



Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Centro de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# Área e Volume da Esfera †

por

**Leonardo Andrade Medeiros**

sob orientação do

**Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCET-UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2014

Natal - RN

---

† O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da CAPES.

LEONARDO ANDRADE MEDEIROS

## Área e Volume da Esfera

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Centro de Ciências Exatas e da Terra, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

### Banca Examinadora



---

Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana – UFRN  
Presidente



---

Profa. Dra. Fabiana Tristão de Santana – UFRN



---

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes – UFGO

---

Março de 2014

# Agradecimentos

A Deus, por me confortar nos momentos mais difíceis dessa caminhada e me dar força interior para superar os obstáculos, mostrar os caminhos nas horas incertas e suprir todas as minhas necessidades.

Ao meu pai, irmãos, familiares e amigos, pelo estímulo, pela paciência e apoio incondicional em todos os momentos.

Ao Professor Fagner Lemos de Santana, pela disponibilidade, colaboração, conhecimentos transmitidos e capacidade de estímulo ao longo de todo o trabalho. Obrigado pela oportunidade.

À Coordenadora do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT/CCET-UFRN, Professora Viviane Simioli Medeiros Campos por ter acreditado num sonho que agora é de todos. Com dedicação e competência ela conduziu esse mestrado durante os últimos três anos.

Aos professores do PROFMAT/CCET-UFRN que desempenharam com dedicação as aulas ministradas.

À professora Nathalie Braga, pela amizade e disponibilidade que sempre demonstrou, pelas correções ortográficas, pelas ajudas na leitura do trabalho, pelas boas sugestões e pelo rigor científico que lhe é característico e que em muito veio enriquecer o trabalho.

Ao meu grande amigo Emanuel Gomes pela colaboração na pesquisa desse trabalho e por sempre acreditar em mim e me incentivar pois sabia que eu iria conseguir alcançar esse objetivo.

Ao sempre prestativo e amigo Francisco Aldrin Rufino Armstrong, pela ajuda no LATEX e na elaboração da apresentação deste trabalho. Obrigado por sempre ter me atendido quando eu precisei.

Aos meus amigos do IFRN e PROFMAT/UFRN-UFPB-UFERSA, Sandro Go-deiro, Thiago Valentim, Fellipe Arrais, Luciano Nóbrega, Nilson Hermínio, Gilberto

Fernandes, Jorge Pontes e Antônio Roberto, pelo companheirismo, amizade e estudos durante os últimos anos.

Ao Professor Maxymme Melo, pela correção do ABSTRACT deste trabalho.

Aos meus alunos da Licenciatura em Matemática do IFRN/Natal-Central pelo apoio em sala de aula.

Ao professor Carlos Alexandre Gomes, pelas aulas ministradas, pela disponibilidade e colaboração, que foram fundamentais para o trabalho.

Dedico este trabalho a minha magnífica mãe e a minha guerreira esposa que sempre acreditaram e me incentivaram para que tudo isso fosse realizado e para que não desistisse em nenhum momento. Amo vocês. Obrigado.

# Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre o ensino das fórmulas para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica. Sobre este tema, foi feita uma pesquisa de caráter quanti-qualitativo com o objetivo de identificar de que forma estes temas são abordados. Para isso, fizemos 14 perguntas a 30 professores de Natal e os resultados desta pesquisa são apresentados e discutidos. Depois disso, apresentamos formas alternativas de deduzir as fórmulas do volume de uma esfera e da área de uma superfície esférica.

**Palavras chave:** Geometria Espacial. Áreas. Volumes. Esfera. Ensino Médio.

# Abstract

In this dissertation, we present a study on the teaching of volume of the sphere and the area of spherical surface. On this topic, a quali-quantitative was taken survey with the objective of identifying how these topics are addressed. For this, we made 14 questions to 30 teachers of Natal and the results of this survey are presented and discussed. After that, we present alternative ways to derive the formulas of the volume of a sphere and the are of a spherical surface.

**Keywords:** Spatial Geometry. Sphere Area. Volume. High School.

# Sumário

Dedicatã <sup>3</sup> ria	v
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Pesquisa: Como os professores abordam melhor o volume e a área da esfera em sala de aula?</b>	<b>3</b>
2.1 Dados da Pesquisa . . . . .	3
2.1.1 Apresentação de Dados e Análise de Resultados . . . . .	6
<b>3 Aspectos Históricos da Geometria e Conceitos Geométricos</b>	<b>12</b>
3.1 Aspectos Históricos da Geometria . . . . .	12
3.2 A Noção Intuitiva de Volume . . . . .	16
3.3 O conceito de volume . . . . .	16
3.4 O volume da esfera segundo o Princípio de Cavalieri . . . . .	20
<b>4 Áreas e Volumes Usando Aproximações</b>	<b>24</b>
4.1 Volume da esfera através de aproximações por cilindros . . . . .	24
4.2 Área da superfície esférica através de aproximações por retângulos . .	37
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>43</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho abordamos o ensino de áreas e volumes da esfera no ensino médio. O principal ponto é apresentar maneiras de deduzir as respectivas fórmulas que possam ser trabalhadas em sala de aula.

No segundo capítulo serão mostrados e discutidos os resultados de uma pesquisa aplicada com professores de Matemática do Ensino Médio de Natal acerca de como é feita a abordagem do cálculo de área e volume da esfera em sala de aula. Destacamos a importância de nos familiarizarmos com as figuras geométricas, pois o desenvolvimento dessas percepções e habilidades de identificarmos as figuras são essenciais em diversas situações escolares e do cotidiano, nos auxiliando assim a aprender o significado e as funções do ensino da geometria. O uso de material concreto também é de suma relevância, pois possibilita aos alunos relacionar conteúdos trabalhados em sala de aula com a sua vivência social. Por fim, mostraremos que atualmente as demonstrações matemáticas muitas vezes estão sendo deixadas de lado, o que nos faz pensar que muitos professores não buscam alternativas para facilitar a compreensão dos alunos e simplesmente “jogam” as fórmulas em sala de aula.

No terceiro capítulo, inicialmente relatamos alguns aspectos históricos da geometria, com destaque para a geometria dos egípcios e dos gregos. Buscamos definir um conceito mais concreto para volume de um sólido qualquer sendo ele regular ou não, a partir de aproximações por falta de poliedros regulares ou por cilindros. Em seguida, mostramos que para medir uma grandeza qualquer sempre devemos comparar com outra conhecida e considerada como unidade que serve de referência para tal medição. Com isso, apresentaremos uma noção intuitiva de volume. Por fim, usamos o Princípio de Cavalieri para deduzir a fórmula do volume da esfera.

---

Esta dedução usando Cavalieri é a mais usada no Ensino Médio.

No quarto capítulo, a fim de que possamos aplicar as demonstrações no Ensino Médio, descreveremos inicialmente alguns conceitos fundamentais para o entendimento do cálculo da fórmula do volume da esfera. Em seguida, mostraremos uma maneira interessante (e diferente) de obter a fórmula para o volume da esfera. Esta forma de obter a fórmula usa cortes transversais em uma semi-esfera, os quais determinam cilindros inscritos na esfera. Depois, usamos os volumes destes cilindros inscritos como uma aproximação para o volume da esfera. Esta idéia de aproximação pode ser vista como um primeiro contato do aluno com a idéia intuitiva de limite, conceito somente visto nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Depois, usando também a idéia de aproximações, fazemos a dedução da fórmula para área da superfície esférica.

## Capítulo 2

# Pesquisa: Como os professores abordam melhor o volume e a área da esfera em sala de aula?

### 2.1 Dados da Pesquisa

Neste capítulo, a pesquisa quanti-qualitativa, fundamentada em um questionário composto de questões objetivas e subjetivas, traçou o perfil de 30 entrevistados e identificou como são abordados o volume e a área da esfera no contexto educacional na percepção desses professores. A pesquisa tem como objetivo analisar como é realizada a abordagem e quais os métodos utilizados pelos professores nessa abordagem. O questionário composto por 14 questões, foi dividido em três partes: dados pessoais, formação acadêmica e experiência docente. Ele foi aplicado entre novembro e dezembro de 2013 com 30 professores entrevistados(PE)em Natal, a três categorias: Rede Pública Federal, Rede Pública Estadual e Rede Privada, sendo o número de professores entrevistados divididos em partes iguais para cada um desses setores. A seguir, temos o questionário.

As questões de 01 a 07 referem-se à caracterização dos professores, as questões de 08 a 13 fazem a análise propriamente dita e a questão 14 elucida as dificuldades dos professores na abordagem deste tema no ensino de matemática.

#### *I* - DADOS PESSOAIS

01- Sexo:

Masculino

Feminino

02 - Faixa etária

20 a 30 anos

30 a 40 anos

40 a 50 anos

50 ou mais

## II - FORMAÇÃO ACADÊMICA

03 - Grau de escolaridade:

Graduação

Especialização

Mestrado

Doutorado

Área de especialização:

04 - Término da graduação:

0 a 10 anos

10 a 20 anos

20 a 30 anos

30 ou mais

## III - EXPERIÊNCIA DOCENTE

05 - Tempo de atuação em sala de aula:

0 a 5 anos

5 a 10 anos

10 a 15 anos

Mais de 15 anos

06 - A sua atuação é na:

Rede Pública Federal

Rede Pública Estadual

Rede Particular

07 - Você já deu aula sobre volume e área da esfera?

Sim

Não

Caso tenha respondido “sim” na questão anterior, responda as perguntas que seguem. Caso tenha respondido “não”, pule para a questão 14.

Em relação ao ensino da área e do volume da esfera:

08 - Você já fez uso do Princípio de Cavalieri?

Sim

Não

09 - Você faz uso de material concreto nas suas aulas?

Sim

Não

10 - Caso tenha respondido sim, que tipo de material você utiliza?

11 - Você faz uso somente das fórmulas  $A = 4\pi r^2$  e  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$  e resolve problemas da aplicação das fórmulas?

Sim

Não

Caso tenha respondido não, qual o outro método?

12 - Você já foi questionado sobre a origem das fórmulas?

Sim

Não

Caso tenha respondido sim, que tipo de questionamento?

13 - Você já tentou demonstrar as fórmulas através de aproximações por retângulos, no caso de áreas, e por cilindros, para o cálculo de volumes?

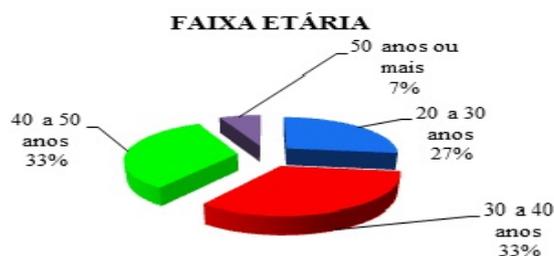
( ) Sim

( ) Não

14 - Em poucas linhas, aponte quais as principais dificuldades de ensinar Geometria Espacial, especificamente esferas.

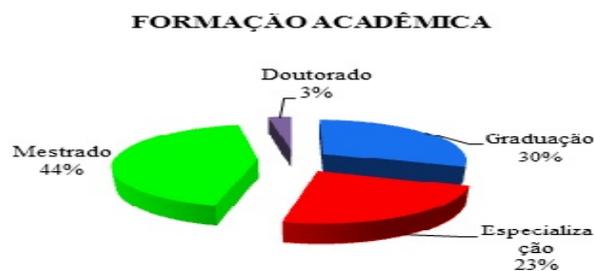
### 2.1.1 Apresentação de Dados e Análise de Resultados

No gráfico abaixo, apresentamos a faixa etária dos professores entrevistados.



Podemos perceber, analisando o gráfico, que muitos professores estão iniciando a carreira docente bem cedo.

No próximo gráfico, observamos a qualificação profissional dos professores.



Notemos que, de acordo com a pesquisa, 70% dos pesquisados já são pós-graduados, pois a maioria busca tornar-se profissional mais qualificado, devido ao interesse pela pesquisa, pela motivação de estudar e de estar sempre produzindo cientificamente.

Analisando a seguir o tempo desde a conclusão da graduação, obtivemos os seguintes dados:



Esses percentuais demonstram que a maioria dos professores, 43% deles, está abaixo de 10 anos de conclusão do curso, o que permite entender que a prática e a experiência de sala de aula ainda encontram-se em consolidação.

Quanto a qualificação na área de Matemática e afins, consideremos o gráfico abaixo:



No tocante ao tempo de atuação em sala de aula, verificamos o gráfico a seguir:





Consideramos a importância da abordagem geométrica em sala de aula e concordamos com [20], ao afirmar que a familiarização com as figuras geométricas e o desenvolvimento de habilidades ligadas à percepção espacial são essenciais em várias situações escolares, no dia a dia das pessoas e no exercício das mais variadas profissões. O conhecimento geométrico pode ser caracterizado pelo exercício de habilidades que configuram uma estrutura comportamental a partir da qual se pode apreender o significado e as funções do ensino da geometria.

De acordo com a pesquisa, a utilização do Princípio de Cavalieri para a demonstração de fórmulas para volumes de sólidos geométricos é constatada pelo gráfico abaixo.



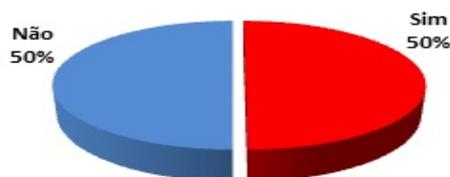
Na questão sobre o uso do Princípio de Cavalieri, 63% dos professores afirmam já terem abordado este princípio e 37% disseram não ter feito uso dele. É oportuno assinalar que o Princípio de Cavalieri é um resultado importante e bastante utilizado para explicitar intuitivamente, de forma clara e simples, as fórmulas das áreas e volumes.

Em [23], o autor assinala que o Princípio de Cavalieri é essencial, tanto para calcular áreas quanto para calcular volumes. Em relação ao cálculo de volumes, o

Princípio tem sido bem mais utilizado por permitir a obtenção de fórmulas para calcular volumes de sólidos de uma maneira mais intuitiva.

O gráfico a seguir diz respeito ao uso de materiais concretos.

**USO DE MATERIAL CONCRETO**

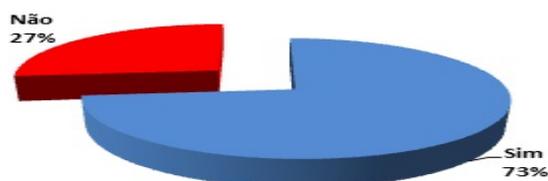


Constata-se na apresentação dos percentuais que metade dos professores de matemática não dinamizam o ensino da disciplina através da inserção de matérias concretos no espaço acadêmico, assim não correlacionam a aprendizagem de Geometria Espacial com a vivência social dos alunos.

Sobre essa necessidade, [22] frisa que o ensino de Geometria Espacial através da manipulação de materiais concretos na sala de aula possibilita aos alunos identificarem a relação entre o conteúdo trabalhado e os problemas do cotidiano.

Quanto a importância de se usar as fórmulas ou não, analisamos a figura a seguir.

**USO SOMENTE DAS FÓRMULAS**



No questionamento sobre o uso somente das fórmulas  $A = \pi r^2$  e  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$  e resolução dos problemas através das aplicações, 73% dos entrevistados afirmaram que apenas as utilizam. Já 27% dos entrevistados disseram que utilizam, além das referidas fórmulas, outros métodos para resolver problemas, como o princípio de Cavalieri e uso de material concreto.

O parágrafo anterior reflete a realidade que o ensino de matemática tem enfrentado hoje, em que as demonstrações e justificativas de fórmulas matemáticas vêm sendo, muitas vezes, deixadas de lado. Sobre a relevância da demonstração, [1] pontua que a não apresentação de uma demonstração priva o aluno de um convencimento próprio a respeito da veracidade de uma afirmação.

É importante refletir que o uso dessas fórmulas, segundo os professores entrevistados, propõe facilitar o ensino de Geometria Espacial através de memorizações simples, bem como proporcionar uma aprendizagem mais fácil pelos alunos.

Outro questionamento foi feito em relação à origem das fórmulas.



De acordo com a figura acima, 40% dos entrevistados responderam que já tinham sido questionados sobre sua origem e 60% responderam que não.

No que se refere às demonstrações das fórmulas por aproximações, temos:



Essas respostas mostram que a maioria dos entrevistados não costuma realizar demonstrações das fórmulas por aproximações, o que permite compreender que outras possibilidades para facilitar as apresentações e demonstrações das fórmulas nem sempre são buscadas.

Na questão subjetiva, foi questionado aos professores sobre as principais dificuldades no ensino de Geometria Espacial, em específico sobre esferas. Os professores apontaram algumas dificuldades relevantes, conforme pode ser visto na transcrição abaixo.

“Uma das grandes dificuldades em se ensinar geometria espacial é fazer a representação de figuras espaciais no plano” (PE03).

Em outra afirmação, o PE 06 assim se posiciona:

“A insegurança dos alunos com relação aos conhecimentos de geometria plana euclidiana, a grande dificuldades de abstração e visualização tridimensional são aspectos que dificultam um melhor ensino-aprendizagem de esferas.”

Outro professor, de maneira mais contundente, afirma:

“As principais dificuldades que encontro nas minhas aulas são: demonstração da fórmula da área da superfície esférica por meio de ferramentas matemáticas vistas no ensino médio e o entendimento dos alunos nas multiplicações e divisões de números decimais (aproximação de  $\pi$ ), e no cálculo de raízes cúbicas quando as questões fornecem o volume.” (PE 18)

Todas as dificuldades apontadas pelos professores entrevistados denotam a necessidade de ensinar a geometria de uma forma mais simples e acessível ao entendimento do aluno.

Assim, diante dos resultados apontados na pesquisa, oportunamente pode-se utilizar as resoluções matemáticas para a Geometria Espacial, estruturadas na proposta desse estudo como um caminho possível e viável para o professor justificar e simplificar o ensino de área e volume da esfera em sala de aula.

A alternativa resolutiva é composta de conceitos e demonstrações que são nortes facilitadores para uma aprendizagem significativa dos alunos, principalmente com possibilidades de fórmulas para os cálculos através de aproximações por retângulos e cilindros para as áreas e volumes, respectivamente.

No capítulo a seguir, serão apresentados a noção intuitiva de volume e a definição de volume.

## Capítulo 3

# Aspectos Históricos da Geometria e Conceitos Geométricos

Nesse capítulo, apresentaremos alguns relatos da origem da Geometria, desde a pré-história até a civilização grega. Abordaremos, especialmente, a geometria da esfera.

### 3.1 Aspectos Históricos da Geometria

É difícil identificarmos o marco inicial do surgimento da geometria, uma vez que há teorias diversas sobre isso. Segundo [7], a necessidade do homem e as observações do cotidiano os fizeram capazes de reconhecer formas e figuras, dentre elas, destacamos os sólidos. De acordo com [3], a origem da geometria deu-se na época pré-histórica, com a análise de objetos da época. A partir de então, foram desenvolvidas as habilidades de reconhecer formas, desenhos e figuras simétricas.

Na civilização egípcia, destacam-se dois precursores: Aristóteles, que afirmava que a origem dela se deu por uma classe social soberana que dedicava todo o seu tempo aos estudos e ao lazer; e Heródoto, que afirmava que a origem da ciência se deu por intermédio das medidas de terras demarcadas devido às enchentes do rio Nilo.

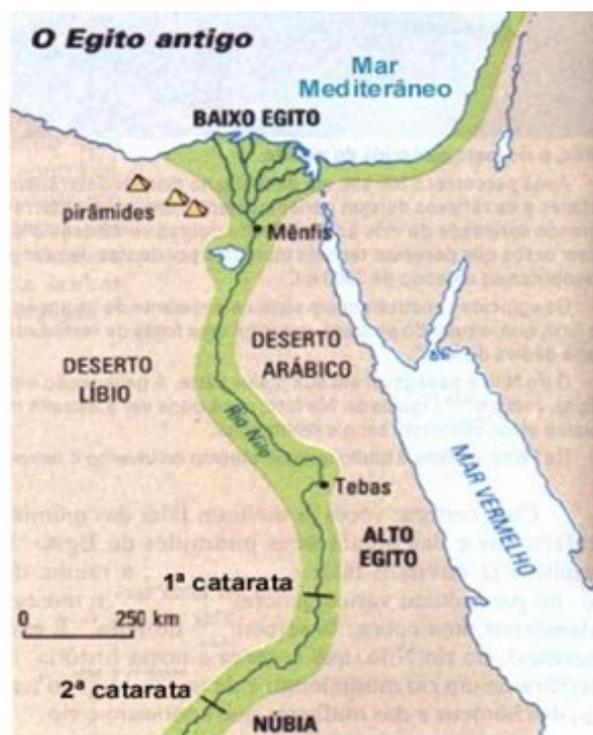


Figura 3.1: Egito Antigo

Disponível em:

<<http://profhugoleonardo.blogspot.com.br/2011/02/egito-antigo.html>>

Acesso em: 20 de Janeiro de 2014.

A civilização egípcia sempre teve a sua vida ligada às do rio Nilo e aos seus períodos de cheia. Por suas terras serem férteis tornou-se possível o desenvolvimento da agricultura e da economia. Segundo [3], na geometria egípcia ganham papel de destaque os papiros, documentos que continham todas as informações da matemática egípcia da época. O Papiro de Rhind e o Papiro de Moscou, os principais da geometria egípcia possuem vários problemas práticos, com ênfase para o problema do cálculo do volume de um sólido, no caso, de uma pirâmide. Não podemos deixar de mencionar que os egípcios também sabiam fazer cálculos sobre áreas e volumes de sólidos.

De acordo com estudos, para a civilização babilônica, a geometria originou-se do cálculo de comprimentos, áreas e volumes. Nessa civilização, destacam-se as tabletas, que são tábuas em escritas cuneiformes, feitas de argilas e barro, e que

continham diversas informações matemáticas da época. A tableta de Plimpton 322, apresentada abaixo, é a mais famosa e contém os ternos pitagóricos que são formados por três números naturais  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que  $a^2 + b^2 = c^2$ . O nome originou-se do teorema de Pitágoras que afirma que se as medidas dos lados de um triângulo retângulo são números inteiros, então são um terno pitagórico.



Figura 3.2: Plimpton 322

Disponível em:

<http://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/>

Acesso em : 20 de Janeiro de 2014.

Segundo [3], a civilização babilônica sabia calcular o volume de diversos sólidos, como cones, cilindros e esferas em situações de demarcações de terras.

As civilizações egípcia e babilônica, além de outras, beneficiaram a civilização grega, que antes se baseava no cálculo de medidas, mas com o tempo passou a dedicar-se mais às demonstrações e conceitos precisos.

Entre as várias obras escritas pelos gregos, mereceu destaque Elementos, de Euclides. A obra, que foi bastante usada pelos matemáticos vindouros, é composta de 13 volumes e descreve a matemática e a geometria de uma forma mais organizada. No Livro *XII*, Euclides já calculava volumes de cilindros, cones e pirâmides, mas não chegou a fórmula matemática do volume da esfera, apesar de em sua outra obra, Lugares na Superfície, ele descrever os primeiros conceitos da geometria esférica.

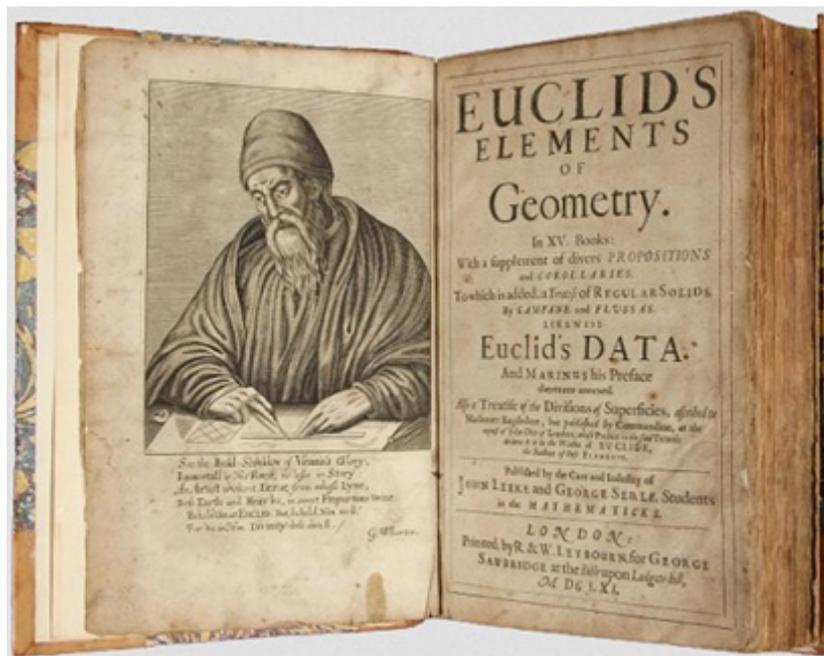


Figura 3.3: Elementos de Euclides

Disponível em: <<http://alguimaraes.wordpress.com/2013/08/13/os-postulados-de-euclides-ideias-geniais-02/>>

Acesso em: 20 de Janeiro de 2014.

Os fatos da época relatam que Euclides já usava o método da exaustão de Arquimedes (287 a.C a 212 a.C) para desenvolver uma fórmula para o volume da esfera, que é dada por  $V = cR^3$ , em que  $c$  é uma constante e  $R$  é o raio da esfera. Euclides não conseguiu encontrar o valor dessa constante, mas Arquimedes chegou a conclusão para o valor da constante como sendo  $\frac{4\pi}{3}$ .

Arquimedes, que surgiu logo após a morte de Euclides, foi outro geômetra grego de destaque e foi o primeiro que provou que a área de uma esfera é quatro vezes a área de um círculo máximo da mesma. Segundo [3], na obra Sobre a Esfera e Cilindro, o geômetra cita pela primeira vez a fórmula para o volume de uma esfera, afirmando que "toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera".

## 3.2 A Noção Intuitiva de Volume

Neste tópico, apresentaremos um significado mais preciso para o conceito de volume, com o intuito de definir, claramente, o volume de um sólido  $S$  qualquer.

A primeira ideia que temos sobre volume é a sua noção intuitiva, ou seja, a quantidade de espaço por ele ocupado. Como queremos medir uma grandeza qualquer, no caso, o volume, devemos compará-la com uma unidade de volume padrão que nos sirva de referência, por exemplo o cubo unitário, cuja aresta mede uma unidade de comprimento e seu volume mede 1. Assim, o resultado dessa comparação fornecerá a medida do volume de um sólido  $S$  qualquer.

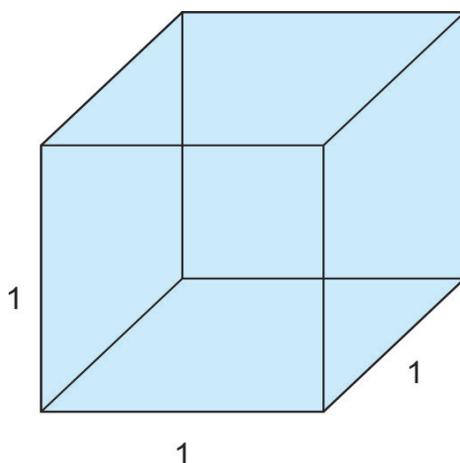


Figura 3.4: Cubo unitário

O volume do sólido  $S$  será dado pelo número que indique a quantidade de cubos unitários que cabem em  $S$ , pois a soma dos volumes dos cubos unitários nos daria o volume do sólido  $S$ .

## 3.3 O conceito de volume

Um poliedro retangular, é o sólido limitado por seis faces retangulares cujos lados são as arestas do poliedro. O poliedro fica determinado quando conhecemos as suas três arestas concorrentes a um mesmo ponto. O cubo é um poliedro retangular cujas arestas possuem a mesma medida e todas as faces são quadradas.

Usando o conceito intuitivo de volume, vamos demonstrar o resultado abaixo.

**Teorema 1** *O volume de um cubo de aresta  $n$  é  $V = n^3$ .*

**Demonstração:** Vamos considerar os casos em que a medida da aresta  $n$  é inteira, racional e irracional.

De fato, se temos um cubo  $A$  cuja aresta mede  $n$  unidades, sendo  $n$  um número inteiro positivo, podemos decompor o cubo em  $n^3$  cubos unitários justapostos. Assim, o seu volume será  $V = n^3$ .

Note agora que, se  $n$  for um número racional da forma  $\frac{1}{q}$ , onde  $q$  é um número inteiro positivo, decompondo as arestas do cubo unitário em  $q$  partes iguais, ele fica dividido em  $q^3$  cubos menores de aresta  $\frac{1}{q}$ . Dessa forma, temos

$$V_{\text{cubo unitário}} = 1 = q^3 \cdot V_{\text{cubo menor}} \Rightarrow V_{\text{cubo menor}} = \frac{1}{q^3} = \left(\frac{1}{q}\right)^3$$

Portanto, o volume do cubo de aresta  $\frac{1}{q}$  é  $\left(\frac{1}{q}\right)^3$ .

Quando dado um cubo cuja aresta é o número racional  $n$  da forma  $n = \frac{p}{q}$ , podemos decompor cada uma de suas arestas em  $p$  partes iguais, cada uma delas com comprimento  $\frac{1}{q}$ . Deste modo, o cubo ficará dividido em  $p^3$  cubos justapostos, cada um com aresta  $\frac{1}{q}$  e, por conseguinte, cada volume dos cubos menores é  $\frac{1}{q^3}$ .

$$V_{\text{cubo}} = p^3 \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{p^3}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3$$

Portanto, se a aresta de um cubo tem como medida um número racional  $n$ , então o seu volume é igual a  $n^3$ .

Sob o ponto de vista teórico, podemos encontrar um número irracional, por exemplo, na diagonal de um quadrado de lado 1. Porém, do ponto de vista prático, não é possível obter um número irracional como medida da aresta de um cubo qualquer que seja o instrumento de medição, mas sempre conseguiremos obter valores aproximados a irracionais.

Observe agora que se  $n$  é um número irracional, vamos provar que o volume de um cubo de aresta  $n$  é dado por  $V = n^3$ .

Tome qualquer número  $x < n^3$ . Existe um número racional  $r < n$  tão próximo de  $n$  quanto desejamos, ou seja  $x < r^3 < n^3$ .

Desta maneira, o cubo  $A$ , cuja aresta é  $n$ , contém um cubo  $B$ , cuja aresta é o número racional  $r$ , então,  $V_B < V_A$ . Mas como o volume de  $B$  é  $r^3$ , pois  $r$  é racional, concluimos que  $x < V_A$ .

De modo análogo, tome qualquer  $y > n^3$ . Existe um  $s$  racional, sendo  $s > n$ , tão próximos de  $n$  quanto desejamos, de tal forma que  $n^3 < s^3 < y$ .

Então, um cubo  $C$  cuja aresta é  $s$  racional contém o cubo de aresta  $n$  e assim  $V_A < V_C < y$ . Logo,  $V_A < y$ .

De fato, se  $x$  e  $y$  são números reais quaisquer, tais que  $x < n^3 < y$ , temos  $x < V_A < y$ . Suponha que  $V_A \neq n^3$ , digamos  $V_A > n^3$ . Dessa forma, seria possível encontrar  $x$ ,  $y$  com  $x < n^3 < y < V_A$  o que contradiz o que acabamos de provar. Logo devemos ter  $V_A = n^3$ . De modo análogo, suponha que  $V_A \neq n^3$ , digamos  $V_A < n^3$ . Assim, seria possível determinar valores para  $x$ ,  $y$  com  $x > n^3 > y > V_A$  o que diverge do que acabamos de provar. Portanto devemos ter  $V_A = n^3$ . ■

**Teorema 2** *O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões reais  $x$ ,  $y$  e  $z$  é  $V = xyz$ .*

**Demonstração:** Considere um paralelepípedo cujas dimensões sejam os números racionais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Podemos sempre escrever os números em um mesmo denominador e, portanto, tais dimensões são representadas, respectivamente por  $\frac{x}{q}$ ,  $\frac{y}{q}$  e  $\frac{z}{q}$ , em que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $q$  são números inteiros positivos.

Ao decompor as arestas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  em, respectivamente,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , segmentos de comprimentos  $\frac{1}{q}$  cada, o poliedro retangular ficará dividido em  $abc$  cubos justapostos de arestas  $\frac{1}{q}$  e volumes  $\frac{1}{q^3}$  cada. Logo,

$$V_{\text{paralelepípedo}} = abc \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^3 = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{q}$$

Portanto, podemos dizer que o volume de um paralelepípedo de dimensões racionais  $x$ ,  $y$  e  $z$  é dado pelo produto de suas dimensões, ou seja,  $V = xyz$ .

Consideremos agora um paralelepípedo  $P$  cujas dimensões são números  $x$ ,  $y$  e  $z$ , em que pelo menos uma de suas dimensões seja irracional. Nesse caso, o volume também será dado pelo produto de suas dimensões.

Tome um  $c$  qualquer de tal maneira que  $c < xyz$ . Então, conseguiremos encontrar números racionais  $r$ ,  $s$  e  $t$ , de modo que  $r < x$ ,  $s < y$  e  $t < z$  tão próximos quanto queremos de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , de tal forma que  $c < rst < xyz$ . De fato, o paralelepípedo  $P$  contém um paralelepípedo  $T_1$  menor, cujas arestas medem  $r$ ,  $s$  e  $t$ . Logo,  $V_P > V_{T_1} = rst \Rightarrow c$ , ou  $V_P > c$ .

Usando o mesmo raciocínio, tomamos um  $d$  qualquer, tal que  $d > xyz$ . Podemos encontrar números racionais  $u$ ,  $v$  e  $w$  tais que  $u > x$ ,  $v > y$  e  $w > z$ , tão próximos de  $x$ ,  $y$  e  $z$  quanto desejarmos, de modo que  $xyz < uvw < d$ . Assim, o paralelepípedo  $P$  está contido em um outro paralelepípedo  $T_2$ , cujas dimensões são  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Portanto,  $V_P < V_{T_2} = uvw < d$ , ou seja,  $V_P < d$ . Assim, se  $c < xyz < d$ , então  $c < V_P < d$ , logo  $V_P = xyz$ . ■

A seguir, apresentaremos a definição geral de volume.

**Definição 3** *O volume de um sólido é o número real positivo cujas aproximações por falta são as somas dos volumes dos poliedros retangulares nele contidos.*

Em outras palavras, quanto mais poliedros retangulares  $P$  acrescentarmos e inscrevermos em  $S$ , obteremos um novo poliedro retangular  $P'$ , maior do que  $P$ , e assim o volume  $P'$  será uma aproximação bem melhor para o volume do sólido  $S$ .

Isso nos diz que  $V_S \geq V_P$  para qualquer poliedro retangular  $P$  contido em  $S$ . Ainda, podemos concluir que se  $t$  é um número real, tal que  $t < V_S$ , é possível encontrarmos um outro poliedro retangular  $T$ , contido em  $S$ , que vale a relação  $t < V_T < V_S$ .

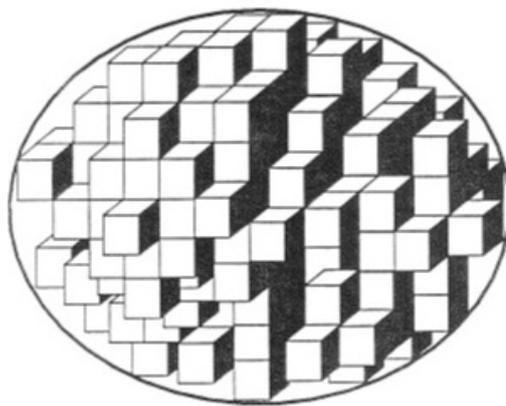


Figura 3.5: Poliedros regulares contidos em S

A expressão "aproximações por falta" apenas faz sentido rigorosamente, se usarmos a noção de limite, fundamental no cálculo diferencial e integral, a qual não faz parte do currículo usual do ensino básico. Por isso, abordamos essa expressão de forma intuitiva, acreditando que esta abordagem é suficiente.

Os poliedros retangulares na definição de volume de um sólido podem ser substituídos por outros sólidos cujos volumes conhecemos. Neste trabalho, vamos encontrar a fórmula para o volume da esfera usando aproximações por cilindros nela contidos.

### 3.4 O volume da esfera segundo o Princípio de Cavalieri

O ensino da fórmula do volume de sólidos no Ensino Médio é normalmente feito usando-se o Princípio de Cavalieri.

Abordaremos inicialmente esse princípio, de forma intuitiva, observando o seguinte exemplo.

Caso sejam colocadas em cima de uma mesa algumas moedas perfeitamente arrumadas, elas formarão um cilindro. Empurrando lateralmente as moedas que o compõe o cilindro, obteremos um cilindro oblíquo e, se alterarmos mais um pouco, teremos ainda outros sólidos, conforme figura a seguir:

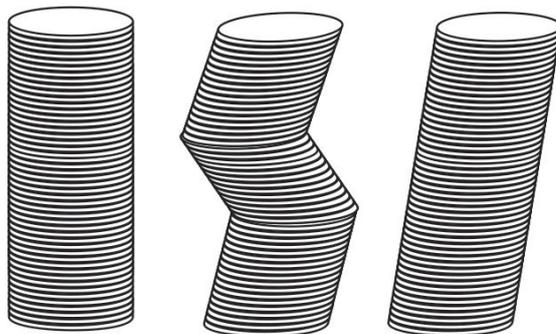


Figura 3.6: Noção Intuitiva de Volumes

Os volumes desses três sólidos serão iguais, pois não houve alteração da quantidade de moedas. Segundo [3], esse fato pode ser justificado pelo Princípio de Cavalieri.

**Definição 4** *Princípio de Cavalieri*

I. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções planas cuja razão entre as áreas é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

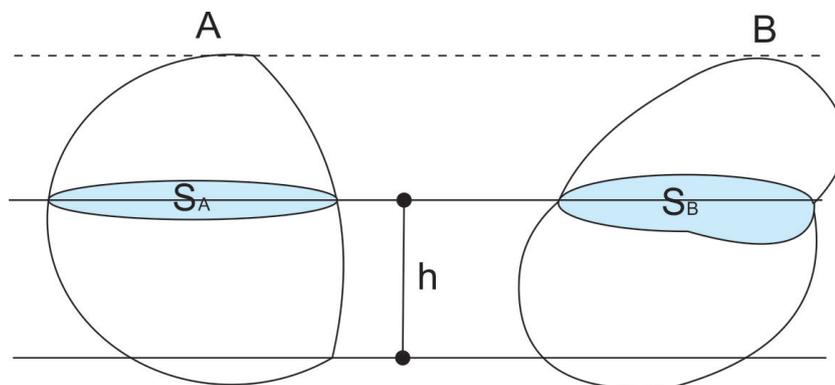


Figura 3.7: Princípio de Cavalieri para volumes

**Definição 5** *Princípio de Cavalieri*

II. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.

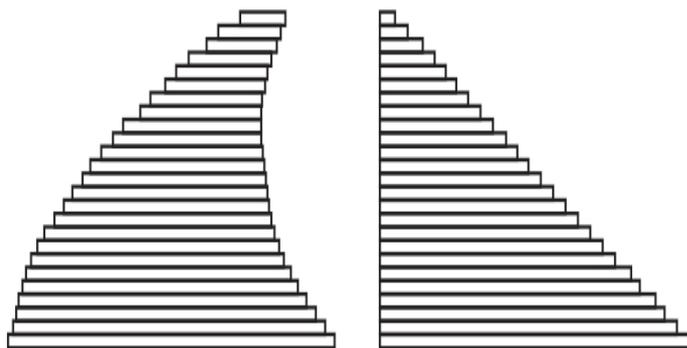


Figura 3.8: Princípio de Cavalieri para áreas

Usando as definições a seguir, iremos deduzir a fórmula do volume da esfera.

**Definição 6** O sólido formado pela reunião de dois cones, tendo como bases as do cilindro e sendo  $S$  o vértice comum aos cones, é denominado *clépsidra*.

**Definição 7** O sólido formado pela região interna do cilindro e externa à clépsidra (ver definição 6), é denominado *anticlépsidra*.

Em seguida, utilizaremos o Princípio de Cavalieri e as Definições 6 e 7 para deduzir a fórmula do volume de uma esfera de raio  $R$ .

**Lema 7.1** O volume de uma esfera de raio  $R$  é dado por  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ .

**Demonstração:** Vamos considerar: um cilindro circular reto de raio  $R$  e a altura  $2R$ , uma esfera de raio  $R$ , de tal forma que a esfera e o cilindro estejam em um mesmo plano  $\alpha$  e dois cones de raios  $R$  e altura  $R$ , ambos com vértice no centro do cilindro, cujas bases sejam as bases do cilindro (clépsidra).

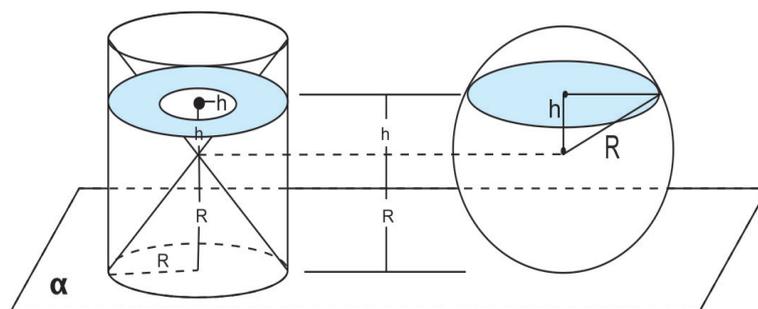


Figura 3.9: Volume da esfera por Cavalieri

Traçamos um plano qualquer que seja paralelo a  $\alpha$  e que intercepta os sólidos a uma mesma altura  $R + h$ .

Usamos o fato de que a área de uma secção esférica é dada por

$$A_{\text{secção esférica}} = \pi R^2 - \pi h^2$$

Notamos, assim, que a área da seção que intercepta o cilindro e o cone é igual a área de uma coroa circular de raios  $R$  e  $h$  ( $R > h$ ), ou seja, é a diferença entre a área do círculo de raio  $R$  e a área do círculo de raio  $h$ , então:

$$A_{\text{coroa circular}} = \pi R^2 - \pi h^2$$

De fato, o plano paralelo ao plano  $\alpha$  determinará seções que possuem a mesma área. Então, como as alturas dos sólidos são iguais, podemos concluir que, pelo Princípio de Cavalieri, os seus volumes serão iguais. Assim,

$$\begin{aligned}V_{\text{esfera}} &= V_{\text{anticlépsidra}} \\ &= V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cones}} \\ &= A_{\text{base}} \cdot H - 2 \cdot \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot H \\ &= \pi R^2 \cdot 2R - \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot R \\ &= 2\pi R^3 - \frac{2}{3} \pi R^3 \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula do volume da esfera de raio  $R$  é  $\frac{4\pi R^3}{3}$ .

■

# Capítulo 4

## Áreas e Volumes Usando Aproximações

Neste capítulo, vamos deduzir as fórmulas para o volume de uma esfera e para a área de uma superfície esférica. Tais deduções podem ser encontradas em [9].

### 4.1 Volume da esfera através de aproximações por cilindros

Vamos considerar um ponto  $O$  no espaço e um número real  $R > 0$ . Assim, definimos como superfície esférica de centro  $O$  e raio  $R$  o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro  $O$  é igual ao raio  $R$ .

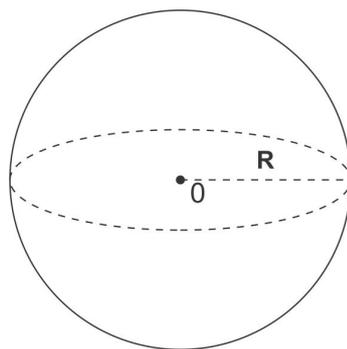


Figura 4.1: Superfície Esférica

Do mesmo modo, definimos a esfera como o conjunto de pontos cuja distância ao centro  $O$  é menor ou igual do que  $R$ .

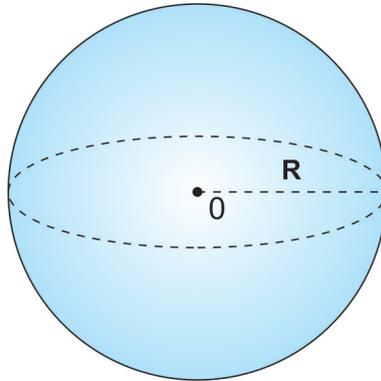


Figura 4.2: Esfera

Neste estudo, queremos provar que a esfera possui volume  $\frac{4\pi R^3}{3}$ , em que  $R$  é o raio da esfera. Inicialmente vamos encontrar o volume  $V$  de uma semi-esfera de raio  $R$ .

Para tal, utilizaremos o método de aproximação de sólidos. Por já conhecermos o seu volume, usaremos os cilindros de altura  $h$  e raio  $R$ , cujo volume é  $\pi R^2 h$

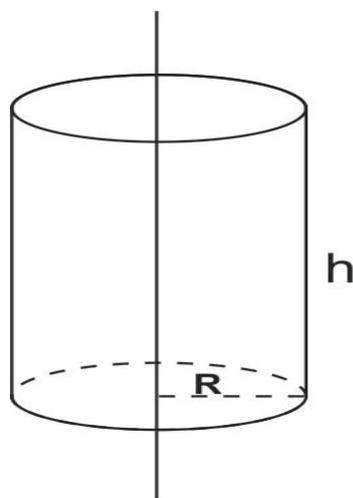


Figura 4.3: Cilindro de raio  $R$  e altura  $h$

Será suficiente provarmos que o volume da semi-esfera é  $\frac{2\pi R^3}{3}$ . Para isso, seguiremos os seguintes passos:

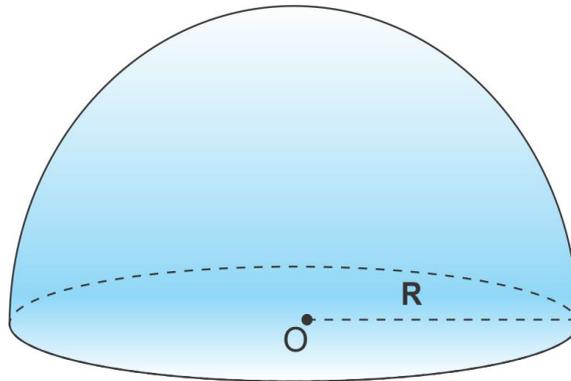


Figura 4.4: Semi-esfera de raio R

Primeiramente, “fatiamos” a semi-esfera de modo a determinar em seu interior 5 cilindros de raios  $r_1, r_2, r_3, r_4$  e  $r_5$  e alturas  $h_1, h_2, h_3, h_4$  e  $h_5$ , respectivamente.

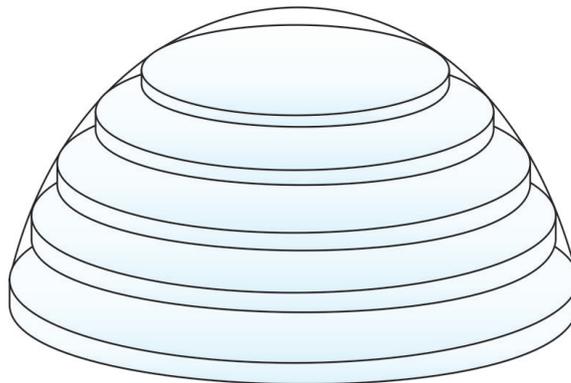


Figura 4.5: Semi-esfera “fatiadas” em cilindros

Traçando uma seção meridiana na semi-esfera, teremos a seguinte figura:

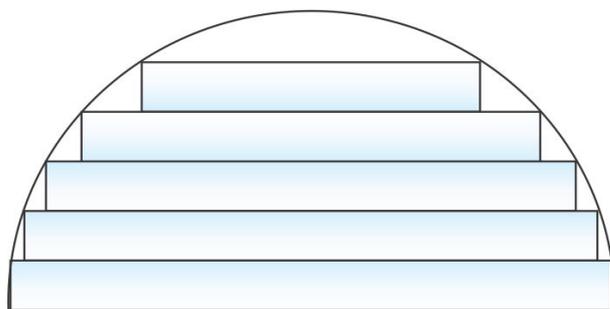


Figura 4.6: Seção meridiana da esfera

Os retângulos formados terão como altura a dos cilindros, e as bases como aproximações por falta dos diâmetros das bases dos cilindros. A soma dos volumes dos cilindros é uma aproximação por falta para o volume da semi-esfera.

Para melhorar o entendimento, vamos considerar o caso particular para cinco cilindros.

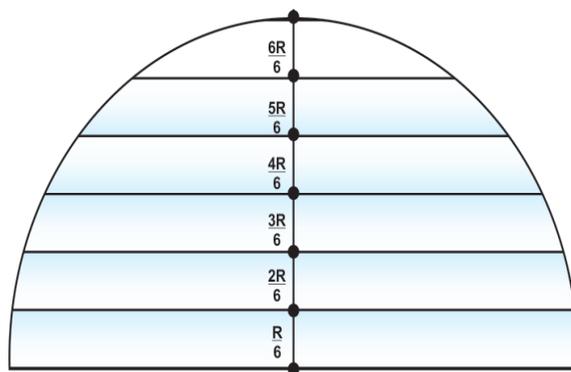


Figura 4.7: Representação dos cinco cilindros

Dividindo o raio  $R$  em seis partes iguais, a altura de cada um dos 5 cilindros será  $\frac{R}{6}$ . Dessa forma, o sólido delimitado por baixo pelo último cilindro e por cima pela esfera também tem altura  $\frac{R}{6}$ .

Caso usássemos  $n - 1$  cilindros, cada um deles teria altura seria de  $\frac{R}{n}$ .  
No tocante ao primeiro cilindro, temos a seguinte situação:

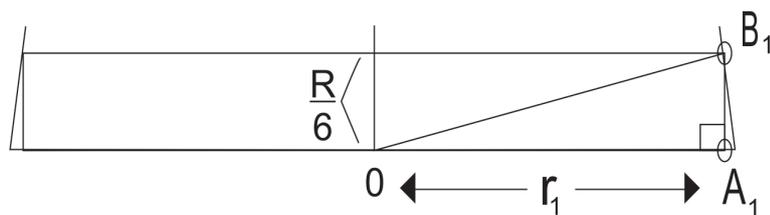


Figura 4.8: Seção meridiana do primeiro cilindro

De fato, teremos um triângulo retângulo  $OA_1B_1$ , cujos catetos são  $r_1$  e  $\frac{R}{6}$ , e a hipotenusa é o raio  $R$  da semi-esfera.

Usando o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo  $OA_1B_1$ , temos:

$$OB_1 = R, OA_1 = r_1 \text{ e } A_1B_1 = \frac{R}{6}$$

$$(OB_1)^2 = (OA_1)^2 + (A_1B_1)^2$$

$$R^2 = r_1^2 + \left(\frac{R}{6}\right)^2$$

$$r_1^2 = R^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2$$

Faremos o mesmo procedimento para o segundo cilindro

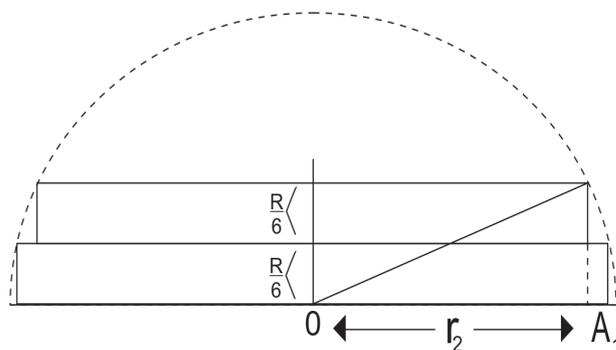


Figura 4.9: Seção meridiana do segundo cilindro

Consideramos o triângulo retângulo  $OA_2B_2$ , cujos catetos são  $r_2$  e  $\frac{2R}{6}$ , e a hipotenusa é o raio  $R$  da semi-esfera.

Usando o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo  $OA_2B_2$ , temos:

$$OB_2 = R, OA_2 = r_2 \text{ e } A_2B_2 = \frac{2R}{6}$$

$$\begin{aligned}(OB_2)^2 &= (OA_2)^2 + (A_2B_2)^2 \\ R^2 &= r_2^2 + \left(\frac{2R}{6}\right)^2 \\ r_2^2 &= R^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2\end{aligned}$$

Continuando o procedimento para o terceiro, o quarto e o quinto cilindros, de modo análogo, temos:

$$\begin{aligned}r_3^2 &= R^2 - \left(\frac{3R}{6}\right)^2 \text{ (3º cilindro)} \\ r_4^2 &= R^2 - \left(\frac{4R}{6}\right)^2 \text{ (4º cilindro)} \\ r_5^2 &= R^2 - \left(\frac{5R}{6}\right)^2 \text{ (5º cilindro)}\end{aligned}$$

Apresentados os cinco cilindros, podemos afirmar que a soma dos volumes de todos eles é:

$$\begin{aligned}V_{\text{cilindros}} &= \sum_{i=1}^5 V_i \\ &= \pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2 + \pi r_3^2 h_3 + \pi r_4^2 h_4 + \pi r_5^2 h_5 \\ &= \pi \left[ R^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2 \right] \frac{R}{6} + \pi \left[ R^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2 \right] \frac{R}{6} + \pi \left[ R^2 - \left(\frac{3R}{6}\right)^2 \right] \frac{R}{6} \\ &+ \pi \left[ R^2 - \left(\frac{4R}{6}\right)^2 \right] \frac{R}{6} + \pi \left[ R^2 - \left(\frac{5R}{6}\right)^2 \right] \frac{R}{6} + \pi \left[ R^2 - \left(\frac{6R}{6}\right)^2 \right] \frac{R}{6}\end{aligned}$$

A expressão  $\pi \left[ R^2 - \left(\frac{6R}{6}\right)^2 \right] \frac{R}{6}$  que é obviamente igual a 0 foi adicionada apenas para adequação das contas.

Da mesma forma como demonstramos acima, a representação poderia ter sido feita com  $n - 1$  cilindros, onde  $n$  é um número natural qualquer maior do que 1, conforme já exposto anteriormente. Sendo assim, de uma maneira geral, fazendo a representação com  $n - 1$  cilindros, cada um com altura  $\frac{R}{n}$ , os seus raios serão:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= R^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2 \quad (1^\circ \text{ cilindro}) \\ r_2^2 &= R^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2 \quad (2^\circ \text{ cilindro}) \\ &\vdots \\ r_{n-1}^2 &= R^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2 \quad (n\text{-ésimo cilindro}) \end{aligned}$$

Portanto, como cada cilindro tem volume  $V_i = \pi r_i^2 h_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , a soma dos volumes dos  $n - 1$  cilindros será:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n-1} V_i \\ &= \pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2 + \dots + \pi r_{n-1}^2 h_{n-1} \\ &= \pi \left[ R^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2 \right] \frac{R}{n} + \dots + \pi \left[ R^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2 \right] \frac{R}{n} \\ &= \pi \left[ R^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2 \right] \frac{R}{n} + \dots + \pi \left[ R^2 - \left(\frac{(n-1)R}{n}\right)^2 \right] \frac{R}{n} + \pi \left[ R^2 - \left(\frac{nR}{n}\right)^2 \right] \frac{R}{n} \end{aligned}$$

Tomando  $n$  um valor cada vez maior, a soma dos volumes dos  $n - 1$  cilindros se aproximará cada vez mais do volume da semi-esfera de raio  $R$ .

Da expressão, o fator  $\frac{\pi R}{n}$  é comum a todos os termos. Assim, colocando esse fator em evidência, obtemos :

$$\begin{aligned}
V_{\text{cilindros}} &= \frac{\pi}{n} \left[ R^2 - \left( \frac{R}{n} \right)^2 \right] R + \frac{\pi}{n} \left[ R^2 - \left( \frac{2R}{n} \right)^2 \right] R + \dots + \frac{\pi}{n} \left[ R^2 - \left( \frac{nR}{n} \right)^2 \right] R \\
&= \frac{\pi R}{n} \left[ R^2 - \left( \frac{R}{n} \right)^2 + R^2 - \left( \frac{2R}{n} \right)^2 + \dots + R^2 - \left( \frac{(n-1)R}{n} \right)^2 + R^2 - \left( \frac{nR}{n} \right)^2 \right] \\
&= \frac{\pi R}{n} \left[ nR^2 - R^2 \left( \frac{1}{n} \right)^2 - R^2 \left( \frac{2}{n} \right)^2 - \dots - R^2 \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 - R^2 \left( \frac{n}{n} \right)^2 \right] \\
&= \pi R^3 + \frac{\pi R^3}{n} \left[ - \left( \frac{1}{n} \right)^2 - \left( \frac{2}{n} \right)^2 - \dots - \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 - \left( \frac{n}{n} \right)^2 \right] \\
&= \pi R^3 - \pi R^3 \left[ \left( \frac{1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left( \frac{2}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left( \frac{n}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right]
\end{aligned}$$

Para dar continuidade a demonstração, devemos provar que o número representado pela expressão  $\left[ \left( \frac{1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left( \frac{2}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left( \frac{n}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right]$  se aproxima cada vez mais de  $\frac{1}{3}$ , quando  $n$  cresce arbitrariamente.

**Lema 7.2** *O número  $\left[ \left( \frac{1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left( \frac{2}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left( \frac{n}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right]$  se aproxima cada vez mais de  $\frac{1}{3}$ .*

Usando o resultado do Lema 5.2 concluiremos que

$$S = \pi R^3 - \pi R^3 \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{2^3}{3}$$

, que nos dá o volume da semi-esfera de raio  $R$ , nosso objetivo no início do capítulo.

Para justificar o resultado do Lema 5.2, inicialmente, vamos observar o que acontece com a expressão  $\frac{L}{n} \cdot \frac{L}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{L}{n} + \dots + \frac{n}{n} \cdot \frac{L}{n}$  quando  $n$  for muito grande.

Para isso, consideremos um quadrado de lado  $L$  e particionamos  $L$  em  $n$  partes iguais, como na figura 4.10.

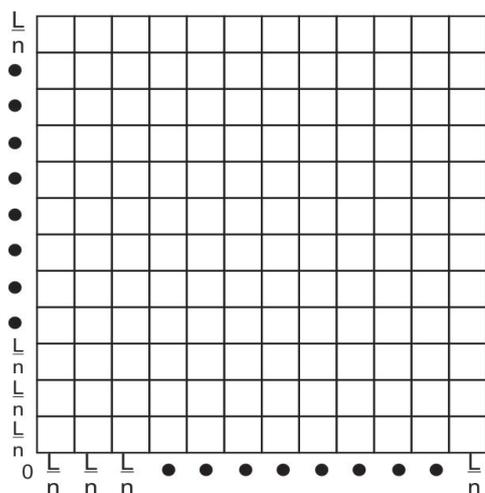


Figura 4.10: Quadriculados de lado  $\frac{L}{n}$

Notamos que o quadrado maior possui lados medindo  $L$  e cada quadrado menor possui lados medindo  $\frac{L}{n}$ . Assim,

$$\frac{L}{n} \cdot \frac{L}{n} \Rightarrow \text{área do quadrado cujos lados têm comprimentos } \frac{L}{n}$$

$$\frac{2L}{n} \cdot \frac{L}{n} \Rightarrow \text{área do retângulo cujos lados têm comprimentos } \frac{2L}{n} e \frac{L}{n}$$

⋮

$$\frac{nL}{n} \cdot \frac{L}{n} \Rightarrow \text{área do retângulo cujos lados têm comprimentos } \frac{nL}{n} e \frac{L}{n}$$

Agora, vamos observar as áreas desenhadas pela figura abaixo:

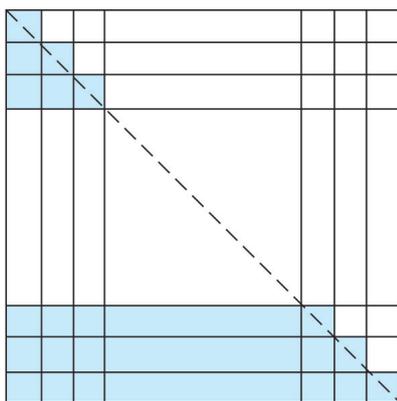


Figura 4.11: Área dos retângulos

De acordo com a figura 4.11 acima, aumentando  $n$  suuficientemente, a soma das áreas se aproxima cada vez mais da metade da área do quadrado de lado  $L$ . Assim, a soma

$$\frac{L}{n} \cdot \frac{L}{n} + \frac{2L}{n} \cdot \frac{L}{n} + \dots + \frac{nL}{n} \cdot \frac{L}{n}$$

se aproxima de  $\frac{L^2}{2}$ .

Porém, considerando  $L$  igual a 1, podemos afirmar que a expressão

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

se aproxima de  $\frac{1}{2}$ .

Analogamente, faremos a mesma análise, só que agora para o cubo de aresta  $L$ ,

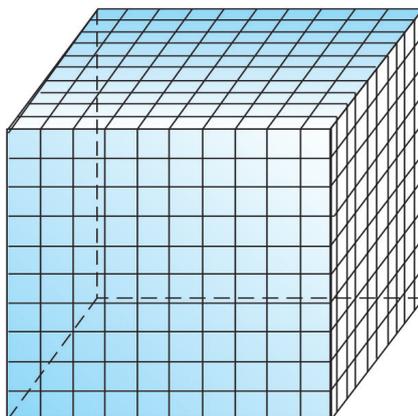


Figura 4.12: Cubo de aresta  $L$

O que acontecerá com  $\left(\frac{L}{n}\right)^2 \cdot \frac{L}{n} + \left(\frac{2L}{n}\right)^2 \cdot \frac{L}{n} + \dots + \left(\frac{nL}{n}\right)^2 \cdot \frac{L}{n}$ , quando  $n$  for um número arbitrariamente grande?

Podemos observar que o primeiro termo é  $\left(\frac{L}{n}\right)^2 \cdot \frac{L}{n} = \frac{L^3}{n^3}$ , ou seja, representa o volume de um cubo de aresta  $\frac{L}{n}$ .

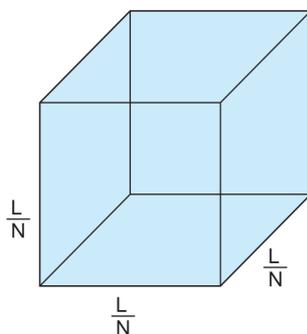


Figura 4.13: Cubo de aresta  $\frac{L}{n}$

O segundo termo é  $\left(\frac{2L}{n}\right)^2 \cdot \frac{L}{n}$ , que representa o volume de um paralelepípedo cuja altura mede  $\frac{L}{n}$  e possui base quadrada de lado  $\frac{2L}{n}$ .

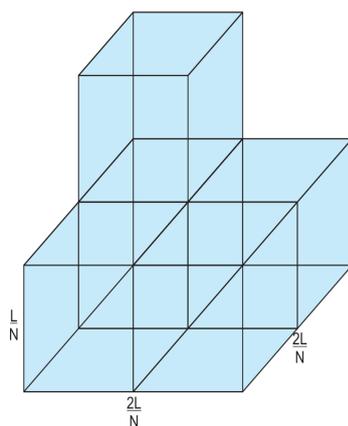


Figura 4.14: Representação do segundo termo

A figura 4.15 representa a soma dos volumes de  $n$  paralelepípedos. Tomando  $n$  cada vez maior, o volume representado pela expressão

$$\frac{L}{n} \cdot \frac{L}{n} + \frac{2L}{n} \cdot \frac{L}{n} + \dots + \frac{nL}{n} \cdot \frac{L}{n}$$

se aproximará do volume da pirâmide de base quadrada de lado  $L$  e altura igual a  $L$ .

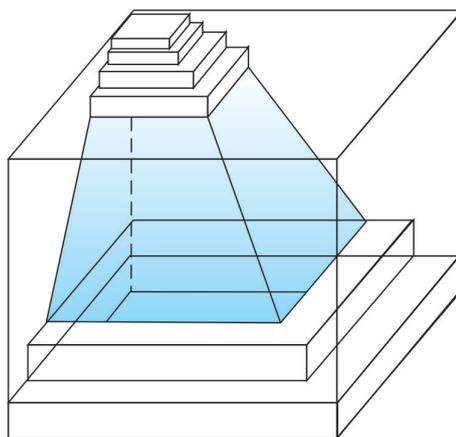


Figura 4.15: Aproximação dos volumes

Sabendo que o volume da pirâmide é  $\frac{1}{3}$  do volume do cubo podemos concluir que a soma dos volumes dada pela expressão

$$\left(\frac{L}{n}\right)^2 \cdot \frac{L}{n} + \left(\frac{2L}{n}\right)^2 \cdot \frac{L}{n} + \dots + \left(\frac{nL}{n}\right)^2 \cdot \frac{L}{n}$$

se aproxima de  $\frac{L^3}{3}$ .

Assim, podemos concluir que se o quadrado possuir lado  $L$  igual a 1 teremos que a expressão

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

se aproxima de  $\frac{1}{3}$ .

Retomando à expressão

$$\begin{aligned} S &= \pi R^3 - \pi R^3 \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right] \\ &\approx \frac{2\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

Assim, o volume da semi-esfera de raio  $R$  é dado por

$$V_{\text{semi-esfera}} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Consequentemente, o volume  $V$  de uma esfera de raio  $R$  é o dobro deste valor, ou seja,

$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} &= 2V_{\text{semi-esfera}} \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

## 4.2 Área da superfície esférica através de aproximações por retângulos

Para encontrarmos a área da esfera, vamos, inicialmente, provar a fórmula do comprimento da circunferência de raio  $r$  usando um método diferente do tradicional. Para isso, usaremos o fato de que a área do círculo de raio  $r$  é  $\pi r^2$ .

Queremos mostrar que o comprimento da circunferência  $c$  é dado pela fórmula  $c = 2\pi r$ . Dessa forma, consideremos a figura abaixo formada por dois círculos concêntricos de raios  $r + h$  e  $r$

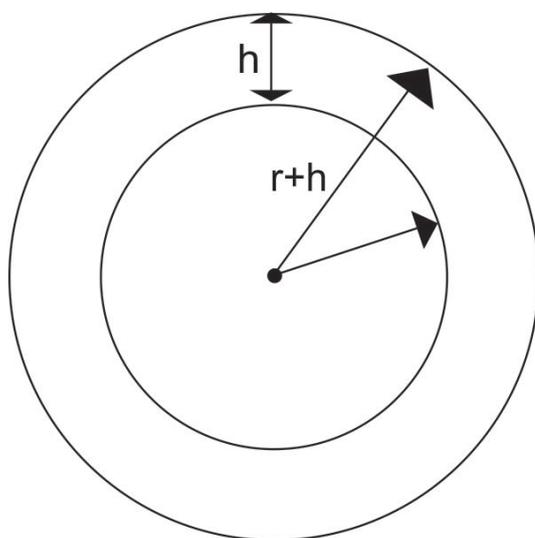


Figura 4.16:

Podemos observar que a circunferência de raio  $r$  é cercada por uma faixa de largura  $h$ , que denominamos coroa circular, cuja área é a diferença entre a área do círculo de raio  $r + h$  e a área do círculo de raio  $r$ . Então, a área da coroa circular é:

$$\begin{aligned}A_{\text{coroa circular}} &= A_{\text{círculo maior}} - A_{\text{círculo menor}} \\&= \pi(r+h)^2 - \pi r^2 \\&= \pi(r^2 + 2rh + h^2) - \pi r^2 \\&= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi h^2 - \pi r^2 \\&= 2\pi rh + \pi h^2\end{aligned}$$

Considere o retângulo de lados medindo  $L$  e  $h$  conforme representado na figura 4.17.



Figura 4.17: Retângulo de lados medindo  $L$  e  $h$

Inicialmente, devemos considerar o retângulo de largura  $h$  e comprimento  $c$ , em que  $c$  é o comprimento da circunferência menor, conforme apresentado nas figuras abaixo:

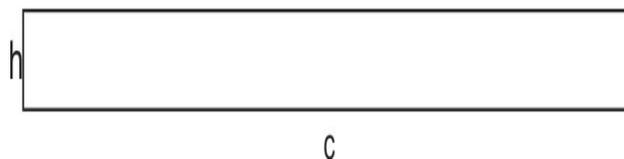


Figura 4.18: Retângulo de lados  $c$  e  $h$

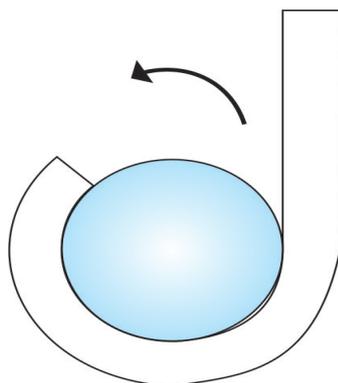


Figura 4.19: Círculo envolto pelo retângulo de lados  $c$  e  $h$

Enrolando o retângulo em volta da circunferência menor, percebemos que o lado inferior do retângulo se encaixará exatamente em torno do círculo menor, bem como percebemos que o lado de fora do retângulo deve ser, necessariamente, esticado, para que se encaixe perfeitamente em torno do círculo maior. Com isso, concluímos que a área do retângulo será menor do que a área da coroa circular e escrevemos :

$$hc < A_{\text{coroa circular}}(I)$$

Analogamente, vamos considerar a circunferência maior  $C$  e o retângulo de comprimento  $C$  e largura  $h$ .

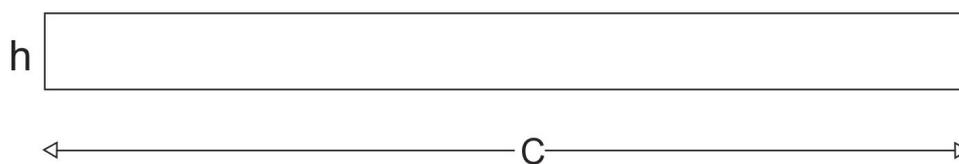


Figura 4.20: Retângulo de lados  $C$  e  $h$

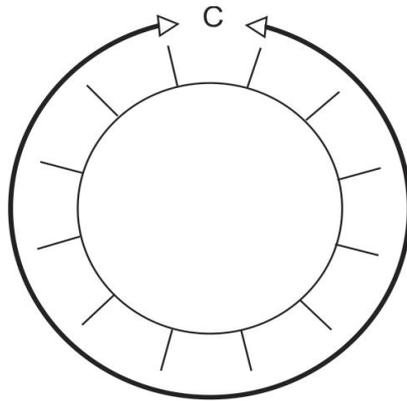


Figura 4.21: Círculo envolto pelo retângulo de lados  $C$  e  $h$

Percebemos agora que o lado inferior do retângulo terá que ser encolhido para que se encaixe perfeitamente no círculo menor, enquanto que o lado de fora se encaixa perfeitamente com o comprimento  $C$ . Assim, temos que a área do retângulo será maior do que a área da coroa circular. Com isso, podemos garantir a seguinte desigualdade:

$$A_{\text{coroa circular}} < hC \tag{4.1}$$

$$(II) \tag{4.2}$$

Escrevendo as desigualdades (I) e (II) simultaneamente, temos:

$$hc < A_{\text{coroa circular}} < hC \tag{4.3}$$

Sabendo que  $A_{\text{coroa circular}} = 2\pi rh + \pi h^2$ , substituíremos em (III) e dividiremos todos os termos da desigualdade pelo número positivo  $h$ . Dessa forma, teremos

$$c < 2\pi r + \pi h < C$$

Suponhamos que  $h$  seja cada vez menor. Com isso, a circunferência maior  $C$  se aproximará cada vez mais da circunferência menor  $c$  e o termo  $\pi h$  se aproximará de zero. Assim, o termo  $2\pi r + \pi h$  se aproxima de  $2\pi r$ . Logo, para  $h$  suficientemente pequeno, temos :

$$c \leq 2\pi r \leq c$$

Portanto, provamos que  $c = 2\pi r$

Por conseguinte, queremos provar que a área da superfície esférica de raio  $r$  é  $4\pi r^2$ . Para isso consideramos duas esferas concêntricas de raio  $r$  e  $r + h$ , respectivamente, como na figura abaixo:

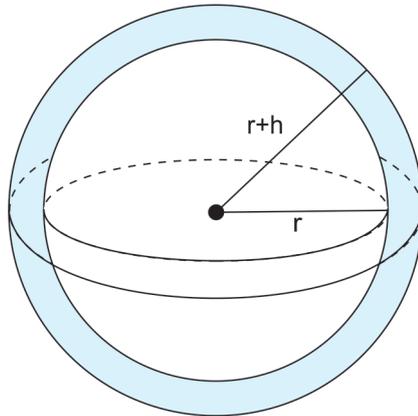


Figura 4.22: Concha Esférica

Sejam  $a$  a área da superfície esférica menor de raio  $r$ ,  $A$  a área da superfície esférica de raio  $r + h$ ,  $v$  o volume da esfera de raio  $r$  e  $V$  o volume da esfera de raio  $r + h$ . O volume da fina camada entre as superfícies esféricas, chamada concha esférica, é igual a diferença entre  $V$  e  $v$ . Assim:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{concha esférica}} &= V - v \\
 &= \frac{4\pi(r+h)^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3} \\
 &= \frac{4\pi}{3} [(r+h)^3 - r^3] \\
 &= \frac{4\pi}{3} [r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3] \\
 &= \frac{4\pi h}{3} [3r^2 + 3rh + h^2]
 \end{aligned}$$

Podemos notar que o volume da concha é aproximadamente igual a área da superfície esférica vezes a largura da concha, que é  $h$ . De fato, as mesmas desigualdades que usamos na área da coroa circular servem para o volume da concha. Sendo

assim, o volume da concha é maior do que  $ah$  e é menor do que  $Ah$ . Escrevendo as desigualdades, temos:

$$ha < V_{\text{concha esférica}} < hA$$
$$ha < \frac{4\pi h}{3} [3r^2 + 3rh + h^2] < hA$$

Dividindo ambos os termos da desigualdade por  $h$ , encontraremos a seguinte desigualdade ;

$$a < \frac{4\pi}{3} [3r^2 + 3rh + h^2] < A$$

Analogamente, fazendo  $h$  cada vez menor, ou seja, próximo de zero, a área da superfície esférica maior  $A$  se aproxima da área da superfície esférica menor  $a$ . Consequentemente, a expressão  $a < \frac{4\pi}{3} [3r^2 + 3rh + h^2] < A$  se aproxima de  $\frac{4\pi 3r^2}{3}$ , isto é,  $A < 4\pi r^2 < A$ .

Portanto, a área de uma esfera de raio  $r$  é dada por  $A = 4\pi r^2$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] ALMOULOU, Saddo Ag. Fusco; SILVA, Cristiana Abud da Silva. *PROVAS E DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA: UMA QUESTÃO PROBLEMÁTICA NAS PRÁTICAS DOCENTES NO ENSINO BÁSICO*. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador: 2004. Disponível em: <<http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T13CC181.pdf>> Acesso em: 10 jan. 2014.
- [2] BIANCHINI, Edwaldo, *Matemática*. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2006.
- [3] BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH Uta C. , *História da Matemática*. Trad. Helena de Castro. São Paulo: Blucher, 2012.
- [4] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 1. ed, São Paulo: Ática, 2010.
- [5] DOLCE, O. ; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 10: geometria espacial, posição e métrica*. 6. ed, São Paulo: Atual, 2005.
- [6] DOLCE, O. ; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 09: geometria plana*. 6. ed, São Paulo: Atual, 2005.
- [7] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.
- [8] GUTIERRE, Liliane dos Santos. *História da Matemática: Atividades para a sala de aula*. Natal, RN: EDUFRN, 2011.
- [9] LANG, Serge; MURROW, Gene. *Geometry*. 2. ed, New York, USA: Ed. Springer, 1998.

- [10] LIMA, Elon Lages. et. al. *Temas e Problemas Elementares*. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM,2006.
- [11] LIMA, Elon Lages. et. al. *Temas e Problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM,2003.
- [12] LIMA, Elon Lages. et. al. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM,2006.
- [13] LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM,2007.
- [14] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM,2006.
- [15] LIMA, Elon Lages. et. al. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM,2006.
- [16] LIMA, Elon Lages. et. al. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM,2006.
- [17] LIMA, Elon Lages. *Curso para professores de Matemática do 2º grau*. Rio de Janeiro : IME,1991. Disponível em : <http://www.ime.usp.br/pleite/pub/artigos/elon/Volumes-Elon.pdf> Acesso em: 20 jan. 2014.
- [18] LULA, Kariton Pereira. *Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas*. In. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2013.
- [19] MACHADO, Antônio dos Santos. *Matemática: Temas e Metas - Volume 4: Áreas e Volumes*. São Paulo: Atual,1988.
- [20] OLIVEIRA, Gervásio Meneses de. *Metodologia e Didática do Ensino de Matemática*. Faculdade de Tecnologia e Ciências. Ensino a Distância. 2011. Disponível em: <http://www.ead.ftc.br/portal/upload/mat/4p/02-MetodologiaeDidatica doEnsinodeMatematica.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2014.
- [21] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Moderna,2009.

- [22] PARAIZO, Ricardo Ferreira. *Ensino de geometria espacial com utilização de vídeos e manipulação de materiais concretos : um estudo no ensino médio*. 2012. 196 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/DISS-Ricardo-Paraizo.pdf>> Acesso em 10 jan. 2014.
- [23] PRIMO, Márcio Eduardo. *O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades*. 2013 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <[http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/296/2011\\_00148\\_MARCIO\\_EDUARDO\\_PRIMO.pdf](http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/296/2011_00148_MARCIO_EDUARDO_PRIMO.pdf)> Acesso em 10 jan. 2014.