Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

# Explorando o Conjunto de Cantor e outros fractais no Ensino Básico

**Amauri Fernandes Freitas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
**Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso**

**2014**

510.07 Freitas, Amauri Fernandes
F865e Explorando o conjunto de cantor e outros fractais no ensino básico / Amauri Fernandes Freitas. - Rio Claro, 2014
42 f. : il., figs., gráfs., fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Suzete Maria Silva Afonso

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Conjuntos. 3. Funções. 4. Fractais. 5. Ensino médio. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

## TERMO DE APROVAÇÃO

Amauri Fernandes Freitas

Explorando o Conjunto de Cantor e outros fractais no Ensino Básico

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Orientadora

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli
IGCE/ Unesp -Rio Claro/ SP

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
ICMC/ USP - São carlos/SP

**Rio Claro, 25 de março de 2014**

*Dedico este trabalho à Keli, Jacqueline e Raphael, pessoas especiais que me motivavam para concluir o mesmo.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus, por essa vitória. Agradeço a minha professora orientadora Suzete Maria por me orientar no desenvolvimento desse trabalho e me apoiar nos momentos difíceis.

Um agradecimento especial à CAPES que financiou o Programa PROFMAT e proporcionou a bolsa de estudos para que o sonho de cursar o Mestrado em Matemática na UNESP fosse possível.

Um agradecimento especial para todos os professores que participaram do Programa PROFMAT, especialmente para a professora Suzinei, que muito se dedicou para a execução do Programa PROFMAT na UNESP - Rio Claro.

À todos direciono meus votos de gratidão.

*"Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós."*
***David Hilbert***

# Resumo

Este trabalho está inserido no contexto do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e apresenta a construção do conjunto de Cantor. Para exibir as propriedades do conjunto de Cantor, exploramos conteúdos presentes no Currículo Nacional do Ensino Básico de Matemática, tais como conjuntos, funções, intervalos reais e progressões geométricas. Utilizamos uma linguagem acessível aos alunos do Ensino Básico e apresentamos atividades envolvendo outros fractais, obtidos de forma semelhante ao conjunto de Cantor.

**Palavras-chave:** Conjuntos, Funções, Conjunto de Cantor, Fractais, Ensino Médio.

# Abstract

This work is in the context of Professional Program Master of Mathematics in National Network - PROFMAT and it presents the construction of the Cantor set. To study the properties of the Cantor set, we explore contents which are described in the National Curriculum for Basic Education in Mathematics, such as sets, functions, real intervals and geometric progressions. We use a accessible language to High School students and we present some activities involving other fractals, obtained in a similar way to the Cantor set.

**Keywords:** Sets, Functions, Cantor set, Fractals, High School.

# Sumário

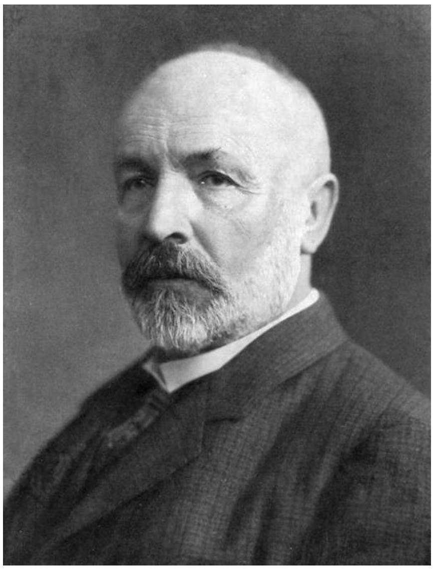
# Introdução

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, filho de emigrantes dinamarqueses, nasceu em S. Petersburgo, Rússia, em 1845. Em 1856 sua família transferiu-se para Frankfurt, Alemanha. O pai de Cantor era um judeu convertido do protestantismo e a mãe nascera na religião católica. Georg se interessou profundamente pelos argumentos da teologia medieval sobre a continuidade e o infinito. Como consequência, não quis seguir uma carreira na engenharia como o seu pai sugeria, quis se dedicar à matemática, à filosofia e à física. Estudou em Zurique, Göttingen e Berlim - onde recebeu a influência de Karl Weierstrass e obteve o doutorado em 1867, com uma tese sobre a teoria dos números. De 1869 a 1905, desenvolveu sua carreira docente na Universidade de Halle. Faleceu em 1918, no hospital de doenças mentais de Halle.

Cantor percebeu que os conjuntos infinitos não são todos iguais. No caso finito, dizemos que os conjuntos de elementos têm o mesmo número (cardinal) se puderem ser postos em correspondência biunívoca. De modo um tanto similar, Cantor se dispôs a construir uma hierarquia dos conjuntos infinitos conforme a *Mächtingkeit* ou "potência" do conjunto. O conjunto dos quadrados perfeitos tem a mesma potência que o conjunto de todos os inteiros positivos, uma vez que eles podem ser postos em correspondência biunívoca. Cantor mostrou que o conjunto de todas as frações racionais é *enumerável* ou *contável*, ou seja, também pode ser posto em correspondência biunívoca com os inteiros positivos e, por conseguinte, tem a mesma potência. Com essas constatações, começaram a pensar que todos os conjuntos infinitos possuíam a mesma potência. Todavia, Cantor provou que isso estava longe de ser verdade. Ele demonstrou que o conjunto dos números reais tem potência maior que o conjunto dos números inteiros positivos e o determinou *não-enumerável*. Seus incríveis resultados levaram-o ao estabelecimento da Teoria dos Conjuntos.

Cantor passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Halle, nunca conseguindo realizar uma de suas grandes aspirações que era a de ser professor na Universidade de Berlim, devido à perseguição de Kronecker, que duvidava da teoria da infinidade completa de Cantor.

O reconhecimento de suas realizações, depois de algum tempo, mereceram a exclamação de Hilbert: “Ninguém nos explusará do paraíso que Cantor criou para nós.”



Georg Cantor (1845 - 1918)

Neste trabalho, apresentamos o conjunto de Cantor, um engenhoso exemplo de um subconjunto da reta que é também não-enumerável e é considerado o precursor da geometria fractal, ramo da geometria não-euclidiana, que desde 1975 vem obtendo avanços significativos em diversos setores do conhecimento. Através deste conjunto, exploraremos conteúdos contemplados no Currículo Nacional de Matemática do Ensino Básico, tais como funções, conjuntos, o conjunto dos números reais, intervalos reais, recorrências, progressões geométricas e noções de limite. Apostamos na ideia de que o uso de processos recursivos infinitos na construção do conjunto de Cantor pode ser desafiador e fascinante para os alunos. Além disso, para um aluno do Ensino Básico, não se fala que os infinitos não são todos iguais, mas recomendamos que ele já tenha acesso a verdade proporcionada por Cantor neste nível de ensino - mesmo que superficialmente, visto que o contato com o infinito pode gerar intrigantes questões.

No primeiro capítulo, apresentamos noções de conjuntos, funções e as definições de conjunto finito e conjunto infinito. O segundo capítulo está destinado à construção do conjunto de Cantor, bem como ao estudo de suas propriedades. Sendo o conjunto de Cantor um fractal, no terceiro capítulo, fazemos uma exposição breve e superficial de outros fractais que são obtidos através de processos recursivos. No último capítulo, algumas propostas didáticas são discutidas.

# 1 Sobre conjuntos e funções

Neste capítulo de caráter preliminar ao estudo do conjunto de Cantor, apresentaremos a linguagem básica de conjuntos e funções nas duas primeiras seções, linguagem essa fundamental para os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Na terceira seção, daremos uma atenção especial aos conjuntos finitos e infinitos.

As principais referências para este capítulo são [4] e [5].

## 1.1 Conjuntos

A noção matemática de *conjunto* é praticamente a mesma que se usa na linguagem corrente: é o mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema. Vejamos alguns exemplos:

1) Conjunto das vogais;

2) Conjunto dos algarismos romanos;

3) Conjunto dos números pares.

Um conjunto é constituído por *elementos*, podendo ainda não possuir elemento algum.
Quando um conjunto não possui elementos, este é chamado de *conjunto vazio* e denotado por $\emptyset$.
Nos exemplos anteriores, os elementos dos conjuntos mencionados são:

1) a, e, i, o, u;

2) I, V, X, L, C, D, M;

3) $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots,$

respectivamente.

Quando um conjunto possui um único exemplo, ele é chamado de *conjunto unitário*.

A relação entre um elemento e um conjunto chama-se *relação de pertinência*, um elemento pode pertencer ou não ao conjunto e apenas uma das alternativas é verdadeira.

Para indicar que $x$ pertence ao conjunto $A$, escrevemos $x \in A$. Para indicar que $x$ não pertence ao conjunto $A$, escrevemos $x \notin A$.

Dois recursos principais para descrever um conjunto e seus elementos são utilizados: ou enumeramos (listamos) os elementos do conjunto ou damos uma propriedade característica dos elementos do conjunto.

• Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, indicamos-o escrevendo seus elementos entre chaves. Retornando aos exemplos acima, temos:

1) Conjunto das vogais: {a, e, i, o, u};

2) Conjunto dos algarismos romanos: {I, V, X, L, C, D, M}.

Esta notação também é empregada quando o conjunto é infinito: escrevemos alguns elementos que evidenciam a lei de formação do conjunto e em seguida colocamos reticências, como no exemplo abaixo:

3) Conjunto dos números primos positivos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$.

• Para descrever um conjunto $A$ através de uma propriedade de característica $P$ de seus elementos $x$, escrevemos

$$A = \{x|\, x \text{ goza da propriedade P}\}$$

e lemos: *$A$ é o conjunto dos elementos $x$ tal que $x$ goza da propriedade $P$.* Vejamos os próximos exemplos:

1) $\{x|\, x \text{ é divisor de } 5\}$ é uma forma de descrever o conjunto $\{-5, -1, 1, 5\}$.

2) $\{x|\, x \ \text{ é inteiro } \text{ e } \ 0 \leq x \leq 200\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 198, 199, 200\}$.

A relação entre conjuntos chama-se *relação de continência.* Para indicar este tipo de relação, utilizamos os símbolos $\subset$ (*está contido*) e $\not\subset$ (*não está contido*).
Escrevemos $A \subset B$, para indicar que um conjunto $A$ está contido num conjunto $B$. Para indicar que um conjunto $A$ não está contido num conjunto $B$, escrevemos $A \not\subset B$. Para que um conjunto esteja contido em outro é necessário que todos os seus elementos pertençam também a esse outro conjunto. Quando $A \subset B$, dizemos que $A$ é um subconjunto de $B$ ou uma parte de $B$. A notação $B \supset A$ para indicar que $A$ é um subconjunto de $B$ também é utilizada e lê-se: $B$ contém $A$.

Para exemplificar a relação de continência, vejamos que o conjunto $V$ das vogais está contido em $A$ o conjunto alfabeto inglês; simbolicamente: $V \subset A$. Lembramos que o conjunto $A$ do alfabeto inglês conta com 26 caracteres, denominados letras, onde 5 dessas letras são vogais e as 21 demais são consoantes.

# Operações entre conjuntos

A *reunião* ou *união* dos conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto $A \cup B$, formado pelos elementos de $A$ mais os elementos de $B$. Portanto, afirmar que $x \in A \cup B$ significa dizer que pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira: $x \in A$ *ou* $x \in B$. Podemos, pois, escrever:

$$A \cup B = \{x | \, x \in A \;\text{ ou }\; x \in B\}.$$

I) Consideremos os conjuntos

$$A = \{x | \, x \text{ é divisor de } 3\}$$

e

$$B = \{x | \, x \text{ é divisor de } 5\}.$$

Então, $A \cup B = \{x | \, x \text{ é divisor de 3 ou } \; x \text{ é divisor de } 5\}$, ou seja, $A \cup B = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$.

A *interseção* dos conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto $A \cap B$, formado pelos elementos comuns a $A$ e $B$. Assim, afirmar que $x \in A \cap B$ significa dizer que se tem, ao mesmo tempo, $x \in A$ *e* $x \in B$. Podemos, portanto, escrever:

$$A \cup B = \{x | \, x \in A \;\text{ e }\; x \in B\}.$$

Considerando $A$ e $B$ como em (I), temos $A \cap B = \{-1, 1\}$.

Pode ocorrer que não exista elemento algum $x$ tal que $x \in A$ e $x \in B$. Neste caso, tem-se $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos $A$ e $B$ são ditos *disjuntos*.

II) Sejam $V$ o conjunto das vogais e $C$ o conjunto das consoantes do alfabeto inglês. É claro que $V \cap C = \emptyset$. Ou seja, $V$ e $C$ são conjuntos disjuntos.

A *diferença* entre os conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto $A - B$, formado pelos elementos de $A$ que não pertencem a $B$. Simbolicamente, temos:

$$A - B = \{x | \, x \in A \;\text{ e }\; x \notin B\}.$$

É importante perceber que não se exige que $B$ esteja contido em $A$ para formar a diferença $A - B$. Quando $A$ e $B$ são disjuntos, nenhum elemento de $A$ pertence a $B$, consequentemente $A - B = A$. Em qualquer caso, temos: $A - B = A - (A \cap B)$.

Quando temos $B \subset A$, a diferença $A - B$ é dita o *complementar de $B$ em relação a $A$* e escrevemos:

$$A - B = \mathcal{C}_A B.$$

Notemos que $x \in \mathcal{C}_A B$ se, e somente se, $x \notin B$.

III) Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq -2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq 1\}$. Então $A - B = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 2\}$ e $B - A = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq -3\}$.

A noção de diferença reduz-se à de complementar, do seguinte modo: dados conjuntos $A$ e $B$, contidos num conjunto fundamental $E$, relativamente ao qual tomamos complementares, temos:

$$A - B = A \cap \mathcal{C}_E B.$$

De fato, $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in \mathcal{C}_E B \Leftrightarrow x \in A \cap \mathcal{C}_E B$.

Sejam A e B conjuntos e dados os objetos $a, b$, pertencentes a A e B, respectivamente, o par ordenado $(a, b)$ fica formado quando se escolhe um desses objetos para ser a primeira coordenada, neste caso $a$, e o objeto $b$ para ser a segunda coordenada do par. Dois pares ordenados $(a, b)$ e $(a', b')$ são iguais quando suas primeiras coordenadas, $a$ e $a'$, são iguais e suas segundas coordenadas, $b$ e $b'$, também. Sendo assim

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ e } b = b'.$$

O *produto cartesiano* dos conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos os pares ordenados $(a, b)$ cuja primeira coordenada pertence a $A$ e a segunda coordenada pertence a $B$. Desse modo:

$$A \times B = \{(a, b) |\, a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

IV) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Então

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

## 1.2 Funções

Uma função $f : A \to B$ consta de três partes: um conjunto $A$, chamado o *domínio* da função, ou o conjunto onde a função está definida, um conjunto $B$, chamado *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma lei que permite associar a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em $x$ (ou no ponto $x$). A lei que permite obter o valor $f(x) \in B$, quando é dado $x \in A$, é arbitrária, porém sujeita a duas condições:

- Não deve haver exceções: a fim de que $f$ tenha o conjunto $A$ como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para todo $x \in A$;

- Não deve haver ambiguidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x) \in B$.

Usamos a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que $f$ faz corresponder a $x$ o valor $f(x)$.

Não se pode confundir $f$ com $f(x)$, pois $f$ é a função, enquanto que $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto $x$ do seu domínio.

Duas funções $f : A \to B$ e $f' : A' \to B'$ são iguais se, e somente se, $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = f'(x)$ para todo $x \in A$. Isto é, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

O *gráfico* da função $f : A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B |\ y = f(x)\}.$$

Uma função $f : A \to B$ é dita *injetiva* (ou *biunívoca*) quando, dados $x, y$ quaisquer em $A$, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras, quando $x \neq y$, em $A$, implica $f(x) \neq f(y)$, em $B$.

Um exemplo simples de função injetiva é a função identidade $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Claramente $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Uma função $f : A \to B$ é dita *sobrejetiva* (ou *sobre* $B$) quando, para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Considerando $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, ou seja, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | \, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$, podemos verificar, facilmente, que a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_* \to \mathbb{Q}$ dada por $f(p, q) = \frac{p}{q}$, para todo $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_*$, é sobrejetiva, onde $\mathbb{Z}_* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Agora, seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida pela lei $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Observemos que $f$ não é injetiva, pois $f(-2) = f(2)$, embora $-2 \neq 2$. Tampouco $f$ é sobrejetiva, afinal não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = -2$, por exemplo. Por outro lado, se considerarmos $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 2x + 1$, então $g$ é injetiva. Com efeito, se $g(x) = g(y)$ então $2x + 1 = 2y + 1$, ou seja, $2x = 2y$, donde $x = y$. Porém, $g$ não é sobrejetiva, pois não existe um inteiro $x$ tal que $2x + 1 = 0$, por exemplo. Finalmente, consideramos $\mathcal{P} = \{2n | \, n \in \mathbb{Z}_*^+\}$ ($\mathcal{P}$ é o conjunto dos números inteiros positivos pares), onde $\mathbb{Z}_*^+ = \{z \in \mathbb{Z} | \, z > 0\}$, e definimos $h : \mathbb{Z}_*^+ \to \mathbb{P}$ pondo $h(2n) = 2n$ e $h(2n - 1) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_*^+$. É fácil ver que $h$ é sobrejetiva, todavia $h$ não é injetiva.

Uma função $f : A \to B$ é dita *bijetiva* (uma *bijeção*, ou uma *correspondência biunívoca*) quando é injetiva e sobrejetiva concomitantemente.

A mais simples das bijeções é a função identidade supramencionada.

Dados uma função $f : A \to B$ e um subconjunto $X \subset A$, chama-se a *imagem* de $X$ pela função $f$ ao conjunto $f(X)$ formado pelos valores $f(x)$ que $f$ assume nos pontos $x \in X$. Em outras palavras:

$$f(X) = \{f(x) | \, x \in X\} = \{y \in B | \, y = f(x), x \in X\}.$$

Evidentemente, $f(X)$ é um subconjunto de $B$. Para que $f : A \to B$ seja sobrejetiva é necessário e suficiente [1] que $f(A) = B$.

## 1.3 Conjuntos Finitos e Infinitos

O infinito revela-se algo inexplicável para muitos. Imaginar que existem diferentes infinitos pode ser uma questão intrigante para um adolescente. Por isso, sugerimos

[1]"é necessário e suficiente" ou "se e somente se" expressam a mesma relação de equivalência e aparecem com frequência no texto. O que a oração declarativa acima quer dizer é: se $f : A \to B$ é sobrejetiva então $f(A) = B$ **e** se $f(A) = B$ então $f : A \to B$ é sobrejetiva. Se o leitor-aluno não tiver acesso a noções básicas de lógica em sua escola, recomendamos que o mesmo consulte a referência [4].

que o professor de Matemática do Ensino Médio conte ao aluno que não há somente um tipo de infinito - descoberta essa que foi feita por Georg Cantor em 1874 - que é possível distinguí-los quanto ao número de elementos, por mais estranho que isso possa parecer, e apresente as noções de conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, mesmo que com pouco rigor matemático, levando em conta o nível básico de ensino. A partir dos conceitos gerais e dos fatos básicos a respeito de conjuntos e funções, vistos nas seções anteriores, o professor de Matemática do Ensino Médio pode, tranquilamente, apresentar as noções de conjunto finito e infinito aos seus alunos.

Nesta seção, apresentaremos as noções de conjunto finito, conjunto infinito enumerável e conjunto infinito não-enumerável. Seremos concisos e não nos ateremos à algumas demonstrações de fatos relevantes. Agindo assim, temos a pretensão de que um aluno do Ensino Médio consiga entender esta seção, bem como todo o trabalho presente. Contudo, quando não demonstrarmos um fato importante, indicaremos uma referência para os leitores interessados.

A noção de conjunto enumerável está estritamente ligada ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Por isso, iniciaremos esta seção fazendo uma breve apresentação da teoria dos números naturais a partir dos axiomas de Peano.

### 1.3.1 Números naturais

A teoria dos números naturais pode ser deduzida dos três axiomas[2] abaixo, conhecidos como axiomas de Peano [3].

São dados, como objetos não-definidos, um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados *números naturais*, e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, valor que a função assume no ponto $n$, é chamado o *sucessor de* $n$.

A função $s$ satisfaz aos seguintes axiomas:

(P1) $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva, ou seja, $m, n \in \mathbb{N}$, $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$. Em palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.

(P2) Existe um único número natural, representado pelo símbolo 1, denominado um, que não é sucessor de nenhum outro número natural. Em outros termos:

$$\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}.$$

(P3) Princípio da Indução: Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

[2] Na lógica tradicional, um *axioma* ou *postulado* é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria.

[3] Giuseppe Peano foi um matemático italiano; nasceu em agosto de 1858 e faleceu em abril de 1932.

O Princípio da Indução pode também ser enunciado da seguinte maneira:

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade relativa a números naturais. Se 1 gozar da propriedade $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural $n$ gozar de $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $n+1$ goza da propriedade $\mathcal{P}$, então todos os números naturais gozam dessa propriedade.

Uma demonstração na qual o axioma $(P3)$ é utilizado, chama-se *demonstração por indução*.

Para ilustrar uma demonstração por indução, mostraremos que $s(n) \neq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $X = \{n \in \mathbb{N} |\, s(n) \neq n\}$. Como 1 não é sucessor de número algum-em particular $1 \neq s(1)$ - tem-se $1 \notin X$. Além disso, se $n \in X$ então $s(n) \neq n$. Pela injetividade de $s$ (axioma $(P1)$), tem-se $s(s(n)) \neq s(n)$. Isto nos mostra que $s(n) \in X$. Assim, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$. Como $1 \in X$, segue do Axioma $(P3)$ que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $n \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Admitamos que, dada $f : X \to X$ uma função cujo domínio e contradomínio são o mesmo conjunto $X$, podemos associar, de modo único, a cada $n \in \mathbb{N}$ uma função $f^n : X \to X$, chamada a $n$-ésima iterada de $f$, de tal maneira que $f^1 = f$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$.

Usando as iteradas da função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiremos a *adição* de números naturais. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sua soma $m + n \in \mathbb{N}$ é definida por:

$$m + n = s^n(m).$$

Ou seja, somar $m$ com 1 é tomar o sucessor de $m$, enquanto que somar $m$ com $n$ é partir de $m$ e iterar $n$ vezes a operação de tomar o sucessor. Em outras palavras, temos, por definição:

$$\begin{aligned} m + 1 &= s(m) \\ m + s(n) &= s(m + n). \end{aligned}$$

Podemos dispensar a notação $s(n)$ para representar o sucessor de $n$ e usar a notação definitiva $n + 1$ para indicar este sucessor.

As propriedades formais da adição estão listadas abaixo:

- *Associatividade:* $(m + n) + p = m + (n + p)$, para $m, n, p \in \mathbb{N}$;
- *Comutatividade:* $m + n = n + m$, para $m, n \in \mathbb{N}$;
- *Lei do Corte:* $m + n = m + p \Rightarrow n = p$, para $m, n, p \in \mathbb{N}$;
- *Tricotomia:* dados $m, n \in \mathbb{N}$, exatamente uma das três alternativas pode ocorrer: ou $m = n$, ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$, ou então existe $q \in \mathbb{N}$ com $n = m + q$.

As demonstrações das propriedades acima são feitas por indução.

A relação de ordem entre os números naturais é definida em termos da adição. Dados os números naturais $m, n$, dizemos que $m$ é *menor do que* $n$ e escrevemos

$$m < n,$$

para significar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Nas mesmas condições, dizemos que $n$ é *maior do que* $m$. A notação $m \leq n$ expressa que $m$ é *menor do que ou igual a* $n$.

A relação de ordem $<$ goza de três propriedades, são elas:

- *Transitividade:* se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$, para $m, n, p \in \mathbb{N}$;
- *Tricotomia:* dados $m, n \in \mathbb{N}$, exatamente uma das três alternativas pode ocorrer: ou $m = n$, ou $m < n$ ou $n < m$.
- *Monotonicidade da adição:* se $m, n \in \mathbb{N}$ são tais que $m < n$ então, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$.

Introduziremos agora a multiplicação de números naturais. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $f_m(p) = p + m$, ou seja, $f_m$ é a função "somar p". Utilizaremos esta função para definir a multiplicação de números naturais.

O produto de dois números naturais é definido da seguinte forma: $m.1 = m$ e $m.(n+1) = (f_m)^n(m)$. Vamos entender melhor esta definição. Pois bem, multiplicar um número $m$ por 1 não o altera. Multiplicar $m$ por um número maior do que 1, ou seja, por um número da forma $n+1$, é iterar $n$-vezes a operação de somar $m$, começando com $m$. Desse modo, por exemplo, $m.2 = f_m(m) = m + m$, $m.3 = (f_m)^2(m) = m + m + m$.

Recordando a definição de $(f_m)^n$, vemos que o produto $m.(n+1)$ está definido indutivamente pelas propriedades a seguir:

$$\begin{aligned} m.1 &= m \\ m.(n+1) &= m.n + m. \end{aligned}$$

As principais propriedades da multiplicação estão listadas abaixo:

- *Associatividade:* $(m.n).p = m.(n.p)$, para $m, n, p \in \mathbb{N}$;
- *Comutatividade:* $m.n = n.m$, para $m, n \in \mathbb{N}$;
- *Lei do Corte:* $m.p = n.p \Rightarrow m = n$, para $m, n, p \in \mathbb{N}$;
- *Distributividade:* $m.(n+p) = m.n + m.p$, para $m, n, p \in \mathbb{N}$;
- *Monotonicidade:* $m < n \Rightarrow m.p < n.p$, para $m, n, p \in \mathbb{N}$.

As demonstrações das propriedades acima são feitas, também, por indução.

### 1.3.2 Conjuntos finitos

Denotaremos por $I_n$ o conjunto dos números naturais de 1 até $n$, ou seja, $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \{p \in \mathbb{N} | \, 1 \leq p \leq n\}.$$

Um conjunto $X$ é dito *finito* quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção

$$\psi : I_n \to X.$$

No primeiro caso, diremos que $X$ tem zero elementos. No segundo caso, diremos que $n \in \mathbb{N}$ é o número de elementos de $X$, isto é, que $X$ possui $n$ elementos.

Os seguintes fatos decorrem das definições:

- cada conjunto $I_n$ é finito e possui $n$ elementos;
- se $f : X \to Y$ é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro também é.

Intuitivamente, uma bijeção $\psi : I_n \to X$ é uma contagem dos elementos de $X$. Pondo $\psi(1) = x_1, \psi(2) = x_2, \ldots, \psi(n) = x_n$, temos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_3\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito.

No primeiro ano do Ensino Médio, os alunos revêem que conjuntos finitos são conjuntos que contêm um número finito de elementos. No entanto, há de se convir que a definição apresentada acima não oferece risco algum de não entendimento por parte dos mesmos, uma vez que eles têm acesso às noções básicas de funções - e isso inclui o conceito de bijeção - no nono ano do Ensino Fundamental. Para que não reste dúvidas, podemos ilustrar a definição acima com o conjunto $V$ das vogais. Vejamos que existe uma bijeção $\psi$ de $I_5$ sobre $V$. Com efeito, basta definir $\psi : I_5 \to V$ pondo $\psi(1) = a, \psi(2) = e, \psi(3) = i, \psi(4) = o, \psi(5) = u$. Logo $V$ é finito e tem 5 elementos.

O número de elementos de um conjunto está bem definido. O resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [5], nos garante este fato.

*"Se existem duas bijeções $\psi : I_n \to X$ e $\phi : I_m \to X$, deve-se ter $m = n$."*

### 1.3.3 Conjuntos Infinitos

*"Tão correto e tão bonito, o infinito é realmente um dos deuses mais lindos." (Legião Urbana)*

Um conjunto é dito *infinito* quando não é finito. Portanto, $X$ é infinito quando não é vazio nem existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \to X$.

O conjunto dos números naturais é infinito. De fato, dada qualquer função $\phi : I_n \to \mathbb{N}$, com $n > 1$, tome

$$p = \phi(1) + \phi(2) + \cdots + \phi(n).$$

Então, $p \in \mathbb{N}$ e $p > \phi(j)$ para todo $j = 1, \cdots, n$. Assim $p \notin \phi(I_n)$ e, portanto, $\phi$ não é sobrejetiva.

Em 1872, o matemático alemão Richard Dedekind caracterizou os conjuntos infinitos da seguinte forma:

*"Um conjunto $X$ é infinito se, se somente se, existe uma bijeção $f : X \to Y$, de $X$ sobre uma parte própria $Y \subset X$."*

Observamos que $Y$ é uma parte própria de $X$ se $Y \subset X$ e $X - Y \neq \emptyset$. Para analisar a demonstração do resultado acima, indicamos que o leitor consulte a referência [5].

Dois anos depois, Georg Cantor mostrou que os infinitos não são todos iguais e os classificou em infinitos enumeráveis e infinitos não-enumeráveis. Veremos, agora, essas duas noções de infinitos diagnosticadas por Cantor.

Um conjunto $X$ é dito *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Neste caso, $f$ chama-se uma *enumeração* dos elementos de $X$. Escrevendo $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2, \ldots, f(n) = x_n, \ldots$, tem-se $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$.

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é infinito enumerável.

Com efeito, a função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2n) = n$ e $\varphi(2n+1) = -n$, para $n \in \mathbb{N}$, é uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Z}$.

Cantor mostrou que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável. Mostrou também que a reunião de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável. Para ver as provas destes resultados, que exigem um pouco mais de estudo, também recomendamos a referência [5].

Um conjunto $X$ é dito *não-enumerável* quando não é enumerável, como a própria nomenclatura já diz. Ou seja, quando é infinito e não existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Deixaremos para exemplificar esse conceito no próximo capítulo. Mas não podemos nos furtar em contar que o conjunto de Cantor, nosso objeto de estudo, é um conjunto não-enumerável.

# 2 O conjunto de Cantor

Neste capítulo, apresentaremos o conjunto de Cantor, também denominado conjunto de Cantor dos terços médios, com a clássica construção de retiradas de terços médios abertos, iniciada no intervalo fechado $[0,1]$.

Em virtude dos pré-requisitos necessários para o entendimento da construção do conjunto de Cantor e das suas propriedades, dedicamos este capítulo aos alunos do Ensino Médio.

As principais referências para este capítulo são [1], [5] e [6].

## 2.1 Preliminares

Nesta seção, exporemos, de forma sucinta, conceitos e fatos de Análise Real, utilizando uma linguagem acessível aos alunos do Ensino Médio.

Com o intuito de exibir, superficialmente, o conjunto dos números reais, apresentaremos a definição de corpo ao aluno do Ensino Médio, no que segue.

Um *corpo* é um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações:

$$\textbf{Adição: } + : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & x+y, \end{array}$$

e

$$\textbf{Multiplicação: } . : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & x.y. \end{array}$$

Os axiomas de corpo são os seguintes:

A. *Axiomas da adição:*

*A1.* *Associatividade:* $(x+y)+z = x+(y+z)$, para $x, y, z \in \mathbb{K}$;

*A2.* *Comutatividade:* $x+y = y+x$, para $x, y \in \mathbb{K}$;

*A3.* *Elemento neutro:* existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x+0 = x$, seja qual for $x \in \mathbb{K}$. O elemento 0 chama-se *zero*.

$A4$. *Simétrico:* todo elemento $x \in \mathbb{K}$ possui um simétrico $(-x) \in \mathbb{K}$, tal que $x + (-x) = 0$.

A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e chamada a *diferença* entre $x$ e $y$. A operação $(x, y) \mapsto x - y$ chama-se *subtração.*

M. *Axiomas da multiplicação:*

$M1$. *Associatividade:* $(x.y).z = x.(y.z)$, para $x, y, z \in \mathbb{K}$;

$M2$. *Comutatividade:* $x.y = y.x$, para $x, y \in \mathbb{K}$;

$M3$. *Elemento neutro:* existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x.1 = x$, seja qual for $x \in \mathbb{K}$. O elemento 1 chama-se *um.*

$M4$. *Inverso multiplicativo:* todo elemento $x \in \mathbb{K}$ tal que $x \neq 0$ possui um inverso $x^{-1}$, tal que $x.x^{-1} = 1$.

Dados $x, y \in \mathbb{K}$, com $y \neq 0$, escreve-se também $\frac{x}{y}$ em vez de $x.y^{-1}$. A operação $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ definida para $x$ qualquer e $y \neq 0$ em $\mathbb{K}$ chama-se *divisão.*

Por fim, as operações de adição e multiplicação num corpo $\mathbb{K}$ acham-se relacionadas por um axioma, com o qual fica completa a definição de corpo.

$D1$. *Axioma da distributividade:* dados $x, y, z$ quaisquer em $\mathbb{K}$, tem-se $x.(y + z) = x.y + x.z$.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo com as operações $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p.q' + p'.q}{q.q'}$ e $\frac{p}{q}.\frac{p'}{q'} = \frac{p.p'}{q.q'}$.

Um *corpo ordenado* é um corpo $\mathbb{K}$ no qual existe um subconjunto $P \subset \mathbb{K}$, chamado o *conjunto dos elementos positivos de* $\mathbb{K}$, com as seguintes propriedades:

$P1$. A soma e o produto de elementos positivos são elementos positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x.y \in P$;

$P2$. Dado $x \in \mathbb{K}$, ocorre somente uma das alternativas seguintes:

$$\text{ou } x = 0, \text{ ou } x \in P, \text{ ou } -x \in P.$$

Assim, sendo $-P = \{x \in \mathbb{K} | -x \in P\}$, temos

$$\mathbb{K} = P \cup (-P) \cup \{0\},$$

onde $P$, $-P$ e $\{0\}$ são subconjuntos de $\mathbb{K}$ disjuntos dois a dois.

Os elementos de $(-P)$ são denominados *negativos.*

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado no qual $P = \left\{\frac{p}{q} | \, p, q \in \mathbb{N}\right\}$.

Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, escreve-se $x < y$ e diz-se que $x$ *é menor do que* $y$ quando $y - x \in P$. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que $y$ *é maior do que* $x$. A notação $x \leq y$ é usada para indicar que uma das alternativas ocorre: ou $y - x \in P$, ou $y - x = 0$. Neste caso, diz-se que $x$ *é menor do que ou igual a* $y$ ou que $y$ *é maior do que ou igual a* $x$.

Num corpo ordenado, existe a importante noção de intervalo.

• **Intervalos limitados**: Dados $a, b \in \mathbb{K}$, $a < b$, definimos os intervalos limitados de extremos $a$ e $b$ como sendo os conjuntos:

∘ *Intervalo fechado*: $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} | \, a \leq x \leq b\}$;

∘ *Intervalo fechado à esquerda*: $[a, b) = \{x \in \mathbb{K} | \, a \leq x < b\}$;

∘ *Intervalo fechado à direita*: $(a, b] = \{x \in \mathbb{K} | \, a < x \leq b\}$;

∘ *Intervalo aberto*: $(a, b) = \{x \in \mathbb{K} | \, a < x < b\}$.

Dizemos que o comprimento de todos os intervalos acima é $b - a$.

• **Intervalos ilimitados**: Dado $a \in \mathbb{K}$, definimos os intervalos ilimitados de origem $a$ como sendo os conjuntos:

∘ *Semirreta esquerda fechada de origem a*: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{K} | \, x \leq a\}$;

∘ *Semirreta esquerda aberta de origem a*: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{K} | \, x < a\}$;

∘ *Semirreta direita fechada de origem a*: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{K} | \, x \geq a\}$;

∘ *Semirreta direita aberta de origem a*: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{K} | \, x > a\}$.

Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, definimos o *valor absoluto* de um elemento $x$, como sendo $x$, se $x \geq 0$ e $-x$ se $x < 0$. Usamos o símbolo $|x|$ para indicar o valor absoluto de $x$. Portanto, dado $x \in \mathbb{K}$, tem-se

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Vejamos, pois, que $|x|$ é o maior dos elementos $x$ e $-x$. Poderíamos então definir

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Para o aluno do Ensino Médio deixamos o exercício de verificar o resultado abaixo: *"Dados $a, x, b \in \mathbb{K}$, tem-se $|x - a| \leq b$ se, e somente se, $a - b \leq x \leq a + b$."*

Um subconjunto $X$ de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito *limitado superiormente* quando existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, tem-se $X \subset (-\infty, b]$. Cada $b \in \mathbb{K}$ com esta propriedade chama-se uma *cota superior* de $X$.

Um subconjunto $X$ de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito *limitado inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, tem-se $X \subset [a, +\infty)$. Cada $a \in \mathbb{K}$ com esta propriedade chama-se uma *cota inferior* de $X$.

Um subconjunto $X$ de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito *limitado* quando é limitado inferior e superiormente, isto é, quando existem $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $X \subset [a, b]$.

Um elemento $b \in \mathbb{K}$ é dito *supremo* do subconjunto $X$ quando $b$ é a **menor** das cotas superiores de $X$ em $\mathbb{K}$.

Um elemento $a \in \mathbb{K}$ é dito *ínfimo* do subconjunto $X$ quando $a$ é a **maior** das cotas inferiores de $X$ em $\mathbb{K}$.

Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito *completo* quando todo subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ não-vazio e limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{K}$.

Adotaremos, neste momento, um axioma fundamental.

**Axioma.** *Existe um corpo ordenado completo chamado o corpo do números reais, denotado por* $\mathbb{R}$.

No que segue, listaremos, literalmente, algumas definições e resultados que serão imprescindíveis para a exibição das surpreendentes propriedades do conjunto de Cantor. Cabe ressaltar que não pretendemos ser rigorosos no tratamento de tais preliminares, visto que o texto está direcionado aos alunos do Ensino Médio. O leitor-professor pode consultar [5] para um estudo mais aprofundado.

**Definição 2.1.** *Uma* sequência *é uma lista ordenada de números reais; os elementos de uma sequência são indexados por números naturais. Mais precisamente, uma sequência de números reais é uma função* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa cada número natural* $n$ *a um número real* $a(n)$. *O valor* $a(n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *é representado por* $a_n$ *e denominado* $n$*-ésimo termo da sequência.*

*Escreveremos* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ , *ou* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *ou simplesmente* $(a_n)$, *para indicar a sequência* $a$.

**Definição 2.2.** *Se dado um número real positivo qualquer* $\epsilon$, *existir um índice da sequência* $(a_n)$ *a partir do qual, a distância entre quaisquer dois termos de* $(a_n)$ *é menor do que* $\epsilon$, *a sequência* $(a_n)$ *será dita* sequência de Cauchy.

O que queremos dizer com a distância entre quaisquer dois termos da sequência na definição acima? A distância entre dois números reais é dada pela função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $d(x, y) = |x - y|$, para $(x, y) \in \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 0\}$.

Para entender melhor a definição anterior, pense que uma sequência é de Cauchy quando, a partir de um índice $n$, todos os termos da sequência ficam bem próximos.

Dado um número real $L$, entende-se por *vizinhança de $L$* qualquer intervalo aberto $(a, b) \in \mathbb{R}$ tal que $L \in (a, b)$.

**Definição 2.3.** *Sejam $L$ um número real e $(a_n)$ uma sequência de números reais. Se para cada vizinhança de $L$ existir um índice da sequência $(a_n)$ a partir do qual, todos os termos de $(a_n)$ estão contidos na vizinhança dada, o número $L$ será dito* limite da sequência $(a_n)$*. Neste caso, dizemos que $(a_n)$* converge *para $L$ e usamos as possíves notações: $a_n \to L$ ou $\lim a_n = L$. Quando uma sequência de números reais converge para algum número real $L$, dizemos que ela é* convergente.

**Teorema 2.1.** *Para que uma sequência de números reais $(a_n)$ seja convergente é necessário e suficiente que $(a_n)$ seja uma sequência de Cauchy.*

Informamos que o teorema acima é uma forma equivalente de dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Se tentarmos somar os termos de uma sequência de números reais $(a_n)$, obteremos uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots \tag{2.1}$$

**Definição 2.4.** *A expressão (2.1) é denominada série infinita ou simplesmente **série** de termo geral $a_n$.*

Representamos uma série também por $\sum a_n$.

Qual é o significado da soma infinita (2.1)? Não faz sentido somar convencionalmente infinitos termos; a fundamentação teórica para tornar aceitável uma soma infinita é o conceito de limite de uma sequência, apresentado acima.

Vamos considerar a sequência formada pelas *somas parciais* ou *reduzidas*, que é definida da seguinte forma:

$$\begin{gathered} s_1 = a_1 \\ s_2 = s_1 + a_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ s_n = s_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{gathered}$$

Estas somas parciais formam uma nova sequência, denotada por $(s_n)$, que pode ou não convergir.

Se existir o limite

$$s = \lim s_n = \lim a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

a série $\sum a_n$ será *convergente* e o limite $s$ será denominado *soma* da série, ou seja, $s = \sum a_n$.

**Teorema 2.2.** *Se* $\sum a_n$ *for uma série convergente, então* $\lim a_n = 0$.

*Demonstração.* Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a n-ésima soma parcial da série $\sum a_n$. Por hipótese, existe $\lim s_n$. Digamos que $\lim s_n = s$. É claro que também devemos ter $\lim s_{n-1} = s$ uma vez que a convergência de uma sequência não é afetada quando retiramos um número finito de termos dela. Portanto,

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

**Exemplo 2.1.** Uma série particularmente importante é a **série geométrica**, também conhecida como *soma infinita de uma progressão geométrica*[1], definida por

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0.$$

Observe que cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por um número real $r$, chamado de *razão*. Se $|r| \geq 1$, o termo geral $s_n$ não convergirá para 0 e, assim, a série geométrica divergirá (veja Teorema 2.2). Agora, note que:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

e

$$r.s_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, encontramos $s_n - r.s_n = a - ar^n$, de onde

$$s_n = \frac{a.(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Se $-1 < r < 1$ então $\lim r^n = 0$ (tente verificar a validade deste limite através da Definição 2.3); assim $\lim s_n = \lim \left( \frac{a.(1 - r^n)}{1 - r} \right) = \frac{a}{1 - r}$. Então, se $|r| < 1$, a série geométrica convergirá e sua soma será $\frac{a}{1 - r}$.

Para futuras referências, vamos considerar o que foi constatado no exemplo acima como um teorema:

[1]Uma sequência de números $(a_n)$ é chamada de *progressão geométrica* (ou simplesmente PG) quando cada termo, a partir do segundo, é obtido pelo produto do anterior com uma constante $r \in \mathbb{R}$. Simbolicamente, uma PG é caracterizada pela relação

$$a_{n+1} = a_n.r, \quad n \geq 1. \tag{2.2}$$

A nomenclatura “progressão geométrica” para sequências que satisfazem (2.2) se justifica pois, em todas estas sequências, cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre seu antecessor e seu sucessor.

**Teorema 2.3.** *A série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$, *será convergente se* $|r| < 1$ *e sua soma será*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

*Se* $|r| \geq 1$, *a série geométrica será divergente.*

Para finalizar esta seção, listaremos mais alguns conceitos e resultados importantes para a seção seguinte.

**Definição 2.5.** *Um subconjunto* $X$ *de* $\mathbb{R}$ *é dito* aberto *se qualquer um de seus pontos pertence a um intervalo aberto contido nele.*

**Definição 2.6.** *Um subconjunto* $X$ *de* $\mathbb{R}$ *é dito* fechado *se, dada qualquer sequência em* $X$, *o limite dela (quando existir) é também um elemento de* $X$.

**Definição 2.7.** *Um ponto* $p$ *de um subconjunto* $X$ *de* $\mathbb{R}$ *é dito* ponto de acumulação *quando existe uma sequência em* $X$, *convergindo para* $p$, *sendo todos os termos da sequência diferentes de* $p$.

**Teorema 2.4.** *A reunião qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

**Teorema 2.5.** *Um conjunto* $X$ *é fechado se, e somente se,* $\mathbb{R} - X$ *é aberto. Ou seja, um conjunto* $X$ *é fechado se, e somente se, seu complementar em* $\mathbb{R}$ *é aberto.*

## 2.2 Definição do conjunto de Cantor

Seja $F_0$ o intervalo $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$. Solicitamos que o leitor focalize sua atenção para a execução dos passos a seguir.

1. Retiremos do intervalo real $[0, 1]$ seu terço médio aberto, ou seja, o intervalo aberto:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

2. Chamemos de $F_1$ a união dos intervalos restantes, ou seja,

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

3. Retiremos de $F_1$ o terço médio de cada um de seus intervalos, ou seja, vamos retirar os seguintes intervalos abertos:
$$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \text{ e } \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

4. Chamemos de $F_2$ a união dos intervalos restantes, ou seja,
$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

5. Retiremos de $F_2$ o terço médio de cada um de seus intervalos, ou seja, vamos retirar os seguintes intervalos abertos:
$$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \text{ e } \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right).$$

6. Chamemos de $F_3$ a união dos intervalos restantes, ou seja,
$$F_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

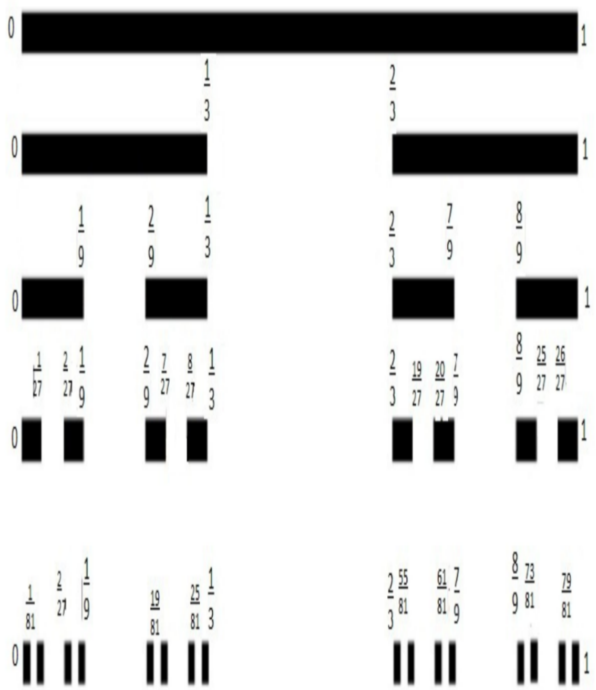
7. Continuando dessa forma, obtemos uma sequência de conjuntos $F_n$, onde:
$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots \tag{2.3}$$

As relações de continência em (2.3) nos dizem que $F_k = \bigcap_{n=1}^{k} F_n$.

**Importante:** $F_n$ é a união de $2^n$ intervalos, cada um de comprimento $\frac{1}{3^n}$.

O conjunto
$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$
é denominado o ***conjunto de Cantor***.

A figura abaixo representa as primeiras etapas da construção do conjunto de Cantor dos terços médios.



Agora, veremos algumas propriedades do conjunto de Cantor $K$.

## $K$ não contém intervalos.

Recordamos que, dado um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, seu comprimento é $b-a$. Portanto, o intervalo $[0,1]$ tem comprimento 1. Lembramos também que um ponto tem comprimento zero.

Vejamos que:

- Na primeira etapa da construção de $K$, retiramos um intervalo de comprimento $\frac{1}{3}$;
- Na segunda etapa da construção de $K$, retiramos dois intervalos de comprimento $\frac{1}{3^2}$;
- Na terceira etapa da construção de $K$, retiramos quatro intervalos de comprimento $\frac{1}{3^3}$.

  Prosseguindo e somando o comprimento do que foi retirado na construção de $K$ em todas as etapas, temos

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots \tag{2.4}$$

  A expressão (2.4) é uma série geométrica ou uma soma infinita de uma progressão geométrica, onde $a = \frac{1}{3}$ e $r = \frac{2}{3}$. Como $r < 1$, pelo Teorema 2.3, concluímos que a soma (2.4) é igual a

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1.$$

O cálculo acima mostra que, do intervalo $[0,1]$, retiramos um subconjunto de comprimento 1. Portanto, o conjunto remanescente $K$ tem comprimento 0. Isto nos diz que $K$ não contém intervalos, pois um intervalo por menor que seja, tem comprimento maior do que zero.

Um aluno do Ensino Médio pode questionar:

*"Ora, visto que $K$ tem comprimento 0, não sobra nada dessas retiradas? $K$ é vazio?!"*

Pedimos à este aluno que tenha calma e se concentre nas próximas observações.

- Em cada etapa da construção de $K$ restam $2^n$ intervalos.
- Todo extremo de intervalo restante em cada etapa pertence a todos $F_n's$ subsequentes, portanto pertence a interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = K$. Logo, $K$ **não é vazio**!

O inesperado está por vir...

- Para cada etapa $n$, existem $2^{n+1}$ extremos; como são infinitas as etapas, o conjunto dos extremos possui uma quantidade infinita de elementos e esse conjunto infinito de extremos está contido em $K$, ou seja, **K é infinito**!
- Todo extremo é um número racional e como $\mathbb{Q}$ é enumerável, segue que o conjunto $E$ dos extremos é infinito enumerável.

## K é fechado.

De fato, o intervalo $[0,1]$ é um conjunto fechado, então o seu complementar em $\mathbb{R}$ é aberto. Na construção de $K$ tudo o que retiramos foram intervalos abertos, daí sabemos que o complementar de $K$ é uma reunião de conjuntos abertos. Como uma reunião qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto (retorne ao Teorema 2.4), o complementar de $K$ em $\mathbb{R}$ é aberto. Portanto, $K$ é um conjunto fechado (veja Teorema 2.5).

## Representação em base 3.

Qualquer elemento de $K$ que seja extremo inferior ($E_i$) de um intervalo restante de uma etapa $n$ pode ser obtido da seguinte forma: partindo do zero soma-se, *ou não*, o dobro do comprimento dos intervalos de cada etapa até a etapa $n$.

Para entendermos melhor o que foi dito acima, vejamos que $8/9$ é um extremo restante da etapa 2, o comprimento dos intervalos da etapa 1 é $1/3$ e o comprimento dos intervalos da etapa 2 é $1/3^2$. Então:

$$\frac{8}{9} = 0 + 2.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2}.$$

Vejamos também que:

$$\frac{8}{27} = 0 + 0.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} + 2.\frac{1}{3^3}$$
$$\frac{26}{27} = 0 + 2.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} + 2.\frac{1}{3^3}$$
$$\frac{74}{81} = 0 + 2.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} + 0.\frac{1}{3^3} + 2.\frac{1}{3^4}$$

Antes de falarmos em representação em base 3, lembraremos a noção de representação em base 10, mais conhecida pelos alunos. Faremos isso, sem rigor, através de um exemplo. Consideremos o número $0,125$. Vejamos que

$$0,125 = 0,1 + 0,02 + 0,005 = 0 + 1.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{100} + 5.\frac{1}{1000} = 0 + 1.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{10^2} + 5.\frac{1}{10^3}.$$

Esta representação é chamada de decimal, ou em base 10. Da mesma forma, podemos representar um número na base 3. Vamos exemplificar:

$$0,125_{(10)} = 0 + 1.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{10^2} + 5.\frac{1}{10^3} \left(= \frac{1}{8}\right)$$
$$0,22_{(3)} = 0 + 2.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} \left(= \frac{8}{9}\right)$$

Ou seja, $0,125_{(10)}$ é o número $1/8$ escrito em base 10 e $0,22_{(3)}$ é o número $8/9$ escrito em base 3. Vamos escrever nossos exemplos anteriores em base 3 para ilustrar.

$$\frac{8}{27} = 0 + 0.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} + 2.\frac{1}{3^3} = 0,022_{(3)}$$
$$\frac{26}{27} = 0 + 2.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} + 2.\frac{1}{3^3} = 0,222_{(3)}$$
$$\frac{74}{81} = 0 + 2.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} + 0.\frac{1}{3^3} + 2.\frac{1}{3^4} = 0,2202_{(3)}.$$

É possível, então, concluir que a representação dos extremos inferiores em base 3 possui apenas dígitos 0 e 2.

Observemos que, qualquer extremo superior ($E_s$) de intervalo restante na etapa $n$ (estamos excluindo o extremo 1) pode ser escrito como um extremo inferior que "surgiu" (apareceu como extremo pela primeira vez) na etapa $n$ menos o comprimento dos intervalos obtidos na etapa $n$. Ou seja:

$$E_s = E_i - \frac{1}{3^n}$$

Para ilustrar - é importante que o leitor tenha a figura 2.2 em mãos para a visualização- vejamos que:

$$\frac{7}{9} = \frac{8}{9} - \frac{1}{3^2}$$
$$\frac{25}{27} = \frac{26}{27} - \frac{1}{3^3}.$$

Escrevendo $E_s$ em base 3, temos:

$$E_s = E_i - \frac{1}{3^n} = 0,a_1a_2\ldots 2 - 0,00\ldots 1 = 0,a_1a_2\ldots 1.$$

Então a representação dos extremos superiores em base 3 possui apenas dígitos 0 e 2 até o penúltimo, somente o último dígito não-nulo pode ser 1 e todos além dele devem ser iguais a zero.

## K é enumerável?

Consideremos o conjunto

$C =$ conjunto dos números reais que tem representação na base 3 só com dígitos 0 e 2, ou se possuir dígito 1, este é único e é o último não-nulo.

Seja $f : \mathbb{N} \to C$ uma função qualquer. Digamos que:

$$f(1) = 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots \in C$$

$$f(2) = 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots \in C$$

$$f(3) = 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots \in C$$

$$f(4) = 0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots \in C$$

$$\vdots$$

$$f(n) = 0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\cdots \in C$$

Seja $c = 0,c_1c_2c_3c_4\cdots \in C$ tal que $c_i \neq a_{ii}$. Notemos que:

$$c \neq f(1), \text{ pois } c_1 \neq a_{11}$$

$$c \neq f(2), \text{ pois } c_2 \neq a_{22}$$

$$c \neq f(3), \ \ \text{pois } c_3 \neq a_{33}$$
$$c \neq f(4), \ \ \text{pois } c_4 \neq a_{44}$$
$$\vdots$$
$$c \neq f(n), \ \ \text{pois } c_n \neq a_{nn},$$

para qualquer $n$ natural.

Ou seja, $c \in C$ e não é imagem pela f de $n \in \mathbb{N}$ algum, portanto $f$ não é sobrejetiva. Conclusão: $C$ é infinito e não existe bijeção alguma de $\mathbb{N}$ sobre $C$. Daí, $C$ é não-enumerável.

Vamos mostrar que $K = C$. Da definição de $K$, temos: $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Se $x \notin K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, então existe um menor número natural $p$ tal que $x \notin F_p$. Então,

$$E_s < x < E_i,$$

onde $E_s$ e $E_i$ surgem em $F_p$. Daí concluímos que

$$0, a_1 a_2 \ldots 1_{(3)} < x < 0, a_1 a_2 \ldots 2_{(3)},$$

ou seja, $x$ é da forma $0, a_1 a_2 \ldots 1 a_{p+1} a_{p+2} \ldots_{(3)}$, com $a_1, \ldots, a_{p-1} = 0$ ou 2 e algum dos $a_{p+k}$ não-nulo. Portanto, $x \notin C$.

O argumento apresentado mostra que $C \subset K$. Com poucas modificações, utilizando argumentos similares, podemos mostrar que $K \subset C$.

Assim $K = C$ e $K$ é não-enumerável.

**Que conclusões podemos tirar do fato acima?**

- Como $K \subset \mathbb{R}$ e $K$ é não-enumerável, então $\mathbb{R}$ é não-enumerável.
- Como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, onde $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números que não são racionais, ou *irracionais* como são denominados, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não-enumerável, já que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Finalizamos este capítulo mostrando que:

## $\frac{1}{4} \in K$!

Consideremos os seguintes extremos do conjunto de Cantor:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{1} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_1$$

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_2$$

$$\frac{7}{27} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_3$$

$$\frac{20}{81} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_4$$

$$\frac{61}{243} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_5$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_n$$

Definimos, assim, a sequência de extremos $(E_n)$ dada por $E_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i}$ para todo $n$.

Sugerimos[2] ao aluno que, com o auxílio de uma calculadora, observe que a partir de um $n$ grande os termos de $(E_n)$ ficam cada vez mais próximos. Isto significa que $(E_n)$ é uma sequência de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é completo, $(E_n)$ converge em $\mathbb{R}$. Mas $(E_n)$ é uma sequência de pontos de $K$ e $K$ é fechado (já vimos esta propriedade), logo o limite de $(E_n)$ pertence a $K$. Ora, quem é o limite da sequência $(E_n)$? $(E_n)$ é uma série geométrica com $a = 1/3$ e $r = -1/3$. Daí,

$$\lim E_n = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{4},$$

de onde $1/4 \in K$.

[2] Ao leitor-professor, sugerimos o procedimento usual para a constatação do fato, utilizando a definição. Veja mais sobre sequências de Cauchy em [5].

# 3 Construindo outros fractais

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e independem de escala. Em muitos casos, um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

O termo foi criado em 1975 por Benoît Mandelbrot, matemático francês nascido na Polônia, a partir do adjetivo latino *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar.

Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda.

O conjunto de Cantor estudado no capítulo anterior é um fractal, obtido por um processo recorrente, e é conhecido como o precursor da geometria fractal.

Neste breve capítulo, vamos apresentar a construção de alguns fractais descobertos pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Tais fractais são obtidos através de sistemas de iteradas, assim como o conjunto de Cantor. Vale salientar que o nosso interesse aqui é apenas apresentar objetos geométricos obtidos por processos recorrentes, como complementação ao entendimento da construção do conjunto de Cantor. Não nos aprofundaremos na teoria de geometria fractal, não estudaremos propriedades dos fractais obtidos e não nos apegaremos a conceitos de geometria plana e geometria espacial. Esperamos que o leitor-aluno tenha os pré-requisitos de geometria necessários para compreender os processos iterativos a serem realizados.

## Carpete de Sierpinski

O Carpete de Sierpinski é um fractal no plano. Para realizar a construção do Carpete de Sierpinski, seguiremos as etapas abaixo:

1ª Etapa: Consideramos um quadrado, dividimos-o em nove novos quadrados congruentes, e eliminamos o central.

2ª Etapa: Nos oito quadrados restantes, repetimos a $1^a$ etapa.

Esse procedimento repetido sucessivamente gera o Carpete de Sierpinski. Para melhor compreender o processo descrito acima, observemos a figura abaixo:

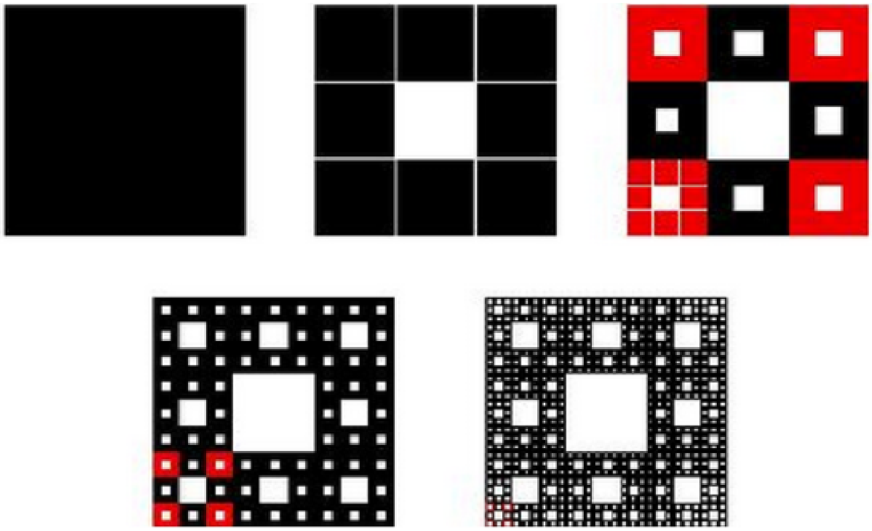


Figura 3.1: O Fractal "Carpete de Sierpinski"

## Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski foi descrito por Waclaw Sierpinski em 1916. Este fractal é obtido de forma similar ao fractal apresentado anteriormente.

Para construirmos o Triângulo de Sierpinski, utilizaremos um processo iterativo seguindo as etapas abaixo:

1ª Etapa: Consideramos inicialmente um triângulo equilátero;

2ª Etapa: Construímos os segmentos determinados pelos pontos médios de cada lado formando quatro triângulos equiláteros;

3ª Etapa: Retiramos o triângulo central;

4ª Etapa: Repetimos em cada um dos triângulos não eliminados as etapas 2 e 3;

5ª Etapa: Repetimos a etapa 4 sucessivamente.

Na figura abaixo, podemos ter uma ideia da figura geométrica limite obtida através desse processo. Esta figura é o Triângulo de Sierpinski.

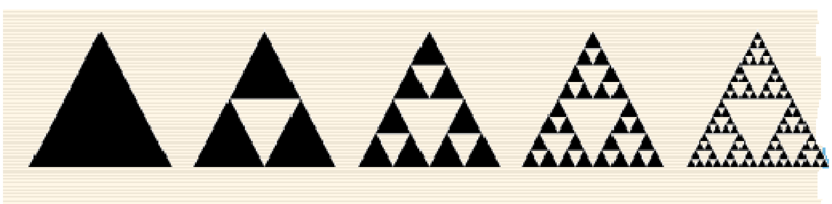


Figura 3.2: O Fractal "Triângulo de Sierpinski"

# Tetraedro de Sierpinski

O Tetraedro de Sierpinski, obtido a partir de um tetraedro regular, é uma variação do Triângulo de Sierpinski no espaço.

Para construirmos o Tetraedro de Sierpinski, também utilizaremos um processo iterativo seguindo as etapas que estão descritas abaixo:

1ª Etapa: Consideramos inicialmente um tetraedro;

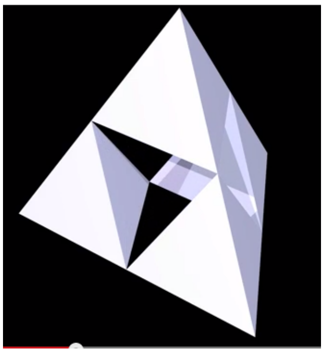
2ª Etapa: A partir dos pontos médios de cada aresta, obtemos cinco novos tetraedros semelhantes ao tetraedro original;

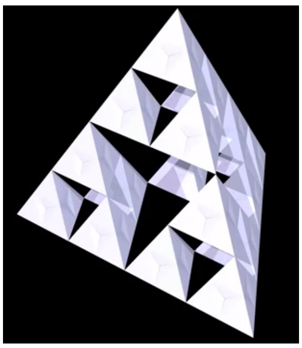
3ª Etapa: Retiramos o tetraedro central;

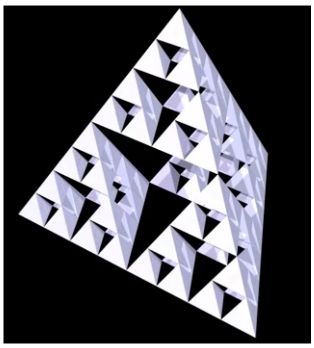
4ª Etapa: Repetimos em cada um dos tetraedros não eliminados as etapas 2 e 3;

5ª Etapa: Repetimos a etapa 4 sucessivamente.

Vejamos as figuras abaixo que descrevem as primeiras etapas:







# 4 Enfoque pedagógico

Vimos que, na construção do conjunto de Cantor, conteúdos presentes nos currículos de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio foram explorados. Para recordarmos, listamos a seguir tais conteúdos.

- Conjuntos: conceitos e operações;
- Funções;
- Números reais;
- Intervalos reais: intervalos fechados e intervalos abertos;
- Sequências, progressões geométricas e somas infinitas de progressões geométricas;
- Noções de limite.

Sabendo que os conteúdos acima são pré-requisitos fundamentais para o estudo do conjunto de Cantor, tal conjunto pode ser apresentado somente aos alunos do Ensino Médio. Acreditamos que as inesperadas propriedades do Conjunto de Cantor sejam atraentes para os jovens alunos e, por isso, recomendados a abordagem deste conjunto nas escolas.

Além de fascinar os alunos com a utilização de processos recursivos infinitos, a apresentação do Conjunto de Cantor fará com que eles revisem conteúdos (os listados acima) de extrema importância na Matemática.

Além da teoria apresentada no presente trabalho, recomendamos também duas atividades com dobraduras de papel, envolvendo fractais vistos. As atividades com dobradura serão expostas abaixo e exigirão conceitos básicos de geometria, que não foram discutidos neste trabalho para não perdermos o foco do mesmo.

## Atividade 1: Triângulo de Sierpinski

Para esta atividade, necessitamos de uma folha - papel sulfite A4. Pedimos a concentração do aluno nas etapas seguintes e já avisamos que algumas se repetirão.

1ª Etapa: Veja a folha como um retângulo e dobre-a ao meio, unindo os lados menores da folha;

Figura 4.1: Etapa 1

2ª Etapa: Dobre a folha ao meio novamente, unindo os lados maiores do retângulo;

3ª Etapa: Dobre a folha ao meio novamente, unindo os lados maiores do retângulo;

Figura 4.2: Etapa 2

Figura 4.3: Etapa 3

4ª Etapa: Dobre a folha ao meio novamente, unindo os lados maiores do retângulo;

5ª Etapa: Abra a folha na primeira dobra, onde ela se dividia em dois retângulos e dobre-a ao meio unindo os lados menores;

Figura 4.4: Etapa 4

Figura 4.5: Etapa 5

6ª Etapa: Dobre a folha ao meio novamente, unindo agora os lados maiores do retângulo;

7ª Etapa: Dobre a folha ao meio novamente, unindo os lados maiores do retângulo;

Figura 4.6: Etapa 6

Figura 4.7: Etapa 7

8ª Etapa: Abra a folha novamente na primeira dobra, e faça um corte do meio do lado maior até o ponto de interseção das supostas diagonais ou os centro dos dois retângulos formados;

9ª Etapa: Os dois retângulos gerados pela primeira dobra apresentam 16 por 4 dobras em seus lados. Abra a folha e coloque-a com os lados maiores na posição horizontal. Considere que a folha foi dividida em 8 retângulos, 4 x 2, enumere os oito retângulos a partir da esquerda para a direita, na parte superior de 1 a 4 e na parte inferior de 5 a 8, dobre os retângulos 6 e 7 para o lado interno da folha em forma de escada com dois degraus;

Figura 4.8: Etapa 8

Figura 4.9: Etapa 9

10ª Etapa: Corte novamente os espelhos da escada da extremidade até a metade do comprimento do degrau anterior e dobre a metade inferior para o lado interno da dobradura;

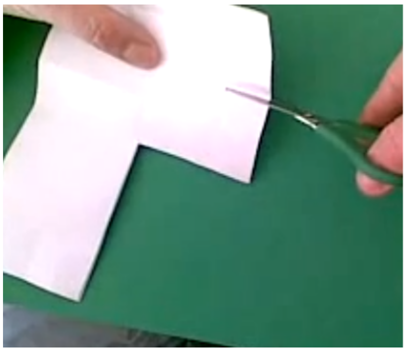


Figura 4.10: Etapa 10

Figura 4.11: Etapa 10

11ª Etapa: Agora a dobradura assume a forma de uma escada com quatro degraus, corte os espelhos novamente até a metade do comprimento do degrau e dobre as metades inferiores para o lado interno da dobradura, agora a escada tem oito degraus;

12ª Etapa: Abrindo a folha, temos um triângulo que subdividido em triângulos menores formam uma figura geométrica, onde os triângulos centrais foram retirados.

Figura 4.12: Etapa 11

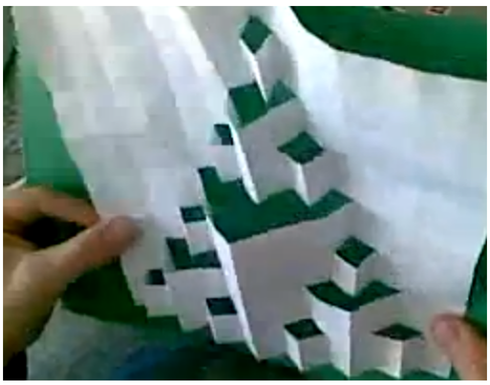


Figura 4.13: Etapa 12

### Questões sobre o Triângulo de Sierpinski:

1. Se considerarmos que o triângulo inicial possui área $x$, cada novo triângulo gerado na primeira iteração terá que área?

2. O que acontece com a área total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê? Justifique com uma soma infinita de uma progressão geométrica, mas antes encontre essa progressão.

## Atividade 2: Carpete de Sierpinski

Utilizando um papel sulfite A4 e o procedimento descrito no capítulo anterior, "construa", através de dobraduras, o Carpete de Sierpinski.

Após a construção, indagamos ao aluno:

1. Quantos quadrados surgem:
    - na iteração zero?
    - na primeira iteração?
    - na segunda iteração?
    - na terceira iteração?
    - na n-ésima iteração?

2. Como podemos saber quantas peças quadradas surgirão após a quinta iteração?

3. Qual é a progressão geométrica das retiradas de quadrados? E a soma infinita dessa progressão, quanto vale?

# Referências


[1] Bartle, R. G.; Sherbert, D.R., *The Elements of Real Analysis*, J .Wiley & Sons, Nova York, 2000.

[2] Boyer, C. B., *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1994.

[3] Devaney, R. L., *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin Cummings, Califórnia, 1986.

[4] Iezzi, G.; Murakami, C., *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1*, Atual Editora Ltda, São Paulo, $3^a$ edição, 1977.

[5] Lima, E. L., *Curso de Análise - Volume 1*, Projeto Euclides, IMPA, $7^a$ edição, 1976.

[6] Royden, H. L., *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.