PROFMAT-IMPA

Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos Elipsógrafo

JEAN CARLO DA SILVA CORDEIRO

Rio de Janeiro/RJ
2014

JEAN CARLO DA SILVA CORDEIRO

UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS ELIPSÓGRAFO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Pós-graduação do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre *Stricto Sensu* do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Aprovado em 24 de março de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho - Orientador

IMPA

Prof. Eduardo Wagner

FGV

Prof. Asla Medeiros e Sá

FGV

Resumo

Nesta tese apresentamos a construção e utilização de mecanismos virtuais, o mais próximo possível da realidade, com o objetivo de facilitar a visualização do ensino de determinados conteúdos matemáticos. Para a construção foi utilizado o software GeoGebra, que por sua característica dinâmica, permite a interação entre aluno e instrumento. Na proposta contamos um pouco da história e detalhamos a construção do pantógrafo, do elipsógrafo, do relógio de pêndulo e engrenagens e do teodolito. Apresentamos a justificativa matemática para a utilização desses instrumentos e os conteúdos envolvidos na construção e funcionamento. Também mostraremos alguns comandos avançados do GeoGebra, que foram fundamentais para as construções. Completando o trabalho, apresentaremos sugestões de conteúdos que podem ser trabalhados com os alunos, em salas de aula do Ensino Fundamental e Médio.

.

Palavras-chave: GeoGebra, instrumentos e elipsógrafo.

"Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, o seu progresso foi lento e o seu uso limitado; mas uma vez que estas ciências se uniram, elas deram uma à outra um apoio mútuo e rapidamente avançaram juntos para a perfeição."

Joseph Louis Lagrange (1795)

Sumário

Índice de Figuras

1. Introdução

O trabalho visa mostrar aos professores uma nova abordagem para utilização do software GeoGebra através da confecção de instrumentos virtuais, o mais próximo possível do instrumento real, inclusive com suas limitações físicas. Vale mencionar que este trabalho configura a conclusão do curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O projeto que deu origem ao mesmo foi elaborado por Jean Carlo da Silva Cordeiro, Patrícia Mello Bittencourt, Sergio Antoun Serrano e Esther Zilkha e orientado pelo Professor PhD Paulo Cezar Pinto de Carvalho, tendo os capítulos 1 e 2 como parte comum.

O objetivo do grupo foi utilizar o software GeoGebra para a construção de instrumentos, dando ao professor uma forma de mostrar aos seus alunos a aparência e o funcionamento do elipsógrafo, do pantógrafo, do relógio de pêndulo e do teodolito. Cada integrante do grupo escolheu um instrumento, pesquisou o seu histórico, suas características de funcionamento, sua aplicabilidade e, por fim, fez a construção no GeoGebra. Como o objetivo do trabalho é também mostrar outra utilização deste software, foi descrita toda a sequência de comandos utilizada na construção, bem como as dificuldades encontradas.

1.1. Justificativa

O ensino da matemática é um desafio diário para professores que encontram resistência por parte de seus alunos. Diversos artigos discutem sobre essa dificuldade de aprendizagem. Lorenzato [22] indica que conceitos matemáticos de espaço, número e forma devem ser mostrados de diferentes maneiras aos alunos com o objetivo de desenvolver diversos processos mentais básicos para a aprendizagem matemática. Dentre esses processos, destacam-se a correspondência, a comparação e a classificação.

Em relação à Geometria, segundo Nasser [24], a Teoria dos Van-Hiele define cinco níveis de aprendizado: reconhecimento das formas, análise comparativa, argumentação lógica informal, dedução das demonstrações dessas argumentações e estabelecimento formal de teoremas. Assim, para o processo de ensino aprendizagem ser efetivo, deve seguir uma sequência que permita ao aluno expandir seus conhecimentos a partir da observação informal das figuras, evoluindo até compreender os sistemas axiomáticos da Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) descrevem os conteúdos matemáticos necessários a cada ciclo da vida escolar do aluno. Também faz a análise dos objetivos a serem alcançados e a visão pedagógica da construção desse conhecimento. O PCN divide o ensino fundamental em 4 ciclos, cada um contendo duas séries, e divide o conteúdo matemático em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. O Ensino Médio é dividido em 3 anos e o conteúdo de cada um desses anos é dividido em três temas estruturadores: Álgebra (números e funções), Geometria e Medidas e Análise de dados. O bloco de conteúdo de Espaço e Forma, do Ensino Fundamental, e o de Geometria e Medidas, do Ensino Médio, descrevem os conteúdos geométricos como parte importante do currículo da Matemática por desenvolver no aluno um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que ele vive. Além disso, o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem dos números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades. O PCN sugere ao professor a prática das construções geométricas e a utilização de instrumentos para viabilizar a visualização e aplicação das propriedades das figuras e da construção de outras relações. Conforme Piaget [25], "Todo conhecimento é ligado à ação de conhecer um objeto ou evento e assimilá-lo a um esquema de ação. Isto é verdade do mais elementar nível sensório motor ao mais elevado nível de operações lógico-matemáticas".

Ao longo dos anos, as tecnologias digitais têm evoluído e se tornado uma excelente ferramenta para o professor. Gravina e Santarosa [12] analisaram a contribuição dos ambientes informatizados na aprendizagem matemática, verificando que esses ambientes, já naquela época, demonstravam serem ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. A principal vantagem é a possibilidade de alterar os limites entre o concreto e o formal. Em seu trabalho, as autoras citam Hebenstreint [15]: “o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos ‘concretos-abstratos’. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais”. Dessa forma, a utilização dessas ferramentas é lícita e de excelentes resultados.

A proposta de criar no GeoGebra alguns instrumentos para a utilização em sala de aula está em consonância com as ideias desenvolvidas nos parágrafos anteriores. Os instrumentos foram criados para dar ao aluno a sensação de um instrumento real, favorecendo seu processo cognitivo de aprendizagem.

1.2. Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em oito capítulos. O primeiro capítulo faz uma contextualização sobre a proposta do trabalho e a prática educacional. O segundo capítulo descreve a origem e a utilização do programa GeoGebra. Neste capítulo são descritos alguns comandos especiais utilizados na confecção dos instrumentos. Esses dois capítulos são comuns aos quatro trabalhos. No terceiro capítulo, cada autor descreve seu instrumento, contando sua origem, construção e funcionamento. No quarto capítulo, é apresentada a sequência de construção de cada instrumento, listando os comandos utilizados. No quinto capítulo será apresentada a justificativa matemática para o funcionamento e utilização do instrumento. No sexto capítulo, cada autor apresenta sugestões para a utilização do seu instrumento em sala de aula. Os capítulos finais trazem a conclusão e as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2. Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos

2.1. Introdução

A palavra GeoGebra surgiu da aglutinação das palavras Geometria e Álgebra. É um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de Geometria e Álgebra em uma única interface. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

2.2. História

O GeoGebra foi objeto de tese de doutorado de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo, Áustria. Ele criou e desenvolveu esse software com o objetivo de obter um instrumento adequado ao ensino da Matemática em todos os níveis (do Ensino Fundamental ao Ensino Superior), combinando recursos de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. É um software gratuito, de fácil download e com versão portável, muito útil, que pode ser acessada normalmente a partir de um pendrive. O programa é escrito em Java e, por ser multiplataforma, pode ser instalado com Windows, Linux ou Mac e apresenta, ultimamente, uma versão beta para Android e outra versão beta para 3D.

Sua popularidade tem crescido continuamente e hoje o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, com mais de **300.000** downloads mensais. Foram criados institutos regionais, que são membros do IGI (International GeoGebra Institutes), cujo propósito é agregar interessados no uso do GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem, criando uma comunidade aberta que compartilhe seus conhecimentos no treinamento, suporte e desenvolvimento de materiais de apoio para alunos e professores, promovendo a colaboração entre profissionais e pesquisadores, com o objetivo de desenvolver materiais gratuitos para o ensino, a aprendizagem e a divulgação da Matemática a todos os públicos. Esses Institutos oferecem suporte, promovem oficinas, fóruns de debate e de dúvidas. São ao todo 62 Institutos GeoGebra em 44 países e o Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro, tem sua sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense.

O software permite realizar construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas ou com funções que podem ser modificados posteriormente de forma dinâmica. Equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. O software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos. Uma característica importante do GeoGebra é que todo elemento geométrico desenhado na janela de visualização tem sua representação algébrica mostrada na janela de Álgebra, assim como toda representação algébrica de um elemento na caixa de entrada tem a representação geométrica na janela de visualização.

2.3. Programa GeoGebra 2D

O programa possui uma interface amigável e bastante intuitiva. Os comandos estão dispostos em ícones abaixo da linha dos menus. Além das janelas de visualização, de Álgebra e do campo entrada, visíveis na abertura de um novo arquivo, existem ainda a janela de protocolo de construção, que mostra a sequência de construção executada e a janela para planilha, para utilizar entrada de dados como Excel.

A aparência da tela inicial do GeoGebra, caso as configurações iniciais não tenham sido alteradas, é a seguinte:

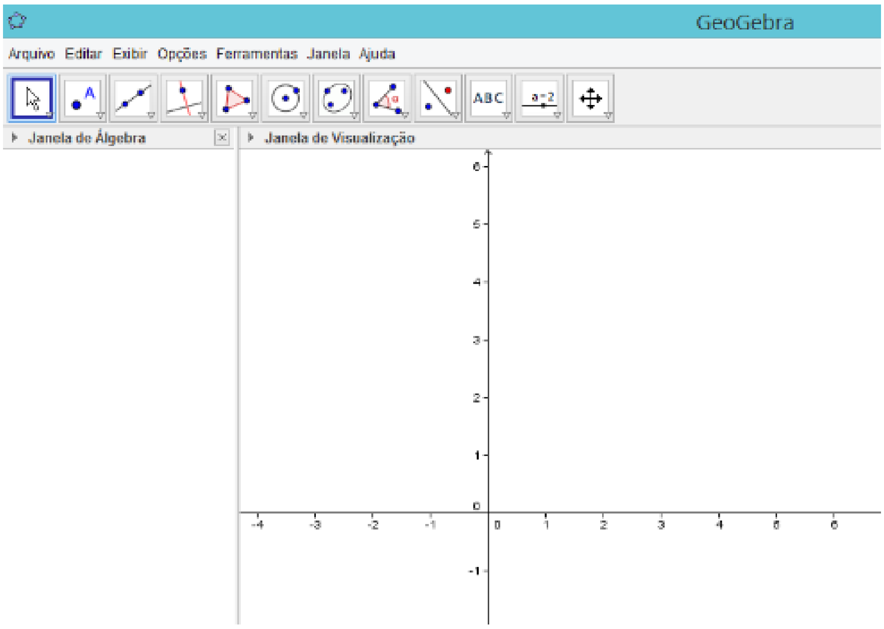


Figura 1 - Tela do GeoGebra 2D

No menu Opções pode ser escolhido o tamanho da fonte podendo ser alterada sem prejudicar o processo de construção.

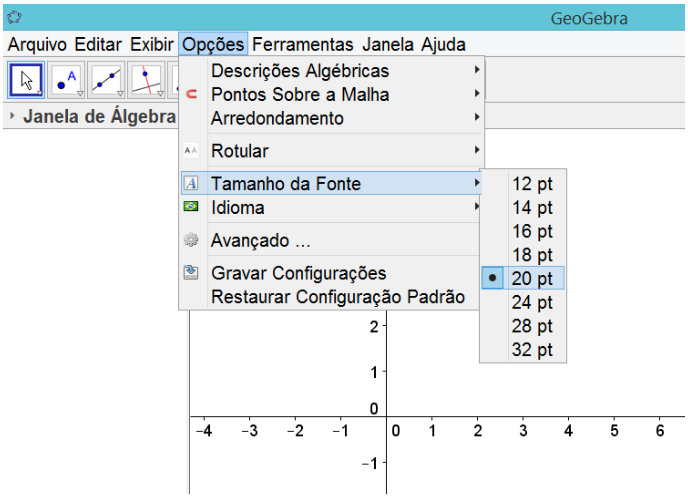


Figura 2 - O Tamanho da Fonte

Os eixos podem estar visíveis ou não, podendo ser alterados na Janela de Visualização com o comando Exibir ou Esconder os eixos.

O Campo de Entrada se encontra abaixo da janela de visualização. Caso não esteja aparente, clique em Exibir no menu principal e, em seguida, clique em Campo de Entrada.

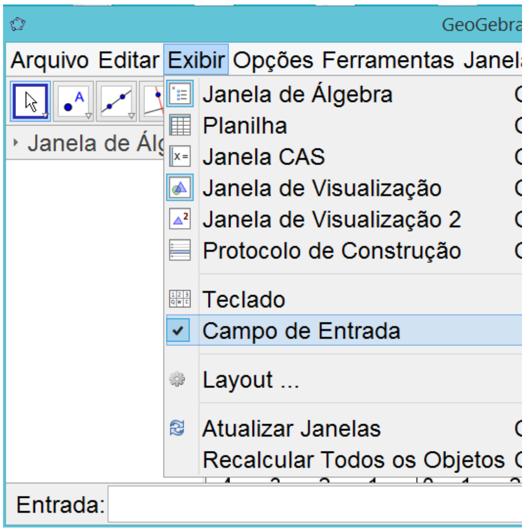


Figura 3 - Campo de Entrada

No capítulo 3 deste trabalho é descrito a sequência de comandos utilizada para a construção do instrumento e o endereço eletrônico do arquivo finalizado. Ressalta-se que durante o processo de construção, além dos comandos básicos, foi necessário estudar e utilizar comandos mais avançados que são descritos na seção seguinte e no decorrer da sequência de construção de cada instrumento.

2.3.1. Comando vetor

Esse comando e suas variações são úteis para a construção do acabamento dos instrumentos construídos. A partir de um ponto central, utilizando os conceitos de vetor unitário e de translação de um ponto pelo vetor, é possível criar pontos vinculados ao movimento de outros pontos. Por exemplo:

Para construir um ponto na tela, clique no comando Ponto () que se encontra na Barra de Ferramentas e escolha um local na Janela de Visualização, como por exemplo (2,2).

Para construir outro ponto na tela, clique novamente no comando Ponto () e escolha outro local na Janela de Visualização, como por exemplo, (3,3).

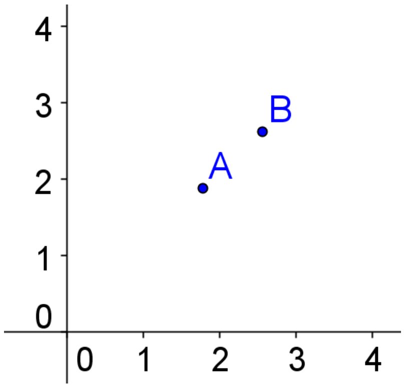


Figura 4 - Construção com Vetores

No Campo de Entrada digite:

- Ampliar[-5,-5,18,7] e tecle enter. São os limites dos eixos, ou seja, eixo 0x variando de [-5, 18] e eixo 0y variando de [-5, 7]. Toda vez que digitar um comando no Campo de Entrada sempre clique "enter" para ver o resultado tanto na Janela de Álgebra quanto na Janela de Visualização.
- u=VetorUnitário[segmento[A,B]]. Criou-se o vetor unitário **u**.
- C=A-u. Criamos o ponto C vinculado ao vetor **u**.
- D=A+3u. Construímos o ponto D.

Todo comando apresentado neste trabalho pode ser copiado e colado no Campo de Entrada do GeoGebra.

Observa-se que ao mover o ponto B movimenta-se o vetor AB e os pontos C e D que, por construção, estão vinculados ao vetor AB.

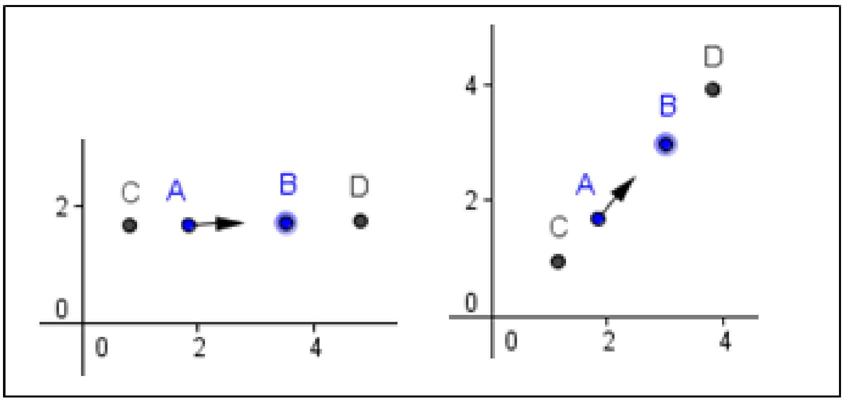


Figura 5 - Construção com Vetores

2.3.2. Comando lista

Esse comando permite fazer uma lista com pontos sendo útil na criação dos vértices dos polígonos. Este comando diminui a quantidade de pontos listados na Janela de Álgebra e, ao mesmo tempo, permite a manipulação de todos ao mesmo tempo. Por exemplo:

No Campo de Entrada digite:

- lista1={(1,1),(1,2),(2,3),(2,1.5)}. Cria-se uma lista de pontos na Janela de Álgebra.

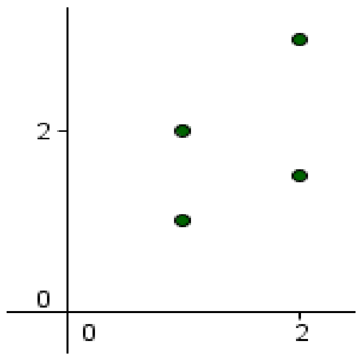


Figura 6 - Lista de Pontos

2.3.3. Variáveis Booleanas

O programa possui um comando utilizado para Exibir e Esconder objetos, como mostra a figura abaixo. Esse comando cria uma variável booleana, que é relacionada aos outros elementos da construção. Também cria um pequeno botão, que ao ser acionado troca o valor da variável de "true" (verdadeira) para "false" (falsa) e vice versa.

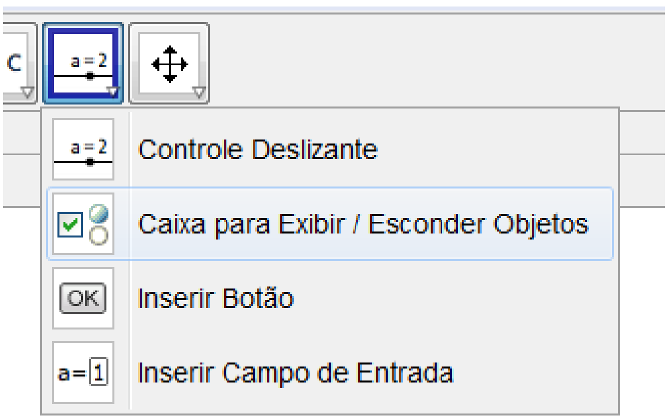


Figura 7 - Comando Exibir Objetos

Também é possível definir uma variável booleana através do Campo de Entrada, selecionando os elementos que a variável controlará e utilizá-la para programação.

2.3.4. Comandos de Definição

Na finalização dos instrumentos no GeoGebra, foi necessária a utilização desses comandos para programação.

- DefinirCoordenadas[A,x(B),y(B)] – significa que o ponto A receberá as coordenadas x e y do ponto B.
- DefinirLegenda[bt2,"Animar"] – significa que a legenda do botão bt2 será a palavra Animar.
- DefinirValor[figuras,5] – significa que a variável figuras receberá o valor 5.

2.3.5. Camadas

Para o acabamento dos instrumentos, por exemplo, para as hastes utilizam-se vários polígonos, círculos e arcos. Mas, para dar a aparência real ao trabalho final, temos que considerar as diferenças de plano entre os elementos que compõem os instrumentos. Cada elemento desenhado no GeoGebra é desenhado em alguma camada. As camadas variam de 0 a 9. Observe a situação abaixo:

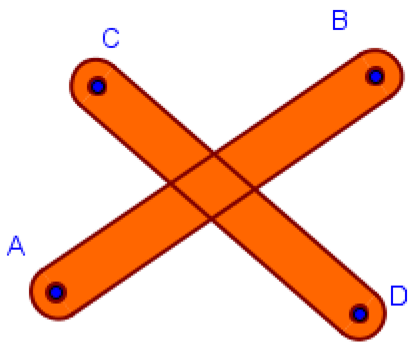


Figura 8 - Duas Hastes na Mesma Camada

Observe que as linhas das hastes se cruzam e não é possível perceber qual das duas hastes foi construída primeiro ou qual delas está sobre a outra.

Para alterar a camada da haste CD, por exemplo, basta clicar com o botão direito do mouse na haste e escolher a opção Propriedades. Na guia Avançado, escolha uma camada acima da camada em que ele foi construído.

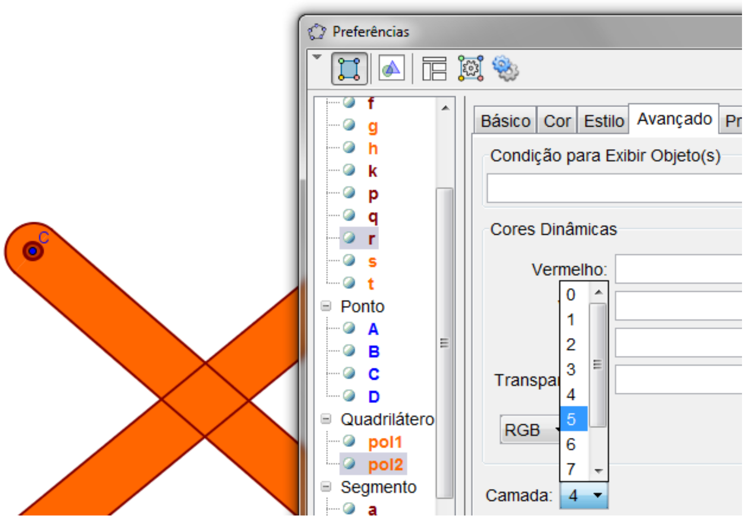


Figura 9 - Alteração das Camadas

Todos os elementos da haste CD foram alterados para camada 5. O resultado mostra a diferença de profundidade entre as hastes.

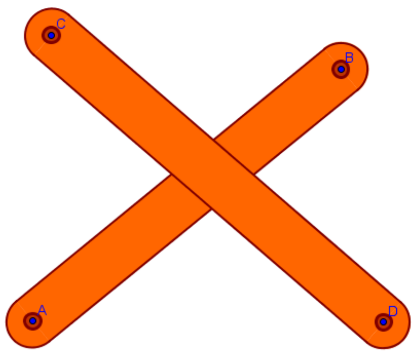


Figura 10 - Hastes em Camadas Diferentes

2.4. Programa GeoGebra 3D

O programa está em desenvolvimento e foi disponibilizada uma versão beta, somente online. É possível fazer construções, salvar os arquivos e perceber o novo universo de possibilidades. Para utilizar o programa basta acessar o link http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp e fazer o download do arquivo geogebra-50.jnlp. Após o download, execute este arquivo e deverá ser criado um ícone de acesso na área de trabalho do seu computador.

Figura 11 - Ícone do GeoGebra 3D na área de trabalho

A interface do programa contempla a interface 2D acrescida da janela de visualização 3D e dos comandos específicos de uso na Geometria Espacial.

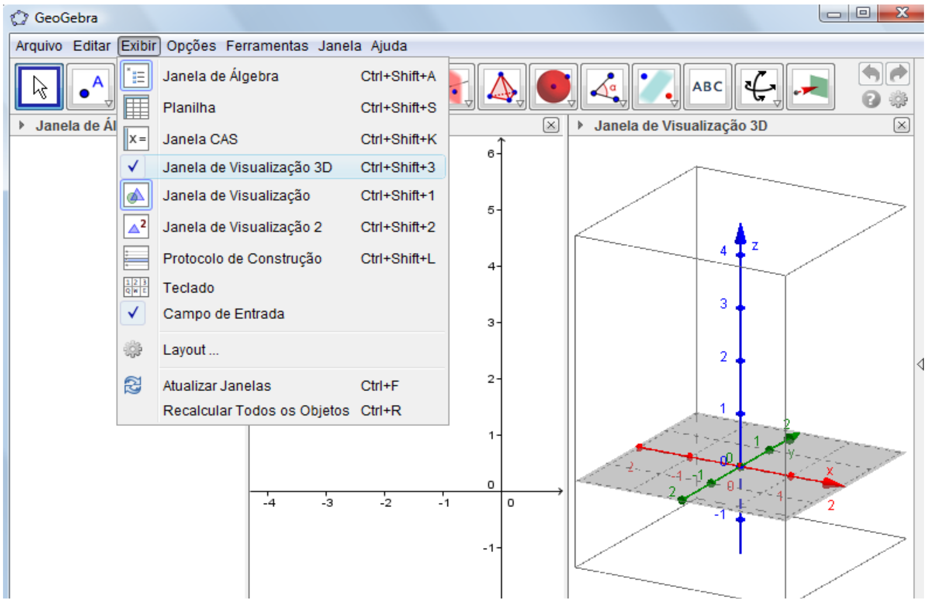


Figura 12 - As Janelas de Álgebra, de Visualização 2D e 3D

Esses comandos nos possibilitam criar planos passando por três pontos, planos perpendiculares, paralelos, além de sólidos como pirâmides, primas, esferas e entre outros. Há a possibilidade de calcular seus volumes.

Mesmo sendo necessário estar online, é possível salvar as construções como arquivos, mas estes só abrem se o programa estiver aberto.

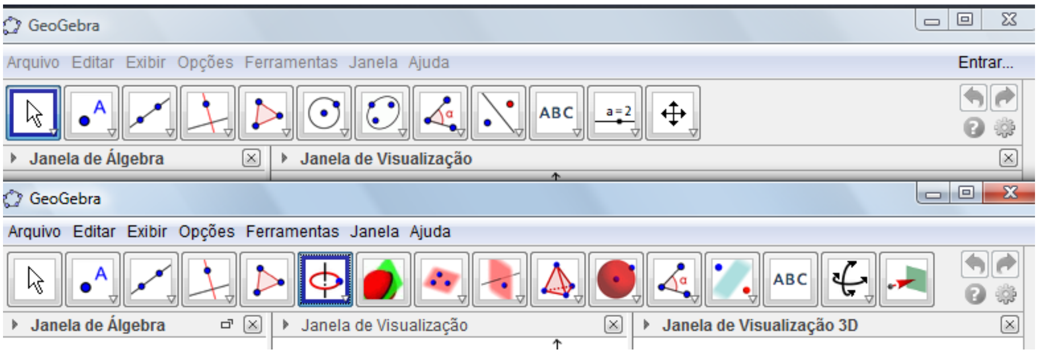


Figura 13 - Comparativo das Barras de Ferramentas do 2D e do 3D

O fato da versão beta do GeoGebra 3D existir a apenas 3 anos faz com que seja pouco comentado e o conhecimento do programa é construído na prática, com o seu uso. No caso do teodolito observa-se que para a construção de uma figura é conveniente vincularmos tudo o que está sendo criado, para facilitar a movimentação. Ou seja, se desejamos um ponto, sugere-se que este esteja vinculado a um plano inicial ou a uma reta. O mesmo acontece com retas, polígonos e qualquer outro objeto. Caso não siga este procedimento, fica difícil ao longo da construção localizar, no espaço virtual, o que é preciso. Uma ferramenta útil dessa versão é ter a visão da figura de vários ângulos ou mesmo rotacioná-la.

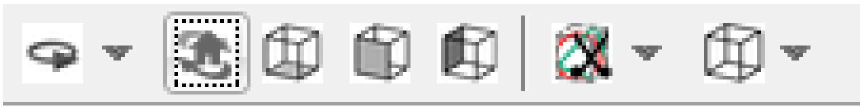


Figura 14 - Visualizar a figura de diversos ângulos

A construção no 3D reforça os conceitos, teorias e axiomas mencionados na Geometria Espacial, por exemplo, “Por três pontos não colineares passa um único plano”, sendo possível esta construção no GeoGebra 3D. Com o uso deste programa o aluno visualiza facilmente o que é dito em sala de aula, construindo assim seu conhecimento e tendo um novo olhar para o que é ensinado em aula.

3. Instrumento: Elipsógrafo

3.1. Descrição

O elipsógrafo é um instrumento articulado que permite desenhar elipses. Há vários tipos desses instrumentos, mas todos se baseiam em dois tipos de construção: a partir do conhecimento de seus eixos e outro a partir dos focos.

Para o elipsógrafo, que seu funcionamento baseia-se no conhecimento de seus eixos, o mais conhecido é o de Proclo, conhecido também como elipsógrafo de Arquimedes ou bússola de Arquimedes.

O Elipsógrafo Antiparalelogramo, também conhecido como do Jardineiro, baseia-se no posicionamento de seus focos.

3.2. História

3.2.1. Problema Motivador

Na antiguidade, o homem representava o mundo em que vivia através de desenhos feitos em rochas. Comparando o surgimento do homem a uma criança pequena, ambos representam a figura humana através de retas e circunferências. Retas para o corpo e membros e circunferências para a cabeça.

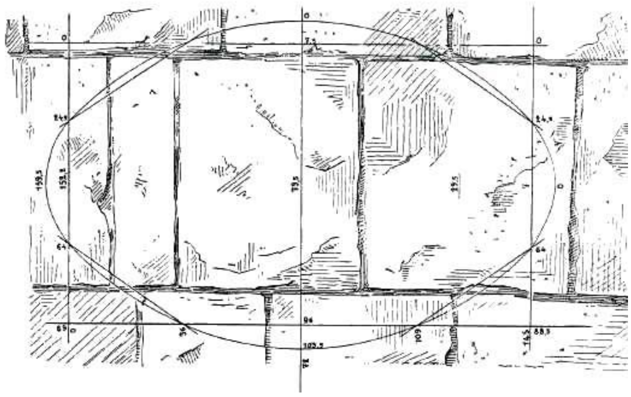


Figura 15 - Elipse traçada na Antiguidade sobre um muro de Tebas (Egito)

As retas e as circunferências são as linhas geométricas mais fáceis de utilizarem, pois os instrumentos necessários para traçar são a régua e o compasso. Segundo René Descartes [7], na obra *A Geometria,* de 1637, relata que “outras linhas foram inventadas pelos matemáticos gregos” à medida que surgiram problemas que não podiam ser solucionados através destes instrumentos. Um desses problemas é o da “duplicação do cubo”.

Segundo Souza [31], este problema por ter um enunciado simples, “encontrar a aresta de um cubo com o dobro do volume de um cubo dado” gerou alguns enganos.

Entre esses muitos enganos foi compará-lo a um problema, também simples, que os geômetras, por volta do século V a.C., já sabiam resolver que era “encontrar o lado de um quadrado com o dobro da área do primeiro” (duplicação do quadrado).

Para este problema, basta que o lado do segundo quadrado tenha a mesma medida da diagonal do primeiro.

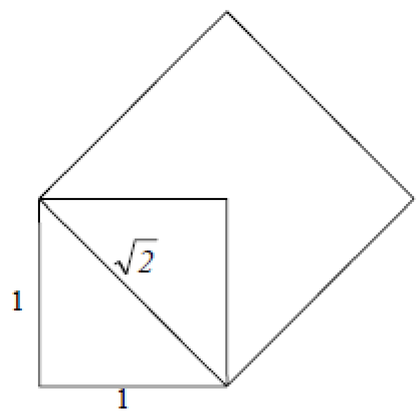


Figura 16 - Duplicação do quadrado

Acredita-se que, a partir desse problema, houve o interesse em duplicar as figuras sólidas e, consequentemente, duplicar o cubo.

Conforme Souza [31], há outras explicações para o surgimento deste problema que são duas lendas: uma delas surge com a carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu III e, a outra, sobre a consulta, em Delos, ao oráculo de Apolo em como acabar com a praga que assolava o Egito.

Na primeira lenda, Eratóstenes narra que o rei Minos ordena que dupliquem o túmulo do seu filho Glauco, mas que fosse conservada a forma cúbica, por achar que o espaço era pequeno para um rei.

Ao fazerem novo túmulo cometem um engano, duplicaram as arestas, no que resultou num túmulo oito vezes maior.

A segunda lenda relata que uma peste havia dizimado mais de um quarto da população do Egito e que uma delegação fora formada para consultar o oráculo de Apolo, em Delos (daí também ser conhecido como "problema deliano").

A solução para a extinção da peste era que duplicassem o altar cúbico de Apolo e, conta a lenda, que cometeram erro ao duplicarem as arestas, resultando, também, num altar oito vezes maior.

Entre tantas lendas e histórias, verdadeiras ou não, seja no Egito antigo, seja na Babilônia, como muitos historiadores relatam que já existia esse problema, o que havia de fato era um problema onde os recursos computacionais e calculadoras não existiam e, somente, dispunham apenas de régua não graduada e compasso.

Segundo Thomas Heath [14], na obra *A History of Greek Mathematics (pag.244-248), o* primeiro a apresentar uma solução ao problema foi Hipócrates de Chios (séc. V a.C.) que sugeriu que introduzissem duas médias proporcionais aos segmentos x e 2x, teria um cubo duplicado. Com esta ideia, o problema da duplicação do cubo tornou-se outro de igual dificuldade.

Com esta ideia, vários geômetras da Academia de Platão tentaram solucionar o problema e há destaques para Arquitas Tarentino que o resolveu com o semicilindro e Eudóxio com "certas linhas curvas".

Mas todas estas soluções eram somente demonstrações e não satisfaziam a Geometria plana com uso somente de régua não graduada e compasso.

Menaecmus (340 a.C.) apresentou uma solução através de intersecções de pares de curvas obtidas como secções planas de superfícies cônicas, denominadas parábolas, em conjunto com as circunferências, elipses e hipérboles, designadas como cônicas.

Figura 17 – Cônicas (Cone de Apolônio)

Em verdade, sua grande contribuição não foi a solução dada, que não podia ser representada apenas por régua e compasso, mas foi em definir cada uma dessas “novas” curvas com propriedades específicas.

3.2.2. Elipsógrafos na História

Acredita-se que o primeiro a construir um instrumento que traçasse cônicas foi Menaecmus devido à solução do problema da duplicação do cubo.

Posteriormente, vários outros também construíram instrumentos que traçassem cônicas, mais especificamente, as elipses. Entre eles temos Leonardo da Vinci, no séc. XV, inventou um elipsógrafo com um movimento invertido de conexão fixa.

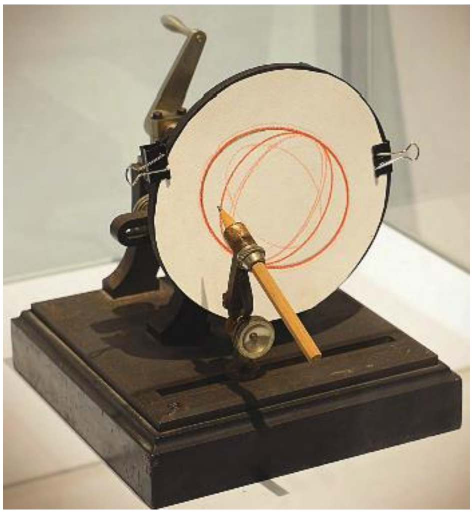


Figura 18 - Elipsógrafo de Leonardo da Vinci

Na mesma época, têm-se relatos que o pintor e matemático Albrecht Dürer que utilizava instrumentos mecânicos para traçar curvas.

René Descartes[7], em 1637, publica *Discurso do Método,* obra composta por vários ensaios científicos e que afirma que a busca da verdade tem que ser pesquisada e que um problema sempre será mais bem compreendido se o dividirmos em uma série de pequenos problemas que serão analisados isoladamente um do outro.

Com esse pensamento em busca da verdade, cria a Geometria Analítica, que é uma tradução das operações algébricas em linguagem geométrica.

Esse novo modo de proceder deu aos problemas de natureza geométrica uma forma organizada e mais clara de resolução.

Ele também contribuiu nas mais diversas áreas, tais como Filosofia e Óptica, e nesta deu enormes contribuições ao estudar o movimento da luz e na criação de aparelhos que desenhasse curvas, como mostra a ilustração a seguir.

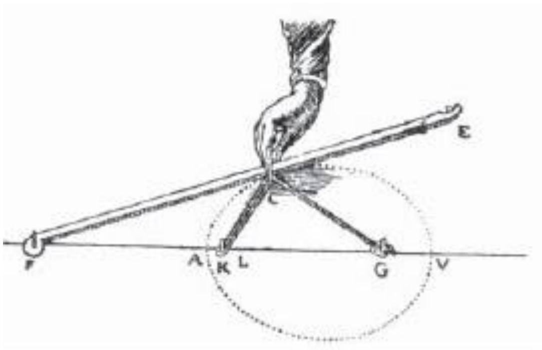
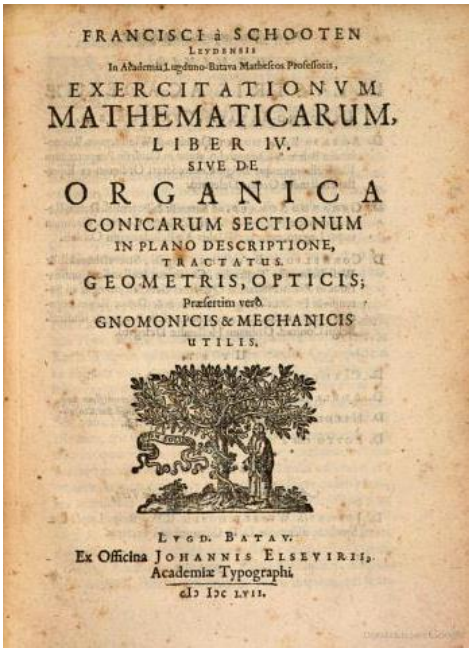


Figura 19 - Elipsógrafo de Descartes

No ano de 1657, Van Schooten [30] publica "*Exercitationum mathematicarum libri quinque*" (Os cinco livros de exercícios matemáticos), cada livro com centenas de páginas cada um. O livro I faz uma revisão de padrões usados na Aritmética e na Geometria. O livro II apresenta algumas regras de construção. O livro III reconstrói algumas obras de Apolônio sobre lugares geométricos. O livro IV, *Órganica conicarum sectionum*, o mais famoso entre os cinco livros, fala sobre os mais variados instrumentos que traçam cônicas. O livro V consta de exercícios diversos de Matemática.



FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM,
LIBER IV.
SIVE DE
ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM
IN PLANO DESCRIPTIONE,
TRACTATUS.
GEOMETRIS, OPTICIS;
Præsertim verò
GNOMONICIS & MECHANICIS
UTILIS.

LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIƆ IƆC LVII.

Figura 20 - Órganica conicarum sectionum

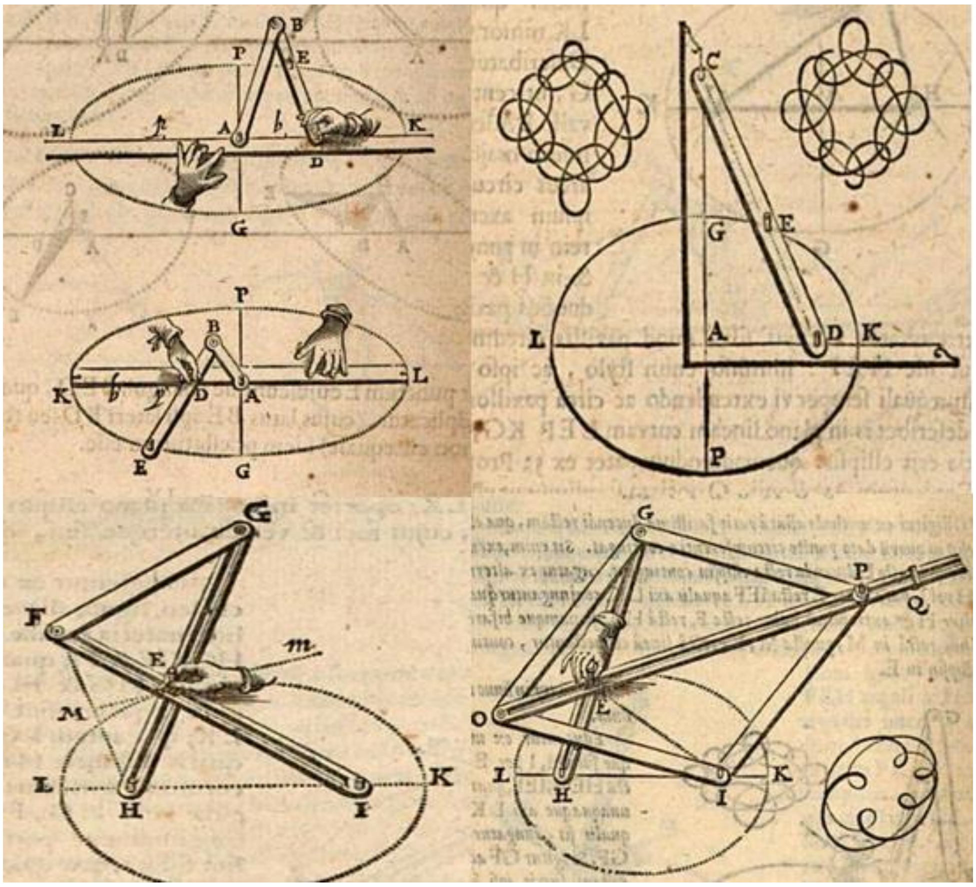
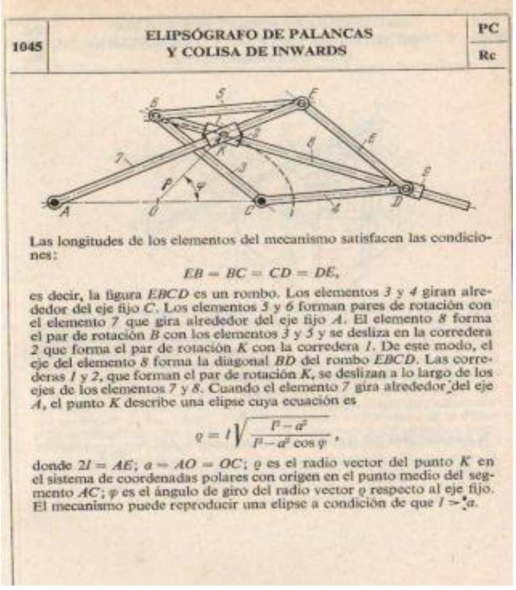


Figura 21 - Variados Elipsógrafos de Van Schooten

Em 1877, A.B. Kempe [20] publica a obra “How to Draw a Straight Line” onde menciona trabalhos de vários matemáticos, todos relacionados a instrumentos geométricos.

Iván Ivánovich Artobolevski [3], publica em 1975 a sua obra “Les mécanismes dans la technique moderne” que traz vários tipos de instrumentos tanto mecânicos quanto elétricos. Dentre esses, aparecem vários instrumentos que traçam cônicas.



1045	ELIPSÓGRAFO DE PALANCAS Y COLISA DE INWARDS	PC / Rc

Las longitudes de los elementos del mecanismo satisfacen las condiciones:

$$EB = BC = CD = DE,$$

es decir, la figura $EBCD$ es un rombo. Los elementos *3* y *4* giran alrededor del eje fijo C. Los elementos *5* y *6* forman pares de rotación con el elemento *7* que gira alrededor del eje fijo A. El elemento *8* forma el par de rotación B con los elementos *3* y *5* y se desliza en la corredera *2* que forma el par de rotación K con la corredera *1*. De este modo, el eje del elemento *8* forma la diagonal BD del rombo $EBCD$. Las correderas *1* y *2*, que forman el par de rotación K, se deslizan a lo largo de los ejes de los elementos *7* y *8*. Cuando el elemento *7* gira alrededor del eje A, el punto K describe una elipse cuya ecuación es

$$\varrho = l\sqrt{\frac{l^2 - a^2}{l^2 - a^2\cos\varphi}},$$

donde $2l = AE$; $a = AO = OC$; ϱ es el radio vector del punto K en el sistema de coordenadas polares con origen en el punto medio del segmento AC; φ es el ángulo de giro del radio vector ϱ respecto al eje fijo. El mecanismo puede reproducir una elipse a condición de que $l > a$.

Figura 22 - Folha do livro de Artobolevski

3.3. Detalhamento de funcionamento

3.3.1. Funcionamento do Elipsógrafo de Proclo

Este instrumento é composto por uma haste regulável que desliza, com auxílio de dois pinos fixados sobre um trilho, em posições pré-determinadas. Estes trilhos estão em posição ortogonais entre si. A ponta de escrita pode ser colocada em qualquer posição da haste.

A movimentação tanto pode ser feita no sentido horário como no anti-horário.

Figura 23 - Funcionamento do Elipsógrafo de Proclo

3.3.2. Funcionamento do Elipsógrafo Antiparalelogramo

O Elipsógrafo Antiparalelogramo é composto por quatro hastes articuladas, onde as extremidades de uma delas coincidem com os focos da elipse que se deseja traçar.

Pode ser girado tanto no sentido horário como no anti-horário e o ponto que desenha a elipse está na intersecção das hastes que se cruzam.

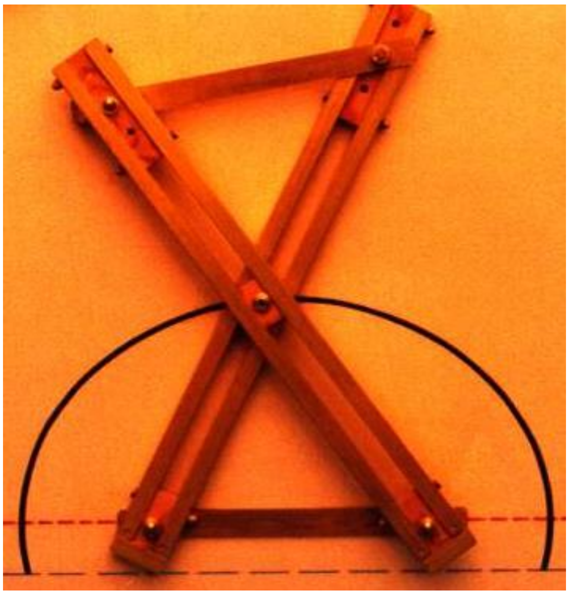


Figura 24 - Funcionamento do Antiparalelogramo

4. Sequência de construção no GeoGebra

Antes da construção no GeoGebra, é importante salientar que o objetivo desse trabalho é o de construção de um elipsógrafo virtual, que funcione como uma ferramenta real. Alguns passos de construção são necessários para conseguir a aparência das hastes, a profundidade, entre outros detalhes. Também é importante salientar que, como se trata de uma “ferramenta real”, ela estará sujeita às limitações físicas da ferramenta verdadeira.

4.1. Construção da Haste de Madeira

Inicialmente foi construída a haste de madeira utilizada para a criação do elipsógrafo. Para isso foram utilizados os comandos de vetor, lista, polígono, setor circular, arco e alterações de aparência como cor, transparência, espessura e camadas. Toda construção se baseia nos dois pontos A e B, que serão os furos de montagem da haste no elipsógrafo.

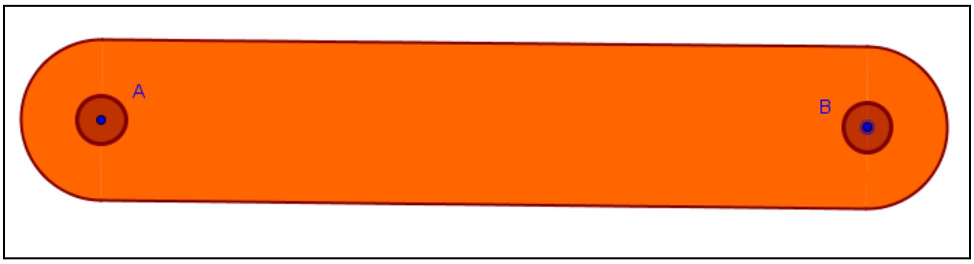


Figura 25 – Haste de Madeira

Sequência de Construção:

1) Construa os pontos A e B em qualquer posição.
2) Na caixa de entrada, escreva “u=VetorUnitário[Segmento[A,B]]”, para criar o vetor unitário u do vetor AB.
3) Construa o vetor v, perpendicular a u, digitando o comando “v=VetorPerpendicular[u]”.
4) Construa a “Lista1”, digitando na caixa de entrada: “lista1={A+v,B+v,A-v,B-v}”. Os pontos dessa lista formam a parte retangular da haste e são definidos através da translação dos pontos A e B pelo vetor v. É necessário que os pontos da lista estejam na ordem apresentada acima, caso contrário interfere no próximo passo.

5) Construa o polígono com os pontos criados na “Lista1” assim: “pol1=Polígono[lista1]”.
6) As extremidades da haste são compostas por semicírculos, a partir dos pontos da “lista1”, assim:
   a. Semicírculo a partir dos pontos transladados de A: “c1=Semicírculo[A-v,A+v]”;
   b. Semicírculo a partir dos pontos transladados de B: “c2=Semicírculo[B+v,B-v]”;

Ilustrando a sequência de construção descrita acima:

Figura 26 - Passos de Construção 1 a 6

7) Acabamento da haste:
   a. Alterar cor: com o cursor sobre o polígono, clique com o botão direito e selecione “Propriedade”. Na guia “Cor” escolha a cor desejada e altere a transparência para 100%. Na guia “Básico” desmarque a o campo “Exibir Rótulo”.
   b. Com o comando “Copiar Estilo Visual” clique na “Janela de Álgebra” sobre o polígono e, em seguida, clique sobre c1 e c2 (semicírculos).
   c. Faça uma linha de contorno da haste, digitando na caixa de entrada:
      - l1=Segmento[A+v,B+v]
      - l2=Segmento[A-v,B-v]
      - c3=ArcoCircular[A,A+v,A-v]
      - c4=ArcoCircular[B,B+v,B-v]
   d. Clique sobre cada uma desses elementos e altere as propriedades, tais como cor e espessura do contorno.

e. Faça o furo de montagem do pantógrafo. Crie um círculo de centro em A e raio "A+0.3u" digitando "c5=Círculo[A,A+0.3u]". Faça o mesmo para o círculo c6 com o ponto B.

O passo 7 trata somente da aparência final de cada haste.

Observe os pontos de vértice do polígono, que foram construídos utilizando o comando lista, e que a maior parte dos pontos utilizados são construídos a partir da translação dos pontos A e B pelos vetores u e v. Dessa forma, todos os polígonos e elementos circulares estão vinculados ao movimento dos pontos A e B.

Como foi explicado no capítulo 2, é possível criar uma nova ferramenta no GeoGebra. Para criar a ferramenta Haste é preciso selecionar toda a haste, clicar na opção "Nova Ferramenta". Os objetos finais serão os segmentos, polígono, linhas de contorno, arcos e setores. Os objetos iniciais são os pontos A e B, depois é preciso criar um nome. Ao utilizar o comando "Opções – Gravar configurações", a ferramenta Haste estará disponível para a utilização em outro arquivo novo do GeoGebra.

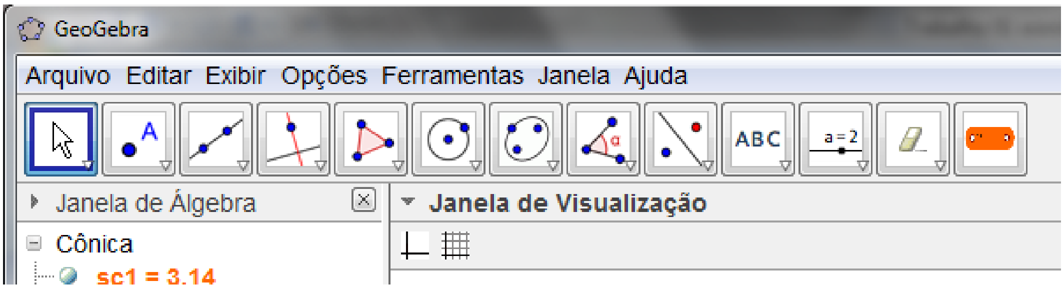


Figura 27 - Menu do GeoGebra com a nova ferramenta

4.2. Construção da Estrutura do Elipsógrafo

O objetivo da sequência de passos para a construção dos elipsógrafos é fornecer condições para que um professor possa reconstruí-lo, aproveitando cada passo para mostrar os conceitos, regras e propriedades que compõem cada aparelho. A ideia é a construção de um instrumento real, verificando algumas limitações físicas, como o tamanho das hastes e o alcance da mesma.

É importante lembrar que o GeoGebra nomeia automaticamente os elementos geométricos conforme sua construção, sendo possível que o usuário renomeie os itens a qualquer momento. Todos os elementos desta construção foram renomeados de maneira a manter certa organização entre eles. Para isso é necessário clicar com o botão direito sobre o elemento, escolher a opção Renomear e digitar o nome desejado. Para iniciar a construção, foi utilizada a opção “deixar visível os eixos coordenados”. Para escondê-los, clique no ícone no canto superior esquerdo da janela de visualização. A sequência de construção utilizada foi:

4.2.1 – Elipsógrafo de Proclo (Bússola de Arquimedes)

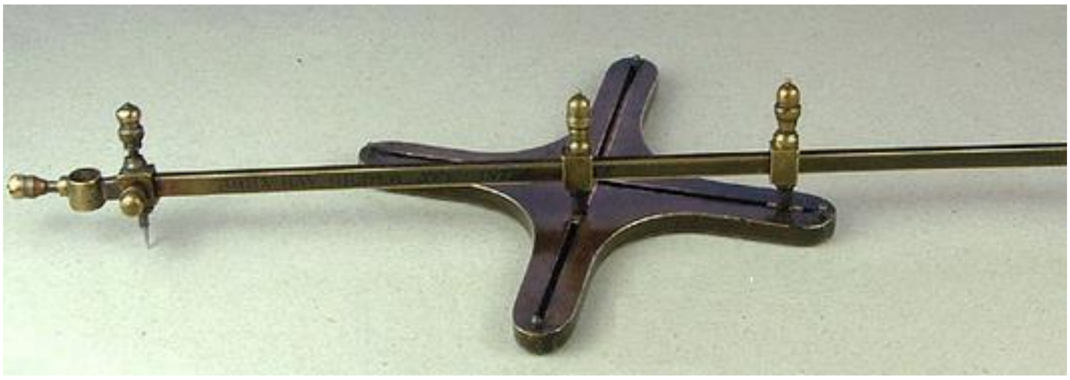


Figura 28 - Elipsógrafo de Proclo

1) Construa um controle deslizante **w**, selecione a opção número e variação de 20 a 50 com incremento de 5.

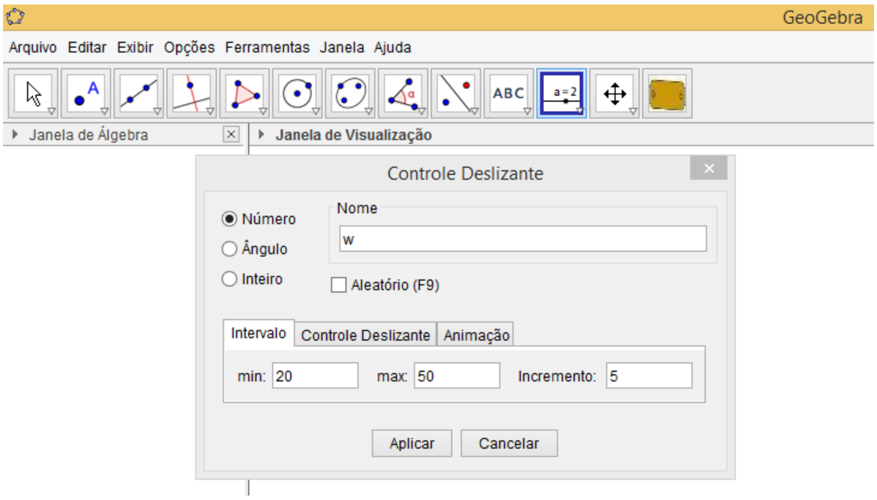


Figura 29 – Comando Controle Deslizante

2) Construa o controle deslizante **o**, selecione a opção número e variação de 60 a 100 com incremento de 5.

3) Crie um ponto **A** na origem.

4) Crie um ponto **B** digitando no campo de entrada B=(w,0) para que varie de acordo com o valor de **w**.

5) Construa um círculo **c** com centro em **A** e passando por **B**.

6) Crie um ponto **C** na circunferência.

7) Trace uma reta **a**, perpendicular ao eixo y, passando por **C**.

8) Use o comando “intersecção de dois objetos” e marque o ponto **D** na intersecção da reta **a** com o eixo y.

9) Trace uma reta **b**, perpendicular ao eixo x, passando por **C**.

10) Marque o ponto **E** na intersecção da reta **b** com o eixo x.

Movimentando o ponto **C** verificamos que os pontos **D** e **E** também se movimentam, respectivamente, sobre os eixos y e x, com a limitação do círculo **c**.

Ao traçarmos uma semirreta **DE** e marcarmos um ponto **F** sobre esta semirreta, teremos um traçador de elipse, com eixo menor em y, pois a origem desta semirreta é o ponto **D**, que está sobre o eixo y. E, se quisermos que o eixo menor esteja sobre o eixo x, basta que a semirreta seja **ED**.

Habilite o rastro no ponto **F** para ver a elipse.

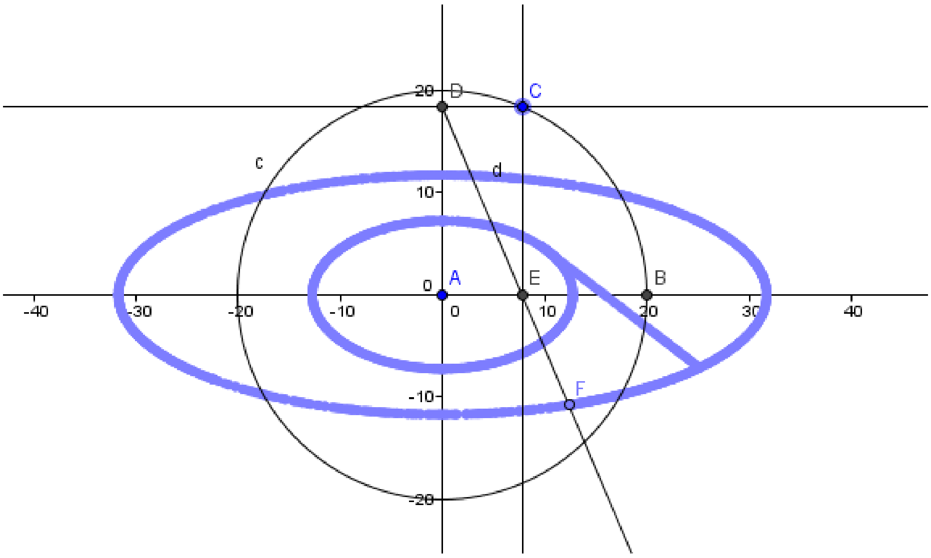


Figura 30 - Semirreta DE

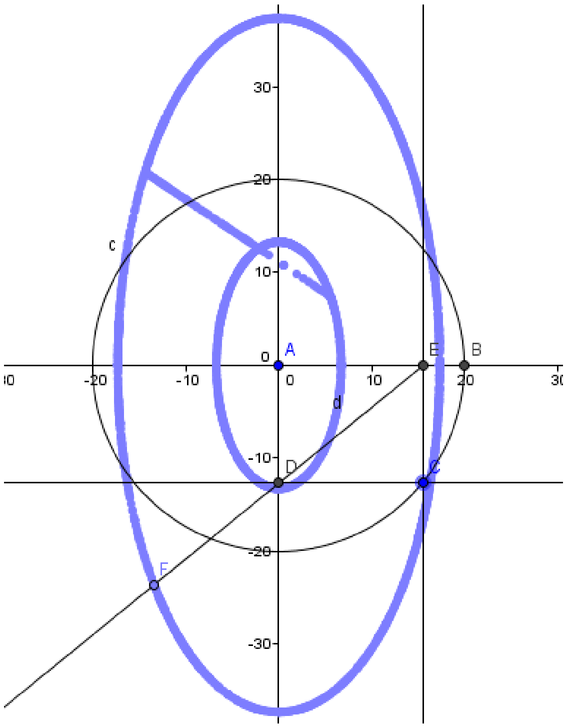


Figura 31 - Semirreta ED

11) Trace a semirreta **d**, de origem **D** passando por **E**.

Todos os pontos dessa semirreta traçam elipse.

12) Construa círculo **e** de centro **E** e raio **o**.

Esse círculo delimita o tamanho físico da haste do elipsógrafo.

13) Crie um ponto **K** na intersecção do círculo **e** com a semirreta **d**.

14) Esconda a semirreta **d**. Para isto, clique com o botão direito do mouse sobre a semirreta e desmarque a opção "exibir objeto". Também é possível esconder qualquer objeto no GeoGebra desmarcando-o na janela de álgebra.

15) Esconda o círculo **e**.

16) Trace o segmento **f**, de extremos **D** e **K**.

17) Habilite o rastro do ponto **K**. Clique com o botão direito do mouse e selecione "habilitar rastro".

Mova o ponto **C** e verá a elipse sendo traçada a partir do ponto **K**. Movimentando o controle deslizante **o**, verá que outras elipses são formadas.

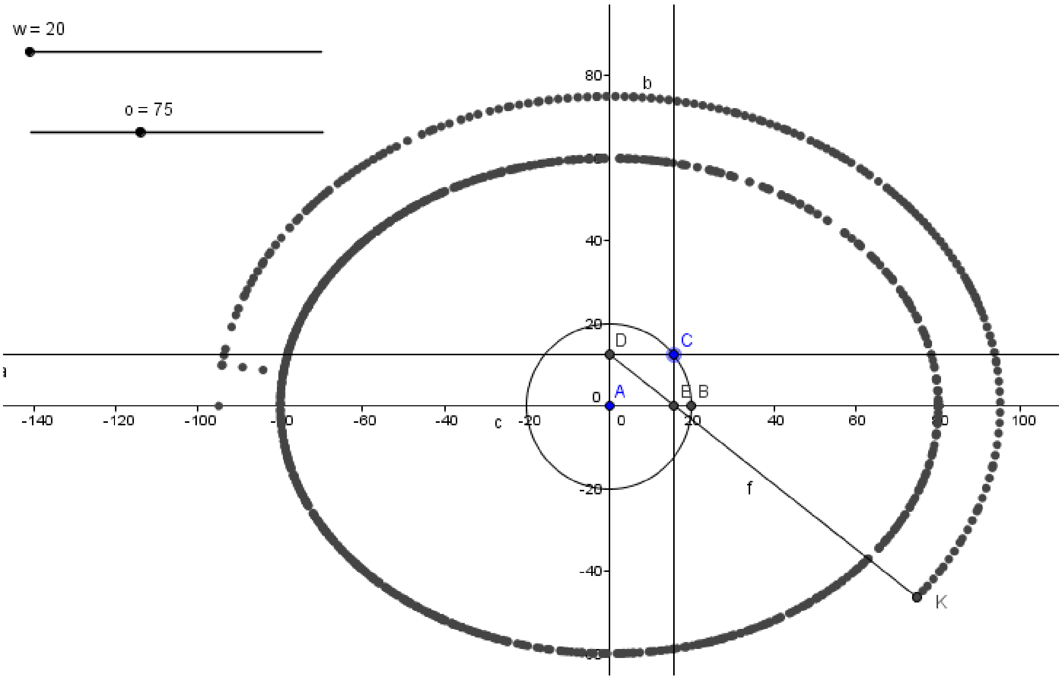


Figura 32 - Elipse com eixo maior no eixo x

Provisoriamente, esconda o segmento **f** e o ponto **K**, para a construção do elipsógrafo com eixo maior sobre o eixo y.

18) Trace a semirreta **g**, de origem **E** passando por **D**.

Da mesma forma, como no passo 11, todos os pontos dessa semirreta traçam elipses em torno do eixo y.

19) Construa círculo h de centro em **D** e raio **o**.

20) Crie um ponto **F** na intersecção do círculo **h** com a semirreta **g**.

21) Esconda a semirreta **g** e o círculo **h**.

22) Trace o segmento **i**, de extremos **E** e **F**.

23) Habilite o rastro no ponto **F**.

Mova o ponto **C** e verá a elipse sendo traçada a partir do ponto **F**. Movimentando o controle deslizante **o**, verá que outras elipses também são formadas.

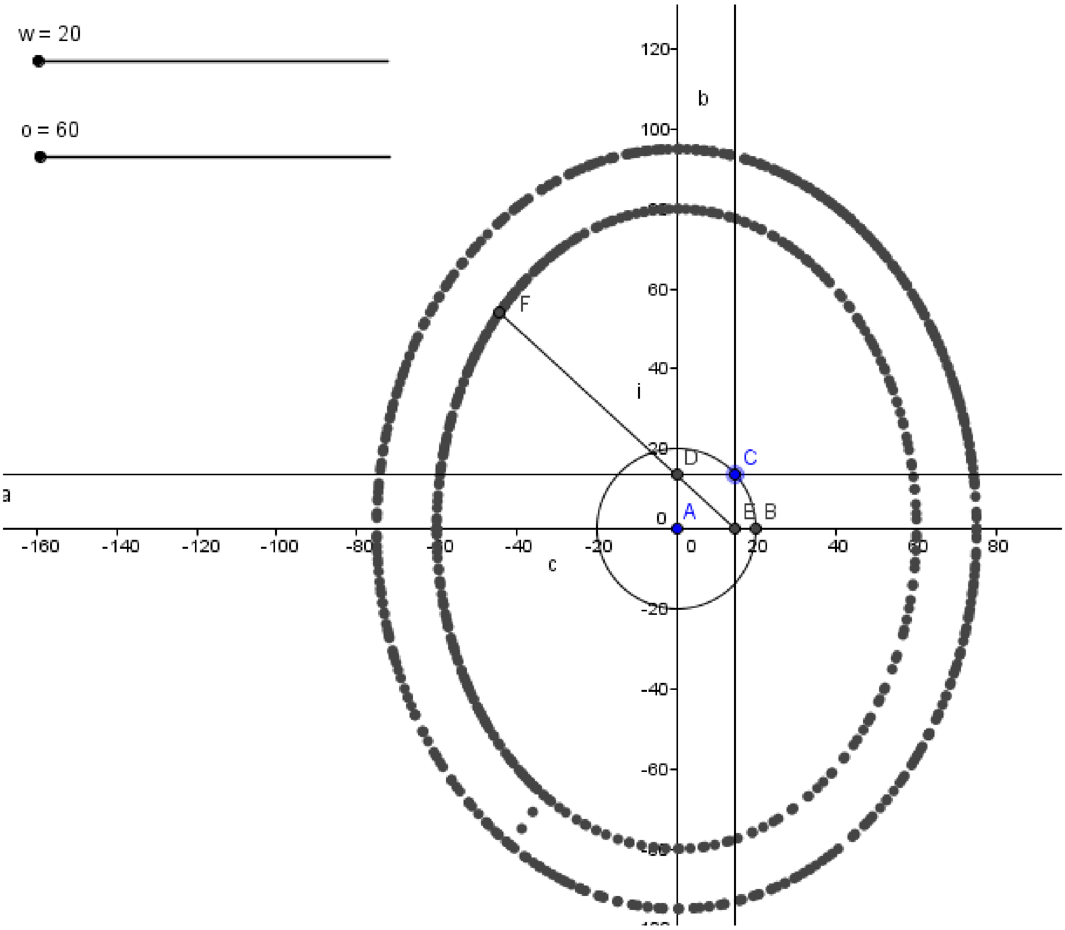


Figura 33 - Elipse com eixo maior sobre o eixo y

Até o momento temos duas possibilidades de construção de elipses, uma com eixo maior sobre o eixo x e a outra sobre o eixo y, sendo necessário escolher com qual orientação da elipse a ser desenhada.

Para permitir essa escolha é necessário a construção de botões, cada qual com um tipo de programação.

24) Na caixa de entrada digite “p=true” para criar uma variável booleana **p**. Portanto, temos que definir quais objetos aparecerão para “p=true” e quais para “p=false”.

Defina “p=true” para a elipse com eixo maior sobre o eixo x e para “p=false” para a elipse com eixo maior sobre y.

25) Na janela de álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre o segmento **f** e selecione “propriedades”. Na guia “condição para exibir objeto” digite **p**.

Na maioria dos casos, quando digitamos em alguma janela, basta fechá-la para ter a informação salva, não há um botão para confirmar.

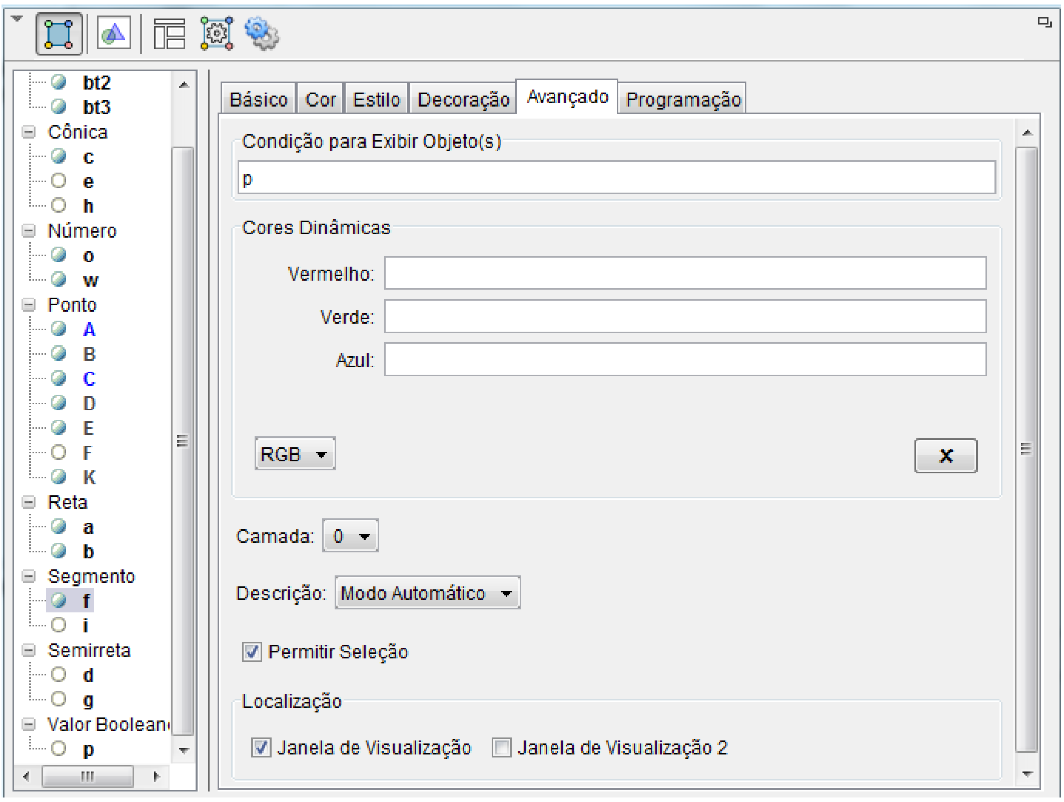


Figura 34 - Condição para exibir objeto

26) Na lista de objetos a esquerda, marque o ponto **K** e condicione sua exibição também a variável **p**.

27) Faça o mesmo para o segmento **i** (EF) e para o ponto **F**, mas em ambos dê como condição de exibição **!p**.

O comando “**!p**” significa “não **p**”, como **p** é definido como “true” , logo “!p” será “false”.

O segmento **i** e o ponto **F** são objetos para a construção da elipse com eixo maior sobre o eixo y.

28) Crie um botão com o comando “inserir botão” e coloque para legenda “Elipse no eixo x” e no campo “Código GeoGebra” digite p=true.

É preciso programar este botão para os objetos que constroem a elipse com eixo maior sobre o eixo x.

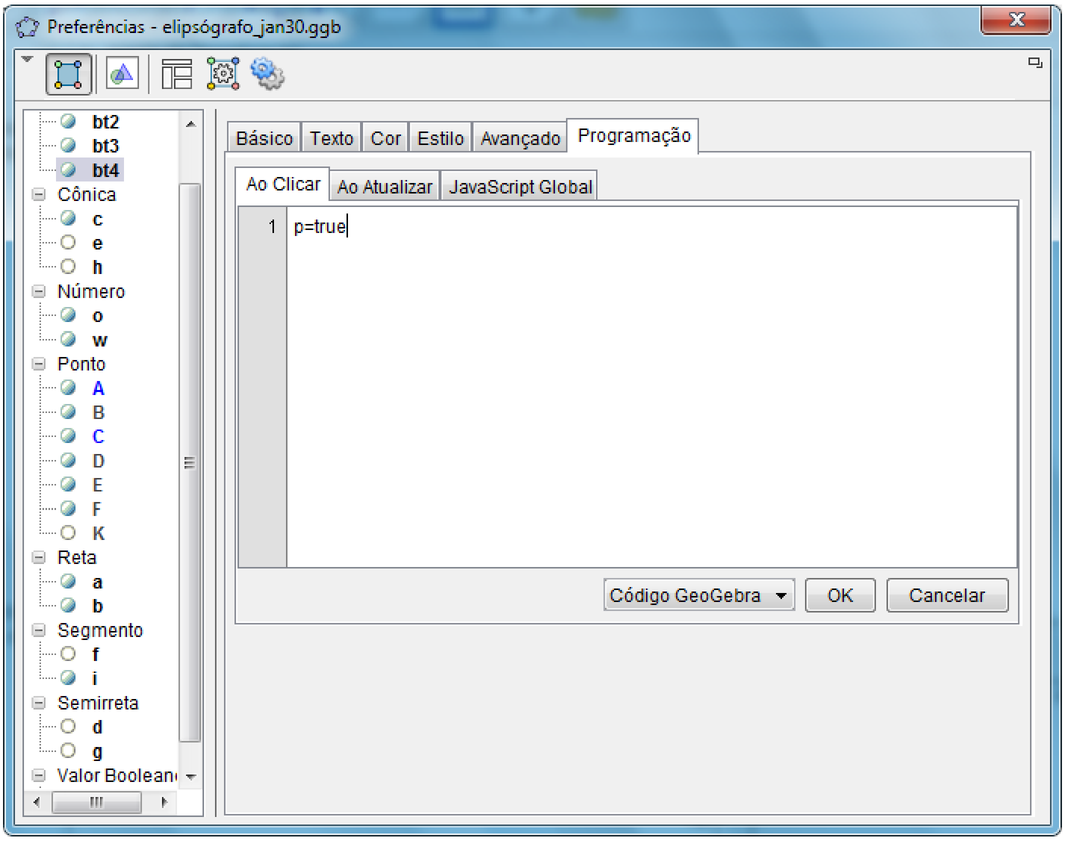


Figura 35 - Programação do eixo maior sobre o eixo x

29) Crie um botão com legenda “Elipse no eixo y” e no campo “Código GeoGebra” digite p=false.

30) Esconda as retas **a** e **b** para uma melhor visualização.

Para apagar o traçado da elipse temos várias maneiras de atualizar a tela, tais como: esconder os eixos na janela de visualização; clicar na opção “Exibir” da barra de menus e selecionar a opção “atualizar janelas”; utilizar o atalho Ctrl+F; mover a janela de visualização e entre outras.

Há também a possibilidade de criar um botão que faça a atualização da janela ou limpeza da tela de forma rápida.

31) Crie um botão com legenda “Apagar” e no campo “Código GeoGebra” digite “Ampliar[1]”. Este comando amplia com fator de escala 1.

Para uma melhor visualização, altere as cores do rastro dos pontos **K** e **F**.

32) Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **K** e selecione Propriedades. Na guia Cor escolha a de sua preferência.

Faça o mesmo para o ponto F.

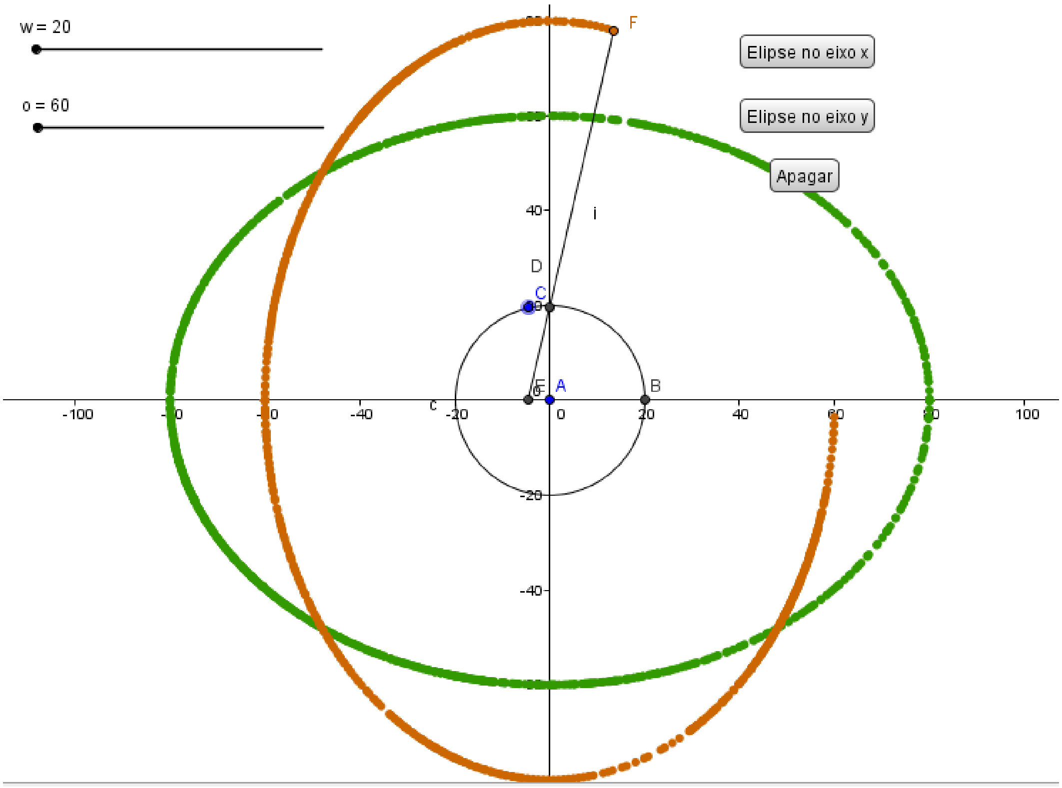


Figura 36 - Elipses

Para iniciar o acabamento do elipsógrafo, primeiramente faça os blocos deslizantes usando a seguinte sequência:

33) Crie os pontos **O** e **P** quaisquer.

34) Crie um vetor unitário **u** digitando no campo de entrada u=VetorUnitário[Vetor[O,P]].

35) Crie um vetor perpendicular **v** digitando v=VetorPerpendicular[u].

Os vetores **u** e **v** são necessários para a criação das listas que serão usadas para o acabamento do elipsógrafo.

36) A lista1 tem como referência o ponto **D** em conjunto com os vetores **u** e **v**. Digite no campo de entrada lista1={D-2u+2v,D+2u+2v,D+2u-2v,D-2u-2v}.

37) Digite no campo de entrada bloco1=Polígono[lista1]. Com este comando foi criado o primeiro bloco deslizante.

38) Para alterar a aparência do bloco clique com o botão direito sobre bloco1, na janela de álgebra, alterando a transparência para 100% escolhendo a cor de preferência e, em estilo, aumente a espessura da linha que faz o contorno do bloco.

39) Repita o item 36 para o ponto **E** criando a lista2.

40) Crie o bloco2, usando a lista criada no tem anterior e altere sua aparência.

Usando a ferramenta haste, construída no início do trabalho, faça primeiramente para o elipsógrafo no eixo x.

41) Clique na ferramenta haste e nos pontos **D** e **K**.

Como a exibição desta haste está vinculada ao clicar no botão “Elipse no eixo x”, é necessário utilizar a mesma variável booleana para exibir/esconder objetos.

42) Clique com o botão direito no pol1, que foi criado pelo GeoGebra após ter vinculado uma haste entre os pontos **D** e **K**. Selecione Propriedades e na guia Avançado digite **p** na Condição para Exibir Objeto(s).

É necessário vincular essa condição para todos os elementos da haste, com isso na janela que aparece ao lado, procure os elementos que possuem as mesmas cores (claro e escuro) da haste, no caso as cônicas **c_1**, **t**, **q**, **s**, **r**, **k** e **t** e os segmentos **j** e **l**.

Faça o mesmo para criar a haste para o elipsógrafo que possui eixo maior em y.

43) Clique na ferramenta haste e nos pontos **E** e **F**.

44) Em pol2 condicione-o a **!p** e faça o mesmo para todos os objetos que estão vinculados a esta haste.

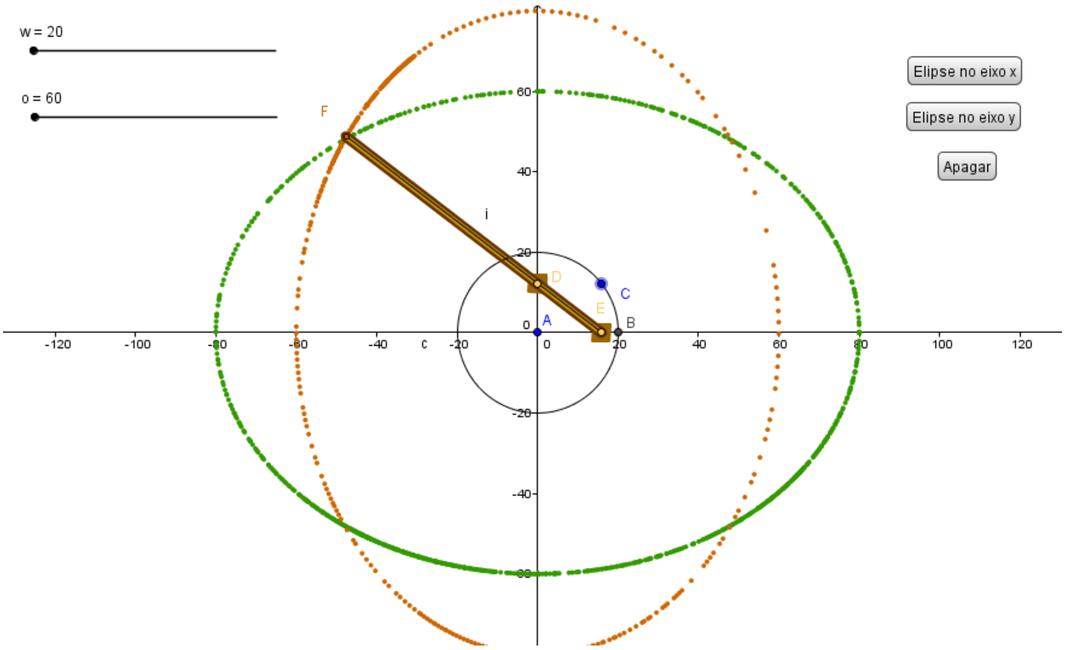


Figura 37 - Elipsógrafo com Haste

Para a construção da base do instrumento são criados quatro pontos que delimitam a dimensão da base.

45) Crie os pontos **B1**=(53,0), B2=(0,53), B3=(-53,0) e B4=(0,-53).

46) Crie a lista3={B1+3v,B3+3v,B3-3v,B1-3v} e, em seguida, o polígono **a** partir desta lista, pol3=Polígono[lista3]. Altere as configurações deste polígono no que diz respeito a cor, transparência e espessura da linha.

47) Crie a lista4={B2+3u,B2-3u,B4-3u,B4+3u} e a partir desta o polígono pol4=Polígono[lista4]. Altere as configurações para que fique igual ao polígono pol3.

Esses polígonos, pol3 e pol4, são os trilhos por onde os blocos deslizam. Ao movimentar o ponto **C**, que descreve a elipse, percebemos que os blocos desapareceram com a construção desses dois polígonos. Para que os blocos apareçam por cima dos trilhos, devemos colocá-los numa camada acima.

48) Clique com o botão direito do mouse sobre bloco1, em Propriedades, na guia Avançado, selecione a camada para 1.

Toda construção feita no GeoGebra está na camada 0, caso queira que esteja acima, o usuário deve alterá-la.

49) Faça o mesmo para o bloco2 e para os pontos **D** e **E**, que são os centros desses blocos, assim como para todos os elementos que compõem a haste.

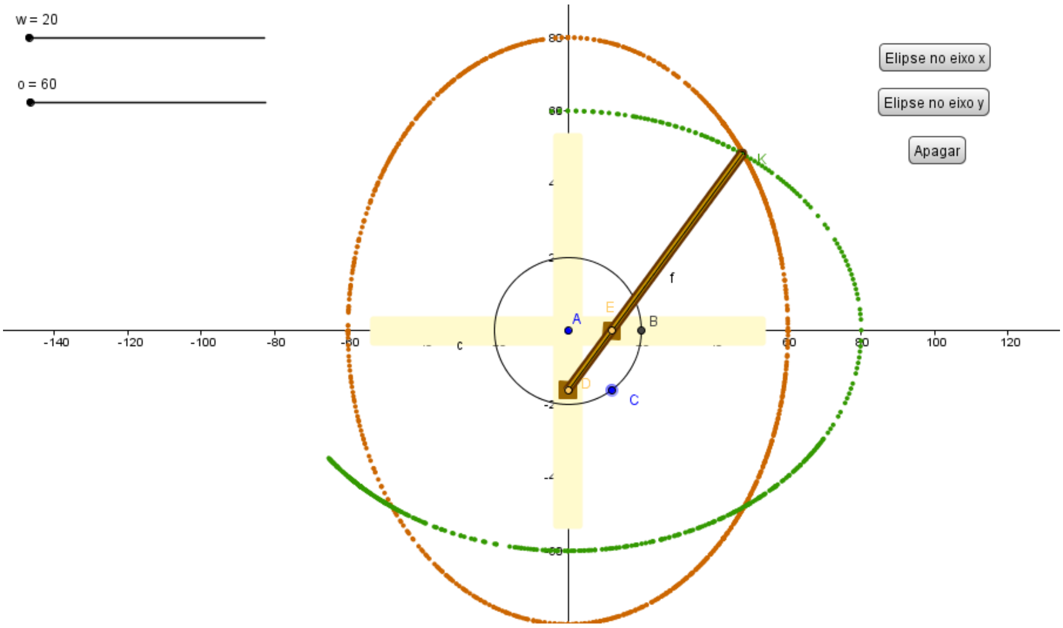


Figura 38 - Elipsógrafo com trilhos

Para a construção da base onde se fixam os trilhos, utiliza-se o comando Setor Circular para os quatro quadrantes determinados pelos polígonos pol3 e pol4.

50) Digite no campo de entrada SetorCircular[A+3u+3v, B1+3v,B2+3u]. Com isso formará o 1º quadrante. Para os demais siga os passos:

2º Quadrante: SetorCircular[A-3u+3v,B2-3u,B3+3v]

3º Quadrante: SetorCircular[A-3u-3v,B3-3v,B4-3u]

4º Quadrante: SetorCircular[A+3u-3v,B4+3u,B1-3v]

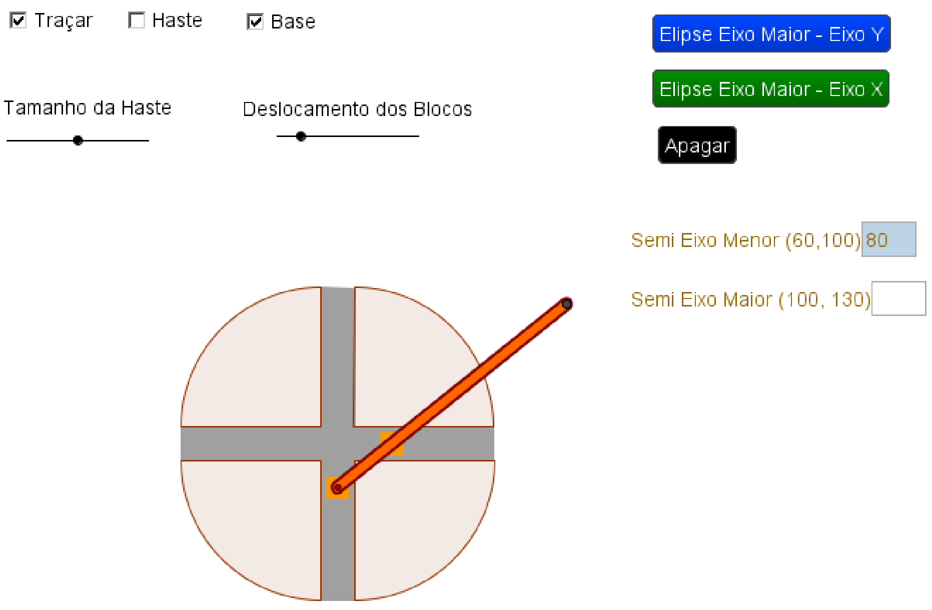


Figura 39 - Elipsógrafo de Proclo no GeoGebra

4.2.2 – Elipsógrafo Antiparalelogramo (ou do Jardineiro)

1) Construa o controle deslizante "**dist**", com variação de 20 a 60 e incremento de 1. Na guia "legenda", em Propriedades, escreva "Distância Focal". Esse controle deslizante determina a distância focal.

2) Construa o controle deslizante **k**, com legenda "EA+EB", variando de 65 a 120 com incremento de 1.

3) Crie um ponto **A** qualquer.

4) No campo de entrada digite B=(x(A)+dist, y(A)). Este ponto é um dos focos e mantém a distância de acordo com o controle deslizante "distância focal".

5) Crie um círculo **h** de centro **A** e raio **k** (controle deslizante).

6) Marque um ponto **C** na circunferência e anime este ponto.

7) Construa um segmento **i** de extremos **B** e **C**.

8) Trace a mediatriz do segmento **BC**.

9) Marque o ponto **D** sendo este a reflexão de **A** em relação à mediatriz de **BC**.

10) Faça os segmentos **AB**, **AC**, **CD** e **BD**.

11) Marque o ponto **E** na intersecção dos segmentos **AC** e **BD** e habilite o rastro deste ponto.

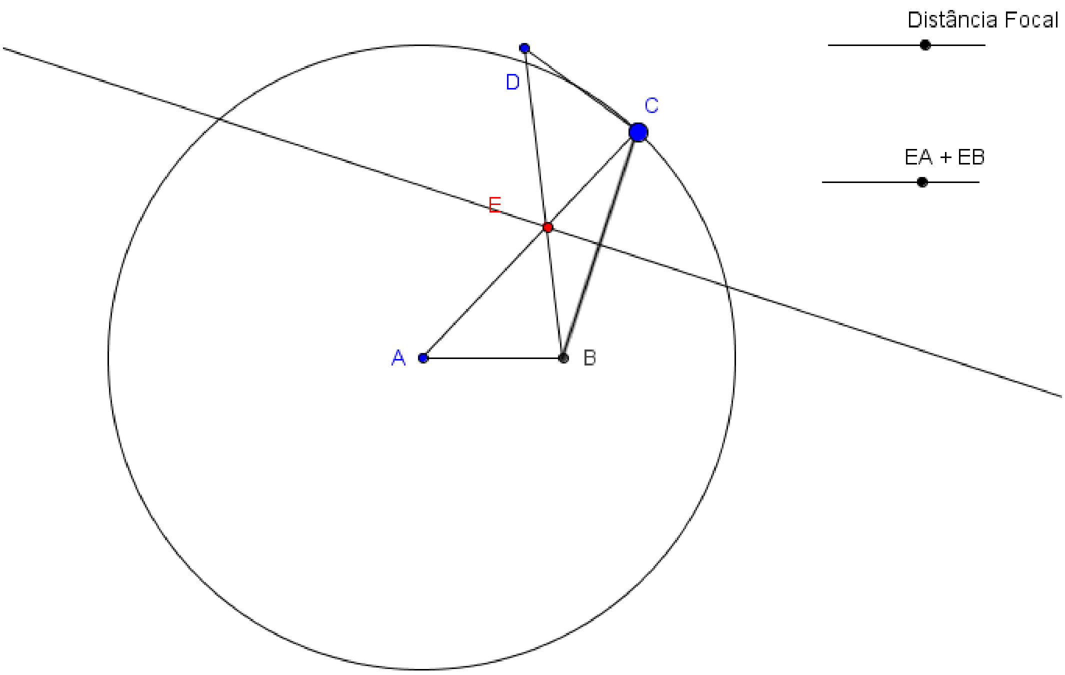


Figura 40 - Estrutura do Antiparalelogramo

12) Esconda o círculo **h**, a mediatriz e o segmento **BC**.

13) Insira a haste no segmento **AB** e coloque-a na camada 6.

14) Na caixa de entrada digite “o=true” para criar a variável booleana **o**. Clique com o botão direito em pol1 e em “condição para exibir objeto”, na guia avançado, digite “o”. Neste mesmo quadro, na coluna à esquerda, faça o mesmo para todos os elementos que compõem a haste (todos estão com cores diferentes dos demais).

15) Insira a haste no segmento **CD** e coloque-o na camada 6.

16) Crie a variável booleana **u**. Faça o mesmo procedimento do passo 13 para todos os elementos da haste neste segmento.

17) Coloque a haste no segmento **AC** e coloque-o na camada 5.

18) Crie a variável **v** e faça o procedimento necessário a todos os elementos que compõem a haste neste segmento.

19) Insira a haste no segmento **BD** e coloque-o na camada 8.

20) Crie a variável booleana **w** e repita o procedimento dos elementos nesta haste conforme feita nas anteriores.

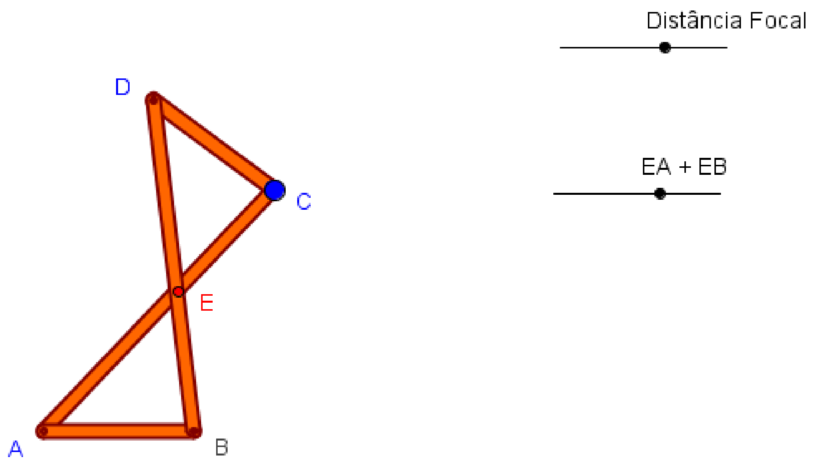


Figura 41 - Elipsógrafo com as hastes

21) Insira um "campo de entrada" e como legenda digite "(20 a 60)" e vincule o controle deslizante **dist**, correspondente a distância focal.

22) Insira um "campo de entrada" com legenda (65 a 120) e vincule o controle deslizante **k**, correspondente a EA+EB.

23) Crie um botão para sumir as hastes para que veja a estrutura do instrumento. Para isso chame-o de "Haste" e no campo "código GeoGebra" digite o=!o, u=!u, v=!v e w=!w, um em cada linha.

24) Crie o botão "Apagar" digitando no "Ampliar[1]" no campo código GeoGebra.

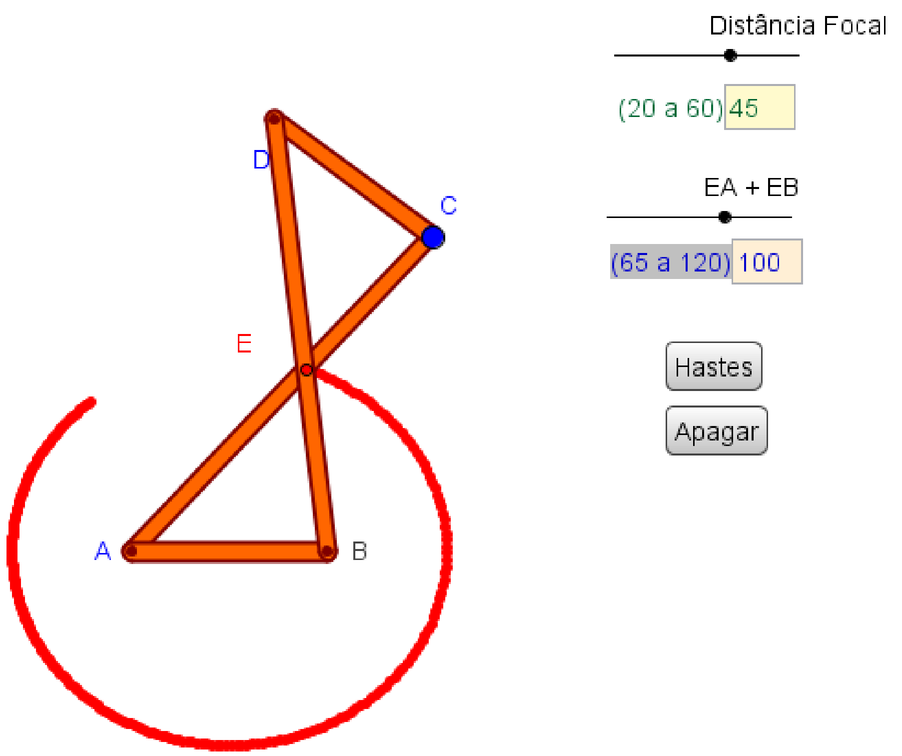


Figura 42 - Elipsógrafo Antiparalelogramo no GeoGebra

4.3 Animação

Para disponibilizar o modelo final, foi utilizada a plataforma GeoGebraTube.org, que funciona como repositório de trabalhos criados utilizando o GeoGebra. O site também possui fórum, da mesma forma que o site GeoGebra.org. Para o upload de trabalhos é preciso fazer um rápido cadastro, fazer login no sistema e escolher a opção Material e clicar em Enviar Material. O autor deve preencher o título do trabalho, fazer um breve comentário, fazer o upload do arquivo .ggb (limitado a 2Mb), preencher palavras-chave e gravar. O applet pode ser editado e regravado. Caso o professor queira deixar algum questionamento aos alunos, deve preencher no campo opcional do formulário, destinado à versão dos estudantes. Os endereços de acesso são:

- www.geogebra.org
- www.geogebratube.org

O arquivo finalizado do Elipsógrafo de Proclo (bússola de Arquimedes) está em:

- http://www.geogebratube.org/student/m94079

O arquivo finalizado do Elipsógrafo Antiparalelogramo (do Jardineiro) está em:

- http://www.geogebratube.org/student/m94038

5. Justificativa Matemática

5.1. Justificativa Pedagógica

A sociedade brasileira passa por grandes mudanças, passamos pela "revolução do conhecimento" que alterou o modo de organização do trabalho e das relações sociais. Essas transformações alteraram a estrutura da escola para a formação dos futuros cidadãos.

Com isso a formação acadêmica de nossos alunos deve pautar-se em temas contextualizados, que estimulem a aprendizagem, incentivando o raciocínio, a pesquisa e a capacidade criadora de nossos jovens.

De acordo com a Unesco, há quatro premissas apontadas como eixos estruturais da educação na sociedade contemporânea: Aprender a Conhecer, Aprender a Fazer, Aprender a Viver e Aprender a Ser. Com essas ações há garantia da formação do educando como pessoa e como cidadão e cumprindo o triplo papel da educação: econômico, científico e cultural.

Com isso não basta uma educação voltada somente ao conteúdo, mas sim em um processo de ensino-aprendizagem em que o aluno possa entender como surgiu determinado assunto, quem já o estudou, onde se aplica, como se faz, enfim, situar os assuntos numa dimensão de valorização de seu contexto histórico e social.

Para tal, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) [39] determina uma Base Nacional Comum, devido a um país de dimensões continentais, onde

> *"Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que ao final do ensino médio o educando demonstre:*
>
> *I - domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;*
>
> *II - conhecimento das formas contemporâneas de linguagem;*

> *III - domínio dos conhecimentos de Filosofia e de Sociologia necessários ao exercício da cidadania."*

A reforma curricular fez-se necessária num mundo em transformação e a LDB estabeleceu o conhecimento escolar em três áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e, Ciências Humanas e suas Tecnologias. Essa divisão tem como base a reunião de conhecimentos que compartilham objetos de estudo permitindo uma prática de interdisciplinaridade e assegurando uma educação de base científica e tecnológica.

Percebe-se a Tecnologia presente nas três áreas e tem papel fundamental na educação geral do educando, cada qual com sua particularidade, mas permite contextualizar os conhecimentos de todas as áreas e disciplinas no mundo do trabalho.

> *"... é preciso identificar nas matemáticas, nas ciências naturais, nas ciências humanas, na comunicação e nas artes, os elementos de tecnologia que lhes são essenciais e desenvolvê-los como conteúdos vivos, como objetos da educação e, ao mesmo tempo, meio para tanto."*

A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias tem como finalidade a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade.

Nas "Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais", conhecida como PCN+ [41], sugere que o conhecimento tenha o sentido de investigação científica, interligando procedimentos e métodos, para uma efetiva aprendizagem. Isso se traduz "*na construção de modelos representativos e explicativos essenciais para a compreensão de leis naturais e de sínteses teóricas. A distinção entre modelo e realidade,...,são instrumentos gerais, desenvolvidos em todo o* *aprendizado científico, que promovem, como atributo da cidadania, a competência geral de investigação e compreensão.”*

A Matemática tem um papel de integração com as demais Ciências da Natureza e dá ao aluno a capacidade de desenvolvimento de competências e habilidades essenciais à sua formação, tais como: interpretar situações; dominar códigos e nomenclaturas da linguagem matemática; compreender e interpretar desenhos e gráficos; e, na resolução de problemas.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) divide a Matemática do Ensino Médio em três temas estruturadores: Álgebra (números e funções); Geometria e medidas; e, Análise de dados.

A finalidade do ensino de Álgebra é que o aluno use e interprete modelos, perceba o sentido das transformações, busque regularidades, conheça o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquira uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático.

A Geometria, relacionada com as formas naturais e construídas pelo homem, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto, baseando-se em dois princípios: posição relativa das formas (paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas) e medidas (quantificar comprimentos, áreas e volumes).

Para uma melhor compreensão do educando, para a análise das diferentes representações geométricas, é indicado o uso de desenhos, planificações e construções com instrumentos.

Entre tantos fatores que indicam o uso e construção de instrumentos geométricos, deve-se destacar também a importância histórica, onde grandes matemáticos, filósofos e cientistas se debruçaram na busca do conhecimento, entre eles destaca-se, o movimento elíptico das órbitas dos planetas, as propriedades refletoras das cônicas que são importantes em vários aparelhos e até mesmo na arquitetura e engenharia.

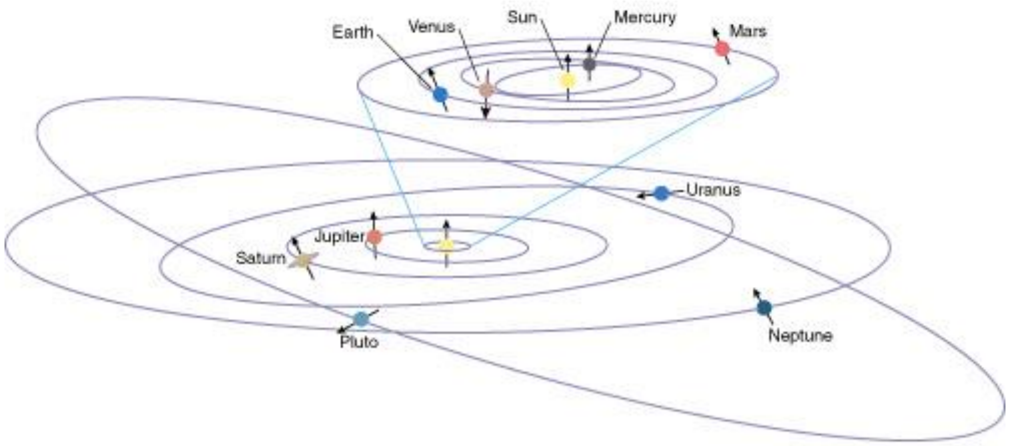


Figura 43 - Movimento Elíptico dos Planetas

O Teatro Nacional de São Carlos é uma dessas construções que utiliza a propriedade refletora da elipse. Os focos situam-se na frente do palco e no lugar do rei.

Figura 44 - Teatro Nacional de São Carlos (Portugal)

5.2. Argumentação Matemática

5.2.1. Elipsógrafo de Proclo

O Elipsógrafo de Proclo tem como funcionamento uma haste com três pontos colineares em destaque: C, M e G, sendo este último o que descreve a elipse e, C e M, os blocos do elipsógrafo.

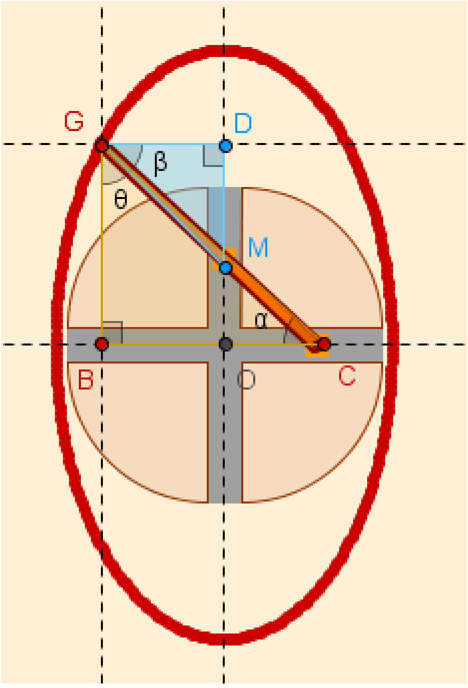


Figura 45 - Explicação Matemática do Elipsógrafo de Proclo

Para uma melhor visualização, retira-se a base do elipsógrafo:

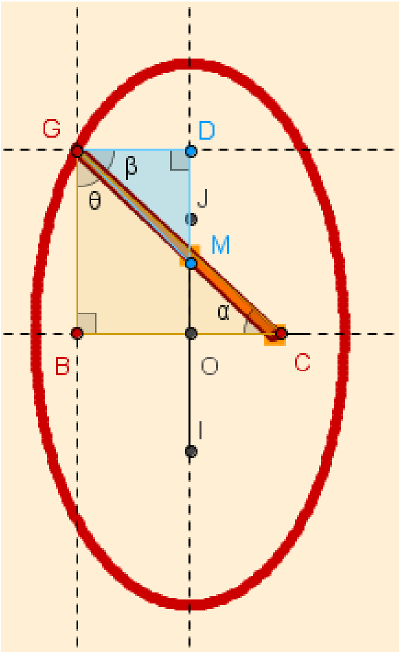


Figura 46 - Explicação Matemática do Elipsógrafo de Proclo (sem a base)

Considere O a origem do sistema cartesiano xOy, onde o eixo x é a reta que possui o segmento BC e o eixo y é a reta que possui o segmento OD.

Temos que $C\hat{B}G \equiv M\hat{D}G$ = 90º.

Como $\alpha + \theta$ = 90º e $\beta + \theta$ = 90º, logo $\alpha = \beta$.

Portanto, ΔCBG ~ ΔMDG.

Sendo as coordenadas de G(x, y) e $\alpha = \beta$, temos que

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{GM} \\ \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{GC} \end{cases}$$

elevando-se ao quadrado ambas as equações e adicionando-as temos

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \frac{x^2}{GM^2} + \frac{y^2}{GC^2} = 1.$$

5.2.2. Elipsógrafo Antiparalelogramo

Seja E um ponto qualquer da elipse ε.

Por construção, j é a mediatriz do segmento BC e o ponto E é a intersecção dos segmentos AC e BD.

Com isso, temos que F é o ponto médio de BC e j é a bissetriz de $B\hat{E}C$, logo $B\hat{E}F \equiv F\hat{E}C$ ($\alpha \equiv \beta$).

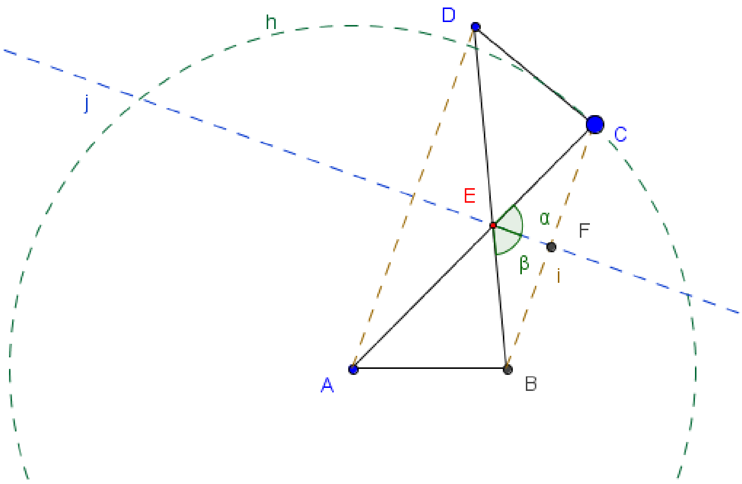


Figura 47 - Explicação BEF = CEF do Elipsógrafo Antiparalelogramo

Por sua vez, $A\hat{E}G \equiv F\hat{E}C$, pois são opostos pelo vértice.

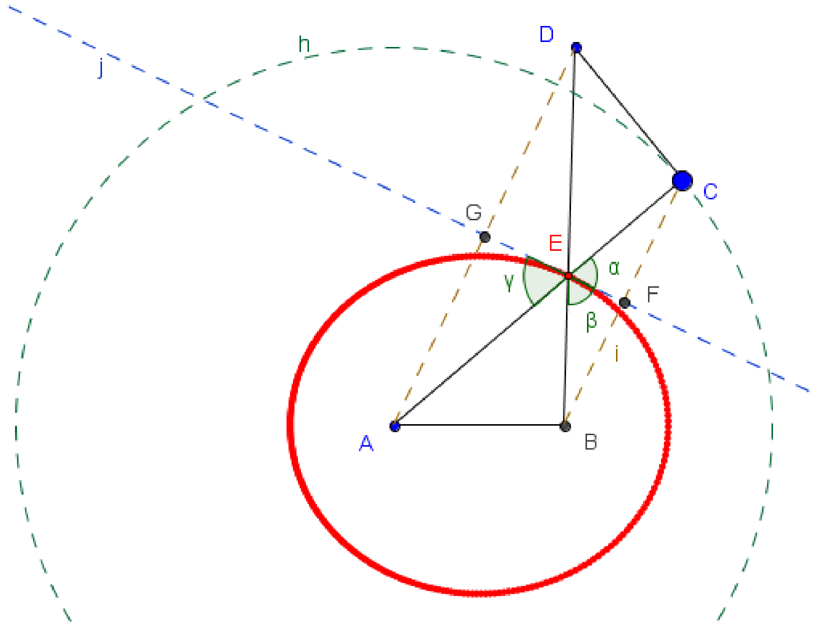


Figura 48 - Explicação AEG = FEC do Elipsógrafo Antiparalelogramo

Basta provar que j é tangente à elipse ε.

Como j é a mediatriz de BC e G ∈ j, temos que GC ≡ GB.

Logo, GA + GB = GA + GC > AC (pela desigualdade triangular no triângulo CGA).

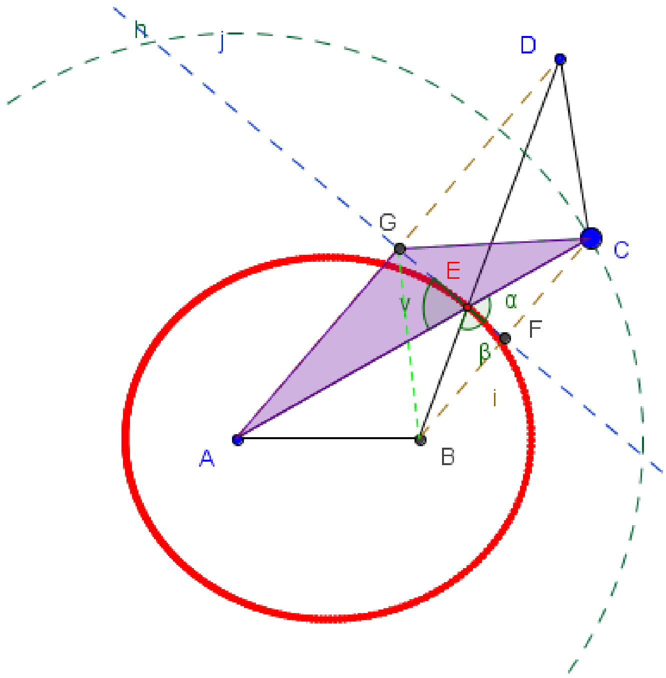


Figura 49 - Mediatriz j é tangente à elipse do Antiparalelogramo

Definamos que AC = 2a , logo GA + GB > 2a, sendo assim $G \notin \varepsilon$, $\forall G \in j$ e $G \neq E$.

Portanto, j é tangente à elipse ε.

Conclui-se que:

I) Satisfaz a Propriedade Bissetora da Elipse: “Seja uma elipse ε de focos A e B e seja E um ponto de ε. Então, a reta tangente à ε em E, forma ângulos iguais com os raios focais AE e BE”.

II) Define a elipse como lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias de qualquer um desses pontos aos focos mantém-se constante (EA + EB = EC + ED = 2a).

6. Estratégia e aplicabilidade em sala de aula

Este trabalho mostra que além de ensinar a construção de um elipsógrafo, assim como conhecer sua parte histórica e importância no contexto da evolução matemática, traz a possibilidade ao professor de verificar vários conceitos matemáticos que envolvem a construção e o funcionamento deste instrumento. Alguns exemplos são exemplificados nos itens a seguir:

6.1. Semelhança de Triângulos

O conceito de semelhança de triângulos pode ser explorado a partir da comparação dos triângulos formados, por exemplo, ao parar em determinada posição o movimento do elipsógrafo de Proclo e, ao alterar o deslocamento dos blocos, temos vários triângulos sendo formado a partir da haste com os eixos coordenados.
A própria construção do Antiparalelogramo nos remete a semelhança de triângulos.

6.2. Trigonometria

Conceitos básicos de Trigonometria, entre elas as razões trigonométricas de seno, cosseno e tangente dos ângulos formados pela haste com os eixos.

6.3. Ângulos

Explorar este tema, principalmente, utilizando o Antiparalelogramo devido as suas hastes cruzadas, assim como a relação de bissetriz de ângulo.

6.4. Lugar Geométrico

Além das elipses geradas por cada instrumento do trabalho, temos vários círculos que foram construídos que serviram como limitação das hastes e determinando o lugar geométrico dos mesmos.

7. Conclusão

Este trabalho traz uma nova abordagem no processo de ensino-aprendizagem ao utilizar o GeoGebra na construção de instrumentos, que ajudaram na evolução e desenvolvimento da Matemática, visto que muitos desses tiveram motivação especial na solução de problemas clássicos que perduraram por séculos.

A ideia de explorar esses instrumentos geométricos reafirma a importância da Geometria no ensino da Matemática. Nos dias atuais há uma valorização do estudo algébrico sobre o geométrico. Um exemplo deste fato está na retirada do ensino da disciplina Desenho Geométrico da grade curricular e também na forma de pensar de nossos educandos que demonstram necessidade por fórmulas para resolver os mais variados exercícios e problemas matemáticos.

O avanço tecnológico evidenciou a necessidade do conhecimento em informática no contexto social, acadêmico e profissional. Com isso, o acesso à informação, de forma rápida, obrigou o setor de educação a também evoluir neste sentido. Estes avanços podem ser vistos nos inúmeros softwares matemáticos disponíveis.

A construção dos elipsógrafos tratados neste trabalho estimula a construção do conhecimento matemático devido à utilização de um software que transforma a linguagem algébrica em linguagem geométrica e, vice-versa, dando ao aluno a possibilidade de relacionar os temas aprendidos de forma rápida e eficaz.

Este trabalho evidencia uma nova prática de ensino, de acordo com um mundo informatizado que estimula o “aprender a fazer”, não aceitando somente tudo como verdade e tendo a possibilidade de aprender no erro, visto que em muitos momentos, a construção dos instrumentos geraram erros e foi preciso dias de estudos até encontrar a forma correta.

Esta sensação de manipular um instrumento que foi pensado e construído por vários filósofos e matemáticos do passado pode ser um fator estimulador aos alunos. Torna-se mais motivador construí-lo num ambiente virtual, pensando nas limitações físicas que um instrumento real tem.

Espera-se que este trabalho traga ao professor uma nova metodologia de ensino-aprendizagem e utilização do GeoGebra para que o ensino de Matemática possa ser melhor difundido.

8. Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, Rafael Neves. *Desenhando cônicas: uma maneira interessante de se ensinar e aprender.* PPGE/UFSCar. São Carlos, 2006.

[2] ARAUJO, Claudio Lopes de. *GeoGebra, Um Bom Software Livre*. Revista do Professor de Matemática, nº 67, p. 43-7, 3º quadrimestre de 2008.

[3] ARTOBOLEVSKY, Ivan Ivanovich. *Les mécanismes dans la technique moderne*. Mir: Moscou, 1978. Disponível em: http://www.dmg-lib.org/dmglib/main/portal.jsp?mainNaviState=browsen.docum.viewer&phyPageNo=1&id=18360009. Acesso em: 25 de janeiro de 2014.

[4] ASSOCIAZIONE MACCHINE MATEMATICHE. Disponível em: http://www.macchinematematiche.org/cataoghi/perspectiva/ellissografo.htm. Acesso em: 27 de janeiro de 2014.

[5] AUBRY, M.A. *Estudio sobre los conicógrafos.* El Progreso Matemático - Revista de Matemáticas Puras y Aplicadas. Zaragoza, 1900. Disponível em: http://hemerotecadigital.bne.es/ results.vm?q=parent:0004526258&lang=en&s=63. Acesso em:02 de fevereiro de 2014.

[6] CANALLE, João Batista Garcia. *O problema do ensino da órbita da Terra.* Instituto de Física. UERJ, Rio de Janeiro, 2003.

[7] DESCARTES, René. *A Geometria.* Trad. Emídio C. de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001.

[8] DYCK, Walther et al. *Deutsche Mathematiker – Vereinigung*: Katalog mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Monique: C.Wolf & sohn, 1892. Disponível em: https://archive.org/details/katalogmathemat00goog. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

[9] FERREIRA, Inês Farias; DALMOLIN, Laura; XAVIER, Luana Kuister. *Obtenção de seções cônicas através de mecanismos articulados no Geogebra.* UFSM, Santa Maria, 2013.

[10] FORMAS E FÓRMULAS. Catálogo da exposição no Museu Nacional de História Natural e Ciência. Universidade de Lisboa, 2012. Disponível em: http://issuu.com/formas-formulas/docs/cat__logo_exposi____o. Acesso em: 30 de janeiro de 2014.

[11] GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo Antônio Silvani e MATTOS, Francisco Roberto Pinto. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática.* Coleção ProfMat, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[12] GRAVINA, Maria Alice e SANTAROSA, Lucila Maria. *A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.* IV Congresso RIBIE (Rede Iberoamericana de Informática Educativa), Brasília, 1998.

[13] GRAVINA, Maria Alice et al. *Matemática, Mídias digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática.* Porto Alegre: Evangraf, 2012. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf. Acesso em: 15 de dezembro de 2013.

[14] HEATH, Thomas L. *A History of Greek Mathematics I.* Oxford, 1931.

[15] HEBENSTREIN, J. *Simulation e Pédagogie, une recontre du troisième type.* Gif Sur Yvette: École Superieure d'Eletricité, 1987.

[16] HEFEZ, Abramo e FERNANDEZ, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear.* Coleção ProfMat. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[17] HOHENWARTER, Markus. *Software livre GeoGebra, versão 4.2.51.0*. Disponível em: http://www.geogebra.org. Acesso em: 05 de dezembro de 2013.

[18] KOENIGS, Gabriel; DARBOUX, Gaston; COSSERAT, Eugène; e COSSERAT François - *Lecons de Cinématique Librairie Sc*. A. Hermann, Paris, 1897.

[19] KEMP, Martin. *A Ciência da Arte.* Giunti Gruppo, Florença, 1994.

[20] KEMPE, Alfred Bray. *How to Draw a Straight Line: A Lectureo Linkages*. Macmillan and Company: London, 1877. Disponível em: https://archive.org/details/howtodrawastrai01kempgoog. Acesso em: 15 de janeiro de 2014.

[21] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo e MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio* – Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[22] LORENZATO, Sérgio. *Educação Infantil e Percepção Matemática* – São Paulo. Autores associados, 2006.

[23] MARTINS, F.L.F. *Instrumentos virtuais de desenhos e a argumentação em Geometria*. Porto Alegre, 2012. Tese (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

[24] NASSER, Lílian , et al. *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele* – 3. ed. Instituto de Matemática/ UFRJ - Projeto fundão, 2000.

[25] PIAGET, Jean. *Biologie at Connaissance.* Paris, Gallimard,1967.

[26] PUTNOKI, José Carlos. *Que se devolvam a Euclides a régua e compasso.* Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo: Associação Palas Athena do Brasil, 13, p.13-17, 2º sem./1988.

[27] PUTNOKI, José Carlos. *Geometria e Desenho Geométrico*. São Paulo: Scipione, 1991. 4 v.

[28] SCHEINER, Christopher. *Pantographice sev Ars Delineandi, Romae, Ex Typographia Ludouici Grignani*. 1631. Disponível em: http://193.206.220.110/Teca/Viewer?an=920801. Acesso em: 10 de dezembro de 2013.

[29] SASSONIA, Rogério Côrte. *Épocas Obscuras*. Associação Cultural MONTFORT. Disponível em: http://www.montfort.org.br/index.php?secao=veritas&subsecao=ciencia&artigo=epocas_obsucaras&lang=bra. Acesso em: 10 de dezembro de 2013.

[30] SCHOOTEN, Frans van. *Exercitationum mathematicarum libri quinque.* Ex officina Johannis Elsevirii: Baviera, 1657. Disponível em: http://books.google.com.br/books?id=-aBGAAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 25 de janeiro de 2014.

[31] SOUZA, Cícero Monteiro de; ARAÚJO, Marny Pessoa Silva de; ANDRADE, Vladimir L. V. Xavier de. *As três últimas tentativas da duplicação do cubo.* UFRPE. Recife, 2011.

[32] SOUZA, José Miguel Rodrigues de. *Trisecção do Ângulo e Duplicação do Cubo.* Departamento de Matemática Pura. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 2001. Disponível em: http://www.prof2000.pt/users/miguel/tese/pdf.html. Acesso em: 10 de janeiro de 2014.

[33] WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas*. 6ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[34] ZAVALA, José Carlos Cortés; PALENIUS, Graciela Eréndira Núnez; ONTIVEROS, Christian Morales. *Actividades de aprendizaje usando elipsógrafos para apoyar el proceso de demostración en geometría analítica*. Unión - Revista Iberomaericana de Educación Matemática. Número 35. 2013. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/35/archivo11.pdf. Acesso em: 05 de fevereiro de 2014.

[35] ZAVALA, José Carlos Cortés; RODRÍGUEZ, Héctor Artuto Sóto. *Uso de artefactos concretos en actividades de geometria analítica: una experiencia con la elipse*. Revista de Investigación em Didáctica de las Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, 2012. Disponível em: http://www. hipatiapress.info/hpjournals/index.php/redimat/article/view/211/pdf. Acesso em: 22 de janeiro de 2014.

[36] ZUIN, Elenice de Souza Lodron. *Da Régua e do Compasso: As Construções Geométricas Como um Saber Escolar no Brasil.* Universidade Federal de Minas Gerais. 2001.

[37] ________ , *Duplicação do cubo.* Matemática Multimídia. Unicamp. Campinas, 2010.

[38] ________ , *Elipsógrafo. Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas.* Matemática, Mídias Digitais e Didática. UFRGS. Porto

Alegre, 2012. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/. Acesso em: 10 de dezembro de 2013.

[39]_______, *Instrumentação no Ensino da Geometria*. Volume 3. Fundação Cecierj, Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2009.

[40] _______ , *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Lei nº9.394, de 20 de dezembro de 1996. MEC: Brasília, 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf. Acesso em: 15 de dezembro de 2013.

[41] _______ , *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Secretaria de Educação Básica, MEC/SEB, Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br /seb/arquivos/pdf/book_volume_02_ internet.pdf. Acesso em: 15 de dezembro de 2013.

[42] _______ , *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)*. Secretaria de Educação Básica, MEC/SEB, Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 15 de dezembro de 2013.

[43]_______ ,*Parâmetros Curriculares Nacionais*, Matemática – 5ª a 8ª Séries. Secretaria de Educação Básica, MEC/SEB, Brasília, 1998.

[44]_______, *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Matemática – Ensino Médio. Secretaria de Educação Básica, MEC/SEB, Brasília, 1999.

[45]_______ , Conteúdos Básicos Comuns, Matemática, Ensino Fundamental. Secretaria do Estado de Educação de Minas Gerais – Diretoria do Ensino Fundamental. Minas Gerais, 2007.