumentos no GeoGebra, foi necessário a utilização desses comandos para programação.

- DefinirCoordenadas[A,x(B),y(B)] – significa que o ponto A receberá as coordenadas x e y do ponto B.

- DefinirLegenda[bt2,"Animar"] – significa que a legenda do botão bt2 será a palavra Animar.
- DefinirValor[figuras,5] – significa que a variável figuras receberá o valor 5.

2.3.5. Camadas

Para o acabamento dos instrumentos, foi necessário a utilização de vários polígonos, círculos e arcos. Mas, para dar a aparência real ao trabalho final, temos que considerar as diferenças de plano entre os elementos que compõem os instrumentos. Cada elemento desenhado no GeoGebra é desenhado em alguma camada. As camadas variam de 0 a 9. Observe a situação abaixo:

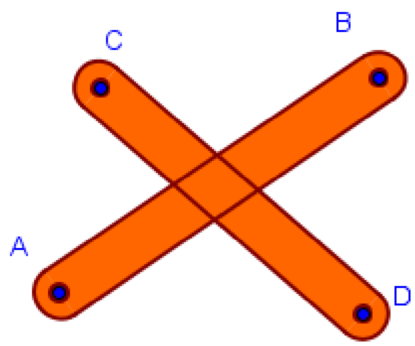


Figura 8 – Duas Hastes na Mesma Camada

Veja que as linhas das hastes se cruzam e não é possível perceber qual das duas foi constrída primeiro ou qual delas está por cima da outra.

Para alterar a camada da haste CD, é necessário clicar com o botão direito do mouse na haste e escolher a opção Propriedades. Na guia Avançado, escolha uma camada acima da camada em que ele foi construído.

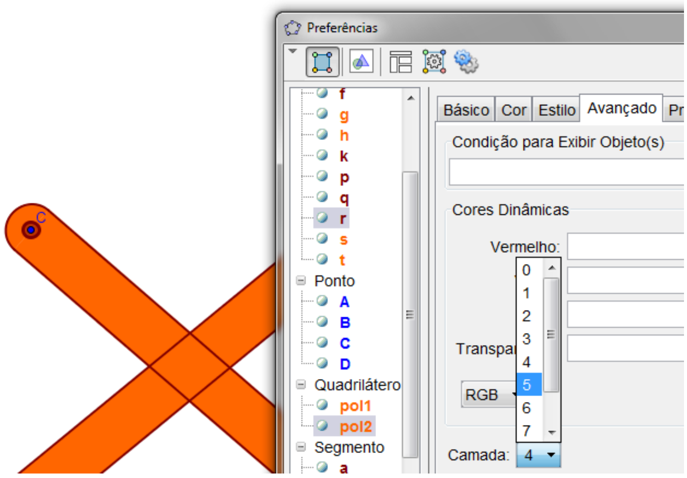


Figura 9 – Alteração das Camadas

Todos os elementos da haste CD foram alterados para camada 5. O resultado final mostra a diferença de profundidade entre as hastes.

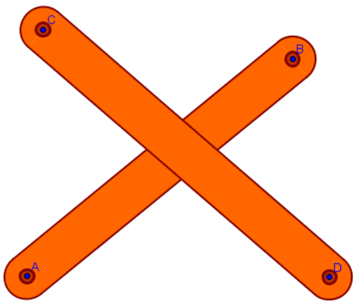


Figura 10 – Hastes em Camadas Diferentes

2.4. Programa GeoGebra 3D

O programa ainda está em desenvolvimento. Foi disponibilizada uma versão beta, online, no final de 2010. Ainda não é possível fazer o download do programa, mas sim fazer construções e perceber o novo universo de possibilidades.

Para utilizar o programa é necessário ter instalado o Java 5.0 ou o superior no seu PC, depois clicar no link http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp e fazer o download do arquivo geogebra-50.jnlp. Após o download, execute este arquivo. Crie um ícone de acesso na área de trabalho do seu computador.

Figura 11 – Ícone do GeoGebra 3D na área de trabalho

Para abrir o programa é necessário estar online, em seguida clique no link. A interface do programa contempla a interface 2D acrescida da janela de visualização 3D e dos comandos específicos de uso na Geometria Espacial.

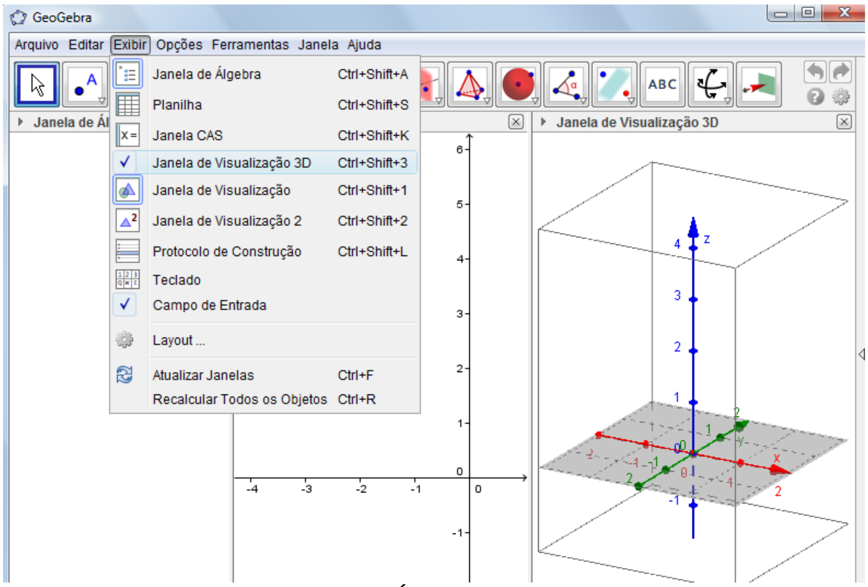


Figura 12 – As Janelas de Álgebra, de Visualização 2D e 3D

Esses comandos nos possibilitam criar planos passando por três pontos, planos perpendiculares, paralelos, além de sólidos como pirâmides, primas, esferas, etc. Também podemos calcular seus volumes.

Uma vez tendo feito e gravado algumas construções, essas geram arquivos que não são possíveis de serem abertos dando dois cliques, mas somente depois de executarmos o programa.

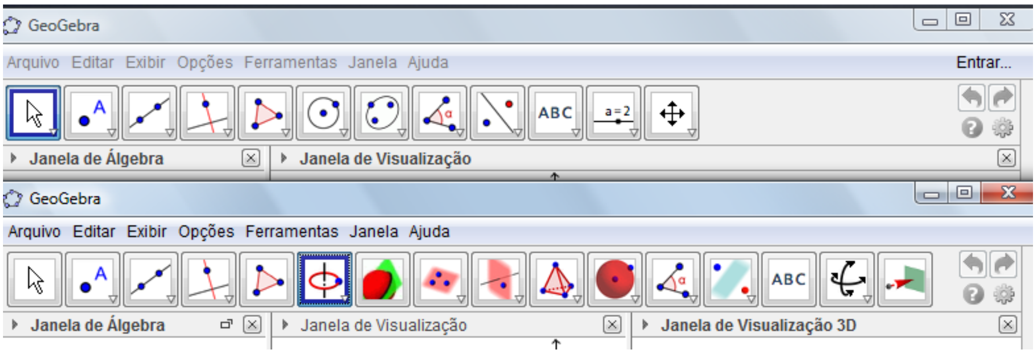


Figura 13 – Comparativo das barras de ferramentas do 2D e do 3D

A fato da versão beta do GeoGebra 3D existir há apenas 3 anos faz com que tenha sido pouco comentada logo, o conhecimento do programa é construído na prática, com o seu uso.

No caso do teodolito observei que para a construção de uma figura na versão beta é conveniente vincularmos tudo o que está sendo criado, para facilitar a movimentação. Ou seja, se desejarmos um ponto, sugere-se que este seja vinculado a um plano inicial ou uma reta. O mesmo acontece com reta, polígonos e qualquer figura. Caso não siga este procedimento, fica muito difícil ao longo da construção localizar, no espaço virtual, o que é preciso.

Uma ferramenta muito útil dessa versão (Figura 14) é utilizada para podermos ter a visão da figura de vários ângulos, ou mesmo rotacioná-la.

Figura 14 – Visualizar a figura de diversos ângulos

A construção no 3D reforça a teoria que é mencionada na Geometria Espacial, exemplo: “Por três pontos não-colineares passa um único plano”, dados três pontos não colineares, na versão Beta, construímos um plano. Com o uso deste programa o aluno visualiza facilmente o que é dito em sala de aula, construindo assim o conhecimento. Com certeza é um novo olhar para o que já era trabalhado em sala de aula.

3. Instrumento: Teodolito

3.1. Descrição

O teodolito é um instrumento óptico utilizado na topografia, para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais com o objetivo de facilitar o cálculo de distâncias e alturas. Empregado na Geodésia e na Agrimensura para triangulação em redes, o instrumento é também usado pela engenharia, arquitetura e por outros profissionais e técnicos, em grandes construções de estradas, demarcações de fazendas e sítios.

Figura 15 – Teodolito Eletrônico

3.2. História

Da Groma ao GPS – A Evolução do Teodolito

Topografia é a ciência que estuda a representação detalhada de uma porção da superfície terrestre. Desde o estágio primitivo da civilização, o homem tratou de demarcar sua posição e seu domínio. Logo, ele já aplicava a Topografia.

Os babilônicos, os egípcios, os gregos, os chineses, os árabes e os romanos foram os povos que nos legaram instrumentos e processos que, embora simples, serviram para descrever, delimitar e avaliar propriedades tanto urbanas como rurais, com o objetivo de cadastrar e elaborar mapas e plantas, tanto militares como geográficas, que foram de grande valia para a época e mesmo como documento histórico para nossos dias.

Retrocedendo-se ao ano de 3.000 a.C., vemos que os babilônios e os egípcios utilizavam a corda para medir distâncias. Estes eram chamados de “esticadores de cordas”.

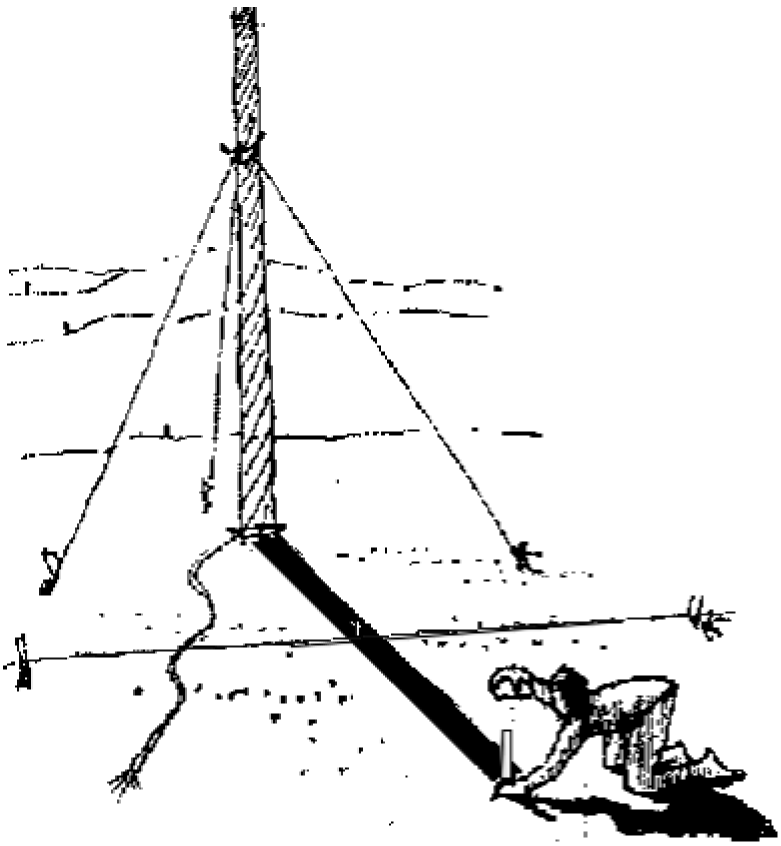


Figura 16 – Esticadores de cordas

Os egípcios utilizavam também a Groma, um instrumento primitivo, para levantamentos topográficos. Ela consistia de dois braços (cerca de 1 m de comprimento) cruzados perpendicularmente e extremidade de cada um dos quatro cantos pendurados com ou sem um prumo na corda. Além de ser utilizado para alinhar direções em áreas planas até objetos distantes e depois transferir às linhas para o solo marcando linhas retas, ainda podia ser usada para marcar ângulos necessários nas construções, como por exemplo, nas pirâmides. Depois em Roma era utilizada para projetar às ruas das cidades romanas.

Figura 17 – Groma

Ptolomeu, por volta de 150.d. C. descreveu o quadrante aplicando-o a observações astronômicas. Na mesma época também surge o astrolábio, desenvolvido por Hiparco, que pode ser considerado um precursor do teodolito.

Figura 18 – Ptolomeu usando o Quadrante

Em 1720, Jonathan Sisson construiu o primeiro teodolito contendo quatro parafusos niveladores, Ignácio Porro, inventor de instrumentos óticos, contribuiu acoplando o telescópio, aprimorando assim o teodolito. Ao longo dos anos foi sendo transformado e a ele agregados sistemas e mecanismos que o tornaram mais preciso em suas medições.

Figura 19 – Teodolito feito em Bronze

O teodolito é um instrumento óptico de medida utilizado na topografia, na Geodésia e na agrimensura para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais, usado em redes de triangulação.

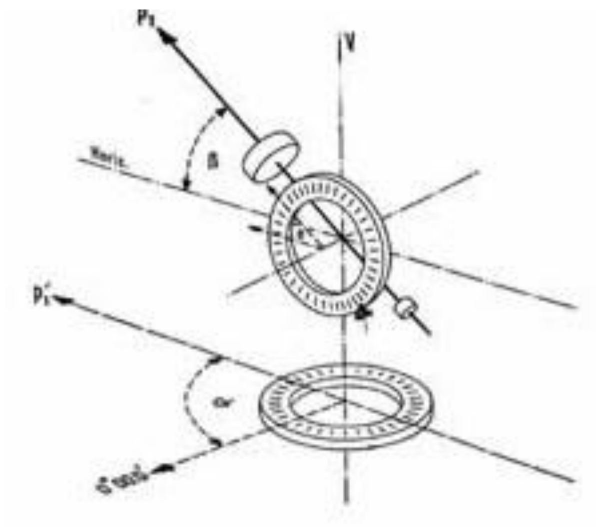


Figura 20 – Gráfico da disposição dos círculos

Ambos os eixos de um teodolito estão equipados com círculos graduados que podem ser lidos através de lentes de aumento. (R. Anders ajudou M. Denham a descobrir essa tecnologia em 1864.) O círculo vertical que se move sobre o eixo horizontal deve estar a 90 graus quando o eixo horizontal é visto.

Figura 21 – Teodolito Mecânico

Na década de 70, surgiram os teodolitos eletrônicos. A diferença básica, em relação aos teodolitos clássicos ótico-mecânicos, consistiu na substituição do leitor ótico de um círculo graduado por um sistema de captores eletrônicos. Nestes instrumentos, os ângulos são lidos diretamente pelo topógrafo em um visor com “display” de cristal líquido semelhante ao existente em uma calculadora eletrônica.

Figura 22 – Teodolito Eletrônico

Da captação eletrônica de ângulos, tanto em sua versão incremental como absoluta, passou-se, quase imperceptivelmente para a concepção da atual das Estações Totais Eletrônicas, que vieram para revolucionar a Topografia e simplificar os trabalhos de campo e escritório. A Estação

Total nada mais é que um distanciômetro (trena) eletrônico geminado com um teodolito eletrônico, sendo equipado com cartões magnéticos ou coletores de dados, que dispensam as tradicionais cadernetas de campo. Uma Estação Total combina todas as vantagens de um teodolito eletrônico e de um medidor eletrônico de distância (MED), anteriormente apenas acoplados, com a vantagem atual da facilidade de um controle central único.

Com este sistema, os dados observados no campo são transferidos diretamente para um microcomputador, o qual processa as informações recebidas; outra opção é armazenar os dados coletados em cartão de memória, para posterior processamento no escritório, em seguida enviá-los para o periférico de impressão (“plotter”) para desenho das plantas e cartas topográficas.

Em decorrência do acentuado avanço tecnológico do instrumental, as equipes de campo sofreram redução no número de auxiliares, tornando os trabalhos topográficos menos onerosos, rápidos, mais confiáveis e precisos. Apesar de serem instrumentos caros, se tornam viáveis em função das grandes vantagens que eles oferecem.

Figura 23 – Receptor de sinais do GPS

A triangulação usada no teodolito inspirou o GPS, que a aplica através de diferentes princípios. O teodolito utiliza a geometria e a trigonometria plana, e o GPS a física, pelo processo da emissão de ondas eletromagnéticas.

O GPS foi criado pelos EUA para fins militares. Desde 1960, a Força Aérea e a Marinha americana têm trabalhado no desenvolvimento de um sofisticado sistema de navegação por satélite. A marinha patrocinou dois programas, o Transit e o Timation. Ambos operavam em modo 2D, pois usavam latitude e longitude. No mesmo período a Força Aérea estudou o uso 3D, utilizando a intersecção de esferas para determinar a posição da latitude, longitude e altitude, com o programa 612B.

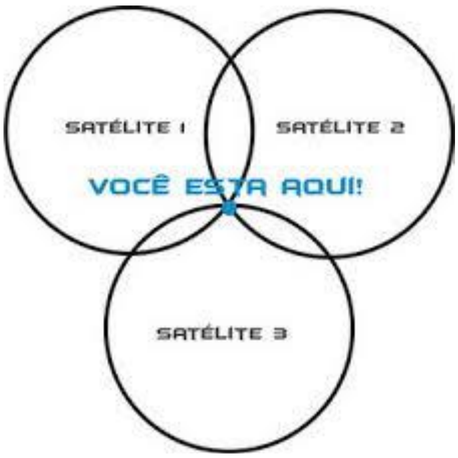


Figura 24 – Triangulação do GPS

Em 1973 surgiu o programa NAVSTAR GPS, por meio da fusão dos programas Timation e 621B. Na década de 80 foram produzidos os aparelhos GPS e finalizada a rede de 24 satélites. O sistema passou a proporcionar cobertura completa, e foi aberto para o uso civil. Já existe um sistema russo e está em desenvolvimento um sistema europeu e um chinês.

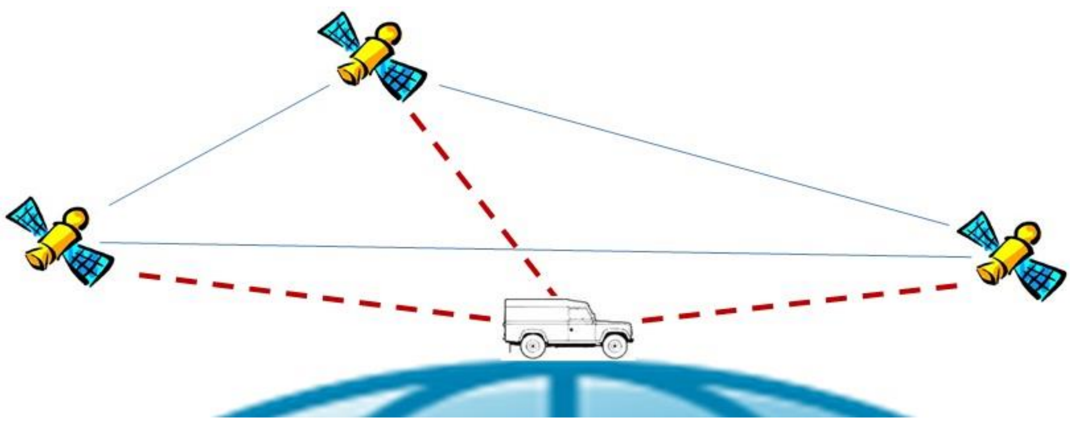


Figura 25 – Reflexões dos sinais de satélites

3.3. Como se dá o uso do Teodolito Mecânico, e o Eletrônico.

O teodolito é muito utilizado para os levantamentos topográficos. A topografia é à base de todos os projetos e obras realizadas por engenheiros e arquitetos, tais como obras viárias, núcleos habitacionais, aeroportos, hidrografia, usinas hidroelétricas, telecomunicações, etc.

Nas últimas décadas houve grande desenvolvimento nos equipamentos e métodos utilizados para a aquisição de dados georeferenciados. O teodolito realiza medidas de ângulos verticais e horizontais.

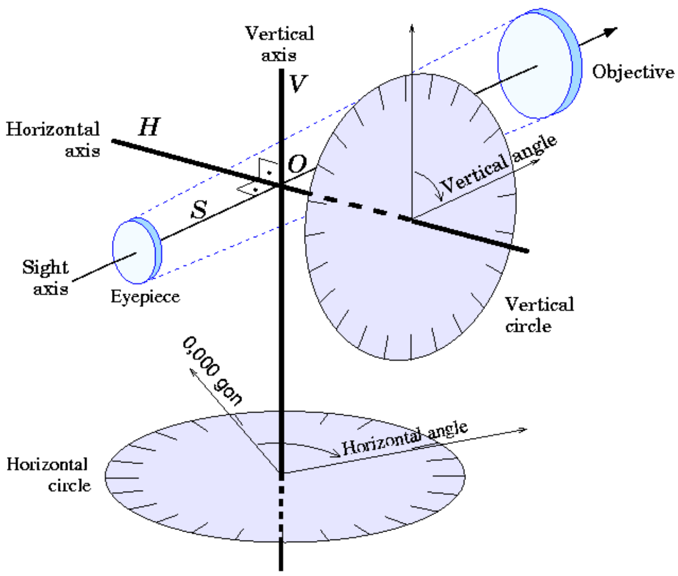


Figura 26 – Gráfico da disposição dos círculos vertical e horizontal.

Basicamente é um telescópio com movimentos graduados na vertical e na horizontal, e montado sobre um tripé, para nível ou posicionado onde o usuário possa observar. Podendo possuir ou não uma bússola incorporada. O observador faz leituras olhando através do telescópio ou ajustando a mira vertical para encontrar a extrema esquerda do objeto em estudo. O círculo horizontal é então rotacionado e travado no lugar. A direção específica do círculo deve ser gravada pelo observador. Após isso, o próximo objeto é estudado rotacionando o círculo no sentido anti-horário, o que é repetido até todos os objetos sejam lidos.

Em um levantamento topográfico são feitas determinações angulares e lineares, algumas encontradas através do teodolito e outras calculas com o uso dos dados obtidos.

3.4. Determinações angulares e lineares:

- **Azimute (Az):** é o ângulo horizontal, no sentido horário, tomado em relação ao Norte. O nome é de origem árabe, de assumut, traduzido: caminho ou direção.

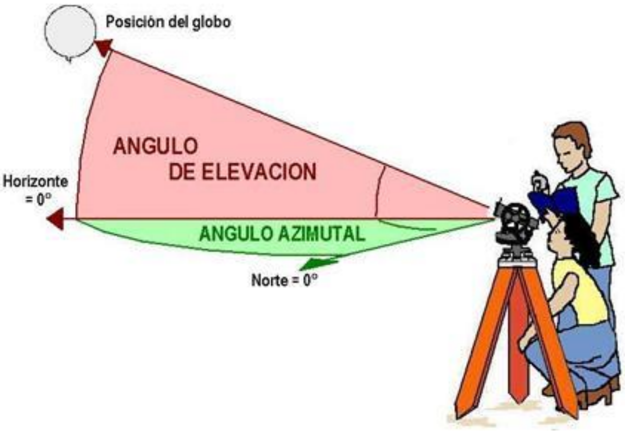


Figura 27 – Ângulo Azimutal

- **Ângulo Horizontal (Hz):** é medido entre as projeções de dois alinhamentos do terreno, no plano horizontal.

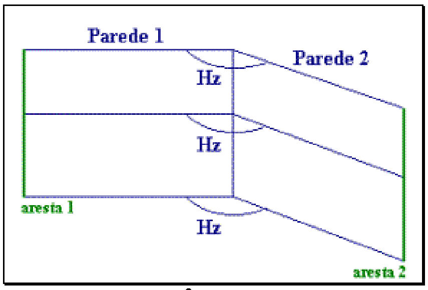


Figura 28 – Ângulo Horizontal

- **Ângulo Vertical (α)**: é medido entre um alinhamento do terreno e o plano do horizonte. Pode ser ascendente (+) ou descendente (-), conforme se encontre acima (aclive) ou abaixo (declive) deste plano.

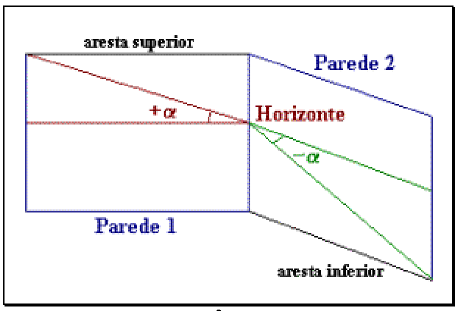


Figura 29 – Ângulo Vertical

- **Distância Horizontal** (**DH**): é a distância medida entre dois pontos, no plano horizontal. Este plano pode, conforme indicado na figura a seguir, passar tanto pelo ponto **A**, quanto pelo ponto **B** em questão.

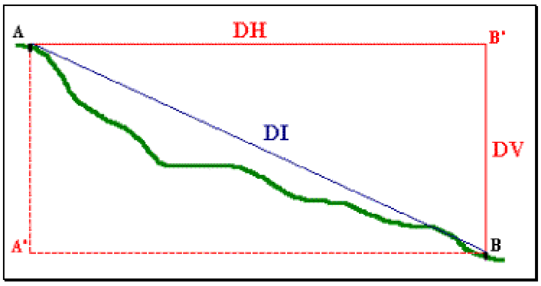


Figura 30 – Grandezas Lineares

- **Distância Vertical ou Diferença de Nível** (**DV** ou **DN**): é a distância medida entre dois pontos, num plano vertical que é perpendicular ao plano horizontal. Este plano vertical pode passar por qualquer um dos pontos **A/A'** ou **B/B'** já mencionados.

- **Distância Inclinada** (**DI**): é a distância medida entre dois pontos, em planos que seguem a inclinação da superfície do terreno.

Além do teodolito, alguns outros equipamentos são utilizados nos levantamentos topográficos, tais como:

Figura 31 – Baliza

Figura 32 – Trena

Baliza

Trata-se de uma haste de metal cilíndrica, com ponta em uma de suas extremidades, pintada de vermelho e branco, se assemelha a um dardo de competições. O auxiliar segura a **baliza**, no prumo, sobre um determinado ponto no solo (demarcado com um piquete), para que o geômetra (ou agrimensor), situado em outro ponto distante, vise-a com o uso do teodolito.

Trena

Pequenas distâncias, pouco inclinadas, podem ser medidas á trena. Usa-se trena de fibra de vidro (cabo de agrimensor) ou trena metálica.

3.5. Teodolito Mecânico

O teodolito Mecânico serve para medir ângulos, com o uso de limbos (que são cristais divididos em 360 partes, que formam os ângulos, como subdivisão tem o limbo dos minutos (divididos em 60), e alguns com a divisão em segundos, normalmente são feitas 3 divisões dentro do minuto, 20, 40 e 60 segundos), o teodolito mecânico mede ângulos horizontais e também verticais.

A partir dos ângulos se calculam distâncias, e consequentemente áreas. É um aparelho preciso, porém já ultrapassado, é totalmente analógico, e registra apenas os ângulos de uma área, sendo necessário anotar todos os dados e calculados manualmente. Esse equipamento, apesar de pouco prático, é extremamente preciso, e muitos profissionais ainda o usam até hoje. A precisão dele pode chegar a 3 segundos por quilômetro, isto é, uma falha de no máximo 0.0008 graus no ângulo por quilômetro, extremamente preciso.

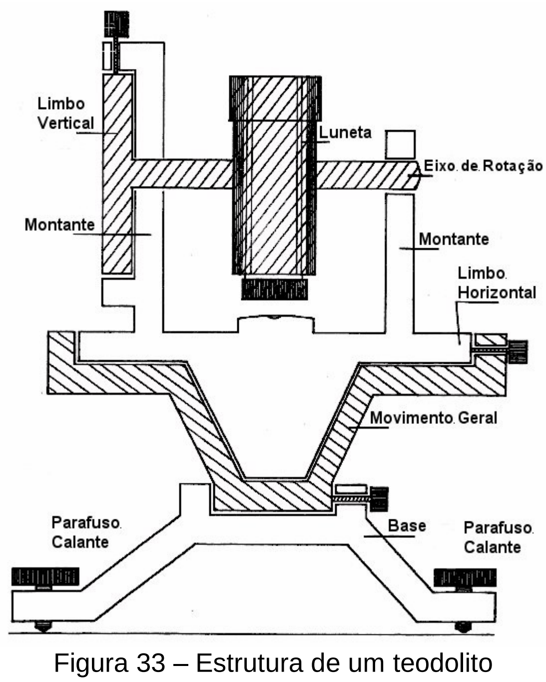


Figura 33 – Estrutura de um teodolito

3.6. Teodolito Eletrônico

O Teodolito Eletrônico tem a mesma função, de medir ângulos, porém, ao invés de dar diferença na medição em graus é dada de 20 em 20 segundos, normalmente, a diferença de espaço é menor, o que o torna muito mais preciso. A medida eletrônica dos ângulos é baseada na leitura digital de um círculo codificado, realizada através de feixe de luz, e os valores medidos são apresentados diretamente em um visor de cristal líquido.

Os dois são similares, só que o eletrônico pode fazer o cálculo para o topógrafo, e o mecânico dá apenas as medidas dos ângulos, necessitando ainda, aplicar Trigonometria. Além de que no eletrônico geralmente é as medidas são mais precisas.

Os teodolitos eletrônicos que além de medir ângulos, possuem também a função de calcular a distância (distanciômetro) são chamados de Estação Total. O distanciômetro emite um sinal que deve ser refletido na mesma direção em que foi recebido. A determinação das distâncias (horizontal, vertical e inclinada) é feita em poucos segundos e os valores são apresentados no visor.

Até bem pouco tempo para reflexão do sinal era, necessariamente, usado um prisma, mas, a mais recente inovação, são os distanciômetros eletrônicos que operam sem unidade refletora.

4. Sequência de construção do Teodolito no GeoGebra 3D

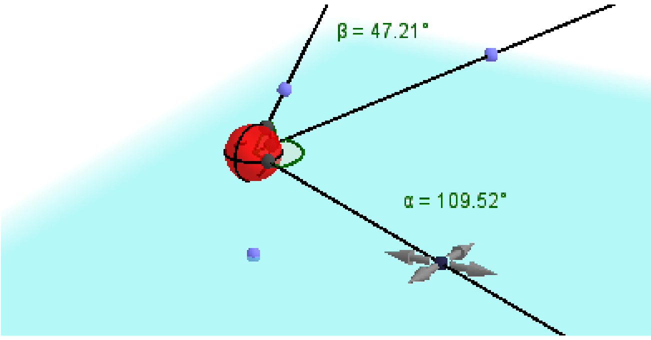


Figura 34 – Teodolito

É importante lembrar que a versão 5.0 Beta do GeoGebra ainda está sendo testada, e que não é possível fazer download e trabalhar diretamente no computador, e sim através do link.: http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp

Abrindo o GeoGebra 5.0 Beta visualizamos inicialmente a mesma tela e barra de ferramentas que o GeoGebra 2D.

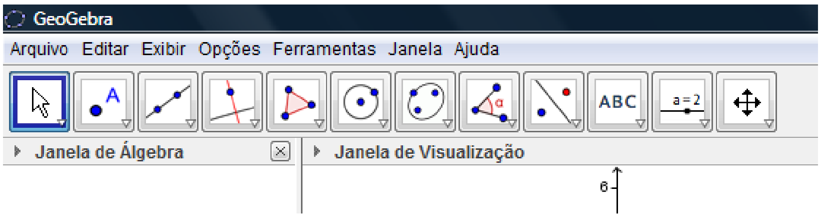


Figura 35 – Barra de ferramentas

Para encontrarmos o 3D devemos ir em Exibir, onde aparecerão várias opções, e clicar em Janela de Visualização 3D

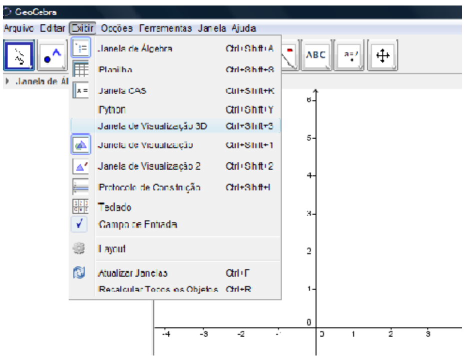


Figura 36 – Exibir Janela de Visualização 3D

Surgirá a barra de ferramentas acrescida de várias opções, entre ela, a Janela de Visualização 3D. Ao longo da construção trabalhei com apenas duas janelas abertas, pois, nesta versão, quando temos mais janelas abertas o programa está travando. Costumo usar a Janela de Álgebra e a de Visualização 3D.

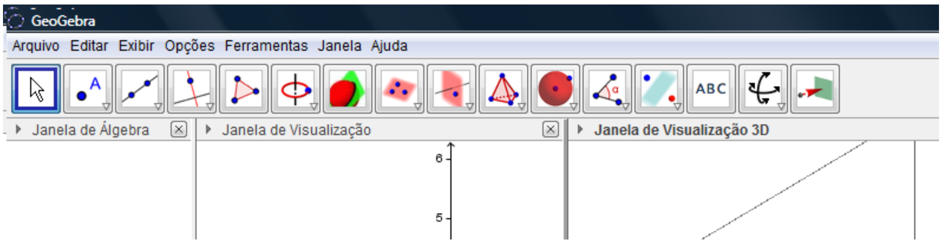


Figura 37 – Barra de Ferramentas 3D

4.1. Passos para a construção do Teodolito

- No campo de Entrada, digitar z=0; Cria-se um plano **a.**
- Criaremos o ponto, qualquer, **A** no plano **a** (ponto em objeto ).
- Em seguida no campo de Entrada criamos o ponto **B** com coordenadas (x(A), y(A), 1.1), de modo que este ponto fique um pouco acima do ponto **A**.
- Do mesmo modo criamos os pontos **C**, com coordenadas (x(A), y(A), 1.5) e **D** com coordenadas (x(A), y(A), 1.9).

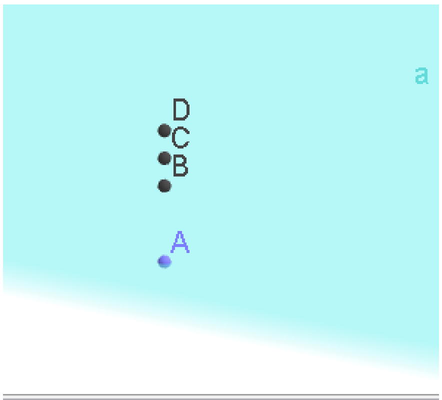
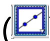
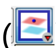


Figura 38 – Quatro pontos verticais

- Clicamos () criando a Reta $\overleftrightarrow{AC}$ (**b**)
- Criamos o Plano **c**, paralelo ao plano **a**, passando por **C,** clicando em (),
- Construiremos o Círculo **d,** centro em **C** eixo $\overleftrightarrow{AC}$ e raio 0.4 ().

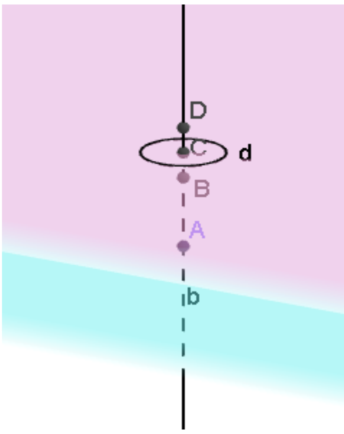


Figura 39 – Dois planos paralelos e o círculo d

- Próximo passo, dois pontos no plano **c**, **E** e **F** ( ).
- Traçar semirretas $\overrightarrow{\mathbf{CE}}$ e $\overrightarrow{CF}$ ( )
- Interseção de dois objetos, semirreta $\overrightarrow{\mathbf{CE}}$ **(e)** e círculo **c** e semirreta $\overrightarrow{CF}$ **(f)** e círculo **d** .(Pontos **G** e **H**) ( ).
- Círculo **g**, definido por 3 pontos, **D**, **H** e **B** ( )
- Plano **h**, definido por 3 pontos, **D**, **H** e **B,** que será perpendicular aos planos **a** e **c** ( ).
- Ponto **I** no plano **h** ( ).
- Semirreta **(i)** $\overrightarrow{\boldsymbol{CI}}$ ( ).
- Interseção entre 2 objetos, Semirreta **(i)** $\overrightarrow{\boldsymbol{CI}}$ e Círculo **g,** formando ponto **J** ( ).
- Esfera **j** com centro em **C,** passando por **B** ( ).
- Ângulo α, $E\hat{C}F$, horizontal e ângulo β, $I\hat{C}F$, vertical ( ).

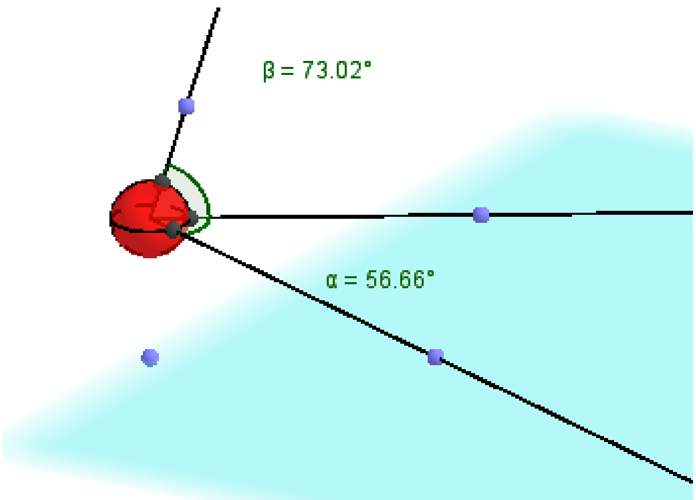


Figura 40 – Teodolito

Temos o teodolito construído. Nos pontos E, F e I, sobre as semirretas, podemos abrir ou fechar os ângulos **α** e **β.**

Os próximos passos são os mesmos, para a construção de um segundo teodolito. Na prática pode-se ter um único teodolito, que movimentamos de um lado a outro, ou dois, que fazem a triangulação com o local que desejamos medir. Esta segunda opção foi a escolhida no trabalho, pois da uma melhor visualização.

É importante verificar, na construção do segundo teodolito, que os pontos sejam vinculados aos respectivos planos. Quando isso não acontece a figura "congela" e não conseguimos dar prosseguimento à construção.

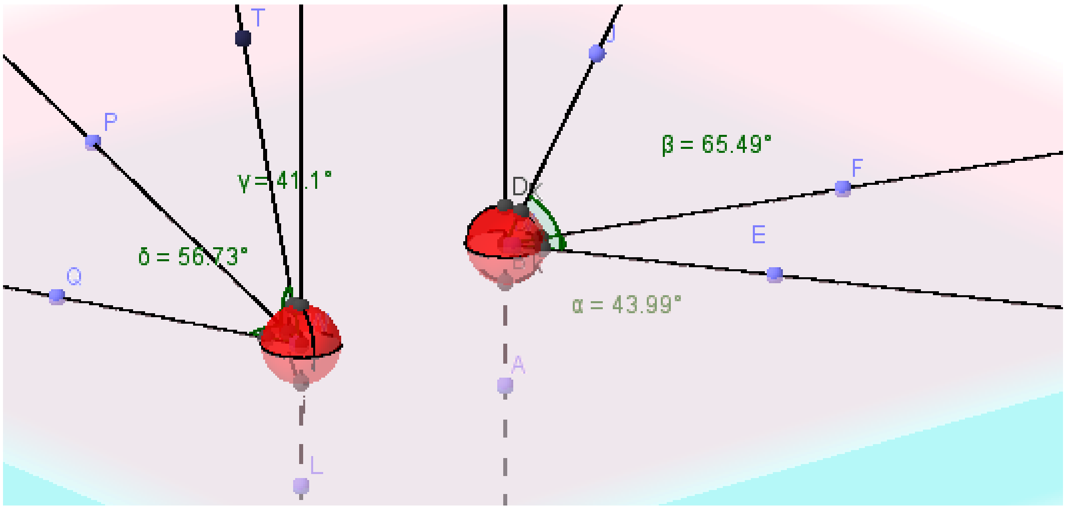


Figura 41 – Dois Teodolitos

O cenário onde será aplicado o teodolito, necessariamente tem que ser em 3D. Podemos construir prisma, pirâmides, etc. que o programa disponibiliza, ou incluir funções trigonométricas que sugerem relevos, como montanhas.

4.2. Animação

O instrumento e exemplos de aplicação encontram-se no GeoGebra Tube, nos seguintes Links, com algumas observações no item, “Estratégia e aplicabihttp://www.geogebratube.org/material/show/id/94039lidade em sala de aula”

Este link apresenta o Teodolito, não há cenário. É apenas para o visitante se familiarizar com o instrumento:

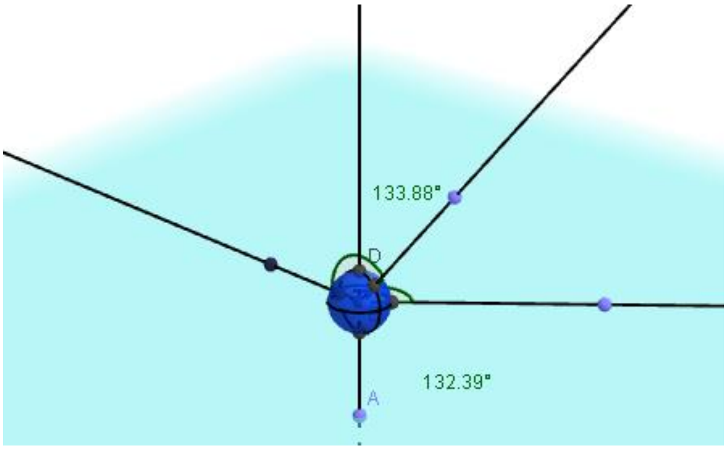


Figura 42 – Teodolito 0

http://www.geogebratube.org/material/show/id/94039

http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/94039

Neste aplica-se as Razões Trigonométricas, similar a geometria plana, sendo uma versão mais atual:

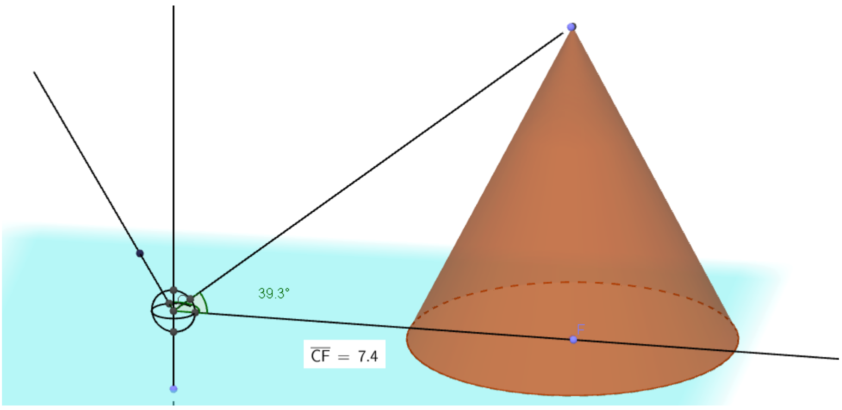


Figura 43 – Teodolito 1

http://www.geogebratube.org/material/show/id/93204

http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/93204

Os próximos links tratam das Leis dos Senos e do Cosseno:

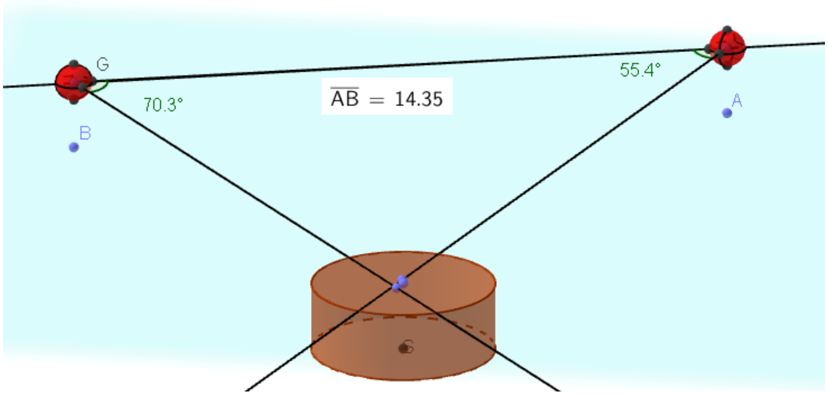


Figura 44 – Teodolito

http://www.geogebratube.org/student/m93222

http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/93222

http://www.geogebratube.org/material/show/id/94035

http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/94035

Esta apresentação é a mais completa, pois é possível abordar vários conteúdos da trigonometria:

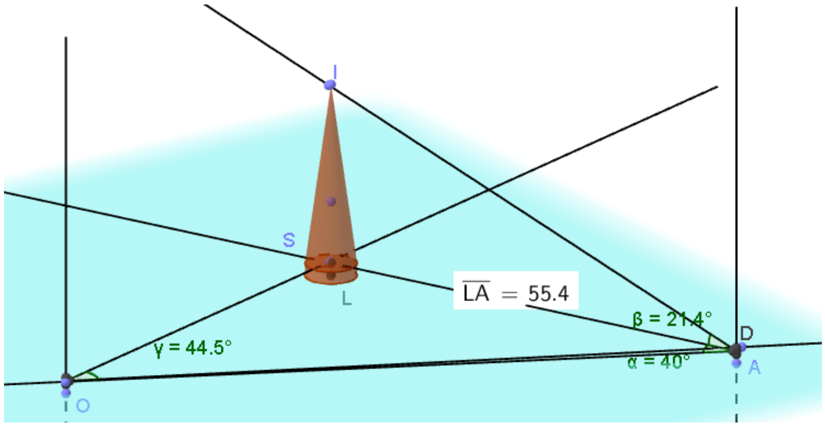


Figura 45 – Horizontal e Vertical

http://www.geogebratube.org/student/m94157

5. Justificativa Matemática

Para Boyer (1994), o desenvolvimento da geometria pode ter sido entusiasmado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras. Destacando que “a geometria pode ter sido uma dádiva do Nilo” o autor argumenta que no Egito antigo, o rio Nilo extravasava às margens e inundava o seu delta. Como consequência, o delta do Nilo recebia lamas aluviais ricas em nutrientes, tornando-se assim as terras mais férteis do mundo antigo; mas, por outro lado, o rio destruía as marcas que delimitavam as propriedades de terra, dificultando que os agricultores soubessem ao certo as fronteiras de suas propriedades.

Segundo Boyer (1994) essa situação foi solucionada com os agrimensores que, nomeados pelos faraós, restauravam as fronteiras entre as propriedades. Utilizavam para tal, cordas entrelaçadas para marcar ângulos retos, realizando dessa forma a divisão das terras. Muito mais tarde, essa técnica empírica baseada no teorema de Pitágoras veio a ser demonstrada.

De acordo com Tatiana Roque (2012), os mesopotâmicos e egípcios realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, mas isso não quer dizer, contudo, que possuíssem uma geometria. No segundo, dos nove livros de Heródoto, que viveu no século V A.E.C. se encontra a menção à palavra grega “geometria”. Os egípcios teriam revelado que seu rei partilhava a terra igualmente entre todos, contanto que lhe fosse atribuído um imposto na base dessa repartição. Como o Nilo, às vezes, cobria parte de um desses lotes, era preciso medir que pedaço de terra o proprietário tinha perdido, com o fim de recalcular o pagamento devido. Conforme Heródoto, essa prática de agrimensura teria dado origem à invenção da geometria, um conhecimento que teria sido importado pelos gregos.

A palavra “geometria” pode ser traduzida, portanto como “medida da terra”. Vem daí a ideia de que seu surgimento está ligado à agrimensura.

Sem dúvida, os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como outros povos antigos. Não há, contudo, uma documentação confiável que possa estabelecer a transição da matemática mesopotâmica e egípcia para a grega. Essa é, na verdade, uma etapa na construção do mito de que existiria uma matemática geral da humanidade.

A Geometria é de fundamental importância para a formação e desenvolvimento de várias aptidões, mas nas últimas décadas tem sofrido descaso, por boa parte de professores. É colocada como um adendo da álgebra, ou ao final de determinados assuntos e capítulos. Não é devidamente explorada.

A abordagem é de forma mecânica, através de exercícios repetitivos, que fazem com que os alunos memorizem as fórmulas e não possibilitam a visualização e construção do conhecimento.

De acordo com o PCNEM (1998), alguns dos objetivos do ensino da Matemática no ensino Médio, são:

- “desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo”
- “utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos”;
- “expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática”;
- “estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo”.

Para resolver problemas é necessário que o aluno confie na sua capacidade interpretativa e compreenda a utilização dos conceitos matemáticos. Sem a compreensão ele não será capaz de desenvolver a correlação entre os problemas propostos e o que é necessário ser utilizado para a resolução.

Atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas do conhecimento.

Segundo Dante (1998), embora tão valorizada, a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. Geralmente, os alunos sabem efetuar os algoritmos e não conseguem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos. Isso se deve à maneira com que os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados.

Devido às contextualizações propostas em problemas, relacionados com o mundo em que vive, desenvolvendo o intelecto, que viabiliza um melhor aprimoramento na interpretação, na percepção, resolução, compreensão, enfim, na experimentação de descobertas.

Além de despertar nos alunos um interesse natural e espontâneo sobre as questões geométricas, e também tem um grande valor em diversas profissões, tais como: engenharia, bioquímica, coreografia, entre outros. Mesmo para o aluno que não tem interesse pela Matemática é fundamental que conheça as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos.

Com o uso da tecnologia pode-se despertar o interesse dos alunos. Para D'Ambrósio (2002) "[...] temos com o auxílio da informática e com o crescente ramo de programação, vários softwares que possuem o objetivo de aprender, ensinar e se trabalhar com a Matemática. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro".

Mas o futuro já chegou e, de fato a informática é imprescindível em várias áreas, e por que não no ensino da matemática.

O GeoGebra no ensino da Matemática tem sido muito enriquecedor para suprir dificuldades e motivar a aprendizagem. Através deste programa podemos apresentar os mais variados temas, estimular a curiosidade e o raciocínio lógico.

De acordo com a visão do PCNEM (1998): "Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento".

No caso deste trabalho, com o teodolito é possível contextualizar a Trigonometria, usando tanto as Razões como as Leis de Seno e Cosseno.

6. Estratégia e aplicabilidade em sala de aula

Com o uso do teodolito o professor ilustrará conteúdos como as Razões Trigonométricas, as Leis dos Senos e do Cosseno. Através da medição de um ângulo, aplicado nas razões trigonométricas, e com o auxílio de uma tabela trigonométrica ou uma planilha, vinculada ao teodolito, no GeoGebra 3D, poderá calcular tanto medidas verticais como horizontais.

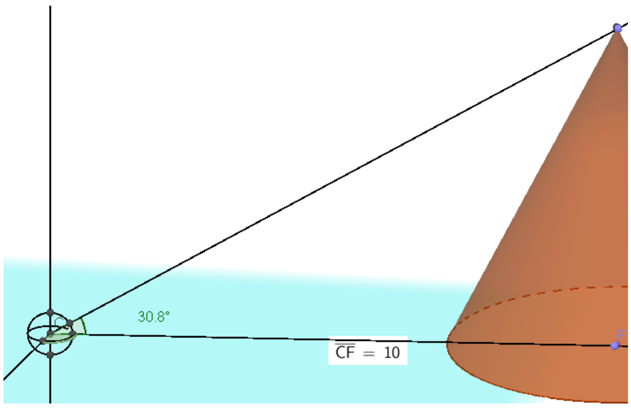


Figura 46 – Triangulação vertical, e hipotenusa.

No exemplo da figura acima, temos um ângulo e a distância do teodolito ao cone. O professor poderá pedir aos alunos que calculem a altura do cone usando a tangente, ou supor que a hipotenusa é a distância percorrida por um avião, que para calculá-la é necessário aplicar o cosseno.

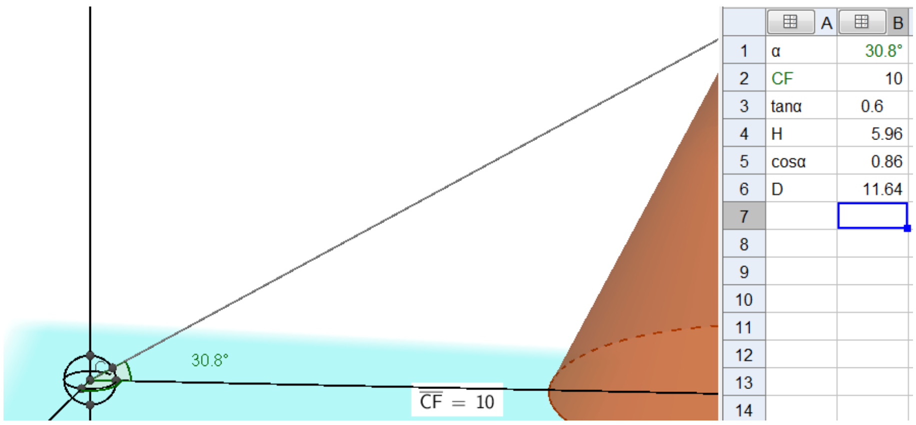


Figura 47 – Planilha no Geogebra

$$\tan 30.8° = \frac{H}{CF} \rightarrow 0{,}596 = \frac{H}{10} \rightarrow H = 5{,}96$$

$$\cos 30.8° = \frac{CF}{D} \rightarrow 0{,}86 = \frac{10}{D} \rightarrow D = \frac{10}{0{,}86} = 11{,}64$$

Na figura não está claro, mas a base do cone foi construída no mesmo plano que o centro do teodolito. Para calcularmos a altura do cone não é necessário somarmos a do teodolito.

Se rotacionarmos a figura, veremos que os pontos pertencentes as semirretas não encontram o centro da base e o topo do cone, ou seja é uma ilusão este encontro.

Verifique em: http://www.geogebratube.org/material/show/id/93204

No GeoGebra podemos optar pelo número de casas que queremos arredondar, essa escolha deverá ser a mesma, caso o professor faça uso da tabela trigonométrica

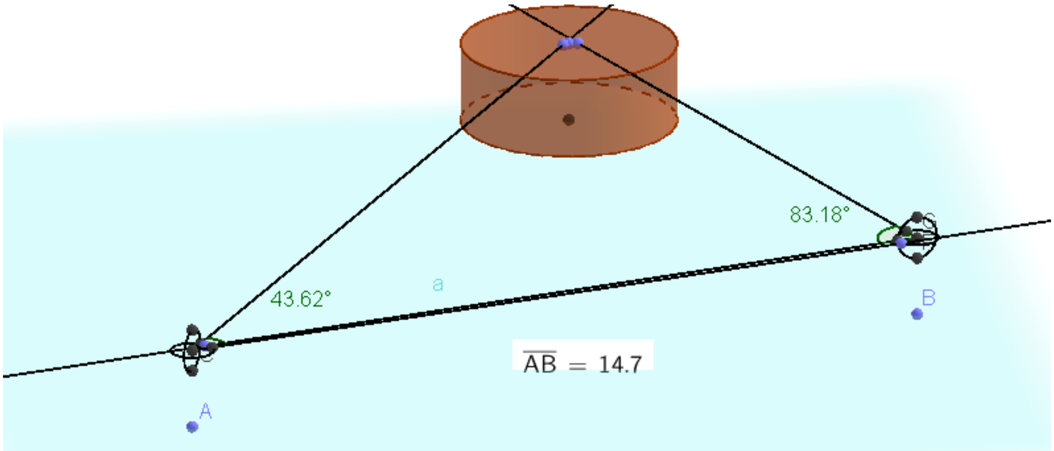


Figura 48 – Triangulação Horizontal

Na figura acima temos exemplo da aplicação horizontal onde poderá ser aplicada a Lei dos Senos, pois conhecemos dois ângulos do triângulo, e o lado que se encontra entre eles:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

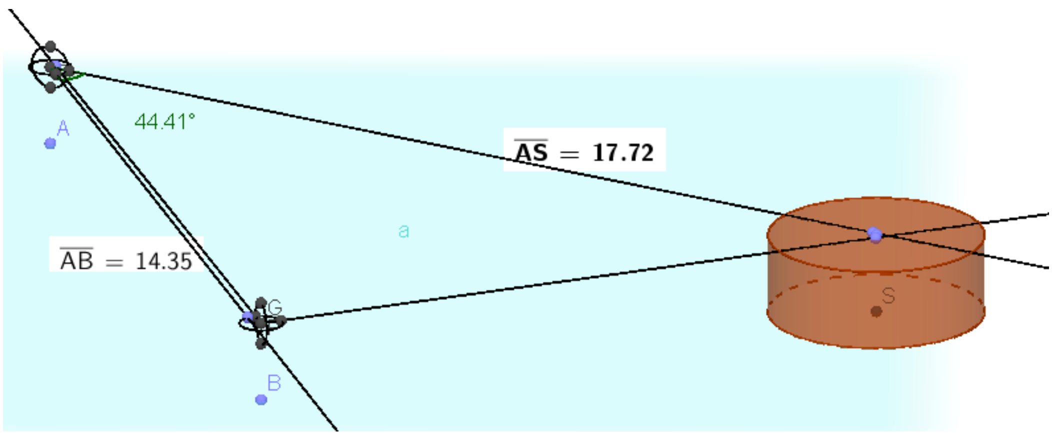


Figura 49 – Aplicando a Lei do Cosseno

Nesta figura acima conhecemos dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles. Ideal para aplicarmos a Lei do Cosseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

Com esses exercícios podemos mostrar a diferença entre as duas Leis.

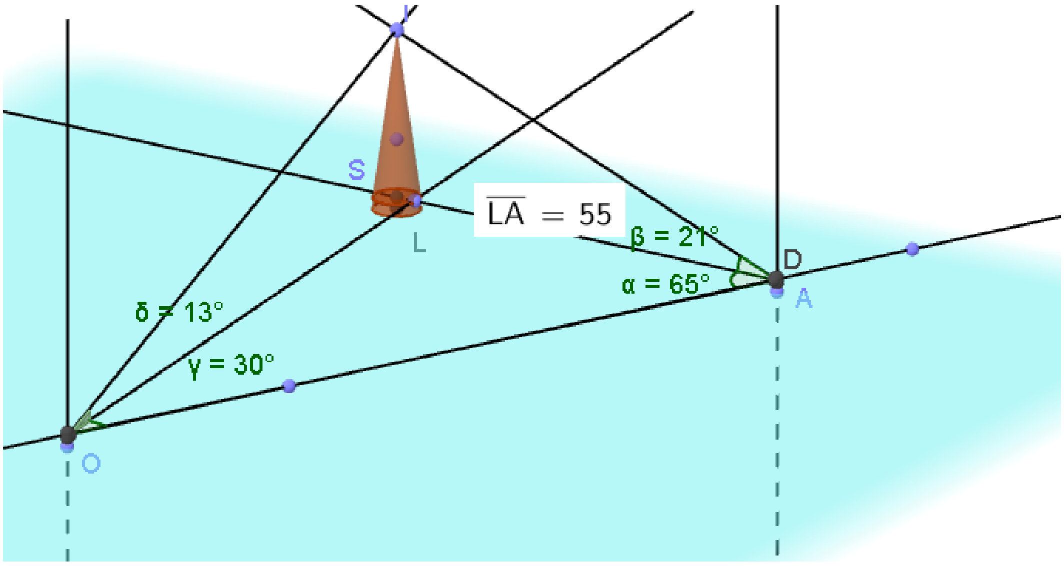


Figura 50 – Triangulação Horizontal e Vertical

Acima há uma sugestão de aplicação horizontal e vertical, simultaneamente. Para calcularmos a altura do cone, podemos inicialmente usar a Lei dos Senos:

$$\frac{LA}{\text{sen } 30°} = \frac{LO}{\text{sen } 65°} = \frac{AO}{\text{sen } 85°} \rightarrow \frac{55}{0{,}5} = \frac{LO}{0{,}91} = \frac{AO}{0{,}99}$$

$$LI = 100 \text{ e } AO = 109$$

Aplicando a tangente de β e δ e, em seguida comparando, teremos a altura do cone:

$$\tan\beta = \tan 21° = \frac{LI}{LA} \rightarrow LI = 21$$

$$\tan\delta = \tan 13° = \frac{LI}{LO} \rightarrow LI = 23$$

Tirando a média dos resultados e levando em conta que todos os valores foram arredondados, temos que a altura do cone é de aproximadamente 22.

O problema encontrado no exemplo da Figura 46 – Triangulação vertical, e hipotenusa., o encontro das semirretas com a base e o topo do cone, foi solucionado com o último exemplo dado. O cone e o cilindro que serve de base foram construídos no mesmo plano que as semirretas que determinarão a altura da figura. A Geometria não erra, é importante observar os seus conceitos para a construção de figuras no GeoGebra, principalmente nesta versão 3D.

7. Conclusão

A ideia da construção do Teodolito se deu a partir da constatação de que vários exercícios de trigonometria fazem uso deste instrumento. No inicio da pesquisa, deparou-se com inúmeros relatos de construção, em sala de aula, de teodolitos com materiais simples, como canudos, transferidores, etc., ou apenas citados em problemas que buscava contextualizar as Razões Trigonométricas. Contudo no GeoGebra Tube nenhum trabalho contendo o teodolito foi encontrado. Estava lançado o desafio.

Através do estudo da origem, evolução e utilização prática do instrumento na Agrimensura, concluiu-se que no GeoGebra 4.4 não se abordaria totalmente a funcionalidade do instrumento, sendo assim tornou-se necessário conhecer melhor o GeoGebra3D.

Foi uma tarefa fascinante, encontrar vários conceitos que foram estudados e ensinados, na Geometria Espacial, colocados em prática, de forma relativamente simples, e com ótima visualização. Mas como a visualização pode ser feita de vários ângulos, aparentemente a figura funciona bem, mas quando a giramos encontramos alguns erros, que não seriam percebidos no plano.

Depois de várias construções, encontrei as soluções esses “erros”, sempre justificadas na Geometria. As Razões Trigonométricas e Leis dos Senos e Cosseno podem ser ilustradas e contextualizadas plenamente e o instrumento disponibilizado para outros professores, que através do seu uso tornarão suas aulas mais atrativas e, quem sabe, desperte o interesse dos alunos para a investigação, visualização, além de proporcionar uma melhor compreensão de alguns aspectos da Matemática.

8. Referências Bibliográficas

ARAUJO, Claudio Lopes de. GeoGebra, Um Bom Software Livre. Revista do Professor de Matemática, nº 67, p. 43-7, 3º quadrimestre de 2008.

Boyer, Carl B. [1974]. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. 9ª ed. Campinas: Papirus, 2002.

DANTE, L.R. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. 2ªed. São Paulo: Ática, 1998

- Educação Matemática e Tecnologias
http://edumatecno.blogspot.com.br/2013/04/conhecendo-um-pouco-mais-sobre-o.html

- A Evolução Histórica e Tecnológica do Instrumental Topográfico

http://www.topografia.ufba.br/evolucao%20tecnologicatop.pdf

- Evolucion Histórica de Los Instrumentos Topográficos, José Luis de la Cruz González, José Luis Mesa Mingorance, Aurora Cuartero Sáez.
http://members.tripod.com/colocolo_hp48/Historia_Instrumentos_Topograficos.htm

- Geogebra
http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/69.pdf

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo Antônio Silvani e MATTOS, Francisco Roberto Pinto. Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. Coleção ProfMat, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

GRAVINA, Maria Alice e SANTAROSA, Lucila Maria. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. IV Congresso RIBIE(Rede Iberoamericana de Informática Educativa), Brasília, 1998.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo e MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio – Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

LORENZATO, Sérgio. Educação Infantil e Percepção Matemática – São Paulo. Autores associados, 2006.

- Matemática Profissional, Josevaldo Silva Souza
http://matematicaprofissional.blogspot.com.br/2012/05/conhecendo-um-pouco-da-historia-dos.html

- Museu de Astronomia, MAST,
http://www.mast.br/multimidia_instrumentos/teodolito_funcao.html

PIAGET, Jean. Biologie at Connaissance, Paris, Gallimard,1967.

PUTNOKI, José Carlos. Que se devolvam a Euclides a régua e compasso. Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática São Paulo: Associação Palas Athena do Brasil, 13, p.13-17, 2º sem./1988.

PUTNOKI, José Carlos. Geometria e Desenho Geométrico. São Paulo: Scipione, 1991. 4 v.

ROQUE, Tatiana. Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas, Editora: JORGE ZAHAR EDITORES, 2012.

- O Teodolito e a Trigonometria, Flávio Santos
http://pt.slideshare.net/mathfms/o-teodolito-e-a-trigonometria-2541599

- Topografia, Prof. Renato Lara de Assis

http://www.ifgoiano.edu.br/ipora/images/stories/coordenacao/Renato/Topografia_parte_2.pdf

WAGNER, Eduardo. Construções Geométricas. 6ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2007.

_____, Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática – 5ª a 8ª Séries. Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF, Brasília, 1998.

_____, Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática – Ensino Médio. Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF, Brasília, 1999.