PROFMAT-IMPA

Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos

Pantógrafo

Patrícia Mello Bittencourt

Orientador: Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro
2014

Patrícia Mello Bittencourt

UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS PANTÓGRAFO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Pós-graduação do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre *Stricto Sensu* do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Aprovado em 24 de Março de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho – Orientador

IMPA

Prof. Eduardo Wagner

FGV

Prof. Asla Medeiros e Sá

FGV

"*A mente que se abre para uma nova ideia, jamais voltará ao seu tamanho original*"

Albert Einstein

Agradecimentos

Ao nosso orientador Professor Doutor Paulo Cezar Pinto Carvalho, pelo direcionamento, sugestões e comentários objetivos.

Aos Professores Doutores Eduardo Wagner e Roberto Imbuzeiro Oliveira, pelo apoio e palavras de incentivo. E a todos os outros professores e monitores, pela contribuição para a chegada desse momento.

Aos funcionários do IMPA, em especial aos da Divisão de Ensino, pela atenção e gentileza no atendimento.

Aos professores mestrandos Esther Zilkha, Jean Carlo da Silva Cordeiro e Sergio Antoun Serrano que dividiram comigo esse projeto. As diferenças de ideias das nossas discussões, com certeza, nos levou a fazer um trabalho melhor.

Aos colegas da Turma 2012 do ProfMat, pela caminhada.

Aos amigos, pelo apoio. Em especial, à minha amiga Débora, a quem muito admiro.

À minha família, por torcerem pelo meu sucesso e, principalmente, aos meus pais João Paulo e Luiza, pelo amor e por sempre acreditarem em mim.

E, especialmente, às minhas filhas Helena e Renata. Pelo amor, paciência, compreensão, apoio e encorajamento.

Resumo

Nesta tese apresentamos a construção e utilização de mecanismos virtuais, o mais próximo possível da realidade, com o objetivo de facilitar a visualização do ensino de determinados conteúdos matemáticos. Para a construção foi utilizado o software GeoGebra, que por sua característica dinâmica, permite a interação entre aluno e instrumento. Na proposta contamos um pouco da história e detalhamos a construção do pantógrafo, do elipsógrafo, do relógio de pêndulo e engrenagens e do teodolito. Apresentamos a justificativa matemática para a utilização desses instrumentos e os conteúdos envolvidos na construção e funcionamento. Também mostraremos alguns comandos avançados do GeoGebra, que foram fundamentais para as construções. Completando o trabalho, apresentaremos sugestões de conteúdos que podem ser trabalhados com os alunos, em salas de aula do Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: GeoGebra, instrumentos e pantógrafo.

Sumário

Índice de Figuras

1. Introdução

O trabalho visa mostrar aos professores uma nova abordagem para utilização do software GeoGebra através da confecção de instrumentos virtuais, o mais próximo possível do instrumento real, inclusive com suas limitações físicas. Vale mencionar que este trabalho configura a conclusão do curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O projeto que deu origem ao mesmo foi elaborado por Jean Carlo da Silva Cordeiro, Patrícia Mello Bittencourt, Sergio Antoun Serrano e Esther Zilkha e orientado pelo Professor PhD Paulo Cezar Pinto Carvalho, tendo os capítulos 1 e 2 como parte comum.

O objetivo do grupo foi utilizar o software GeoGebra para a construção de instrumentos, dando ao professor uma forma de mostrar aos seus alunos a aparência e o funcionamento do elipsógrafo, do pantógrafo, do relógio de pêndulo e do teodolito. Cada integrante do grupo escolheu um instrumento, pesquisou o seu histórico, suas características de funcionamento, sua aplicabilidade e, por fim, fez a construção no GeoGebra. Como o objetivo do trabalho é também mostrar outra utilização deste software, foi descrita toda a sequência de comandos utilizada para a construção, bem como as dificuldades encontradas.

1.1. Justificativa

O ensino da matemática é um desafio diário para professores que encontram muita resistência por parte de seus alunos. Diversos artigos discutem sobre essa dificuldade de aprendizagem. Lorenzato [9] indica que conceitos matemáticos de espaço, número e forma devem ser mostrados de diferentes maneiras aos alunos com o objetivo de desenvolver diversos processos mentais básicos para a aprendizagem matemática. Dentre esses processos, destacam-se a correspondência, a comparação e a classificação.

Em relação à Geometria, segundo Nasser [10], a Teoria dos Van-Hiele define cinco níveis de aprendizado: reconhecimento das formas, análise comparativa, argumentação lógica informal, dedução das demonstrações dessas argumentações e estabelecimento formal de teoremas. Assim, para o processo de ensino aprendizagem ser efetivo, deve seguir uma sequência que permita ao aluno expandir seus conhecimentos a partir da observação informal das figuras, evoluindo até compreender os sistemas axiomáticos da Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais [19], o PCN, descrevem os conteúdos matemáticos necessários a cada ciclo da vida escolar do aluno. Também faz a análise dos objetivos a serem alcançados e a visão pedagógica da construção desse conhecimento. O PCN divide o ensino fundamental em 4 ciclos, cada um contendo duas séries e divide o conteúdo matemático em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação . O Ensino Médio é dividido em 3 anos e o conteúdo de cada um desses anos é divididos em três temas estruturadores: Álgebra (números e funções), Geometria e Medidas e Análise de dados. O bloco de conteúdo de Espaço e Forma, do Ensino Fundamental, e o de Geometria e Medidas, do Ensino Médio, descrevem os conteúdos geométricos como parte importante do currículo da Matemática por desenvolver no aluno um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que ele vive. Além disso, o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem dos números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades. O PCN sugere ao professor a prática das construções geométricas e a utilização de instrumentos para viabilizar a visualização e aplicação das propriedades das figuras e da construção de outras relações. Conforme Piaget [11], “Todo conhecimento é ligado à ação de conhecer um objeto ou evento e assimilá-lo a um esquema de ação. Isto é verdade do mais elementar nível sensório motor ao mais elevado nível de operações lógico-matemáticas”.

Ao longo dos anos, as tecnologias digitais têm evoluído e se tornado uma excelente ferramenta para o professor. Gravina e Santarosa [3] analisaram a contribuição dos ambientes informatizados na aprendizagem matemática, verificando que esses ambientes, já naquela época, demonstravam serem ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. A principal vantagem é a possibilidade de alterar os limites entre o concreto e o formal. Em seu trabalho, as autoras citam Hebenstreint [4]: “o computador permite criar um novo tipo de objeto – ‘os objetos concreto - abstratos’. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais”. Dessa forma, a utilização dessas ferramentas é lícita e de excelentes resultados.

A proposta de criar, no GeoGebra, alguns instrumentos para a utilização em sala de aula está em consonância com as ideias desenvolvidas nos parágrafos anteriores. Os instrumentos foram criados para dar ao aluno a sensação de um instrumento real, favorecendo seu processo cognitivo de aprendizagem.

1.2. Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em oito capítulos. O primeiro capítulo faz uma contextualização sobre a proposta do trabalho e a prática educacional. O segundo capítulo descreve a origem e a utilização do programa GeoGebra. Neste capítulo são descritos alguns comandos especiais utilizados na confecção dos instrumentos. Esses dois capítulos são comuns aos quatro trabalhos. No terceiro capítulo, cada autor descreve seu instrumento, contando sua origem, construção e funcionamento. No quarto capítulo, é apresentada a sequência de construção de cada instrumento, listando os comandos utilizados. No quinto capítulo será apresentada a justificativa matemática para o funcionamento e utilização do instrumento. No sexto capítulo, cada autor apresenta sugestões para a utilização do seu instrumento em sala de aula. Os capítulos finais trazem a conclusão e as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2. Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos

2.1. Introdução:

A palavra GeoGebra surgiu da aglutinação das palavras Geometria e Álgebra e é o nome do aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License e escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

2.2. História

O GeoGebra foi objeto de tese de doutorado de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo, Áustria em 2001. Ele criou e desenvolveu esse software com o objetivo de obter um instrumento adequado ao ensino da Matemática em todos os níveis (do Ensino Fundamental ao Ensino Superior), combinando recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. É um software gratuito, de fácil download e com versão portável, muito útil, que pode ser acessada normalmente a partir de um pendrive. O programa é escrito em Java e, por ser multiplataforma, pode ser instalado com Windows, Linux ou Mac e apresenta, ultimamente, uma versão beta para Android e outra versão beta para 3D.

Sua popularidade tem crescido continuamente e hoje o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, com mais de **300.000** downloads mensais. O download do programa pode ser feito a partir do site oficial do programa, no link http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/ . Clicando na opção Software, é possível escolher para que sistema operacional se deseja o download. Neste endereço há, ainda, a opção Portable, que disponibiliza o programa para utilização direta do pendrive, sem necessidade de instalação no computador. A versão para tablet (Android) ainda está em testes e funciona com limitações.

Foram criados institutos regionais, que são membros do IGI (International GeoGebra Institutes), cujo propósito é agregar interessados no uso do GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem, criando uma comunidade aberta que compartilhe seus conhecimentos no treinamento, suporte e desenvolvimento de materiais de apoio para alunos e professores, promovendo a colaboração entre profissionais e pesquisadores, com o objetivo de desenvolver materiais gratuitos para o ensino, a aprendizagem e a divulgação da matemática a todos os públicos. Esses Institutos oferecem suporte, promovem oficinas, fóruns de debate e de dúvidas. São ao todo 62 Institutos GeoGebra em 44 países e o Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro, tem sua sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense e pode ser visitado no endereço http://www.geogebra.im-uff.mat.br/ . O Instituto GeoGebra em São Paulo é sediado na PUC-SP e pode ser visitado pelo endereço eletrônico http://www.pucsp.br/geogebrasp/ . Outros institutos podem ser localizados clicando na opção Community do site oficial.

O software permite realizar construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas ou com funções que podem ser modificados posteriormente de forma dinâmica. Equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. O software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos. Uma características importante do GeoGebra é que todo elemento geométrico desenhado na janela de visualização, terá sua representação algébrica mostrada na janela de álgebra. E vice versa, pois se descrevermos a representação algébrica de um elemento na caixa de entrada, a janela de visualização mostrará a representação geométrica do mesmo.

2.3. Programa GeoGebra 2D

O programa possui uma interface amigável e é bastante intuitivo na maioria das vezes. Os comandos estão dispostos em ícones abaixo da linha dos menus. Além das janelas de visualização, de álgebra e do campo entrada, visíveis na abertura de um novo arquivo, existem ainda a janela de protocolo de construção, que mostra a sequência de construção executada, e a janela para planilha, para utilizar entrada de dados do Excel.

Quando o GeoGebra é aberto na tela do computador, a tela inicial, caso as configurações iniciais não tenham sido alteradas, é:

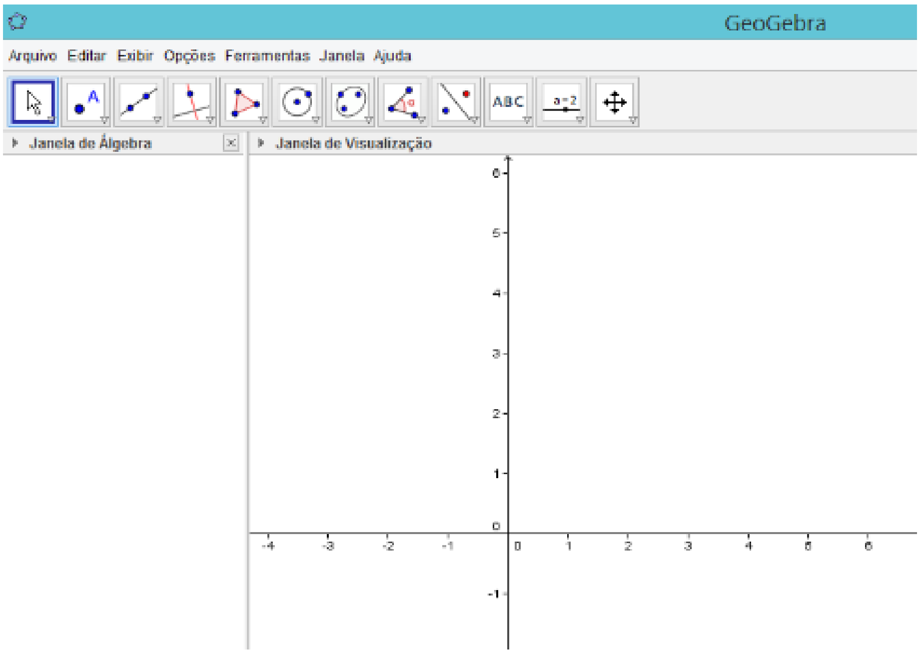


Figura 1 - Tela do GeoGebra 2D

No menu Opções pode ser escolhido o tamanho da fonte que se deseja usar e que pode ser alterada durante todo o processo de construção sem causar nenhum prejuízo.

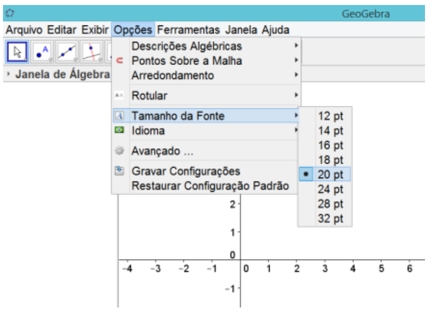
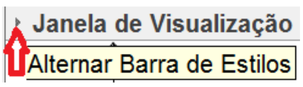
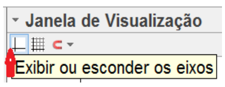


Figura 2 - O Tamanho da Fonte

Os eixos podem estar visíveis ou não, podendo ser alterados na Janela de Visualização com o comando Exibir ou Esconder os eixos. Basta clicar em 

e em seguida em 

.

O Campo de Entrada se encontra abaixo da janela de visualização. Caso não esteja aparente, click em exibir no menu principal e em seguida click em Campo de Entrada.

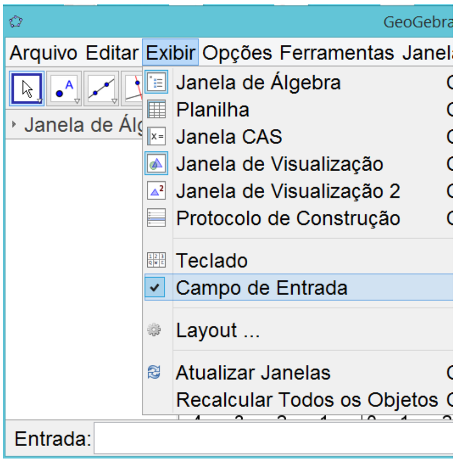


Figura 3 - Campo de Entrada

No capítulo 3 deste trabalho será descrita a sequência de comandos utilizada para a construção do instrumento e o endereço eletrônico do arquivo finalizado para utilização. Mas é importante destacar que, durante o processo de construção, além dos comandos básicos, também foi necessário estudar e utilizar comandos mais avançados que serão descritos abaixo e no decorrer da sequência de construção de cada instrumento.

2.3.1. Comando vetor

Esse comando e suas variações foram de muita utilidade para a construção do acabamento dos instrumentos construídos. A partir de um ponto central, utilizando os conceitos de vetor unitário e de translação de um ponto pelo vetor, foi possível criar pontos que estivessem vinculados ao movimento de outros pontos. Por exemplo:

Para construir um ponto na tela, clique no comando Ponto () que se encontra na Barra de Ferramentas, em seguida clique na Janela de Visualização nas proximidades de (2,2), como sugestão.

Para construir outro ponto na tela, click novamente no comando Ponto () e escolha um outro local da Janela de Visualização, como por exemplo, nas proximidades de (3,3).

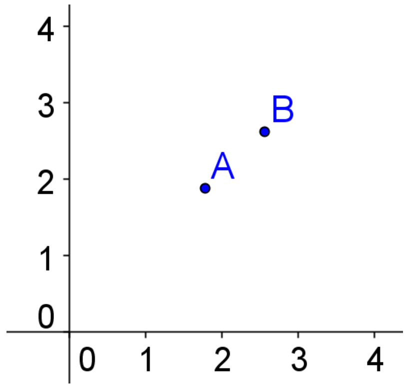


Figura 4 - Construção com Vetores

No Campo de Entrada digite[1]:

- Ampliar[-5,-5,18,7] e tecle enter. São os limites dos eixos, São os limites dos eixos, ou seja, eixo 0x variando de [-5, 18] e eixo 0y variando de [-5, 7].
- u=VetorUnitário[segmento[A,B]] e tecle enter. Criou-se o vetor u.
- C=A-u e tecle enter. Criamos o ponto C.
- D=A+3u e tecle enter. Construímos o ponto D.

Estes comandos poderão ser copiados e colados no Campo de Entrada do GeoGebra, para uso.

Para trabalhar no outro eixo é possível construir o vetor perpendicular ao vetor u. Observa-se que, ao mover o ponto B e, por consequência, o vetor AB, os pontos C e D acompanham o movimento.

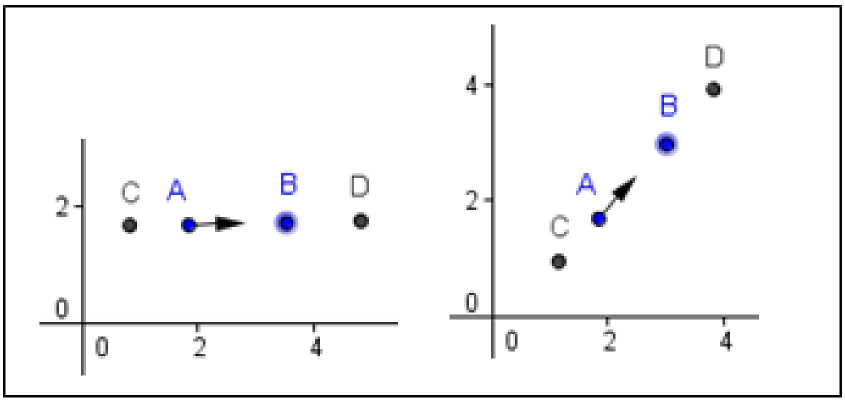


Figura 5 - Construção com Vetores

[1] Você poderá copiar o comando já digitado no Word e colar no Campo de Entrada do GeoGebra.

2.3.2. Comando lista

Esse comando permite fazer uma lista com pontos e foi muito utilizada para criar os vértices de alguns polígonos construídos. É um comando que diminui a quantidade de pontos listados na Janela de Álgebra, ao mesmo tempo em que permite manipulação de todos ao mesmo tempo. Por exemplo:

No Campo de Entrada digite:

- lista1={(1,1),(1,2),(2,3),(2,1.5)} e tecle enter. Foi criada uma lista de pontos na Janela de Álgebra.

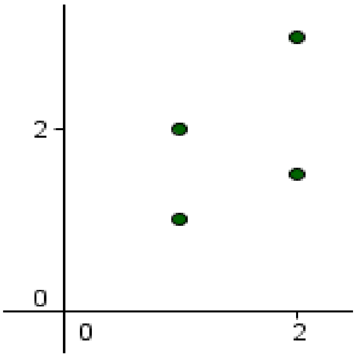


Figura 6 - Lista de Pontos

2.3.3. Variáveis Booleanas

O programa possui um comando utilizado para exibir e esconder objetos, como mostra a figura abaixo. Esse comando cria uma variável booleana, que é relacionada aos outros elementos da construção. Também cria um pequeno botão, que ao ser acionado troca o valor da variável de true para false e vice versa.

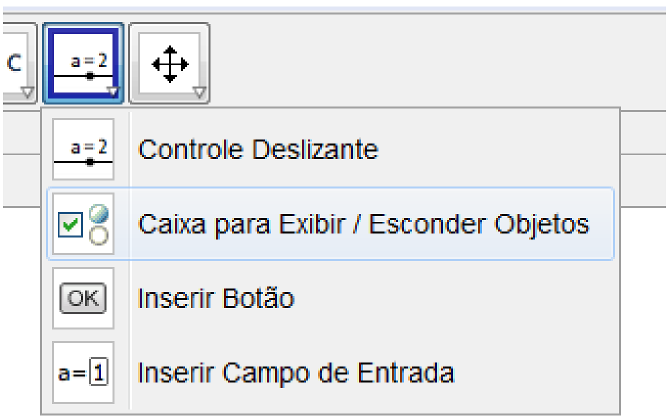


Figura 7 - Comando Exibir Objetos

Também é possível definir uma variável booleana através do Campo de Entrada, selecionar os elementos que a variável irá controlar e utilizá-la para programação.

2.3.4. Comandos de Definição

Em vários momentos durante a finalização dos instrumentos no GeoGebra, foi necessário a utilização desses comandos para programação.

- DefinirCoordenadas[A,x(B),y(B)] – significa que o ponto A receberá as coordenadas x e y do ponto B.
- DefinirLegenda[bt2,"Animar"] – significa que a legenda do botão bt2 será a palavra Animar.
- DefinirValor[figuras,5] – significa que a variável figuras receberá o valor 5.

2.3.5. Camadas

Para o acabamento dos instrumentos, foi necessário a utilização de vários polígonos, círculos e arcos. Mas, para dar a aparência real ao trabalho final, temos que considerar as diferenças de plano entre os elementos que compõem os instrumentos. Cada elemento desenhado no GeoGebra é desenhado em alguma camada. As camadas variam de 0 a 9. Observe a situação abaixo:

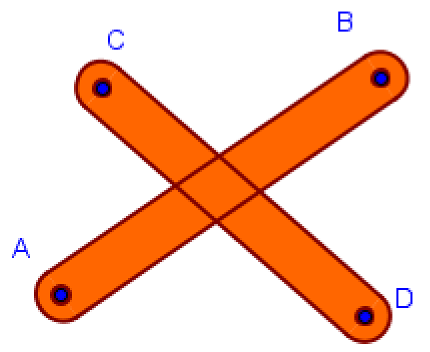


Figura 8 - Duas Hastes na Mesma Camada

Observe que as linhas das hastes se cruzam e não é possível perceber qual das duas foi construída primeiro ou qual delas está sobre a outra.

Para alterar a camada da haste CD, é necessário clicar com o botão direito do mouse na haste e escolher a opção Propriedades. Na guia Avançado, escolha uma camada acima da camada em que ele foi construído.

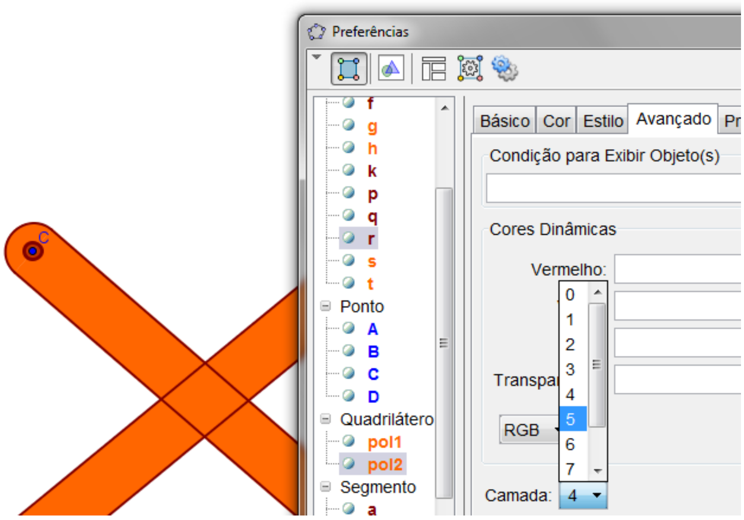


Figura 9 - Alteração das Camadas

Todos os elementos da haste CD foram alterados para camada 5. O resultado mostra a diferença de profundidade entre as hastes.

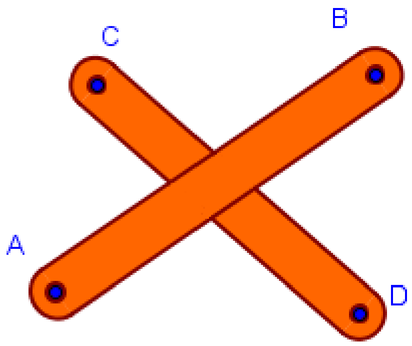


Figura 10 - Hastes em Camadas Diferentes

2.4. Programa GeoGebra 3D

O programa ainda está em desenvolvimento e foi disponibilizada uma versão beta, online. Ainda não é possível fazer o download do programa mas já é possível fazer construções e perceber o novo universo de possibilidades. Para utilizar o programa é necessário clicar no link http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp e fazer o download do arquivo geogebra-50.jnlp. Após o download, ao executar este arquivo, será criado um ícone de acesso na área de trabalho do seu computador.

Figura 11 - Ícone do GeoGebra 3D na área de trabalho

Clique neste link para abrir o programa, mas é necessário estar online. A interface do programa contempla a interface 2D acrescida da janela de visualização 3D e dos comandos específicos.

Para abrir o programa é necessário estar online, em seguida clique no link. A interface do programa contempla a interface 2D acrescida da janela de visualização 3D e dos comandos específicos de uso na Geometria Espacial.

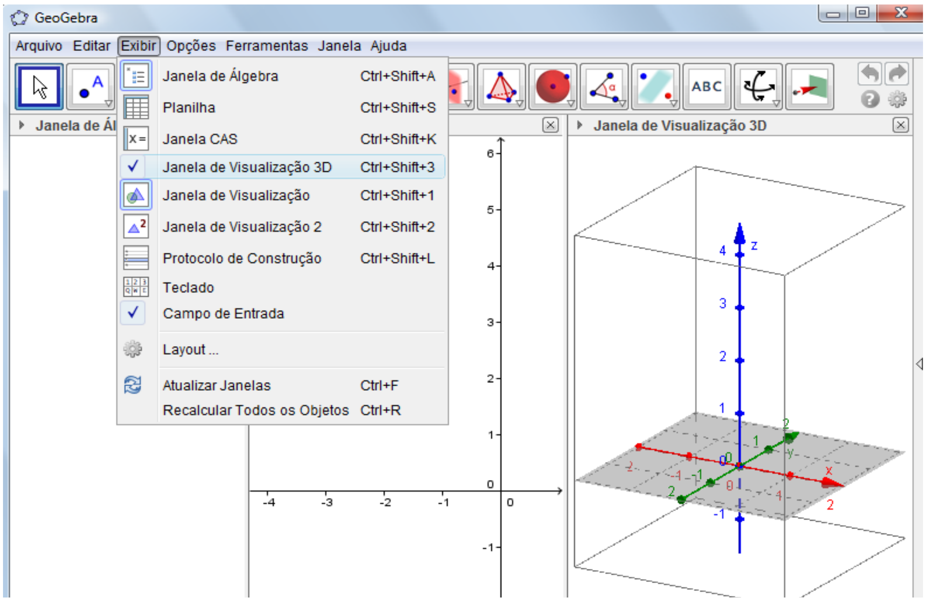


Figura 12 - As Janelas de Álgebra, de Visualização 2D e 3D

Esses comandos nos possibilitam criar planos passando por três pontos, planos perpendiculares, paralelos, além de sólidos como pirâmides, primas, esferas, etc. Também podemos calcular seus volumes.

Uma vez tendo feito e gravado algumas construções, essas geram arquivos que não são possíveis de serem abertos dando dois cliques, mas somente depois de executarmos o programa.

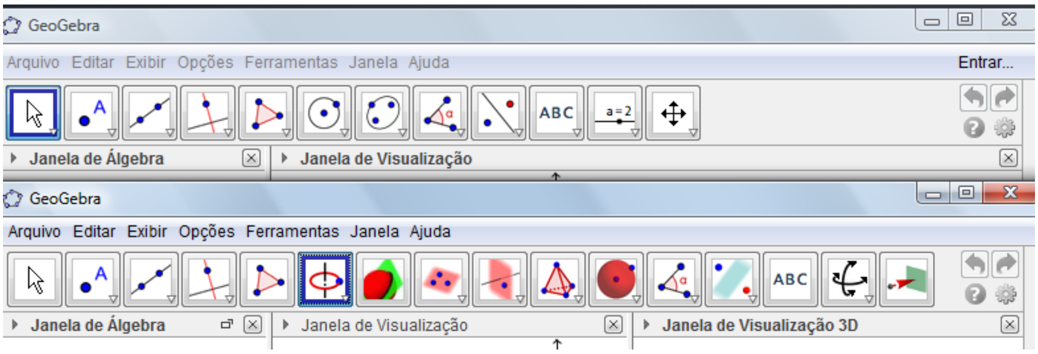


Figura 13 - Comparativo das Barras de Ferramentas do 2D e do 3D

A fato da versão beta do GeoGebra 3D existir há apenas 3 anos faz com que tenha sido pouco comentada e o conhecimento do programa é construído na prática, com o seu uso. No caso do teodolito observa-se que, para a construção de uma figura, é conveniente vincularmos tudo o que está sendo criado, para facilitar a movimentação. Ou seja, se desejamos um ponto, sugere-se que este esteja vinculado a um plano inicial ou a uma reta. O mesmo acontece com retas, polígonos e qualquer outro objeto. Caso não siga este procedimento, fica difícil ao longo da construção localizar, no espaço virtual, o que é preciso. Uma ferramenta muito útil dessa versão é o fato de podermos ter a visão da figura de vários ângulos, ou mesmo rotacioná-la.

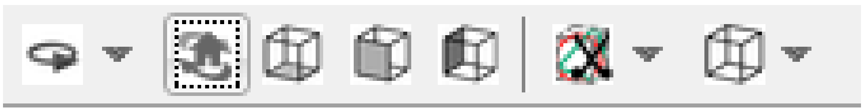


Figura 14 - Visualizar a figura de diversos ângulos

A construção no 3D reforça os conceitos, teorias e axiomas mencionados na Geometria Espacial, por exemplo, “Por três pontos não-colineares passa um único plano”, sendo possível esta construção no GeoGebra 3D. Com o uso deste programa o aluno visualiza facilmente o que é dito em sala de aula, construindo assim seu conhecimento e tendo um novo olhar para o que lhe é ensinado.

3. Instrumento: Pantógrafo

3.1. Descrição

O pantógrafo é um instrumento de desenho que permite transferir e redimensionar figuras e que pode ser regulado de modo a executar ampliações e reduções nas proporções desejadas.

É um mecanismo articulado, formado por algumas hastes de dimensões pré-definidas, interligadas em pontos determinados, com duas pontas secas e uma ponta fixa. Enquanto uma das pontas secas se desloca sobre o desenho a ser copiado, a outra ponta, onde se adapta um lápis, executa a cópia.

Um mesmo instrumento pode permitir ampliação ou redução da figura original, basta somente que as pontas secas sejam invertidas. A escala de ampliação ou redução é definida na montagem do instrumento.

3.2. História

A palavra pantógrafo é de origem grega, sendo composta por dois vocábulos: “pantos”, com o significado de “tudo” e “graphein”, com o significado de “escrever”.

O pantógrafo foi inventado em 1603 pelo astrônomo alemão Christopher Scheiner, mas alguns consideram que ele já existia a mais de 2000 anos. Este instrumento foi criado como parte de um instrumento maior chamado perspectógrafo, que atendeu às necessidades científicas e artísticas da época.

3.2.1. Cenário Histórico

Uma das características do Renascimento foi o desenvolvimento do racionalismo, movimento que possuía a convicção de que tudo que existe ou acontece pode ser explicado pela razão do homem e pela ciência. Nessa época, como em muitas outras áreas, houve um aprofundamento dos estudos matemáticos, das técnicas de desenho e mais especificamente a perspectiva. A intenção mais direta era a de retratar a realidade da melhor forma possível, artística e cientificamente. O grande marco no pensamento científico da época foi a concepção de Copérnico sobre o heliocentrismo e o movimento da Terra. Essa hipótese despertou os cientistas na busca e investigação de outros fenômenos naturais. Para Galileu, Deus era geômetra e a natureza estaria escrita em linguagem matemática. A tarefa dos estudiosos era, então, descobrir as leis pelas quais Deus criara o mundo. O pensamento artístico também apresentou enorme desenvolvimento. É neste cenário que acentuaram-se os estudos da perspectiva, utilizando conceitos de álgebra e geometria, aliados às concepções artísticas de retratar o mundo, o mais próximo possível de sua realidade.

O trabalho do Padre Leon Battista Alberti (1404-1472) foi fundamental para o desenvolvimento da perspectiva. A palavra "perspectiva" designava, na Idade Média, a ciência da óptica (perspectiva communis). No seu tratado "Sobre a Pintura" de 1435, P. Alberti expõe a perspectiva expressamente no plano matemático e se baseia em conhecimentos sólidos de geometria e óptica; e diz que é pela análise dos triângulos e outras figuras formadas pelos raios visuais que convém estudar a representação do espaço. Daí a definição: "o quadro é uma interseção plana da pirâmide visual". A perspectiva lhe fornece, em particular, os meios de "geometrizar" corretamente as projeções mais importantes das linhas retas (verticais, ortogonais ao plano do quadro, etc).

Com a continuidade dos estudos, surgem as técnicas do desenho anamórfico, que une a perspectiva da ciência com o olhar artístico, quebrando em parte o avanço no processo de divisão entre a perspectiva artística e aquela que é objeto de investigação matemática.

3.2.2. Christopher Scheiner

Scheiner nasceu em 1573 e cursou seus estudos em colégios jesuítas, tendo entrado para a Ordem em 1595. Estudou Matemática e tinha especial facilidade com instrumentos da época. Era especialista em relógios de sol e muito hábil com telescópios, obtidos com o objetivo de comprovar as descobertas de Galileu. Depois disso, voltou sua atenção para o sol e observou as manchas solares. Esse estudo gerou controvérsias com as opiniões de Galileu, apesar de que, em sua maior obra chamada Rosa Ursina, que tratava de manchas solares e superfície do sol, publicada em 1630, Scheiner concorda com Galileu em vários pontos distintos.

Scheiner também fez estudos sobre refração atmosférica e ótica, além de construir vários tipos de telescópios, alterando os tipos e posições das lentes.

Apesar de ter desenvolvido o pantógrafo em 1603, somente em 1631, em Roma, ele publicou o trabalho desta descoberta, com o nome de “Pantographice seu ars delineandi res qualibet per parallelogrammum lineare sev cavum” [14]. Na introdução, Scheiner conta a história que o levou a inventar o perspectógrafo e, por consequência, o pantógrafo.

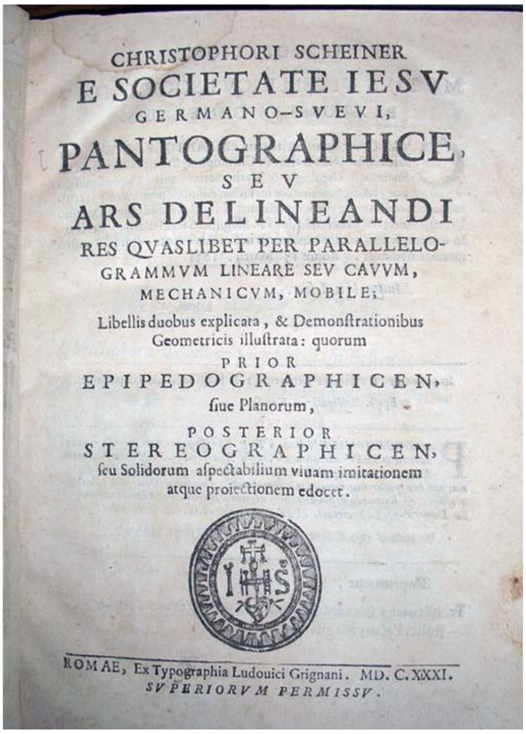

CHRISTOPHORI SCHEINER
E SOCIETATE IESV
GERMANO-SVEVI,
PANTOGRAPHICE,
SEV
ARS DELINEANDI
RES QVASLIBET PER PARALLELO-
GRAMMVM LINEARE SEV CAVVM,
MECHANICVM, MOBILE;
Libellis duobus explicata, & Demonstrationibus
Geometricis illustrata: quorum
PRIOR
EPIPEDOGRAPHICEN,
siue Planorum,
POSTERIOR
STEREOGRAPHICEN,
seu Solidorum aspectabilium viuam imitationem
atque proiectionem edocet.
ROMAE, Ex Typographia Ludouici Grignani. MDC.XXXI.
SVPERIORVM PERMISSV.

Figura 15 - Capa do Pantographice de Scheiner

De acordo com a história, em 1603, em Dillingen, o pintor Pierre Gregoire (Petrus Gregorius – autor de “Syntaxeon artis mirabilis”, Leiden 1575) provocou irritantemente Scheiner dizendo que havia inventado uma ferramenta para desenhar mas se recusando a divulgar os segredos. Gregoire disse ainda que “não acreditava que tal coisa pudesse mesmo ser imaginada, e que na verdade não era uma invenção humana, mas sim uma inspiração divina, recebida por ele, não revelada através do esforço humano, mas por algum gênio celestial”. Animado com o desafio, Scheiner começou a trabalhar por conta própria e depois de um período de intensos esforços, produziu um instrumento de grande engenho e uso extensivo, para copiar, ampliar ou reduzir desenhos, para representar objetos em perspectiva, e para a produção de composições anamórficas.

3.2.3. Perspectógrafo

A estrutura era dividida em duas partes: a primeira era um retângulo vazio (ou “cabo”, como era então chamado), a segunda parte tem a folha na qual a imagem será reproduzida, o que nada mais é que a reprodução (operada pelo pantógrafo) da imagem a ser retratada.

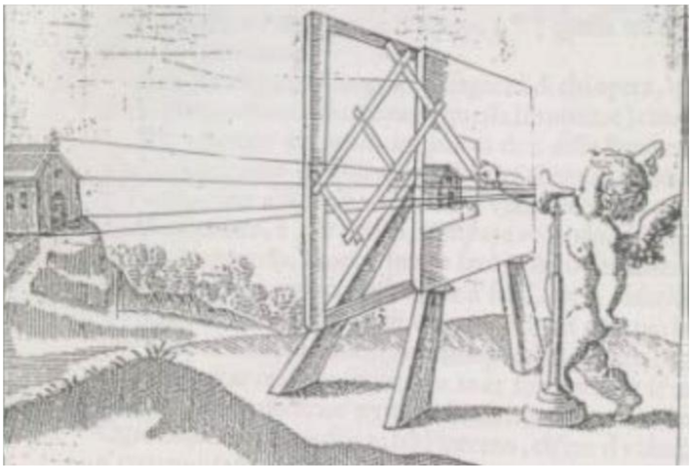


Figura 16 – Perspectógrafo em funcionamento

A ideia fundamental de Scheiner (o uso de um paralelogramo articulado, para aumentar ou diminuir proporcionalmente imagens bidimensionais) é a base do pantógrafo no comércio ainda hoje, mais sofisticado apenas a partir de um ponto de vista mecânico. A descrição completa e seu funcionamento serão descritos mais a frente, mas podemos observar na figura abaixo os pontos C, I e P num mesmo alinhamento. O ponto A do instrumento deverá estar fixo em C, os pontos D, E, F e G são pivôs, o ponto M será a ponta seca que seguirá o contorno do objeto a ser reproduzido e o ponto B será o ponto de escrita, que reproduzirá o desenho.

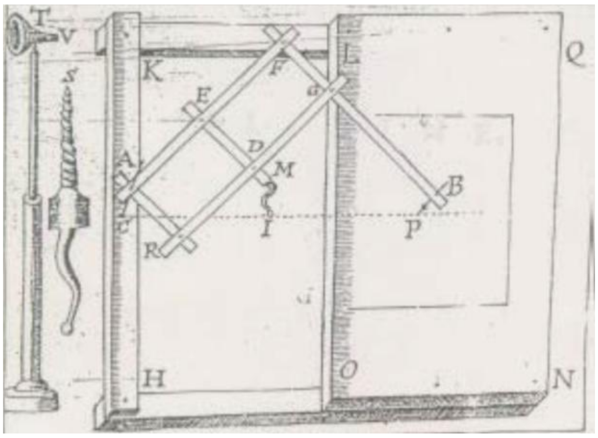


Figura 17 - Esquema do Perspectógrafo de Scheiner

O conjunto do perspectógrafo possui um poste móvel, com um furo, através do qual o artista deverá olhar e seguir com a ponta seca. O objetivo desse furo é que o autor olhe sempre o mesmo quadro, sob o mesmo ângulo, na mesma distância, garantindo a qualidade da reprodução. Esse furo representa, na verdade, o centro das linhas da relação de homotetia construída a partir do olho do autor, dos pontos seguidos pela ponta seca do instrumento e da paisagem.

Figura 18 - Perspectógrafo no Museu de Modena [23]

Ainda era possível variar a escala da cópia, alterando a distância do instrumento, do poste com furo ou ainda das hastes articuladas do pantógrafo. Em razão dessa transferência instantânea da imagem de um plano abstrato para um plano concreto (do virtual ao real), foi considerado por todos os comentaristas da época como uma ferramenta milagrosa, quase mágica, por apresentar nenhuma diferença entre o que é real e físico e o que é racional e matemático.

Como comenta G.Koenings [6], em “Leçons de Cinematique”, 1897, cada época tem em suas mãos, sem perceber, as invenções dos séculos futuros. Quando, em 1631, Scheiner publicou pela primeira vez a descrição do pantógrafo, certamente não sabia que os conceitos gerais que seu instrumento continha em estado latente estariam relacionados com a teoria abstrata das transformações lineares.

Utilizando o GeoGebra 3D, foi construído um perspectógrafo, que pode ser manipulado. Esse applet encontra-se no GeoGebraTube e o link está no capítulo 4, item 4.3.

3.3. O Pantógrafo

Como foi visto anteriormente, consiste de um sistema de hastes articuladas, com três pontas livres: uma fixa, uma seca e uma de escrita. O pantógrafo faz parte do perspectógrafo e logo foi utilizado separadamente para a reprodução de figuras planas. Verificou-se também as possibilidades de ampliação e redução de figuras.

Depois do modelo de Scheiner, vários outros cientistas como Daniel Schwenter (1627), Nicolas Bion(1709), Jakob Leupold (1739), George Adams (1791), redesenharam o pantógrafo, mantendo o princípio de funcionamento mas adequando-o às novas tecnologias e materiais. Por de volta do ano de 1800, foi desenvolvido uma versão tridimensional do pantógrafo, que fazia cópias de esculturas. Este instrumento possuía duas pontas secas que percorriam o modelo enquanto a ponta de escrita esculpia a figura em alabastro ou mármore. O ajuste das pontas permitia escolher a escala do trabalho, enquanto a troca de posição entre modelo e cópia determinava ampliação ou redução. Naturalmente também era possível fazer cópias em mesma escala. Esse primeiro sistema é atribuído a James Watt, famoso por suas máquinas a vapor, mas não foi patenteado por ele. Foi aperfeiçoado por Benjamim Cheverton, em 1836. Cheverton adaptou uma pequena ferramenta rotativa para esculpir peças a partir de modelos. Essa máquina foi um marco de engenharia e da indústria fonográfica da época, pois permitiu a cópia em série de discos para fonógrafo.

Para compreender bem o impacto da invenção do pantógrafo naquela época, temos que pensar que não existia nenhum método de copiar figuras. Foi um instrumento fundamental para a cartografia, por exemplo. Como instrumento de cópia escrita, deixou de ser fundamental com o surgimento das tecnologias digitais, mas é ainda muito utilizado na cópia de moldes em diversas áreas de produção industrial, serralheria, ourivesaria, etc. e, o princípio do paralelogramo articulado é amplamente utilizado em muitos mecanismos comerciais e industriais.

3.4. Detalhamento de funcionamento

Os modelos de pantógrafo que encontramos hoje ainda são muito próximos ao modelo original de Scheiner. Ele idealizou as quatro hastes, que são interligadas nas extremidades de forma a permitir a movimentação de uma sobre a outra. Na figura abaixo, desenho do próprio Scheiner, podemos identificar as hastes de madeira, com furos para montagem. Podemos observar que as quatro hastes são paralelas entre si duas a duas, estando um par por baixo e o outro par por cima do anterior.

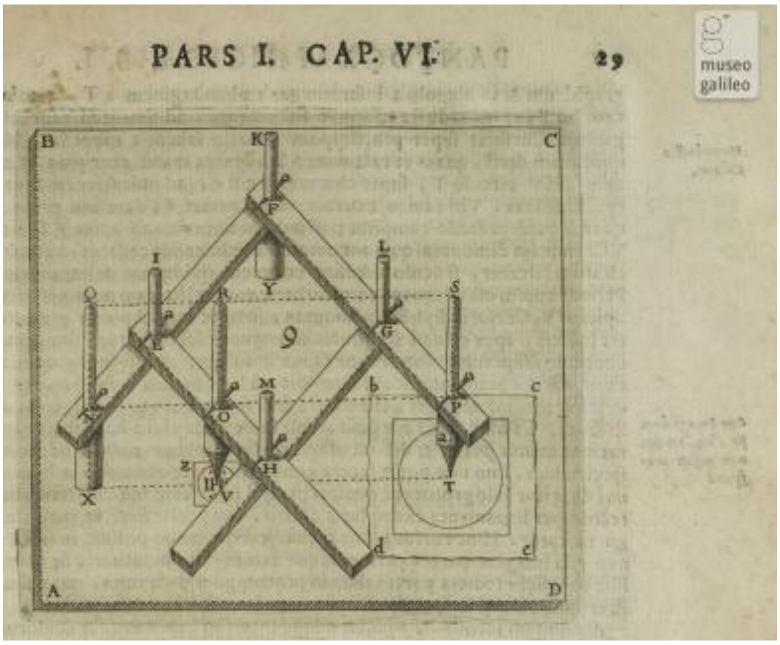


Figura 19 - Esquema de Scheiner

Utilizando um desenho mais simples, podemos entender a construção desse instrumento.

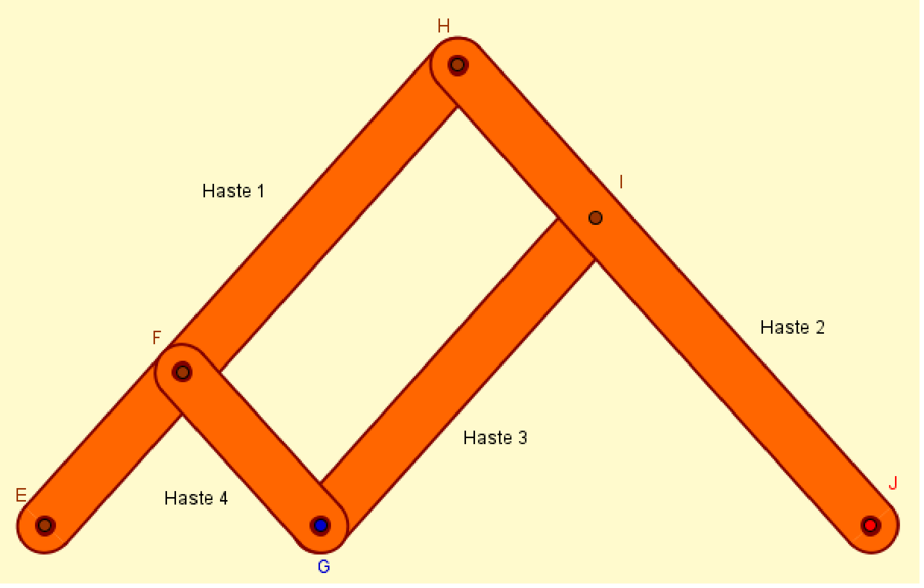


Figura 20 - Esquema Simplificado

As hastes 1 e 3 são dispostas paralelamente, e sobre elas são montadas as hastes 2 e 4, também paralelas entre si. O dispositivo é preso à base pelo ponto pivô E. Os pontos de encaixe F, G, H e I são também pivotados. Se o pantógrafo é de ampliação, o ponto G é o ponto de guia (ponta seca) e o ponto J é o ponto de escrita. Se o pantógrafo é de redução, há uma troca entre G e J, onde J passa a ser o ponto guia enquanto G será o ponto de escrita. A variação da escala depende das dimensões das hastes: é a razão entre os segmentos HJ e FG.

4. Sequência de Construção no GeoGebra

Antes da construção no GeoGebra, é importante salientar que o objetivo desse trabalho é o de construção de um pantógrafo virtual, que funcione como uma ferramenta real. Alguns passos de construção são necessários para conseguir a aparência das hastes, a profundidade, etc. Também é importante salientar que, como se trata de uma “ferramenta real”, ela estará sujeita às limitações físicas da ferramenta verdadeira.

4.1. Construção da Haste de Madeira

Inicialmente foi construída a haste de madeira utilizada para a criação do pantógrafo. Para isso foram utilizados os comandos de vetor, lista, polígono, setor circular, arco e alterações de aparência como cor, transparência, espessura e camadas. Toda construção se baseia nos dois pontos A e B, que serão os furos de montagem da haste no pantógrafo.

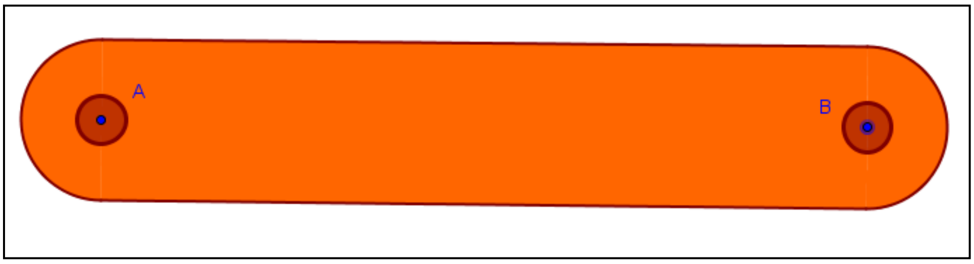


Figura 21 - Haste de Madeira

Sequência de Construção:

1) Construa os pontos A e B em qualquer posição.
2) Na caixa de entrada, escreva “u=VetorUnitário[Segmento[A,B]]”, para criar o vetor unitário u do vetor AB.
3) Construa o vetor v, perpendicular a u, digitando o comando “v=VetorPerpendicular[u]”.
4) Construa a “Lista1”, digitando na caixa de entrada: “lista1={A+v,B+v,A-v,B-v}”. Os pontos dessa lista formam a parte retangular da haste e são definidos através da translação dos pontos A e B pelo vetor v. É necessário que os pontos da lista estejam na ordem apresentada acima, caso contrário interfere no próximo passo.

5) Construa o polígono com os pontos criados na “Lista1” assim: “pol1=Polígono[lista1]”.
6) As extremidades da haste são compostas por semicírculos, a partir dos pontos da “lista1”, assim:
   a. Semicírculo a partir dos pontos transladados de A: “c1=Semicírculo[A-v,A+v]”;
   b. Semicírculo a partir dos pontos transladados de B: “c2=Semicírculo[B+v,B-v]”;

Ilustrando a sequência de construção descrita acima:

Figura 22 - Passos de Construção 1 a 6

7) Acabamento da haste:
   a. Alterar cor: com o cursor sobre o polígono, clique com o botão direito e selecione “Propriedade”. Na guia “Cor” escolha a cor desejada e altere a transparência para 100%. Na guia “Básico” desmarque a o campo “Exibir Rótulo”.
   b. Com o comando “Copiar Estilo Visual” clique na “Janela de Álgebra” sobre o polígono e, em seguida, clique sobre c1 e c2 (semicírculos).
   c. Faça uma linha de contorno da haste, digitando na caixa de entrada:
      - l1=Segmento[A+v,B+v]
      - l2=Segmento[A-v,B-v]
      - c3=ArcoCircular[A,A+v,A-v]
      - c4=ArcoCircular[B,B+v,B-v]
   d. Clique sobre cada uma desses elementos e altere as propriedades, tais como cor e espessura do contorno.

e. Faça o furo de montagem do pantógrafo. Crie um círculo de centro em A e raio “A+0.3u” digitando “c5=Círculo[A,A+0.3u]”. Faça o mesmo para o círculo c6 com o ponto B.

O passo 7 trata somente da aparência final de cada haste.

Observe os pontos de vértice do polígono, que foram construídos utilizando o comando lista, e que a maior parte dos pontos utilizados é construído a partir da translação dos pontos A e B pelos vetores u e v. Dessa forma, todos os polígonos e elementos circulares estão vinculados ao movimento dos pontos A e B.
Como foi explicado no capítulo 2, é possível criar uma nova ferramenta no GeoGebra. Para criar a ferramenta Haste é preciso selecionar toda a haste, clicar na opção “Nova Ferramenta”. Os objetos finais serão os segmentos, polígono, linhas de contorno, arcos e setores. Os objetos iniciais são os pontos A e B, depois é preciso criar um nome. Ao utilizar o comando “Opções – Gravar configurações”, a ferramenta Haste estará disponível para a utilização em outro arquivo novo do Geogebra.

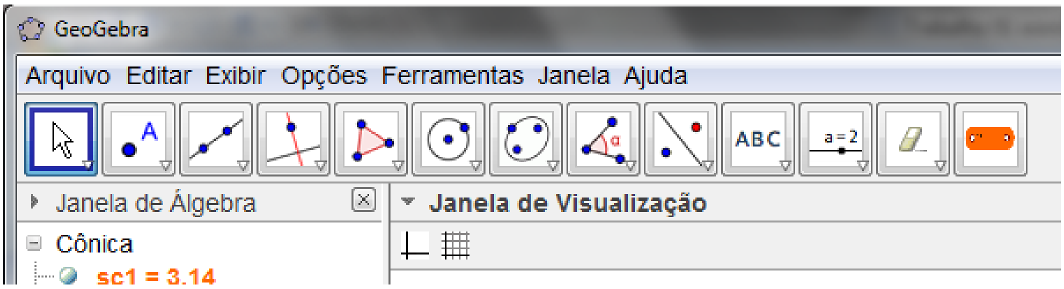


Figura 23 - Menu do GeoGebra com a nova ferramenta

4.2. Construção da Estrutura do Pantógrafo

O objetivo da sequência de passos para a construção do pantógrafo é fornecer condições para que um professor interessado possa reconstruí-lo, adaptando às próprias necessidades. Imaginando um instrumento real, é necessário limitar o tamanho físico das hastes. O parâmetro de construção considerado para o início da construção é o tamanho da haste menor, que determinará o lado do paralelogramo. O GeoGebra nomeia automaticamente os elementos geométricos conforme sua construção, sendo possível ao usuário renomear os itens a qualquer momento. Todos os elementos desta construção foram renomeados de maneira a manter certa organização entre eles. Para isso é necessário clicar com o botão direito sobre o elemento, escolher a opção Renomear e digitar o nome desejado. Para iniciar a construção, foi utilizada a opção de deixar visível os eixos coordenados. Para escondê-los, clique no ícone no canto superior esquerdo da janela de visualização. A sequência de construção utilizada foi:

1) Construa o controle deslizante hastemenor, selecione a opção número, variando de 15 a 45, com incremento de 15, conforme figura abaixo. Este controle regula o comprimento da haste menor do pantógrafo.

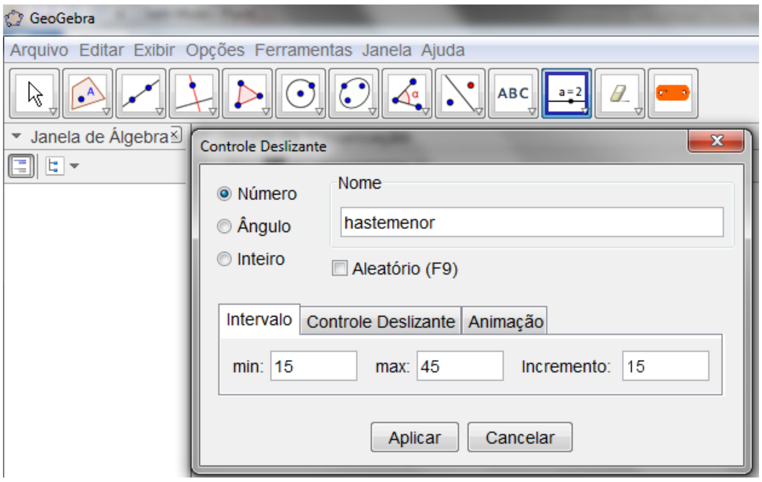


Figura 24 - Comando Controle Deslizante

2) Construa agora o controle deslizante hastemaior, número, variando de 60 a 150, com incremento de 10. Este controle regula o comprimento da haste maior do pantógrafo e também será utilizado como indicador da escala escolhida.
3) Construa um ponto P qualquer. Este ponto será o ponto inicial de construção e o ponto fixo do instrumento.

4) Construa o círculo[2] c_1, de centro P e raio hastemenor.
5) Construa o círculo c_0, de centro P e raio 2hastemenor. Clique com o botão direito do mouse neste círculo e escolha a opção Propriedades. Na guia Cor, altere a transparência para 5. Isto é necessário para que o programa reconheça a área do círculo como região para o próximo passo.
6) Construa o ponto P_0 no círculo c_0, utilizando o comando Ponto em Objeto e clicando dentro do círculo. Observe que o movimento de P_0 fica limitado à circunferência. Este ponto será a ponta de guia do pantógrafo de ampliação e, portanto, seu movimento é limitado pelo tamanho da haste.

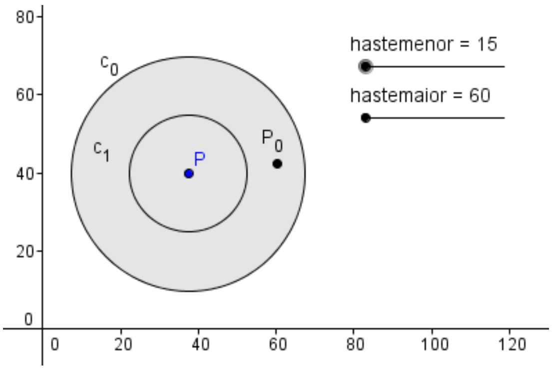


Figura 25 - Passos de Construção de 1 a 6

7) Construa o círculo c_2 de centro P_0 e raio hastemenor.
8) Construa o círculo c_3 de centro P e raio hastemaior.
9) Construa o ponto P_1 na interseção dos círculos c_1 e c_2, utilizando o comando Interseção de Dois Objetos. Para isso, "desligue" o círculo c_0 clicando com o botão direito sobre ele e escolhendo a opção Exibir Objeto ou clicando no ícone indicador de c_0 na janela de álgebra.
10) Trace a semirreta g de origem no ponto P e passando pelo ponto P_1.
11) Construa o ponto P_2 na interseção do círculo c_3 com a semirreta g. Desligue a semirreta g.

---

[2] Para escrever o número subscrito no GeoGebra devemos digitar C_1 e o programa indicará como C_1.

12) Trace o segmento k_1 do ponto P ao ponto P_2, utilizando o comando Segmento definido por Dois Pontos.

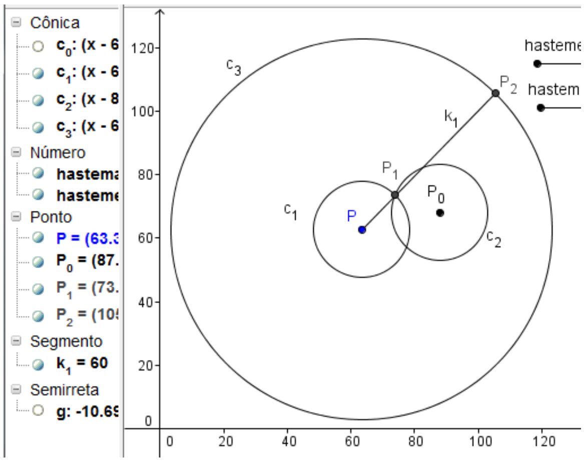


Figura 26 - Passos de Construção do 7 ao 12

13) Trace o segmento k_3 do ponto P_1 a P_0.

14) Construa círculo c_4 de centro P_2 e raio hastemaior.

15) Trace a reta l paralela ao segmento k_1 passando pelo ponto P_0, utilizando o comando Reta Paralela.

16) Trace a reta j, paralela ao segmento k_3 e passando por P_2.

17) Marque o ponto P_3 na interseção das retas l e j.

18) Marque o ponto A na interseção da reta j com o círculo C_4.

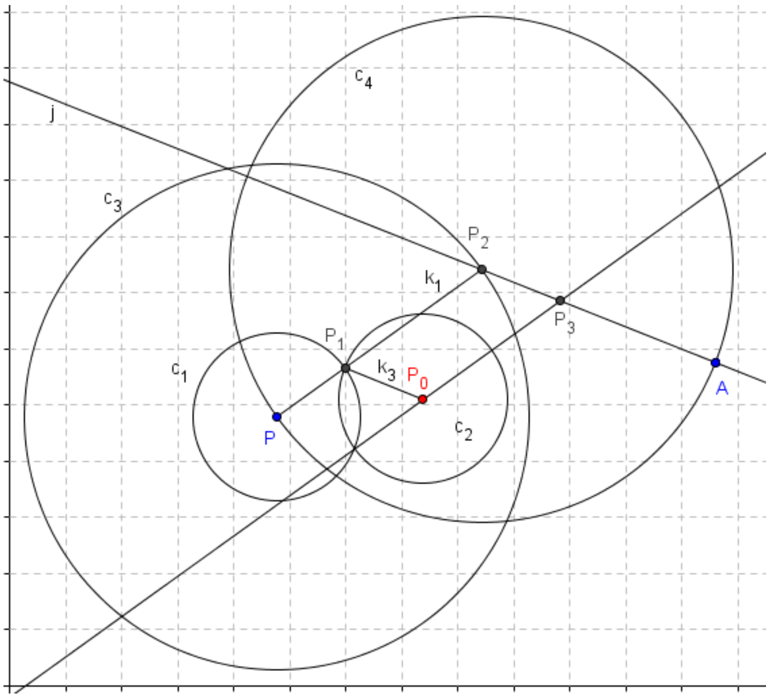


Figura 27 - Passos de Construção de 13 a 18

19) Trace o segmento k_2 do ponto P_0 ao ponto P_3.

20) Trace o segmento k_4 do ponto P_2 ao ponto A. Clique com o botão direito em A, escolha a opção Habilitar Rastro.

21) Esconda as retas l e j e os círculos. Observe que os segmentos e pontos construídos são os braços e pontos articulados do pantógrafo de ampliação. O ponto de guia é o ponto P_0 e o ponto de escrita é o ponto A. Ao mover P_0, observe o movimento de A.

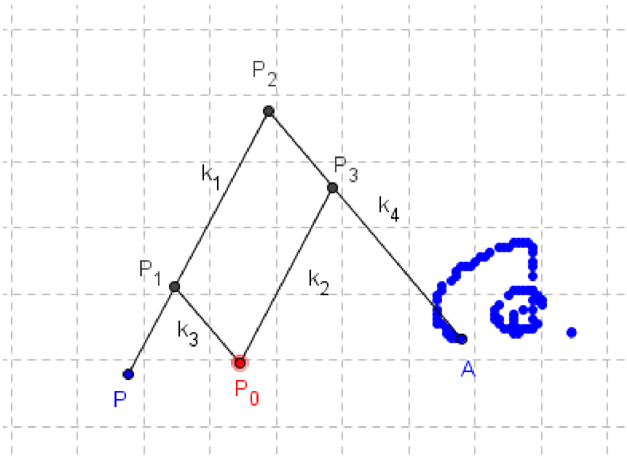


Figura 28 - Passos de Construção 19 a 21

O pantógrafo construído é de ampliação. Na figura acima, a construção foi feita considerando a haste menor com comprimento de 30 e a haste maior com comprimento de 60 unidades. A escala de ampliação, neste caso, é de 2:1. O tamanho da haste maior pode variar de 60 a 150 utilizando o Controle Deslizante criado no passo 2 dessa construção. Assim, a maior escala de ampliação para este pantógrafo é de 5:1.

No início deste trabalho foi dito que um mesmo pantógrafo pode ser utilizado para ampliações e reduções, apenas trocando a ponta de escrita pela ponta guia. Mas no modelo do Geogebra isso não é tão simples assim, pois na construção acima temos o ponto guia P_0 que é livre e, por construção, responsável pelo deslocamento dos outros e pela escrita do ponto A. Se tentarmos movimentar o pantógrafo a partir do ponto A perceberemos que isso não é possível. Para a construção do pantógrafo de redução, vamos utilizar alguns elementos já construídos no arquivo. Continuando com a sequência de passos, temos:

22) "Religue" os círculos c_1 e c_3.
23) Construa o círculo d_0 de centro P e raio 2hastemaior. Da mesma forma que em c_0 (passo 5), altere a transparência do círculo.
24) Construa o ponto Q_0 no círculo d_0, utilizando o comando Ponto em Objeto e clicando dentro do círculo. Observe que o movimento de Q_0 fica limitado à circunferência. Este ponto será a ponta de guia do pantógrafo de redução e, portanto, seu movimento é limitado pelo tamanho da haste.
25) Construa o círculo d_1 com centro em Q_0 e raio hastemaior.
26) Marque o ponto Q_1 na interseção dos círculos d_1 e c_3, utilizando o comando Interseção de Dois Objetos. Para isso, "desligue" o círculo d_0.
27) Trace o segmento m_1 do ponto P ao ponto Q_1.
28) Trace o segmento m_2 do ponto Q_0 ao ponto Q_1.

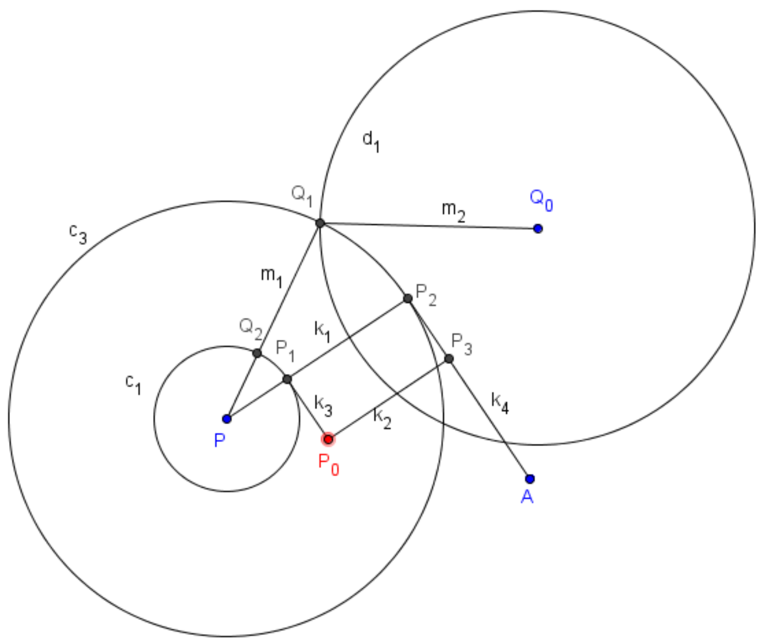


Figura 29 - Passos de Construção de 22 a 28

29) Marque o ponto Q_2 na interseção do segmento m_1 com o círculo c_1.

30) Construa o círculo d_2 com centro em Q_1 e raio hastemenor.

31) Marque o ponto Q_3 na interseção do círculo d_2 com o segmento m_2.

32) Trace a reta m paralela a m_1 passando pelo ponto Q_3.

33) Trace a reta n, paralela a m_2 passando pelo ponto Q_2.

34) Marque o ponto R na interseção das retas m e n.

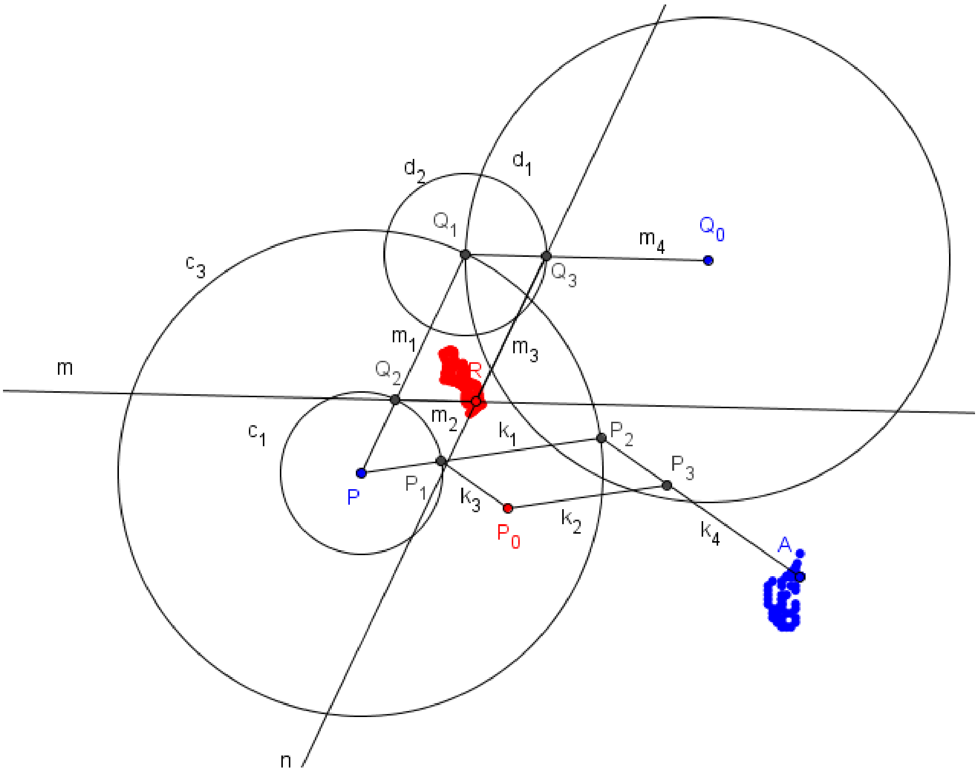


Figura 30 - Passos de Construção de 29 a 34

35) "Desligue" as retas m e n e os círculos c_1, c_3, d_1 e d_2.

36) Trace o segmento m_3 do ponto R ao ponto Q_3.

37) Trace o segmento m_4 do ponto R ao ponto Q_2. Observe que os segmentos e pontos construídos são os braços e pontos articulados do pantógrafo de redução. O ponto de guia é o ponto Q_0 e o ponto de escrita é o ponto R. Ao mover Q_0, observe o movimento de R.

38) Clique com o botão direito sobre o ponto R e escolha a opção Habilitar Rastro. Altere também a cor, para diferenciá-lo do ponto A. Experimente mover o ponto Q_0.

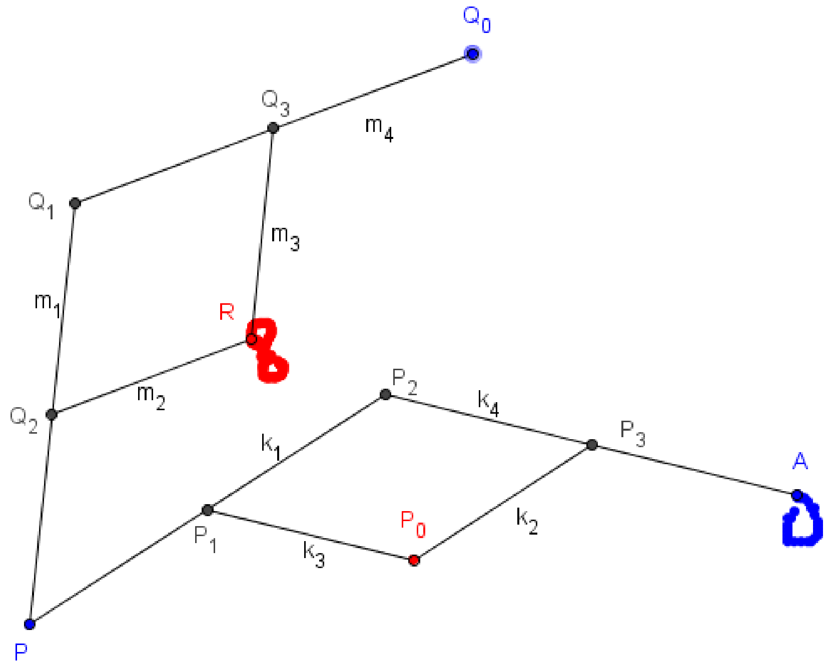


Figura 31 - Pantógrafo de Ampliação e de Redução

O pantógrafo construído agora é de redução. Como a construção foi feita considerando os mesmos valores do pantógrafo de ampliação, as escalas de redução são as equivalentes às de ampliação: 1:2 até 1:5. Resta ainda a finalização da construção, unindo os dois de forma a parecer ao usuário que se trata apenas de um instrumento. Para isso, vamos utilizar uma variável booleana, um botão e alguns comandos de programação.

39) Digite no Campo de Entrada: “w=true”. Dessa forma estamos criando uma variável booleana w, cujo valor associado nesse momento é true.
40) Insira um botão de ação clicando no comando Inserir Botão, clique em um ponto na janela de visualização e preencha o nome do botão no formulário: Ampliação. Observe na janela de álgebra o nome de construção deste botão que, no caso do arquivo acima, é bt1.
41) Clique com botão direito do mouse no botão bt1, escolha a guia Programação e a opção Ao Clicar. Digite, então, os comandos como na figura abaixo:

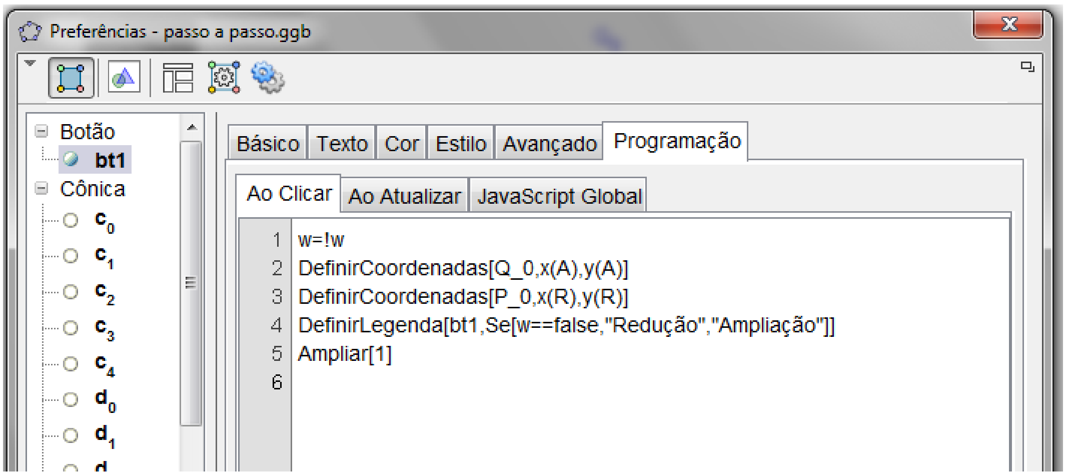


Figura 32 - Programação do Botão Ampliação/Redução

- Linha 1: o símbolo ! inverte o valor da variável booleana w.
- Linha 2: o comando DefinirCoordenadas associa as coordenadas x e y do ponto A ao ponto Q_0.
- Linha 3: o comando DefinirCoordenadas associa as coordenadas x e y do ponto R ao ponto P_0.
- Linha 4: o comando DefinirLegenda associa ao botão bt1 a palavra “Redução” caso o valor da variável w seja false e associa a palavra “Ampliação” caso seja true.
- Linha 5: o comando Ampliar com escala 1 é um recurso para atualizar automaticamente a janela de visualização.

Neste passo de construção, se clicarmos no botão e aparecer a palavra Ampliação, devemos mover o ponto P_0 e o ponto A se deslocará fazendo a ampliação. Se clicarmos novamente, aparecerá a palavra Redução e, neste caso, devemos mover o ponto Q_0 e o ponto de escrita será o ponto R. Mas observe que, durante esta troca, enquanto trabalhamos com um pantógrafo, as linhas de construção do outro permanecem aparentes. Para deixar aparente apenas as linhas desejadas, em cada caso, devemos:

42)Clique, na janela de álgebra, no segmento k_1 com o botão direito do mouse, escolha a opção Propriedade, guia Avançado e preencha o campo Condição para Exibir Objeto(s) com a variável w.

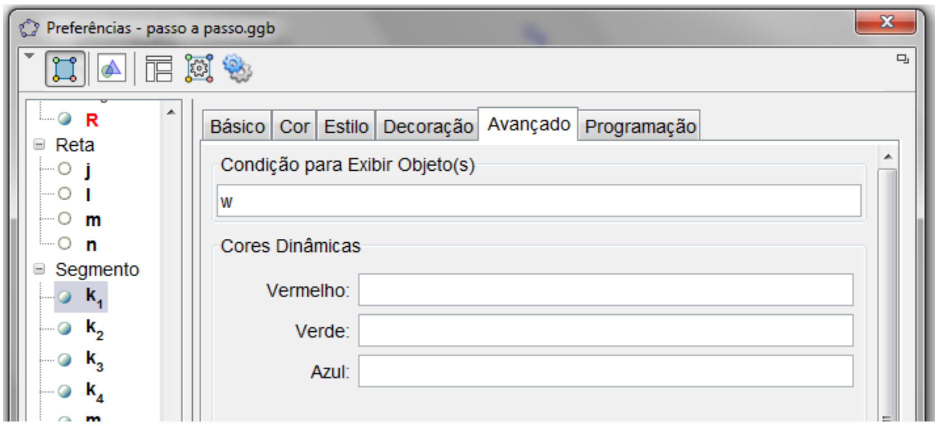


Figura 33 - Condição de Exibição

Repita o mesmo procedimento para todos os elementos do pantógrafo de ampliação: k_2, k_3, k_4, P_0, A.

Para os elementos m_1, m_2, m_3, m_4, Q_0 e R do pantógrafo de redução, preencha o campo Condição para Exibir Objeto com “w=false”.

43) Clique no comando Exibir/Esconder Objeto para esconder os pontos P_1. P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3.

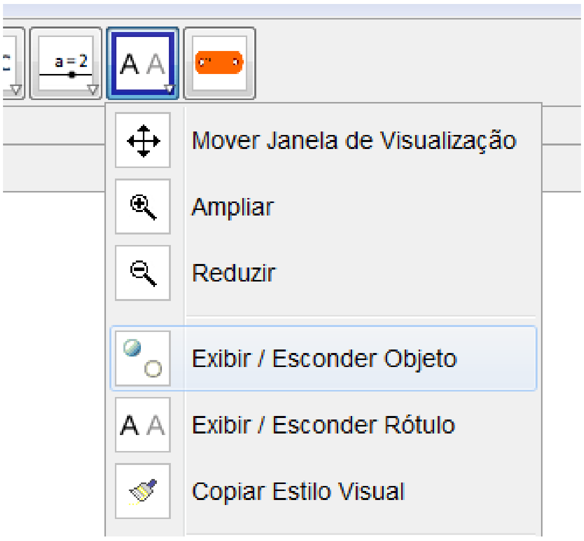


Figura 34 - Comando Exibir / Esconder Objeto

44)Clique no comando Exibir / Esconder Rótulo para esconder apenas o rótulo dos segmentos k_1, k_2, k_3, k_4, m_1, m_2, m_3 e m_4. A aparência do pantógrafo neste momento será a da figura abaixo:

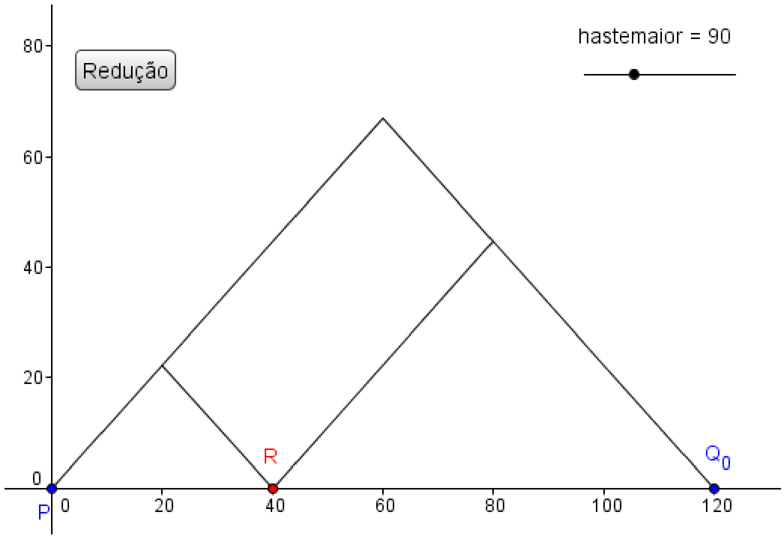


Figura 35 - Estrutura Finalizada do Pantógrafo

É muito útil criar um botão que atualize a janela e apague o que foi desenhado. Na construção do botão Ampliação/Redução foi utilizado um comando para isso e funciona quando o tipo de pantógrafo é alterado. Este botão servirá para a atualização em qualquer caso.

45)Clique no comando Inserir Botão e preencher conforme a figura:

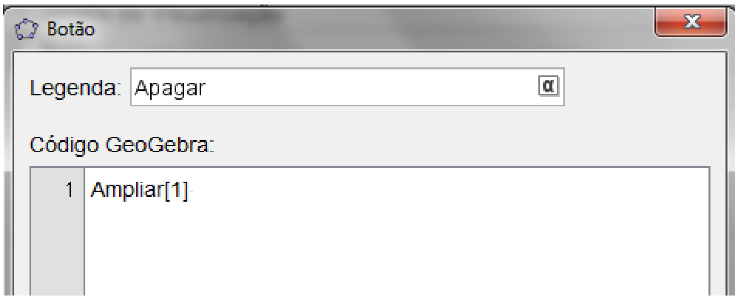


Figura 36 - Botão Apagar

Como foi dito anteriormente, o valor do comando deslizante hastemaior é que define qual a escala de ampliação ou redução. O valor da hastemenor, lados iguais do triângulo isósceles de base PR, foi fixado em

30. Os lados iguais do triângulo isósceles de base PQ_0 são definidos pelo valor do controle deslizante hastemaior. Como os triângulos são semelhantes, a escala será resultado da razão entre os lados dos triângulos e, consequentemente, a razão entre o valor de hastemaior e o valor de hastemenor. È possível utilizar o próprio controle deslizante para indicar a escala que está ativa:

46) Digite na caixa de entrada: "esc=hastemaior/hastemenor". O valor da variável escala é a razão entre os dois valores dos comprimentos das hastes.
47) Clique no controle deslizante hastemaior com botão direito do mouse, escolha a opção Exibir Rótulo para esconder o rótulo do controle.
48) Clique no comando Inserir Texto para escrever o valor da escala. Preencha o formulário conforme a figura abaixo:

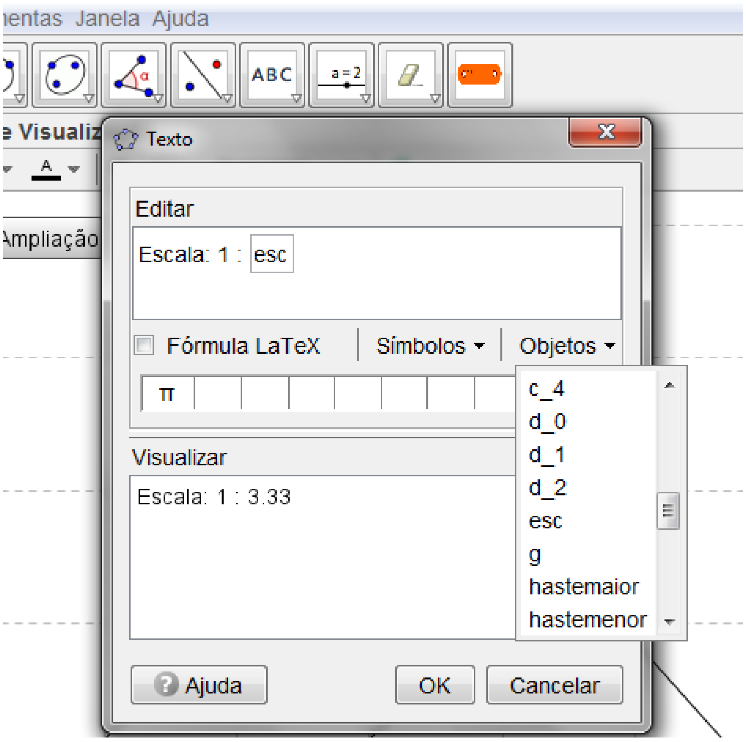


Figura 37 - Formulário de Texto com Objetos

Observe que a variável esc criada no passo 46 aparece no grupo dos Objetos, junto com todos os outros elementos dessa construção. È só selecionar com o mouse.

O texto “Escala: 1 : esc” é utilizado para o pantógrafo de redução e, portanto, só deverá estar visível quando estivermos utilizando este pantógrafo. É necessário condicionar a sua exibição à variável booleana w, como já fizemos em passos anteriores.

49) Clique no texto “Escala: 1 : esc“ com o botão direito do mouse, escolha Propriedades, clique na guia Avançado e preencha o campo Condição para Exibir Objetos com “w==false” ou “!w”. Em qualquer das duas situações, o texto somente será exibido quando o valor de w for false. Agora selecione a guia Posição e digite as coordenadas (23,99) no campo Origem para posicionar o texto. Essas coordenadas podem variar de acordo com a posição do controle deslizante. Observe na figura:

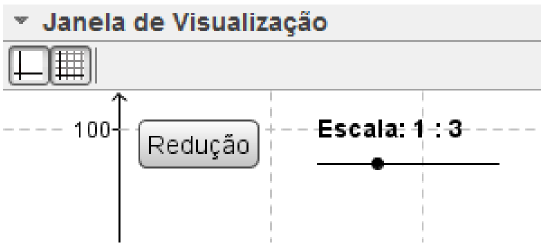


Figura 38 - Posição do Texto da Escala

E por último selecione a guia Texto e clicar na opção negrito, para terminar a formatação do texto.

50) Repita o comando Inserir Texto e, agora, escreva “Escala: esc : 1” para criar a indicação da escala do pantógrafo de ampliação.

51) Clique no texto inserido e altere as propriedades:
- Guia Avançado: digite “w” no campo Condição para Exibir Objetos.
- Guia Posição: digite (23,99) no campo Origem.
- Guia Texto: clique em negrito.

Agora teste o botão Ampliação/Redução e observe que as escalas se adaptam à situação. O campo Origem dos dois textos da escala devem ter o mesmo valor para não alterar a posição quando acionamos o botão.

Também é possível construir botões para escalas específicas. O procedimento para criação de botão já foi explicado e neste caso, a cada escala, é preciso programar o valor exato. Vamos optar por fazer primeiro o botão de ampliação, escala 2 : 1.

52)Clique na opção Inserir Botão. Preencha a legenda com “2 : 1”. Na guia Programação, clique em Ao Clicar e digite “hastemaior=60”, clique em OK. Quando este botão for acionado, a variável hastemaior recebe o valor 60 automaticamente, e as hastes serão alteradas para o valor correspondente. A criação dos outros botões segue a mesma sequência, adaptando o valor de hastemaior do pantógrafo à escala desejada.

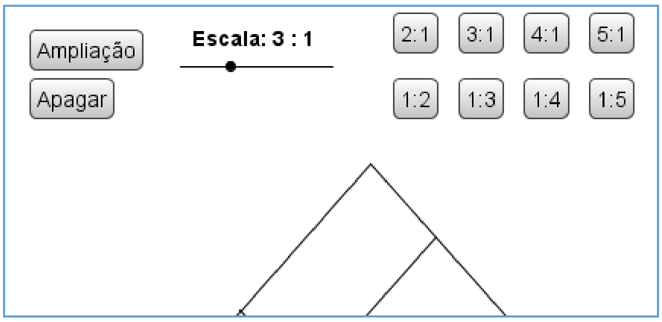


Figura 39 - Botões de Escala

Agora é preciso utilizar mesmo artifício utilizado para o botão Ampliação/Redução, para que as escalas de ampliação apareçam somente quando o pantógrafo de ampliação estiver ativado, da mesma forma que as escalas de redução somente devem aparecer quando o pantógrafo de redução estiver ativo. Para o botão de Ampliação/Redução foi utilizada a variável booleana w. Se o valor de w é verdadeiro, o pantógrafo é de ampliação, e é de redução quando w é falso. Então:

53)Clique com botão direito do mouse no botão 2:1, escolha a guia Avançado e digite w no campo de Condição para Exibir Objeto. Repita para os outros botões de ampliação.

54) Clique com o botão direito no mouse no botão 1:2, escolha a guia Avançado e digite !w no campo de Condição para Exibir Objeto. Repita para os outros botões de redução.

Após esses passos, cada grupo de botões de escala aparece ou desaparece de acordo com o botão Ampliação/Redução.

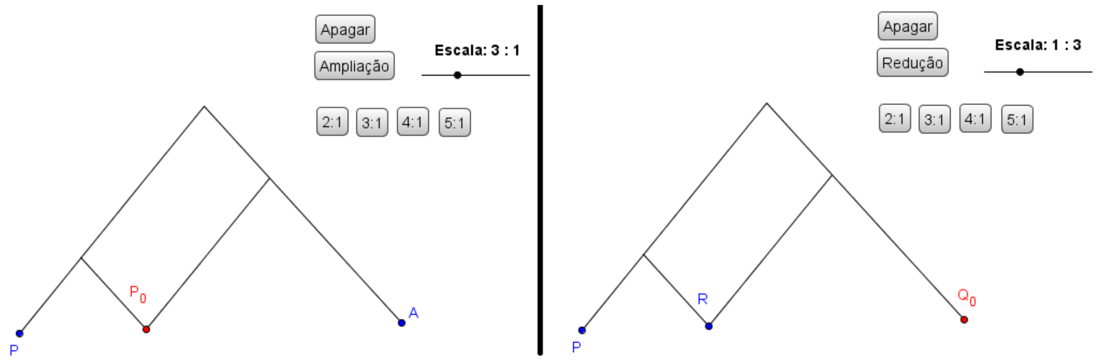


Figura 40 - Pantógrafo com Botões de Escala

A construção da estrutura do pantógrafo está finalizada, faltando apenas o acabamento com a colocação das hastes de madeira, de vértice a vértice. Para isso vamos utilizar a ferramenta Haste, criada anteriormente neste trabalho. Como o objetivo é fazer o instrumento o mais real possível, é preciso se preocupar com ordem de colocação das hastes.

55) Iniciando pelo pantógrafo de ampliação, exiba os pontos P_1, P_2 e P_3.

56) Utilize a ferramenta Haste, do menu personalizado, e clique em P e P_2.

Figura 41 - Menu Personalizado com a Ferramenta Haste

A ferramenta Haste cria, automaticamente, novos elementos de aparência alterada para dar forma física ao instrumento. Foi feita a opção de criar um vínculo entre esses elementos criados a fim de permitir exibi-los ou não, de acordo com a situação. Assim, foi criado uma Caixa para Exibir/Esconder Objetos para todas as hastes.

57) Clique no comando Exibir/Esconder Objetos, digite o nome Haste1 e selecione os objetos criados para essa haste. Observe que, pela alteração de cores dos elementos da haste, é fácil distingui-los, pois apresentam a cor alterada. Clique em Aplicar.

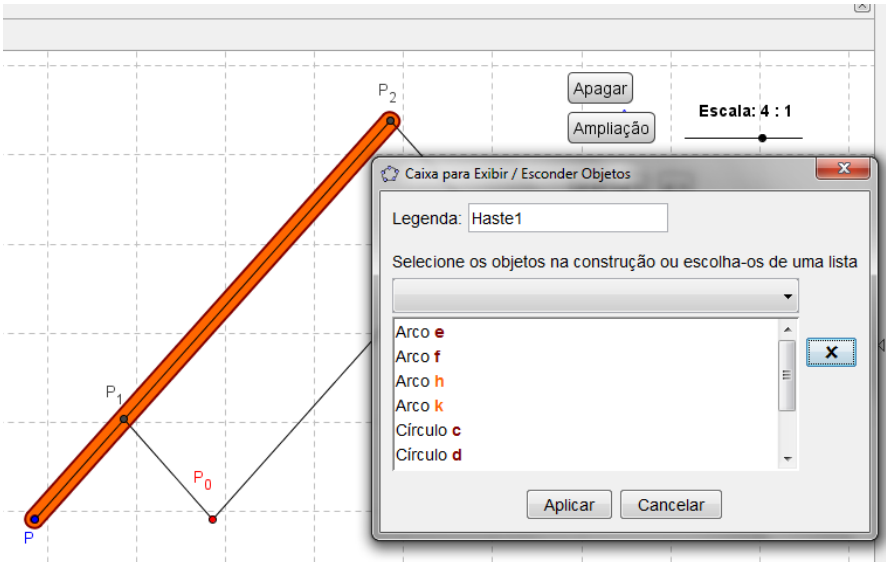


Figura 42 - Comando para Exibir/Esconder Haste1

58) Utilize a ferramenta Haste e clique em P_0 e P_3. Da mesma forma do item anterior, crie a caixa para exibir/esconder a Haste2.

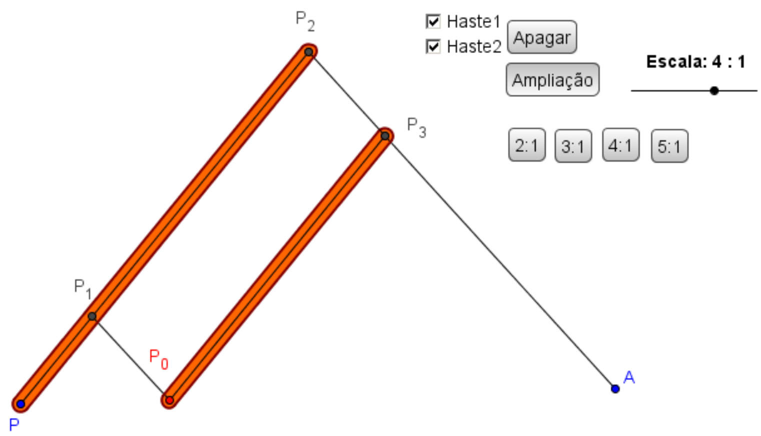


Figura 43 - Colocação das Hastes 1 e 2

Foram colocadas as hastes de base do pantógrafo. As próximas serão montadas por cima dessas e para indicar essa diferença de profundidade entre elas, é preciso desenhá-las em diferentes camadas.

59) Clique com botão direito do mouse na haste1, escolha a opção Propriedades, guia Avançado e altere a camada para 4. Faça o mesmo para todos os elementos da haste1 e da haste2.
60) Utilize o comando Haste e selecione os pontos P_1 e P_0, criando a haste 3.
61) Proceda como no item 58 e crie a caixa Exibir/Esconder objeto para a Haste 3.
62) Clique com botão direito na Haste 3 e coloque todos os seus elementos na camada 5.
63) Para finalizar, utilize a ferramenta Haste e os pontos P_2 e A para criar a haste 4.
64) Crie a caixa Exibir/Esconder para esta haste.
65) Troque todos os elementos para a camada 5.

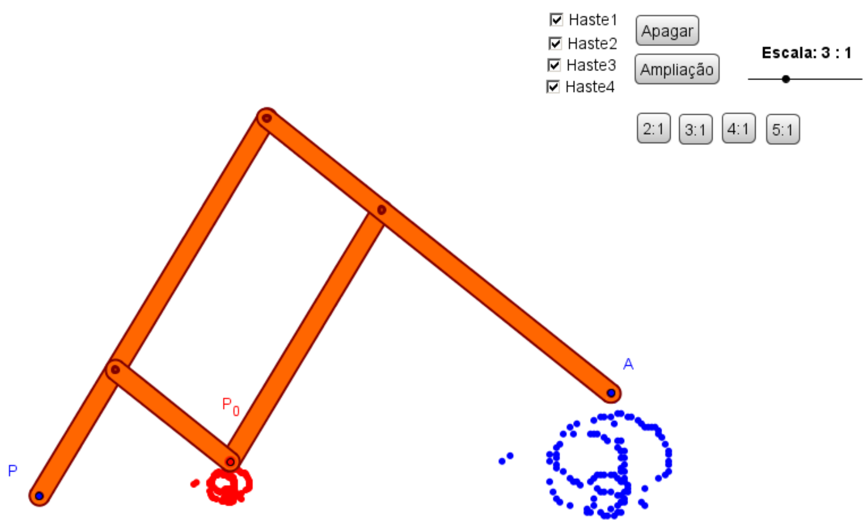


Figura 44 - Pantógrafo de Ampliação Finalizado

Para fazer o acabamento do pantógrafo de redução, é necessário seguir o mesmo procedimento, colocar as hastes uma a uma, respeitando a ordem indicada. Para garantir a aparência de profundidade é preciso alterar as camadas. E, por último, falta alterar o botão Ampliação/Redução para alternar entre o pantógrafo de redução e de ampliação com as hastes.

66) Utilize a ferramenta Haste e clique nos pontos P e Q_1, criando a HasteR1, os pontos R e Q_3 para a HasteR3, os pontos Q_2 e R para a HasteR4 e os pontos Q_1 e Q_0 para a HasteR4.
67) Altere as camadas de todos os elementos da HasteR1 e HasteR3 para camada 4 e todos os elementos da HasteR2 e HasteR4 para camada 5.
68) Utilize o comando Exibir/Esconder Objeto, digite HasteR e selecione todos os elementos das 4 hastes. Esse comando cria uma variável booleana (i) responsável pela exibição dos elementos das hastes.
69) Clique com botão direito do mouse no botão Redução/Ampliação e complete as linhas 5 e 6.

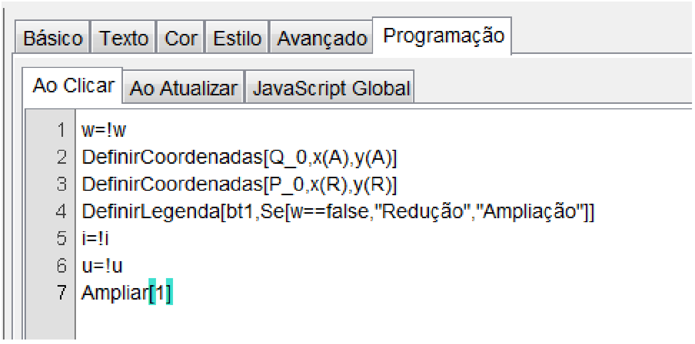


Figura 45 - Programação do Botão Ampliação/Redução

A linha de comando 5 (i=!i) exibe ou esconde as hastes do pantógrafo de redução, enquanto a linha 6 (u=!u) faz o mesmo para as hastes do pantógrafo de ampliação. Por construção, quando a variável i está verdadeira (true), a variável u está falsa (false). Dessa forma, o botão exibe ou esconde todos os elementos relativos a cada tipo de pantógrafo.

O pantógrafo finalizado permite a escolha entre as opções de reduzir ou ampliar figuras, a escolha entre as escalas pré-determinadas de ampliação e redução, além da opção de escala livre através do acionamento do comando deslizante.

4.3. Animação

Para disponibilizar o modelo final, foi utilizada a plataforma GeoGebraTube.org, que funciona como repositório de trabalhos criados utilizando o Geogebra. O site também possui fórum, da mesma forma que o site GeoGebra.org. Para o upload de trabalhos é preciso fazer um rápido cadastro, fazer login no sistema e escolher a opção Material e clicar em Enviar Material. O autor deve preencher o título do trabalho, fazer um breve comentário, fazer o upload do arquivo .ggb (limitado a 2Mb), preencher palavras-chave e gravar. O applet pode ser editado e regravado. Caso o professor queira deixar algum questionamento aos alunos, deve preencher no campo opcional do formulário, destinado à versão dos estudantes. Os endereços de acesso são:

- www.geogebra.org
- www.geogebratube.org

O arquivo finalizado do Pantógrafo de Scheiner está em:

- www.geogebratube.org/student/m85276

O arquivo com o passo a passo da construção está em:

- www.geogebratube.org/student/m93389

Há ainda um pantógrafo de funcionamento automático ou manual:

- www.geogebratube.org/student/m93402

Para ver o perspectógrafo de Scheiner:

- www.geogebratube.org/student/m94034

E para ter a exata noção de homotetia, mova o plano no arquivo:

- www.geogebratube.org/student/m94037

5. Justificativa Matemática

5.1. Justificativa Pedagógica

Como foi dito na Introdução, os Parâmetros Curriculares Nacionais [19], o PCN, descrevem os conteúdos matemáticos necessários a cada ciclo da vida escolar do aluno. Também fazem a análise dos objetivos a serem alcançados e a visão pedagógica da construção desse conhecimento.

Nos ciclos mais baixos, de 1ª à 4ª séries (2º ao 5º ano), o PCN insiste na criação da noção geométrica de observação do espaço e o aluno deverá aprender a associar figuras matemáticas à sua rotina, desenvolvendo noções de espaço, grandezas, comparações de forma e dimensões, noções básicas de escala, Essa construção de conhecimento geométrico vai aprofundar-se nos ciclos seguintes

Com relação ao 3º e 4º ciclos, equivalente ao segundo segmento do Ensino Fundamental, O PCN define:

> “Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias e homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.” (PCN, 1998, p.51).

No 3º ciclo, 5ª e 6ª séries (6º e 7º ano), há um aprofundamento do estudo das figuras geométricas iniciado no ciclo anterior. Assim, é importante enfatizar os conceitos geométricos básicos (direção e sentido, ângulos, paralelismo, perpendicularismo, classificação das figuras, etc), a composição e decomposição das figuras planas, bem como as transfomações (reflexão, translação e rotação), ampliação e redução. O PCN ressalta a importância das construções geométricas:

> “Outro aspecto que merece atenção neste ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre

> tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.” (PCN, 1998, p68-69)

Na seção de Conceitos e Procedimentos, O PCN destaca algumas habilidades que devem ser desenvolvidas no aluno. Uma das orientações para este ciclo, no bloco de Espaço e Forma, é:

> “Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).” (PCN, 1998, p.73)

Já nos objetivos para o 4º ciclo – 7ª e 8ª séries (8º e 9º ano)– o PCN destaca, dentro do bloco de Espaço e Forma:

> “Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> - Interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
> - Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
> - Ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.” (PCN, 1998, p.81-82)

Como vimos, o PCN orienta, no eixo Espaço e Forma, a trabalhar conceitos geométricos ao longo dos ciclos, de forma a desenvolver competências que possibilite ao aluno o reconhecimento do espaço à sua volta. Ressalta, ainda, a importância do estudo das transformações geométricas ao longo dos ciclos, aprofundando conceitos. O aluno deve ser capaz de compreender as isometrias, que mantém medidas mas altera a posição referencial da figura no plano ou espaço e as homotetias, que não conservam as medidas e sim a forma. E a partir destas, perceber o conceito de semelhança e de proporcionalidade, que serão muito importantes no aprendizado de outros conteúdos do currículo matemático, distribuído ao longo das séries.

A construção de instrumentos que visam permitir a melhor visualização desses conteúdos geométricos é um interessante auxílio ao professor no processo de aprendizagem do aluno. Putnoki [13] acredita no "grande valor pedagógico dos instrumentos de desenho, que, além de contribuírem para aguçar o sentido de organização e a criatividade do estudante, permitem trabalhar concretamente as ideias abstratas que dão suporte à Geometria". Neste caso, Putnoki se refere apenas às construções com régua e compasso. Ampliando essa ideia, a Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais [22] sugere, nas orientações iniciais do CBC (Conteúdos Básicos Comuns), no eixo de Espaço e Forma, no item 5 – Teorema de Thales e semelhança de triângulos, a utilização do pantógrafo como instrumento histórico e contemporâneo, explicando sua história e mostrando a utilização atual do mecanismo. Sugere ainda a construção de um modelo real com os alunos e indica essa atividade a todas as séries. Na Bahia, a Rede Anísio Teixeira [21] também descreve, no endereço eletrônico http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/850, atividades com a construção e utilização do pantógrafo como atividade para sala de aula. Aqui no Rio de Janeiro, a Fundação Cecierj Consórcio Cederj [18] inclui a utilização deste instrumento entre aqueles sugeridos para o ensino da Geometria.

5.2. Argumentação Matemática

A construção e funcionamento do pantógrafo utilizam conceitos de semelhança de triângulos, paralelismo, propriedades dos quadriláteros, homotetia e proporcionalidade. Na figura a seguir, podemos observar as relações de semelhança de triângulos:

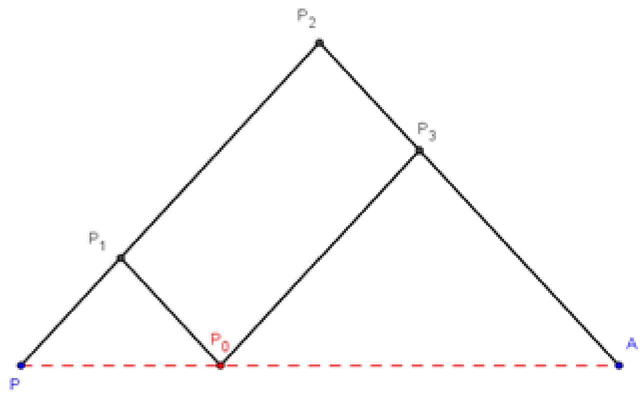


Figura 46 - Esquema de Construção do Pantógrafo

Considere o triângulo PP_1P_0.

- Por construção, os lados PP_1 e P_1P_0 possuem o mesmo comprimento, portanto o triângulo é isósceles.
- Dessa forma, os ângulos $P_1\hat{P}P_0$ e $P_1\hat{P}_0P$ são iguais e estão representados pela letra α.
- O ângulo $P\hat{P}_1P_0$, é suplementar à soma dos outros dois, está representado por θ

Considere, agora, o triângulo PP_2A.

- Os lados PP_2 e P_2A, por construção, possuem o mesmo comprimento e o triângulo PP_2A também é isósceles.
- O ângulo $P_2\hat{P}P_0$ é comum ao triângulo PP_1P_0, portanto, também será marcado como ângulo α. E, como o triângulo é isósceles, $P\hat{A}P_2$ também será indicado como ângulo α.
- O ângulo $P\hat{P}_2A$, indicado por β, é suplementar à soma dos dois ângulos α. Logo $\theta = \beta$.

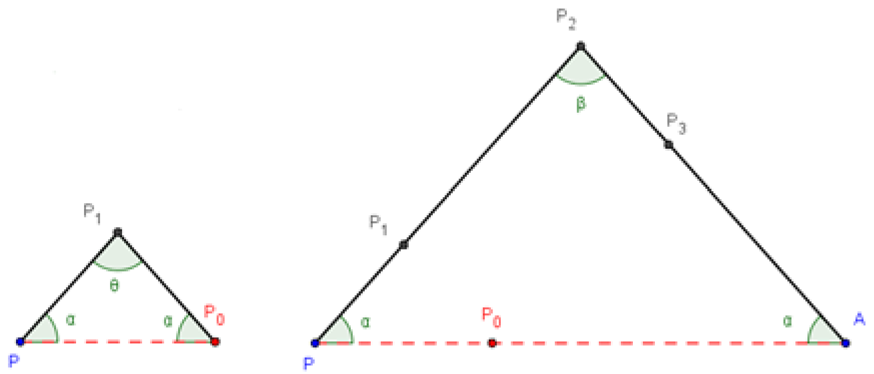


Figura 47 - Comparação dos Triângulos

Os dois triângulos possuem os 3 ângulos congruentes. Logo, os triângulos são semelhantes.

A razão de semelhança dos triângulos é calculada a partir da razão entre os lados correspondentes dos dois triângulos e define a escala de ampliação e redução do instrumento. Então:

- Razão de semelhança dos triângulos PP_1P_0 e PP_2A será:

  $$K_a = \frac{segmento\ PP_1}{segmento\ PP_2} = \frac{segmento\ P_1P_0}{segmento\ P_2A} = \frac{segmento\ PP_0}{segmento\ PA}$$

  e a escala de ampliação será K_a: 1.

- Razão de semelhança dos triângulos PP_2A e PP_1P_0 será:

  $$K_r = \frac{segmento\ PP_2}{segmento\ PP_1} = \frac{segmento\ P_2A}{segmento\ P_1P_0} = \frac{segmento\ PA}{segmento\ PP_0}$$

  e a escala de redução será 1: K_r.

A transmissão do movimento do ponto P_0 para o ponto A é feita através dos vértices articulados do paralelogramo $P_1P_2P_3P_0$. Por construção, o lado PP_2 é paralelo ao lado P_0P_3 e, ao mesmo tempo, o lado P_1P_0 também é paralelo ao lado P_2A.

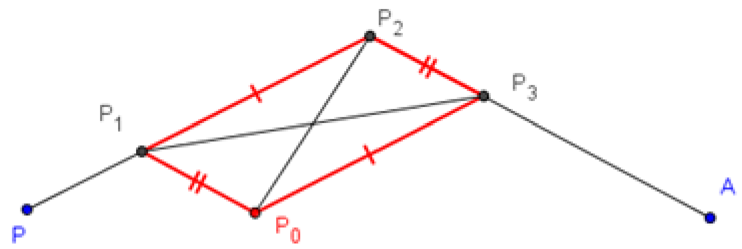


Figura 48 - Paralelogramo Articulado do Pantógrafo

A ampliação se dá a partir da homotetia direta de centro P, onde cada ponto desenhado pela ponta de escrita em A é resultado da transformação, de razão K, de cada ponto percorrido pelo P_0.

$$\overrightarrow{PA} = K\,\overrightarrow{PP_0}$$

Onde K é a razão entre os segmentos PA e PP_0 descrita anteriormente. Dessa forma, a figura desenhada é a ampliação na escala K : 1.

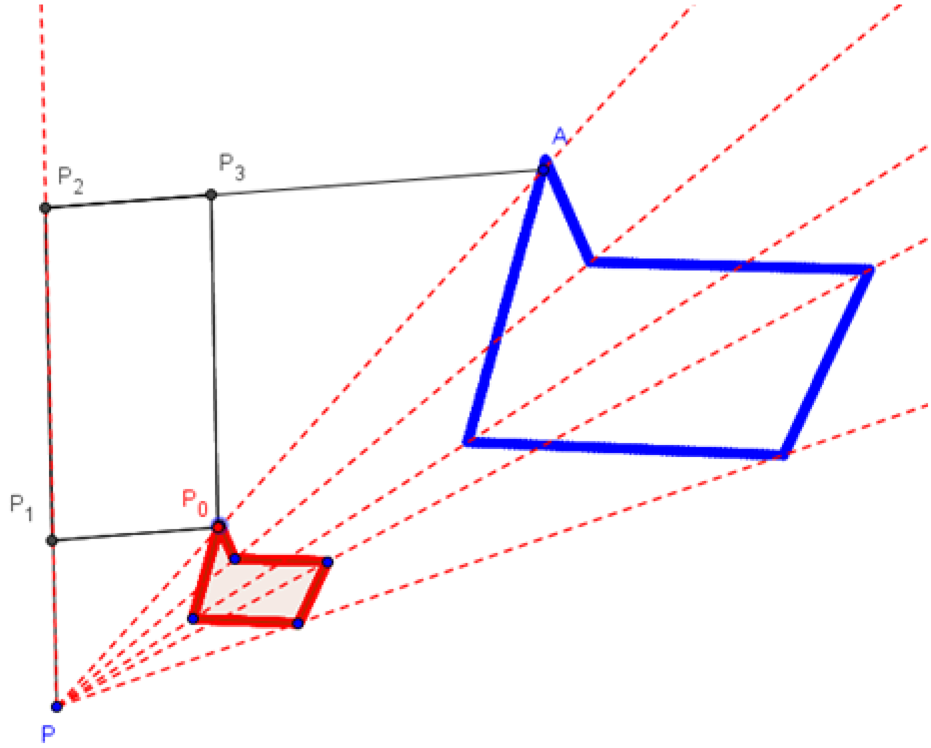


Figura 49 - Homotetia

A redução de figuras obedece ao mesmo conceito e, neste caso, a razão será a inversa de K e o ponto P continua a ser o centro da homotetia.

6. Estratégia e Aplicabilidade em Sala de Aula

O objetivo deste trabalho é oferecer ao professor mais uma opção para facilitar ou otimizar as suas aulas. Os conteúdos abaixo podem ser trabalhados, de forma interativa, com os alunos utilizando o pantógrafo, a partir de sua estrutura e funcionamento. Em cada item, são discutidas sugestões de abordagens que o professor pode seguir. O educador tem a liberdade de criar seu plano de aula e direcionar o aprendizado às necessidades de seus alunos. Alguns dos sites visitados durante a pesquisa e listados nas Referências Bibliográficas oferecem atividades a serem feitas com o pantógrafo.

6.1. Escalas

Este conteúdo pode ser trabalhado em diversas séries do Ensino Fundamental. Após a explanação do conteúdo, o professor pode fazer referência ao instrumento, mostrando o modelo GeoGebra aos alunos. Os próprios alunos podem manusear o instrumento, escolhendo uma das figuras disponíveis ou fazendo um desenho livre e reconhecer a diferença de dimensão entre as duas figuras. Cabe ao professor destacar alguns pontos das duas figuras para reforçar a percepção da ampliação ou redução.

Com os botões de escala ou com o controle deslizante, o professor pode mostrar aos alunos que as hastes do pantógrafo aumentam ou diminuem de comprimento ao mesmo tempo em que as ampliações se tornam cada vez maiores ou cada vez menores.

Dependendo da série, essas explicações podem ser justificadas por outros conteúdos já aprendidos. Por exemplo, ao usá-lo na oitava série (9º ano), o professor pode comentar que a razão de semelhança entre os triângulos formados pelas hastes é igual a escala de ampliação.

Há, ainda, o aspecto histórico do instrumento. O professor pode mostrar ao aluno como eram feitas ampliações ou reduções quando as tecnologias digitais ainda não eram disponíveis, dando ênfase à engenhosidade e simplicidade do instrumento.

6.2. Semelhança de Triângulos

O conceito de semelhança de triângulos pode ser explorado a partir da comparação entre os triângulos formados na construção do instrumento.
É possível comparar os ângulos e lados, mesmo durante o movimento, explorando as hastes paralelas e a correspondência dos ângulos.
Também é possível mostrar a razão de semelhança e, assim, justificar a ampliação ou redução.

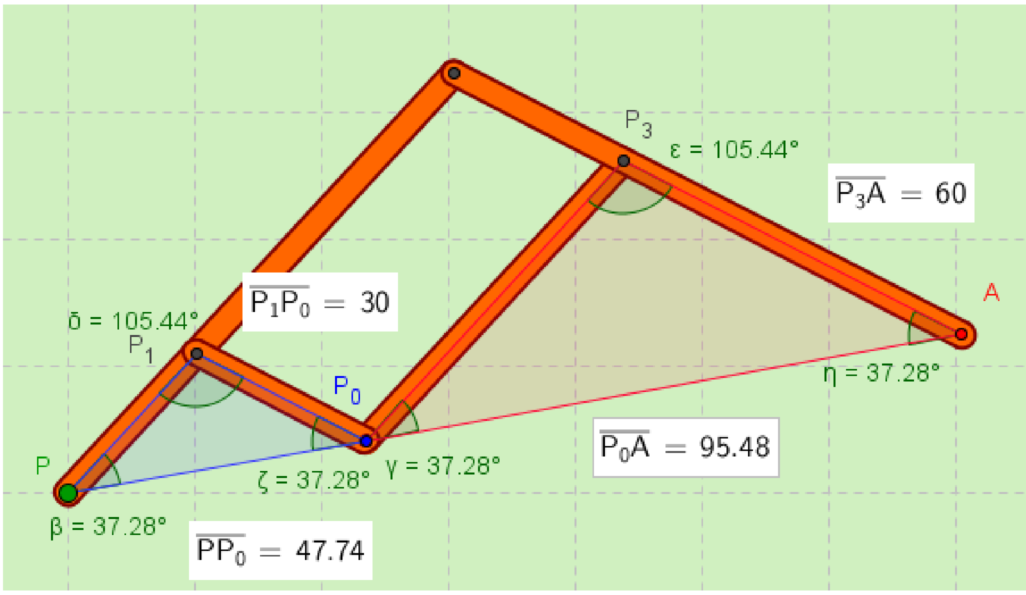


Figura 50 - Ângulos e Dimensões para Semelhança de Triângulo

6.3. Teorema de Tales

O pantógrafo é composto por hastes paralelas cortadas por hastes transversais e, portanto, pode ser utilizado nesse conteúdo. É válido mostrar que o deslocamento das retas mantém o paralelismo e preserva a correspondência entre os ângulos. Para isso, o professor pode traçar retas, como na figura abaixo, e indicar os ângulos entre elas. Se, depois disso, o pantógrafo for acionado, o aluno poderá ver que os ângulos se mantêm congruentes.

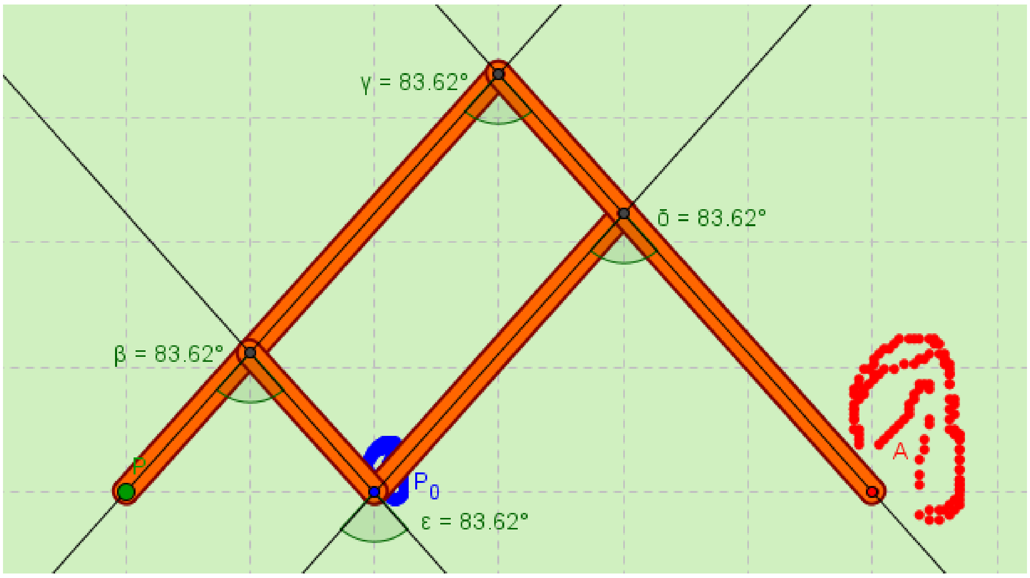


Figura 51 - Teorema de Tales - Congruência de Ângulos

6.4. Homotetia

A homotetia é uma transformação linear, cuja característica é a manutenção da forma, variando apenas a dimensão. Portanto, facilmente explicada a partir do uso do pantógrafo, pois a ampliação da figura é consequência de uma transformação de homotetia a partir da figura menor. É possível, no modelo GeoGebra, que ao final de um desenho qualquer , o professor trace semirretas a partir do ponto P, que é o centro da homotetia, passando por alguns pontos da figura original, encontrando a correspondência na figura ampliada. E, a partir da medida das bases dos triângulos, explicar a razão desta transformação.

Aumentando a escala da ampliação, o aluno poderá perceber que uma cópia é maior que a outra, mas ainda assim, respeita as semirretas auxiliares da homotetia.

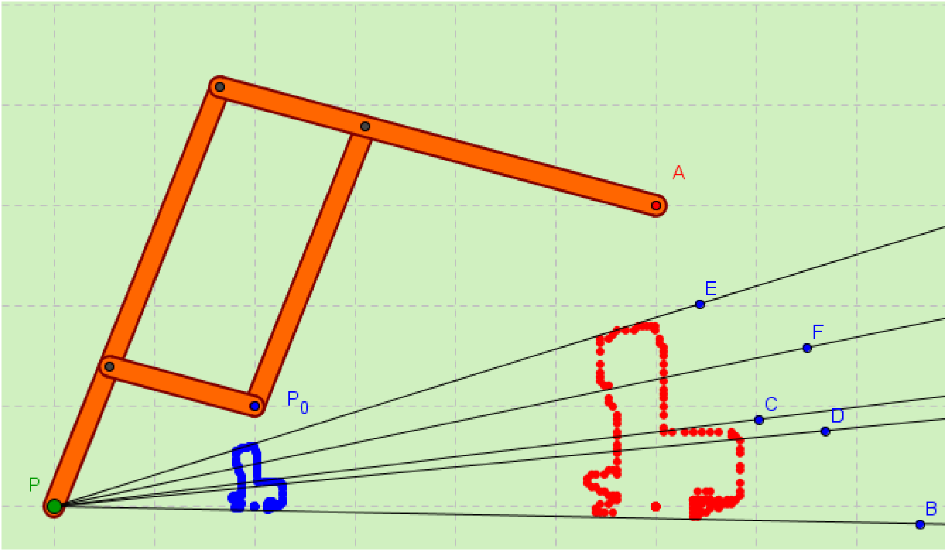


Figura 52 - Homotetia - Semirretas

6.5. Construção Física do Pantógrafo

A partir da imagem do pantógrafo construído no GeoGebra, o professor pode estimular os alunos a construírem seu próprio instrumento. Nesse processo, podem ser trabalhados vários conteúdos: o dimensionamento das hastes a partir da razão desejada, o paralelismo da montagem, a medição dos pontos pivôs, Para isso, pode utilizar 4 barras de papelão grosso, de madeira fina (figura abaixo), de garrafa pet, etc, alguns percevejos ou alfinetes, pequenos pedacinhos de borracha plástica e uma carga de caneta ou grafite 2.0.

Figura 53 - Material para Construção do Pantógrafo

7. Conclusão

A experiência de ter cursado esse Mestrado foi, sem dúvida, desafiadora e muito enriquecedora. Rever conteúdos, presenciar a discussão de profissionais qualificados, observar novos pontos de vista, novas abordagens, aprender uma infinidade de novos conteúdos, tudo isso mudou minha vida e minha maneira de me sentir como professora. E, dentre todos esses pontos, o principal foi o contato com o programa GeoGebra. O programa permite uma abordagem totalmente nova e interativa e abre um universo de possibilidades. E, a partir de um exercício proposto, iniciei meu trabalho com o pantógrafo. A pesquisa sobre esse instrumento mostrou uma história muito rica, onde a Matemática, a Física, a Arte, a Astronomia, a Engenharia se interligam e escrevem a história da evolução tecnológica.

Esse trabalho, então, reúne essas duas motivações com o objetivo principal de todo professor: tornar suas aulas mais atrativas e facilitar o aprendizado de seus alunos. Sabemos que, quanto mais lúdico, mais interessante para o aluno. Por isso a preocupação de criar, não apenas um instrumento unifilar para a demonstração de semelhança de triângulos ou da variação da escala, mas sim um instrumento virtual o mais próximo possível do instrumento real, com aparência e limitações e, até mesmo, possível de ser reproduzido com alunos em sala de aula. Desde o início, foram criadas várias versões do instrumento, pois o GeoGebra surpreende com novas possibilidades a cada momento e foi difícil determinar o momento de parar de alterar o modelo para finalizar o trabalho. E sei que ainda há muito o que se explorar neste mesmo instrumento e em muitos outros.

Preparar esse trabalho abriu uma série de novos caminhos e mostrou o quanto ainda há para estudar.

8. Referências Bibliográficas

[1] ARAUJO, Claudio Lopes de. GeoGebra, Um Bom Software Livre. Revista do Professor de Matemática, nº 67, p. 43-7, 3º quadrimestre de 2008.

[2] GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo Antônio Silvani e MATTOS, Francisco Roberto Pinto. Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. Coleção ProfMat, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[3] GRAVINA, Maria Alice e SANTAROSA, Lucila Maria. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. IV Congresso RIBIE(Rede Iberoamericana de Informática Educativa), Brasília, 1998.

[4] HEBENSTREIN, J. *Simulation e Pédagogie, une recontre du troisième type.* Gif Sur Yvette: École Superieure d'Eletricité, 1987.

[5] HEFEZ, Abramo e FERNANDEZ, Cecília de Souza. Introdução à Álgebra Linear. Coleção ProfMat, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[6] KOENIGS, Gabriel; DARBOUX, Gaston; COSSERAT, Eugène; e COSSERAT François - Lecons de Cinématique Librairie Sc. A. Hermann, Paris 1897

[7] KEMP, Martin. A Ciência da Arte , Giunti Gruppo, Florença, 1994.

[8] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo e MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio – Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[9] LORENZATO, Sérgio. Educação Infantil e Percepção Matemática – São Paulo. Autores associados, 2006.

[10] NASSER, Lílian , et al. *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele* – 3. ed. Instituto de Matemática/ UFRJ - Projeto fundão, 2000.

[11] PIAGET, Jean. Biologie at Connaissance, Paris, Gallimard,1967.

[12] PUTNOKI, José Carlos. Que se devolvam a Euclides a régua e compasso. Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática São Paulo: Associação Palas Athena do Brasil, 13, p.13-17, 2º sem./1988.

[13] PUTNOKI, José Carlos. Geometria e Desenho Geométrico. São Paulo: Scipione, 1991. 4 v.

[14] SCHEINER, Christopher. Pantographice sev Ars Delineandi, Romae, Ex Typographia Ludouici Grignani, 1631. Disponível no endereço http://193.206.220.110/Teca/Viewer?an=920801

[15] SASSONIA, Rogério Côrte. Épocas Obscuras. Associação Cultural MONTFORT, Online em 2014 no endereço http://www.montfort.org.br/index.php?secao=veritas&subsecao=ciencia&artigo=epocas_obsucaras&lang=bra

[16] WAGNER, Eduardo. Construções Geométricas. 6ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[17] ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Da Régua e do Compasso: As Construções Geométricas Como um Saber Escolar no Brasil. Universidade Federal de Minas Gerais. 2001.

[18] _____,Instrumentação no Ensino da Geometria. Volume 3. Fundação Cecierj, Consórcio Cederj, Rio de Janeiro, 2009

[19]_____, Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática – 5ª a 8ª Séries. Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF, Brasília, 1998.

[20]_____, Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática – Ensino Médio. Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF, Brasília, 1999.

[21]_____, Rede Anísio Teixeira, Governo Estado da Bahia, 2011 Online em http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/850

[22]_____, Conteúdos Básicos Comuns, Matemática, Ensino Fundamental.. Secretaria do Estado de Educação de Minas Gerais – Diretoria do Ensino Fundamental. Minas Gerais, 2007..

Sites pesquisados – Acesso em Dezembro/2013 – Janeiro/2014:

[23] http://www.museo.unimo.it/
[24] http://archivioweb.unimore.it/theatrum/
[25] http://tecciencia.ufba.br/semelhanca
[26] http://www.ehow.com.br/proprio-pantografo-como_11755/
[27] http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/
[28] http://www.uff.br/leg/
[29] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Koenigs.html
[30] http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/ausstell/pantografen/literatur.html
[31] http://www.conservatoriodetatui.org.br/ensaiomagazine/ensaio_57.pdf
[32] http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph
[33] http://en.wikipedia.org/wiki/James_Watt
[34] http://www.geogebra.im-uff.mat.br/index.html
[35] http://www.prof2000.pt/users/pf_vieira/java/semelha/panta.htm
[36] http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/atividad.htm
[37] http://stor.no.sapo.pt/html/semelhancas/sem2.html