

**Universidade Estadual de Santa Cruz**

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**A Sequência de Fibonacci e  
o Número de Ouro**

por

**Marcos Gertrudes Oliveira Ramos**

Mestrado Profissionalizante em Matemática – Ilhéus/BA

Orientador:

**Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva**

Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes  
obtido através da SBM.



---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**A Sequência de Fibonacci e  
o Número de Ouro**

por

**Marcos Gertrudes Oliveira Ramos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva

**Ilhéus/BA  
2013**

R175 Ramos, Marcos Gertrudes Oliveira.  
A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro / Marcos Gertrudes Oliveira Ramos. – Ilhéus: UESC, 2013.  
93f. : il.  
Orientador: Romenique da Rocha Silva.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências.

1. Sequência matemática. 2. Matemática – Filosofia. 3. Razão e proporção. 4. Segmento áureo. I. Silva, Romenique da Rocha (orientador) . II. Título.

CDD – 511.13

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, Ilhéus/BA

---

# A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Dissertação de Mestrado defendida em 01 de março de 2013 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos professores:



---

Prof. Dr. Romênique da Rocha Silva – Orientador, UESC



---

Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus, UESC



---

Prof. Dr. Célia Barros Nunes, UNEB



# Dedicatória

---

*A Bernardino, meu pai, que do  
outro lado da vida, me acena  
sorridente, na condição de  
viajante.*





# Agradecimentos

---

## **Meus sinceros agradecimentos:**

Ao Criador, a meus familiares, especialmente à minha mãe, Berenice, e a minha irmã Erenice, à minha namorada, Élide, a meus professores, a meu orientador e a meus colegas, pois a participação deles foi decisiva para a constituição deste trabalho.

À Capes pelo apoio financeiro a este Curso de Mestrado.



# Resumo

Apresentamos, neste trabalho, um estudo relacionado à Sequência de Fibonacci – sequência gerada como solução de um problema apresentado por Leonardo Fibonacci, e ao Número de Ouro (ou Razão Áurea). O enfoque principal está na investigação das principais propriedades matemáticas desses dois conceitos, da conexão existente entre eles, de suas manifestações na Natureza e de suas aplicações na Arquitetura e na Arte. Expomos, também, as definições e as principais propriedades do retângulo, do triângulo e da espiral áureos, bem como, do pentágono regular e do pentagrama. Mostramos que o tema desse trabalho se revela como uma ótima oportunidade de ser trabalhado em sala de aula, pois ao mesmo tempo que apresenta um enorme potencial em despertar o interesse do aluno pela Matemática, já que o tema mostra a beleza dela, o mesmo se relaciona com diversos conteúdos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Utilizamos a pesquisa bibliográfica, constituída de livros e de publicações diversas, para a produção deste trabalho, cuja fundamentação, reside, principalmente, nos autores Lívio, Contador e Huntley. A justificativa central da escolha do tema está no fato dele, geralmente, não ser trabalhado na Educação Básica, assim como pelo poder do mesmo em despertar vocações matemáticas latentes.

**Palavras-chave:** Sequência de Fibonacci. Número de Ouro. Retângulo Áureo. Filotaxia.



# Abstract

We present this work, a study related to the Fibonacci Sequence – sequence generated as a solution to a problem presented by Leonardo Fibonacci and the Golden Number (or Golden Reason). The main focus is on the investigation of the main mathematical properties of these two concepts, the connection between them, its manifestations in nature and its applications in Architecture and Art. We present also the definitions and the main properties of the rectangle, triangle and golden spiral, as well, as the regular pentagon and the pentagram. We show that the theme of this work is revealed as a great opportunity to be working in the classroom, because at the same time present a massive potential to arouse student interest in Mathematics, since the topic shows the beauty of it, even if the associated with various contents of elementary school and medium school. We use literature, consisting of various books and publications, for the production of this work, whose foundation lies mainly in the authors Lívio, Contador and Huntley. The central justification of the choice of the theme is the fact that it is generally not being worked on Basic Education, as well as the power to arouse vocations of the same underlying mathematical.

**Keywords:** Fibonacci Sequence. Golden Number. Golden Rectangle. Phyllotaxy.



# Lista de Figuras

1.1	Leonardo Fibonacci . . . . .	4
1.2	Crescimento populacional de coelhos. . . . .	6
2.1	Sofisma geométrico. . . . .	29
2.2	Solução do sofisma. . . . .	30
3.1	Divisão de um segmento na razão extrema e média. . . . .	32
3.2	Encaixe perfeito. . . . .	37
3.3	Retângulo Áureo. . . . .	41
3.4	Sequência infinita de retângulos áureos. . . . .	42
3.5	Triângulo áureo. . . . .	43
3.6	Sequência infinita de triângulos áureos. . . . .	44
3.7	Espiral áurea. . . . .	45
3.8	Espiral de ouro. . . . .	46
3.9	Pentagrama. . . . .	47
3.10	Sequência infinita de pentágonos regulares e de pentagramas. . . . .	48
3.11	Pentágono regular com duas de suas diagonais. . . . .	48
3.12	Pentágono regular com duas de suas diagonais intersectando-se. . . . .	49
3.13	Triângulos destacados no pentágono regular. . . . .	50
3.14	Diagonal do pentágono regular. . . . .	50
3.15	Triângulos destacados num pentágono regular. . . . .	52
4.1	Reflexões e refrações de um raio de luz em placas de vidro. . . . .	54
4.2	Árvore genealógica de um zangão até a sexta geração. . . . .	55
4.3	Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci. . . . .	56
4.4	Sequência de Fibonacci no mundo vegetal. . . . .	57
4.5	Espaçamento angular entre as folhas de uma planta. . . . .	58
4.6	Abacaxi e suas espirais. . . . .	59
4.7	À esquerda 2 pinhas e à direita 2 alcachofras. . . . .	59
4.8	Exemplo de flores com seus respectivos números de pétalas. . . . .	60
4.9	Girassol e a representação esquemática de suas sementes. . . . .	60
4.10	Representação esquemática das pétalas de uma rosa. . . . .	61
4.11	Estrutura parecida com o núcleo de um girassol. . . . .	61

---

4.12	Formas espiraladas na Natureza. . . . .	63
4.13	Falcão-peregrino perseguindo sua presa. . . . .	63
4.14	<i>Homem Vitruviano</i> . . . . .	65
4.15	Proporção Áurea nos dentes. . . . .	65
4.16	Exemplos de obras com o suposto uso da Razão Áurea. . . . .	66
4.17	À esquerda <i>São Jerônimo</i> e à direita a <i>Virgem dos Rochedos</i> . . . . .	68
4.18	<i>O Sacramento da Última Ceia</i> de Salvador Dali. . . . .	69
4.19	O Modulor. . . . .	70
4.20	Obras arquitetônicas cujos projetos foram de Le Corbusier. . . . .	70
5.1	Segmento $AB$ dividido na Razão Áurea. . . . .	76
5.2	Segmento $AB$ . . . . .	76
5.3	Quadrado $ABCD$ . . . . .	79
5.4	Retângulo Áureo. . . . .	79
5.5	Pentágono Regular e o Pentagrama. . . . .	85



# Lista de Tabelas

1.1	Solução resumida do problema da reprodução de coelhos. . . . .	7
3.1	Potências de $\Phi$ . . . . .	36
3.2	Razão entre Números de Fibonacci consecutivos. . . . .	39
5.1	Solução resumida do problema de <i>subir uma escada</i> . . . . .	73
5.2	Solução do problema da reprodução de coelhos. . . . .	74
5.3	Razão das medidas de objetos retangulares. . . . .	81
5.4	Razão entre algumas medidas do corpo humano. . . . .	83
5.5	Razão entre algumas medidas do Pentágono Regular. . . . .	86
5.6	Razão entre termos consecutivos de uma sequência de Fibonacci qualquer. . . . .	88



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 A Sequência de Fibonacci</b>	<b>3</b>
1.1 Leonardo de Pisa (Fibonacci)	3
1.2 O problema da reprodução de coelhos	5
1.3 Definindo a Sequência de Fibonacci	7
1.4 Propriedades	7
1.4.1 Propriedades Elementares	8
1.4.2 Propriedades Lineares	13
1.5 A Fórmula de Binet	17
<b>2 Resultados especiais e algumas Curiosidades dos Números de Fibonacci</b>	<b>21</b>
2.1 Preliminares	21
2.2 Resultados especiais	25
2.3 Algumas Curiosidades	27
2.3.1 1/89	27
2.3.2 Periodicidade	28
2.3.3 Ternos pitagóricos	28
2.3.4 Sofisma geométrico	29
<b>3 O Número de Ouro</b>	<b>31</b>
3.1 Definição e um pouco de história	31
3.2 Propriedades e Potências de $\Phi$	33
3.2.1 Propriedades	33
3.2.2 Potências	36
3.3 Uma conexão surpreendente com a Sequência de Fibonacci	38
3.4 O Retângulo, o Triângulo e a Espiral Áureos	41
3.5 O Pentágono regular e o Pentagrama	47
<b>4 Manifestações e aplicações</b>	<b>53</b>
4.1 Comportamento da luz	53
4.2 Árvore genealógica de um zangão	54
4.3 Triângulo de Pascal	54

---

4.4	A Sequência de Fibonacci e a Geometria da Vida . . . . .	56
4.5	O Número de Ouro no Corpo Humano . . . . .	64
4.6	Aplicações do Número de Ouro . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Sugestões de atividades para a sala de aula</b>	<b>71</b>
5.1	Deduzindo a Sequência de Fibonacci . . . . .	71
5.2	Divisão de um segmento na Razão Áurea . . . . .	74
5.3	Desenhando um Retângulo Áureo e uma Espiral Áurea . . . . .	77
5.4	Relação entre as medidas de objetos que têm a forma retangular . . . . .	80
5.5	Elegendo o Casal Mister Áureo . . . . .	81
5.6	Construindo um Pentágono Regular e um Pentagrama . . . . .	83
5.7	Conexão do Número de Ouro com uma sequência de Fibonacci qualquer . .	86
	<b>Conclusão</b>	<b>89</b>
	<b>Referências</b>	<b>91</b>

# Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal estudar a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro (ou Razão Áurea) investigando suas histórias, suas principais propriedades, suas aplicações na Arquitetura e na Arte, suas manifestações na Natureza, bem como, as relações que existem entre ambos.

Mostraremos como a Matemática está presente em nosso meio através de uma simples sequência e de uma simples razão, as quais apresentam a curiosa característica de aparecerem em lugares onde menos se espera. Tal característica se manifesta como uma espécie de elemento surpresa, o qual é responsável pelo deleite estético e pelo encantamento que nos são proporcionados.

Diante desta pretensão, investigaremos de que forma uma concha de molusco, a procriação de coelhos, a árvore genealógica de um zangão, a disposição das folhas nos galhos de uma planta, algumas razões encontradas no corpo humano, o formato de algumas galáxias, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, etc., se relacionam com a Sequência de Fibonacci e com o Número de Ouro.

Para tanto, exporemos no Capítulo I um pouco da vida e obra de Leonardo de Pisa (Fibonacci), matemático que descobriu, através de um problema apresentado no seu livro *Liber Abaci*, a sequência, hoje, batizada com seu nome. Em seguida, apresentaremos a definição formal da referida sequência e suas principais propriedades, bem como, a elegante Fórmula de Binet a qual serve para representar qualquer termo da sequência a partir de sua posição nela.

No Capítulo II, mostraremos alguns resultados especiais envolvendo os Números de Fibonacci (termos da Sequência de Fibonacci), os quais dependem de definições e de resultados referentes a outros conceitos matemáticos onde estes últimos serão apresentados na primeira seção. No final do mesmo capítulo, exibiremos algumas curiosidades dos Números de Fibonacci.

Salientamos que a leitura das demonstrações referentes às Seções 1.4 e 1.5 poderá ser deixada para um outro momento; o mesmo vale para as Seções 2.1 e 2.2 o que não ocasionará prejuízo para o entendimento do restante do texto.

Apresentaremos, no Capítulo III, a definição, um pouco da história e as principais propriedades do Número de Ouro, bem como, a surpreendente conexão existente entre ele e os Números de Fibonacci. Mostraremos, também, a definição e as principais propriedades do retângulo, do triângulo e da espiral áurea. Daremos destaque especial ao pentágono

regular e ao pentagrama, devido ao fato de que em tais figuras geométricas, a Razão Áurea está fortemente presente, assim como, pelo fato dos pitagóricos terem usado o pentagrama como emblema de sua irmandade.

No Capítulo IV, mostraremos algumas manifestações inesperadas da Sequência de Fibonacci, a saber: na árvore genealógica de um zangão, num comportamento da luz, no Triângulo de Pascal e na disposição das folhas e dos galhos de uma planta (filotaxia). Apresentaremos, também, a tendência de algumas razões entre partes do corpo humano serem áureas, assim como, mostraremos de que forma foi feito o uso desta razão, ao longo dos tempos, na Arquitetura e na Arte.

Reservaremos para o Capítulo V, a apresentação de algumas sugestões de atividades para a sala de aula referentes à Sequência de Fibonacci e ao Número de Ouro. Devido às manifestações desses dois conceitos matemáticos nos mais variados contextos, os mesmos nos oferecem uma oportunidade excelente no que tange ao ensino de Matemática e/ou de Ciências Naturais, pois permitem uma abordagem interdisciplinar que envolve uma vasta gama de disciplinas científicas, bem como, a Filosofia, a História e a Arte.

A nossa pretensão não é a de esgotar o tema, ou seja, de apresentar todas as informações conhecidas acerca da Sequência de Fibonacci e do Número de Ouro. O nosso propósito é de reunir as informações que julgamos ser centrais, fundamentadas em pesquisa bibliográfica, principalmente, dos autores Lívio (2011), Contador (2011) e Huntley (1985).

# Capítulo 1

## A Sequência de Fibonacci

*“Arquimedes será lembrado enquanto Ésquilo foi esquecido, porque os idiomas morrem mas as ideias matemáticas permanecem. ‘Imortalidade’ pode ser uma ideia tola, mas provavelmente um matemático tem a melhor chance que pode existir de obtê-la”.*

G. H. Hardy

Neste capítulo apresentaremos um pouco da história da vida e obra de Fibonacci que foi o matemático responsável pela descoberta da sequência que leva o seu nome, bem como, o problema da reprodução dos coelhos cuja solução é a geradora dos termos da referida sequência e sua correspondente definição formal.

Reservamos, também, para este capítulo a apresentação das principais propriedades elementares e lineares dos Números de Fibonacci, assim como, a elegante Fórmula de Binet a qual serve para representar qualquer número de Fibonacci a partir da sua posição na sequência. Com relação às propriedades elementares, demonstraremos apenas aquelas que serão usadas para demonstrar outros resultados que também serão apresentados ao longo deste trabalho.

### 1.1 Leonardo de Pisa (Fibonacci)

Leonardo de Pisa foi para muitos, o matemático europeu mais original e capaz do Período Medieval<sup>1</sup>. Nascido, na década de 1170, na cidade de Pisa, na região da Toscana (Itália), era também conhecido como Leonardo Fibonacci (devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de “filius Bonacci” que significa “filho de Bonaccio”), Leonardo Pisano ou Leonardo Bigollo (na Toscana, Bigollo significa “viajante”).

Ficou conhecido pelo seu papel na introdução dos algarismos indo-arábicos na Europa e pela famosa sequência numérica que leva o seu nome.

---

<sup>1</sup>Também chamado de Idade Média – é o período histórico compreendido entre o Século V e o Século XIV que foram marcados, respectivamente, pela Queda do Império Romano e pelo início do Renascimento.



Figura 1.1: Leonardo Fibonacci

Fonte: [8].

No Século XII, Pisa se destacava por ser um dos grandes centros comerciais da Itália, assim como Gênova e Veneza. Possuía vários entrepostos comerciais espalhados pelo Mediterrâneo onde passavam mercadorias importadas do interior e do ultramar, tais como, as especiarias do Extremo Oriente que circulavam com destino à Europa Ocidental.

Leonardo Fibonacci era filho de Guglielmo dei Bonacci, um destacado mercador pisano e representante dos comerciantes de Pisa que atuava como uma espécie de fiscal alfandegário em Bugia (atualmente Bejaia, na Argélia).

Devido às viagens do seu pai por quase todo o Mediterrâneo, Fibonacci teve oportunidade de visitar a Sicília, o Egito, a Espanha mulçumana, a Grécia e, dessa forma, de conhecer, nestes lugares, as diversas culturas, assim como, de aprender com professores islâmicos a matemática árabe que era mais desenvolvida que a matemática praticada na Europa Ocidental.

Após concluir que o sistema de numeração indo-arábicos, o qual incluía o princípio do valor de lugar, era bem mais prático que todos os outros sistemas de numeração, inclusive, o sistema de algarismos romanos, Fibonacci escreveu o seu primeiro livro, *Liber Abaci* (*Livro do Ábaco*), título que não condiz com o conteúdo da obra, publicado em 1202, no qual descreve em seus primeiros capítulos, as nove cifras indianas (nove algarismos), o zero e as operações elementares envolvendo tais algarismos (incluindo o zero).

Segundo Lívio (2011, p. 111), Fibonacci inicia o *Liber Abaci* da seguinte forma: “os nove números indianos são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com esses nove números e com o 0... qualquer número pode ser escrito...” E para Boyer (1974, p. 185), o *Liber Abaci* “é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos em que o uso dos numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.”

Nos seus problemas são incluídas questões úteis aos mercadores, como conversões monetárias, cálculo de juros, médias, entre outras. Além desses problemas de ordem prática, existem outros tantos, tais como, o problema do resto chinês, a regra da falsa posição, e mais outros que são resolvidos através do uso de equações quadráticas. A obra também apresenta justificativas geométricas de fórmulas quadráticas e métodos para se



obter somas de séries.

Segue um exemplo de um dos problemas que se encontra no *Liber Abaci*:

Um homem cujo fim se aproximava chamou seus filhos e disse: “Dividam meu dinheiro do modo como irei descrever.” Para seu filho mais velho, ele disse: “Você terá 1 *bezant* [uma moeda de ouro originalmente cunhada em Bizâncio] e um sétimo do que sobrar.” Ao segundo filho, disse: “Pegue dois *bezants* e um sétimo do que sobrar.” Ao terceiro filho, disse: “Você pegará 3 *bezants* e um sétimo do que sobrar.” Assim, ele deu a cada filho 1 *bezant* a mais do que ao filho anterior e um sétimo do que restava e, para o último filho, tudo o que restava. Após seguirem cuidadosamente as instruções, os filhos viram que tinham dividido sua herança igualmente. Quantos filhos havia e qual o tamanho da herança (LÍVIO, 2011, p. 114, grifo do autor)?

Após essa obra, Fibonacci gozou de muito sucesso e prestígio a ponto do Imperador Frederico II<sup>2</sup> tê-lo convidado para participar de uma competição matemática, onde foi apresentado vários problemas considerados difíceis pelo matemático da Corte, Johannes Palermo. Fibonacci resolveu todos os problemas os quais a solução de dois deles apresentou em um livro chamado *Flos (Flor)*, publicado em 1225.

Um dos problemas era o de encontrar  $x$  racional tal que  $x^2 - 5$  e  $x^2 + 5$  fossem também racionais. Fibonacci foi o único matemático a apresentar a resposta,  $x = 41/12$ .

Para Lívio (2011, p. 115):

Hoje temos de ficar impressionados com o fato de que, sem a ajuda de computadores ou calculadoras de qualquer tipo, simplesmente através de sua manipulação virtuosa da Teoria dos Números, Fibonacci tenha sido capaz de ver que a solução para o problema acima era  $41/12$ . De fato,  $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$  e  $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$ .

Além do *Liber Abaci* e do *Flos*, Fibonacci escreveu outros dois livros: o *Practica Geometriae*, publicado em 1220, onde ele apresentou os conhecimentos de Geometria e Trigonometria da época e o *Liber Quadratorum*, publicado em 1225, que é considerado a sua obra mais avançada, pois trata da Teoria dos Números. No entanto, Fibonacci ficou conhecido não exatamente pelos seus livros, mas pelo fato de Edouard Lucas<sup>3</sup>, na sua Coleção *Récréations mathématiques*, ter dado o nome fibonacci a uma sequência que aparece como solução de um problema do *Liber Abaci*, que descreveremos a seguir.

## 1.2 O problema da reprodução de coelhos

O *Liber Abaci* apresenta em seu Capítulo 12, o seguinte problema:

“Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?”

**Solução:** Segue abaixo o processo de reprodução em cada mês:

<sup>2</sup>Conhecido como “Stupor Mundi”, “Maravilha do Mundo”, por patrocinar as ciências e a matemática.

<sup>3</sup>François Édouard Anatole Lucas (1842–1891), matemático francês que ficou muito conhecido pelos seus resultados em Teoria dos Números, em particular, na Sequência de Fibonacci. Lucas também é conhecido pela sua invenção da Torre de Hanoi e outras recreações matemáticas.

- No 1º mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes).
- No 2º mês, continuamos com um par de coelhos (agora adultos).
- No 3º mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos e um par de filhotes).
- No 4º mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes).
- No 5º mês, o par inicial gera o seu terceiro par de filhotes; o segundo par de adultos gera o seu primeiro par de filhotes e o par de filhotes gerado no mês anterior, agora adulto. Logo, temos cinco pares de coelhos (três pares de adultos mais dois pares de filhotes).
- Etc.

Notamos que num determinado mês, o número de pares de coelhos será igual ao número de pares do mês anterior mais o número de pares do mês anterior ao anterior, pois serão esses últimos que contribuirão com o acréscimo do número de pares de filhotes.

A Figura 1.2 mostra a reprodução dos coelhos até o sexto mês.

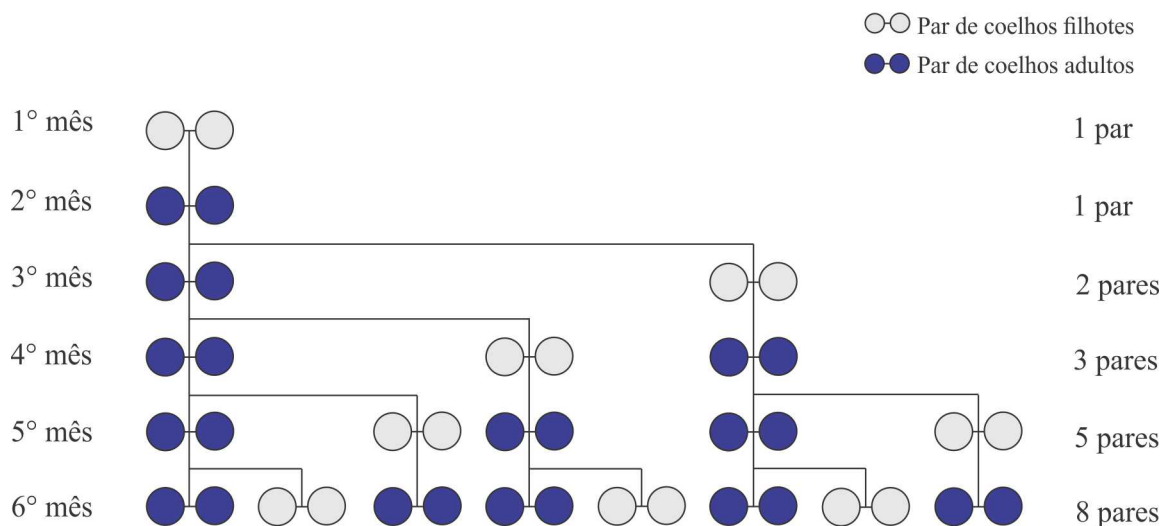


Figura 1.2: Crescimento populacional de coelhos.

Figura feita pelo autor usando o software CorelDRAW X6.

Na Tabela 1.1, segue a solução resumida até o 12º mês, onde haverá 144 pares de coelhos.

Mês	Nº de pares de adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Tabela 1.1: Solução resumida do problema da reprodução de coelhos.

### 1.3 Definindo a Sequência de Fibonacci

Considerando que no problema anterior não haja morte e nem migração de coelhos (nem de dentro pra fora e nem de fora pra dentro), sua generalização é dada por:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, \dots,$$

onde,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{com } n > 2 \text{ e } f_1 = f_2 = 1.$$

Essa relação define, por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada *Sequência de Fibonacci*, cujos termos são chamados de *Números de Fibonacci*.

Os Números de Fibonacci apresentam propriedades aritméticas notáveis que são, até hoje, objeto de investigação. Existe até uma revista intitulada *The Fibonacci Quarterly*, fundada em 1963, dedicada à pesquisa em torno desses números. Mas o que mais nos impressiona é o fato de que esses números aparecem na geometria, na Teoria dos Números, na genética, assim como surgem, inesperadamente, em fenômenos aparentemente desconexos, tais como, na distribuição das sementes dentro de um girassol, na árvore genealógica de um zangão e na relação com o Número de Ouro, como veremos nos próximos capítulos.

### 1.4 Propriedades

Antes de apresentarmos as propriedades referentes aos Números de Fibonacci, apresentaremos a seguir o Princípio de Indução Matemática em suas duas formas, os quais

servem como instrumentos para demonstrar resultados matemáticos. Salientamos que para todo o texto que se segue consideraremos o conjunto dos números naturais como sendo  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ .

**Teorema 1.1** (Princípio de Indução Matemática). *Seja  $a \in \mathbb{N}$  e suponhamos que a cada número natural  $n \geq a$  esteja associada uma afirmação  $p(n)$ . Suponhamos ainda que*

(i)  *$p(a)$  é verdadeira, e que*

(ii) *Para todo  $n \geq a$ ,  $p(n) \Rightarrow p(n+1)$  é verdade*

*então,  $p(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq a$ .*

Este princípio admite uma variante que se revela muito útil e que apresentaremos a seguir.

**Teorema 1.2** (Segundo Princípio de Indução Matemática). *Seja  $a \in \mathbb{N}$  e suponhamos que a cada número natural  $n \geq a$  esteja associada uma afirmação  $p(n)$ . Suponhamos ainda que*

(i)  *$p(a)$  é verdadeira, e que*

(ii) *Para todo  $r \geq a$ , se  $p(k)$  é verdadeira sempre que  $a \leq k < r$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , então  $p(r)$  também é verdadeira,*

*então,  $p(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq a$ .*

A seguir, apresentaremos algumas propriedades referentes à Sequência de Fibonacci, as quais algumas serão demonstradas e as demais ficam como atividade para o leitor.

### 1.4.1 Propriedades Elementares

**Propriedade 1.3** (Soma dos  $n$  primeiros Números de Fibonacci). *Para todo  $n \geq 1$ ,*

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

*Demonstração.* Por Indução sobre  $n$ .

A afirmação é verdadeira para  $n = 1$ , pois  $f_1 = 1$  e  $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$ . Logo, vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $n = k$ , ou seja,

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = f_{k+2} - 1, \quad \text{Hipótese de Indução (HI).}$$

Devemos mostrar que ela é também verdadeira para  $n = k + 1$ , ou seja, mostraremos que

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1} = f_{(k+1)+2} - 1.$$

De fato, somando  $f_{k+1}$  em ambos os membros da HI e levando em consideração que  $f_{k+1} + f_{k+2} = f_{k+3}$ , obtemos

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1} = f_{k+2} - 1 + f_{k+1} = f_{k+3} - 1 = f_{(k+1)+2} - 1,$$

estabelecendo o resultado para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Propriedade 1.4** (Soma dos Números de Fibonacci de ordem ímpar). *Para todo  $n \geq 1$ ,*

$$f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

**Propriedade 1.5** (Soma dos Números de Fibonacci de ordem par). *Para todo  $n \geq 1$ ,*

$$f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

**Propriedade 1.6** (Soma dos quadrados dos  $n$  primeiros Números de Fibonacci). *Para todo  $n \geq 1$ ,*

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

**Propriedade 1.7** (Soma dos Números de Fibonacci com sinais alternados). *Para todo  $n \geq 2$ ,*

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1.$$

*Demonstração.* Por Indução sobre  $n$ .

A afirmação é obviamente verdadeira para  $n = 2$ , pois  $f_1 - f_2 = 1 - 1 = 0$  e  $(-1)^{2+1} f_{2-1} + 1 = -1 \cdot 1 + 1 = 0$ . Logo, vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $n = k$ , ou seja,

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots + (-1)^{k+1} f_k = (-1)^{k+1} f_{k-1} + 1 \quad (\text{HI}),$$

devemos mostrar que ela também vale para  $n = k + 1$ , ou seja, que

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots + (-1)^{k+1} f_k + (-1)^{k+2} f_{k+1} = (-1)^{k+2} f_k + 1.$$

De fato, somando  $(-1)^{k+2} f_{k+1}$  em ambos os membros da HI e notando que  $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ , obtemos

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots + (-1)^{k+1} f_k + (-1)^{k+2} f_{k+1} &= \\ (-1)^{k+1} f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2} f_{k+1} &= \\ (-1)^{k+1} f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2} (f_k + f_{k-1}) &= \\ (-1)^{k+1} f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2} f_k + (-1)^{k+2} f_{k-1}. & \end{aligned}$$

Como  $(-1)^{k+1} f_{k-1} + (-1)^{k+2} f_{k-1} = 0$ , o resultado segue. ■

**Propriedade 1.8.** *Se  $m \geq 1$  e  $n > 1$ , então*

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}.$$

*Demonstração.* Pelo Segundo Princípio de Indução sobre  $m$ .

A afirmação é verdadeira para  $m = 1$ , pois  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$  e  $f_{n-1} \cdot f_1 + f_n \cdot f_{1+1} = f_{n-1} \cdot 1 + f_n \cdot 1 = f_{n-1} + f_n$ .

Para  $m = 2$ , a afirmação é também verdadeira, pois  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  e  $f_{n-1} \cdot f_2 + f_n \cdot f_{2+1} = f_{n-1} \cdot 1 + f_n \cdot 2 = (f_{n-1} + f_n) + f_n = f_{n+1} + f_n$ . Logo, vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $m$  inteiro tal que  $1 \leq m < t$ , com  $t$  inteiro. Sendo assim, escrevemos:

$$f_{n+(t-2)} = f_{n-1}f_{t-2} + f_n f_{t-1}$$

e

$$f_{n+(t-1)} = f_{n-1}f_{t-1} + f_n f_t.$$

Somando as duas igualdades acima, membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} f_{n+(t-2)} + f_{n+(t-1)} &= (f_{n-1}f_{t-2} + f_{n-1}f_{t-1}) + (f_n f_{t-1} + f_n f_t) \\ f_{n+t} &= f_{n-1}(f_{t-2} + f_{t-1}) + f_n(f_{t-1} + f_t) \\ f_{n+t} &= f_{n-1}f_t + f_n f_{t+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a propriedade também vale para  $m = t$ , sempre que  $n > 1$ , o que conclui a prova. ■

**Propriedade 1.9.** *Para todo  $n > 1$ ,*

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$$

*Demonstração.* Fazendo  $m = n$  na propriedade anterior, temos

$$\begin{aligned} f_{n+n} &= f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} \\ f_{2n} &= f_n(f_{n-1} + f_{n+1}). \end{aligned}$$

Como  $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ , obtemos

$$f_{2n} = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} + f_{n-1}) = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2,$$

o que conclui a demonstração. ■

**Propriedade 1.10** (Identidade de Cassini). *Para todo  $n > 1$ ,*

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

*Demonstração.* Por Indução sobre  $n$ .

A afirmação é verdadeira para  $n = 2$ , pois  $f_2^2 - f_{2-1} \cdot f_{2+1} = 1 - 1 \cdot 2 = -1$  e  $(-1)^{2+1} = -1$ . Logo, vale a base da indução.

Supondo a afirmação verdadeira para  $n = k$ , ou seja,

$$f_k^2 - f_{k-1}f_{k+1} = (-1)^{k+1} \Rightarrow f_{k-1}f_{k+1} = f_k^2 - (-1)^{k+1} \quad (\text{HI}),$$

devemos mostrar que ela é também verdadeira para  $n = k + 1$ , ou seja, mostraremos que

$$f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2} = (-1)^{k+2}.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2} &= f_{k+1}f_{k+1} - f_k f_{k+2} \\ &= f_{k+1}(f_k + f_{k-1}) - f_k f_{k+2} \\ &= f_k f_{k+1} + f_{k-1}f_{k+1} - f_k f_{k+2} \end{aligned}$$

e pela HI, obtemos

$$\begin{aligned} f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2} &= f_k f_{k+1} + (f_k^2 - (-1)^{k+1}) - f_k f_{k+2} \\ &= (f_k f_{k+1} + f_k^2) + (-1)(-1)^{k+1} - f_k f_{k+2} \\ &= f_k(f_{k+1} + f_k) - f_k f_{k+2} + (-1)^{k+2} \\ &= f_k f_{k+2} - f_k f_{k+2} + (-1)^{k+2} \\ &= (-1)^{k+2}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

**Propriedade 1.11.** Para todo  $n \geq 1$ ,

$$f_n f_{n+3} - f_{n+1} f_{n+2} = (-1)^{n+1}.$$

**Propriedade 1.12.** Para todo  $n \geq 1$ ,

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \dots + nf_n = (n+1)f_{n+2} - f_{n+4} + 2.$$

**Propriedade 1.13.** Para todo  $n \geq 1$ , tem-se

$$i) f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \dots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2.$$

$$ii) f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \dots + f_{2n} f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1.$$

**Propriedade 1.14.** Para todo  $n \geq 1$ ,

$$f_3 + f_6 + f_9 + \dots + f_{3n} = \frac{f_{3n+2} - 1}{2}.$$

*Demonstração.* Por Indução sobre  $n$ .

A afirmação é verdadeira para  $n = 1$ , pois  $f_3 = 2$  e  $\frac{f_{3 \cdot 1 + 2} - 1}{2} = \frac{f_5 - 1}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$ . Logo, vale a base da indução.

Supondo-a verdadeira para  $n = k$ , ou seja

$$f_3 + f_6 + f_9 + \dots + f_{3k} = \frac{f_{3k+2} - 1}{2} \quad (\text{HI}),$$

devemos mostrar que ela é também verdadeira para  $n = k + 1$ , ou seja, mostraremos que

$$f_3 + f_6 + f_9 + \dots + f_{3k} + f_{3k+3} = \frac{f_{3k+5} - 1}{2}.$$

De fato, adicionando  $f_{3k+3}$  em ambos os membros da HI, obtemos

$$\begin{aligned} f_3 + f_6 + f_9 + \dots + f_{3k} + f_{3k+3} &= \frac{f_{3k+2} - 1}{2} + f_{3k+3} \\ &= \frac{f_{3k+2} - 1 + 2f_{3k+3}}{2} \\ &= \frac{f_{3k+2} + f_{3k+3} + f_{3k+3} - 1}{2} \\ &= \frac{f_{3k+4} + f_{3k+3} - 1}{2} \\ &= \frac{f_{3k+5} - 1}{2}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

**Propriedade 1.15.** Para todo  $n \geq 1$ ,

$$nf_1 + (n-1)f_2 + (n-2)f_3 + \dots + 2f_{n-1} + f_n = f_{n+4} - (n+3).$$

**Propriedade 1.16.** Para todo  $n \geq 1$ ,

$$f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 = f_{2n+3}.$$

*Demonstração.* Por Indução sobre  $n$ .

A afirmação é verdadeira para  $n = 1$ , pois  $f_{1+1}^2 + f_{1+2}^2 = 1 + 4 = 5$  e  $f_{2 \cdot 1 + 3} = 5$ . Logo, vale a base da indução.

Supondo-a verdadeira para  $n = k$ , ou seja,

$$f_{k+1}^2 + f_{k+2}^2 = f_{2k+3} \quad (\text{HI}),$$

devemos mostrar que ela é também verdadeira para  $n = k + 1$ , ou seja, mostraremos que

$$f_{k+2}^2 + f_{k+3}^2 = f_{2k+5}.$$

De fato, basta somar  $f_{k+3}^2 - f_{k+1}^2 = f_{2k+4}$ , Propriedade 1.9, membro a membro com a HI:

$$\begin{aligned} f_{k+1}^2 + f_{k+2}^2 + (f_{k+3}^2 - f_{k+1}^2) &= f_{2k+3} + f_{2k+4} \\ f_{k+2}^2 + f_{k+3}^2 &= f_{2k+5}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■



**Propriedade 1.17.** Para todo  $n \geq 3$ ,

$$\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}}.$$

**Propriedade 1.18.**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1.$

**Propriedade 1.19.** Para todo  $n > 1$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

## 1.4.2 Propriedades Lineares

**Definição 1.1.** Sequências de Fibonacci são sequências que obedecem à lei recursiva  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ , ou seja, sequências onde cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

Podemos citar como exemplo as sequências  $(2, 5, 7, 12, 19, \dots)$  e  $(-1, 2, 1, 3, 4, \dots)$ .

**Observação 1.20.** Quando nos referirmos à Sequência de Fibonacci (no singular), estaremos falando da sequência original  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ , onde o seu  $n$ -ésimo termo é denotado por  $f_n$ .

**Propriedade 1.21.** Seja  $x^2 = x + 1$ . Então para  $n \geq 2$  temos que

$$x^n = u_n x + u_{n-1},$$

onde  $u_n$  é uma sequência de Fibonacci qualquer.

*Demonstração.* Por Indução sobre  $n$ .

A afirmação é trivialmente verdadeira para  $n = 2$ . Logo, vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $n = k$ , ou seja,  $x^k = u_k x + u_{k-1}$  (HI), devemos mostrar que ela é também verdadeira para  $n = k + 1$ , ou seja,

$$x^{k+1} = u_{k+1} x + u_k.$$

De fato,

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x \cdot x^k \\ &= x(u_k x + u_{k-1}) \\ &= u_k x^2 + u_{k-1} x \\ &= u_k(x + 1) + u_{k-1} x \\ &= u_k x + u_k + u_{k-1} x \\ &= (u_k + u_{k-1})x + u_k \\ &= u_{k+1} x + u_k, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

**Propriedade 1.22** (Soma de seqüências de Fibonacci). *Sejam  $(u_n)$  e  $(v_n)$  duas seqüências de Fibonacci. Se  $z_n = u_n + v_n$ , então, para todo  $n > 2$ , tem-se*

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2},$$

o que significa que  $(z_n)$  é uma outra seqüência de Fibonacci.

*Demonstração.* Como  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são seqüências de Fibonacci, então

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{e} \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-2}.$$

Somando as duas equações acima, membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} u_n + v_n &= (u_{n-1} + v_{n-1}) + (u_{n-2} + v_{n-2}) \\ z_n &= z_{n-1} + z_{n-2}, \end{aligned}$$

o que prova a propriedade. ■

**Propriedade 1.23** (Produto de uma seqüência de Fibonacci por um escalar). *Seja  $(v_n)$  uma seqüência de Fibonacci e  $\lambda$  um escalar real. Então a seqüência  $(\lambda v_n) = \lambda(v_n)$  satisfaz*

$$\lambda v_n = \lambda v_{n-1} + \lambda v_{n-2},$$

o que significa que a seqüência  $(\lambda v_n)$  é uma outra Seqüência de Fibonacci.

*Demonstração.* Como  $(v_n)$  é uma seqüência de Fibonacci, então, para todo  $n > 2$ ,  $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ .

Multiplicando ambos os membros da equação acima por  $\lambda$ , obtemos

$$\lambda v_n = \lambda v_{n-1} + \lambda v_{n-2},$$

o que mostra que  $(\lambda v_n)$  é uma seqüência de Fibonacci. ■

**Definição 1.2.** Duas seqüências de Fibonacci  $(u_n)$  e  $(v_n)$  não nulas, são ditas *linearmente dependentes (LD)* se existe uma constante  $\lambda \neq 0$  tal que  $u_n = \lambda v_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , caso contrário, elas são ditas *linearmente independentes (LI)*.

No caso de duas seqüências de Fibonacci serem LD, os seus termos não nulos são ordenadamente proporcionais, ou seja,

$$\frac{u_n}{v_n} = \lambda, \quad \text{sempre que } v_n \neq 0.$$

**Lema 1.24.** *Duas seqüências de Fibonacci  $(u_n)$  e  $(v_n)$  não nulas, são LD se, e somente se, existem um  $r \in \mathbb{N}$  e um  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tais que  $u_r = \lambda v_r$  e  $u_{r+1} = \lambda v_{r+1}$ .*

*Demonstração.* Por Indução sobre  $n = r$ .

Das hipóteses de que existem um  $r \in \mathbb{N}$  e um  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tais que  $u_r = \lambda v_r$  e  $u_{r+1} = \lambda v_{r+1}$ , para  $n = r + 2$ , temos

$$u_{r+2} = u_r + u_{r+1} = \lambda v_r + \lambda v_{r+1} = \lambda(v_r + v_{r+1}) = \lambda v_{r+2},$$

logo, vale a base da indução.

Supondo a afirmação verdadeira para  $n = r + k$ , com  $k > 1$ , ou seja,

$$u_{r+k} = \lambda v_{r+k} \quad (\text{HI}),$$

devemos mostrar que ela é também verdadeira para  $n = r + (k + 1)$ , ou seja, mostraremos que  $u_{r+(k+1)} = \lambda v_{r+(k+1)}$ .

De fato,

$$u_{r+(k+1)} = u_{r+k-1} + u_{r+k} = \lambda v_{r+k-1} + \lambda v_{r+k} = \lambda(v_{r+k-1} + v_{r+k}) = \lambda v_{r+(k+1)}.$$

Logo,

$$u_n = \lambda v_n, \quad \forall n \geq r.$$

Resta verificarmos a afirmação para  $1 \leq n < r$ . Para isto, basta observar o seguinte:

$$\begin{aligned} u_{r+1} &= u_{r-1} + u_r \Rightarrow \\ u_{r-1} &= u_{r+1} - u_r \\ &= \lambda v_{r+1} - \lambda v_r \\ &= \lambda(v_{r+1} - v_r) \\ &= \lambda v_{r-1} \end{aligned}$$

e que de maneira análoga, teremos:

$$u_{r-2} = \lambda v_{r-2}, \quad u_{r-3} = \lambda v_{r-3}, \quad \dots, \quad u_2 = \lambda v_2, \quad u_1 = \lambda v_1.$$

Portanto,

$$u_n = \lambda v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são LD.

A outra implicação é imediata. ■

**Proposição 1.25.** *Se  $(u_n)$  é uma sequência de Fibonacci não nula e existe um  $r \in \mathbb{N}$  com  $u_r = 0$ , então  $u_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N} - \{r\}$ .*

*Demonstração.* Se  $r = 1$ , então temos a sequência

$$0, u_2, u_2, 2u_2, 3u_2, 5u_2, 8u_2, \dots,$$

isto é,  $u_n = f_{n-1}u_2$  para todo  $n > 1$  e, como a sequência  $(u_n)$  é não nula, segue que,  $u_2 \neq 0$ . Portanto,  $u_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ .

Consideremos agora o caso em que  $r > 1$ .

Primeiramente, vejamos que  $u_{r-1} \neq 0$ . Para isto, suponhamos, por absurdo, que  $u_{r-1} = 0$ , sendo assim, teremos

$$u_{r+1} = u_{r-1} + u_r = 0, u_{r+2} = u_r + u_{r+1} = 0, \dots$$

e

$$u_{r-2} = u_r - u_{r-1} = 0, u_{r-3} = u_{r-1} - u_{r-2} = 0, \dots, u_3 = u_2 = u_1 = 0,$$

onde concluímos que  $u_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que é um absurdo, pois  $(u_n)$  é não nula. Logo,  $u_{r-1} \neq 0$  e, deste modo, a sequência  $(u_n)$  é dada por:

$$\begin{aligned} &(-1)^{r-2} f_{r-1} u_{r-1}, (-1)^{r-3} f_{r-2} u_{r-1}, \dots, 5u_{r-1}, -3u_{r-1}, 2u_{r-1}, -u_{r-1}, u_{r-1}, \\ &0, u_{r-1}, u_{r-1}, 2u_{r-1}, 3u_{r-1}, 5u_{r-1}, 8u_{r-1}, \dots \end{aligned}$$

Observemos que

$$u_{r-k} = (-1)^{k-1} f_k u_{r-1}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq r-1,$$

$$u_{r+k} = f_k u_{r-1}, \quad \forall k \geq 1, \quad u_{r-1} \neq 0 \quad \text{e} \quad u_r = 0.$$

Portanto,  $u_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N} - \{r\}$ . ■

**Proposição 1.26** (Combinação linear de sequências de Fibonacci). *Se  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são sequências de Fibonacci LI, então qualquer sequência de Fibonacci  $(z_n)$  pode ser escrita como combinação linear de  $(u_n)$  e  $(v_n)$ , ou seja,  $z_n = au_n + bv_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes reais.*

*Demonstração.* Primeiramente, consideremos o caso em que  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^*$ . Como  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são LI, pelo Lema 1.24, não existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tal que  $u_1 = \lambda v_1$  e  $u_2 = \lambda v_2$ , logo,

$$\frac{u_1}{v_1} \neq \frac{u_2}{v_2}.$$

Dessa última relação, tiramos que

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0.$$

Consideremos então a sequência de Fibonacci  $(z_n)$  tal que

$$\begin{cases} z_1 = au_1 + bv_1 \\ z_2 = au_2 + bv_2 \end{cases}$$

é um sistema de equações nas incógnitas  $a$  e  $b$ . Resolvendo-o, encontramos a solução única

$$a = \frac{z_1 v_2 - z_2 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{z_2 u_1 - z_1 u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1},$$

visto que  $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$ .

Podemos mostrar, através do Segundo Princípio de Indução sobre  $n$ , que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = au_n + bv_n$ . De fato,

$$z_3 = z_1 + z_2 = (au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) = a(u_1 + u_2) + b(v_1 + v_2) = au_3 + bv_3,$$

logo, vale a base da indução.

Supondo, agora,  $z_n = au_n + bv_n$ , para todo  $3 \leq n \leq k$ , teremos

$$z_{k+1} = z_k + z_{k-1} = (au_k + bv_k) + (au_{k-1} + bv_{k-1}) = a(u_k + u_{k-1}) + b(v_k + v_{k-1}) = au_{k+1} + bv_{k+1}.$$

Portanto,  $z_n = au_n + bv_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Agora, consideremos o caso em que  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ . Pela Proposição 1.25, sabemos que cada uma das sequências  $(u_n)$  e  $(v_n)$  têm no máximo um termo nulo e, deste modo, podemos escolher um  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $u_r, u_{r+1}, v_r, v_{r+1} \in \mathbb{R}^*$  e, do mesmo modo que antes, encontramos constantes reais  $a$  e  $b$ , com  $z_n = au_n + bv_n$ , para todo  $n \geq r$ . Além disso,

$$z_{r-1} = z_{r+1} - z_r = (au_{r+1} + bv_{r+1}) - (au_r + bv_r) = a(u_{r+1} - u_r) + b(v_{r+1} - v_r) = au_{r-1} + bv_{r-1},$$

e que de modo análogo, teremos

$$z_{r-2} = au_{r-2} + bv_{r-2}, z_{r-3} = au_{r-3} + bv_{r-3}, \dots, z_1 = au_1 + bv_1.$$

Portanto,

$$z_n = au_n + bv_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

## 1.5 A Fórmula de Binet

Será possível encontrar uma fórmula fechada que expresse um termo qualquer da Sequência de Fibonacci apenas conhecendo sua posição na sequência?

A resposta é afirmativa e foi dada em 1718 por De Moivre<sup>4</sup>. Porém, a fórmula ficou conhecida pelo nome de Binet<sup>5</sup>, que a redescobriu em 1843.

**Definição 1.3.** Uma progressão geométrica  $(q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots)$  é uma *sequência de Fibonacci* se para todo  $n \geq 3$ ,  $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$ .

<sup>4</sup> Abraham de Moivre (1667–1754), matemático francês que ficou famoso pela *Fórmula de De Moivre*, a qual relaciona os números complexos com a trigonometria, e por seus trabalhos na distribuição normal e na teoria das probabilidades.

<sup>5</sup> Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), matemático francês que foi um dos precursores no estudo dos fundamentos da teoria matricial.

Dividindo a equação acima por  $q^{n-2} \neq 0$ , obtemos a equação

$$q^2 = q + 1,$$

cujas raízes são

$$q_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Proposição 1.27.** *Seja  $(u_1, u_2, u_3, \dots)$  uma sequência de Fibonacci qualquer. Então, existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que, para todo  $n \geq 1$*

$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n,$$

onde  $q_1$  e  $q_2$  são as raízes encontradas anteriormente.

*Demonstração.* Pelo Segundo Princípio de Indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  e  $n = 2$ , formamos o sistema

$$\begin{cases} \alpha q_1 + \beta q_2 = u_1 \\ \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 = u_2, \end{cases}$$

nas variáveis  $\alpha$  e  $\beta$ , o qual apresenta a solução única:

$$\alpha = \frac{q_2 u_1 - u_2}{q_1(q_2 - q_1)} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{q_1 u_1 - u_2}{q_2(q_1 - q_2)},$$

tendo em vista que  $q_1 \neq q_2$ .

Supondo que a afirmação seja verdadeira para todo  $n$  tal que  $1 \leq n \leq k$ , com  $k$  inteiro, mostraremos que ela é também verdadeira para  $k + 1$ .

De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + u_{k-1} \\ &= (\alpha q_1^k + \beta q_2^k) + (\alpha q_1^{k-1} + \beta q_2^{k-1}) \\ &= (\alpha q_1^k + \alpha q_1^{k-1}) + (\beta q_2^k + \beta q_2^{k-1}) \\ &= \alpha q_1^{k-1}(q_1 + 1) + \beta q_2^{k-1}(q_2 + 1). \end{aligned}$$

Como  $q_1$  e  $q_2$  são as raízes de  $q^2 = q + 1$ , então  $q_1 + 1 = q_1^2$  e  $q_2 + 1 = q_2^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \alpha q_1^{k-1} q_1^2 + \beta q_2^{k-1} q_2^2 \\ &= \alpha q_1^{k+1} + \beta q_2^{k+1}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração por indução, estabelecendo o resultado para todo  $n \geq 1$ . ■

**Proposição 1.28.** *O número de Fibonacci  $f_n$  pode ser obtido pela fórmula*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

conhecida como *Fórmula de Binet*.

*Demonstração.* Basta substituir  $f_1 = f_2 = 1$  na proposição anterior e resolver o sistema correspondente

$$\begin{cases} \alpha q_1 + \beta q_2 = 1 \\ \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ \alpha \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \beta \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1, \end{cases}$$

nas incógnitas  $\alpha$  e  $\beta$ . Resolvendo-o, encontramos  $\beta = -\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , que substituídos na proposição anterior, chega-se à Fórmula de Binet. ■

Essa demonstração também poderia ser feita usando *transformações lineares*, como pode ser visto em [28].

Com a Fórmula de Binet, demonstraremos, a seguir, mais uma propriedade dos Números de Fibonacci, o qual ficaria bem mais trabalhoso usando o Princípio de Indução.

Fazendo  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , a Fórmula de Binet fica  $f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$ .

**Propriedade 1.29.** Para todo  $n \geq 1$ ,

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = (f_{2n+3})^2.$$

*Demonstração.* Aplicaremos a Fórmula de Binet e desenvolveremos o primeiro e o segundo membros chegando a duas expressões equivalentes.

**1º membro:**

$$\begin{aligned} & (f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = \\ & \left( \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a^{n+3} - b^{n+3}}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left( 2 \cdot \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{\sqrt{5}} \right)^2 = \\ & \frac{1}{25} (a^{2n+3} - a^n b^{n+3} - a^{n+3} b^n + b^{2n+3})^2 + \frac{4}{25} (a^{2n+3} - a^{n+1} b^{n+2} - a^{n+2} b^{n+1} + b^{2n+3})^2 = \\ & \frac{1}{25} (a^{2n+3} - a^n b^n (b^3 + a^3) + b^{2n+3})^2 + \frac{4}{25} (a^{2n+3} - a^{n+1} b^{n+1} (b + a) + b^{2n+3})^2. \end{aligned}$$

De  $ab = -1$ ,  $b + a = 1$  e  $b^3 + a^3 = 4$ , obtemos

$$\begin{aligned} & (f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = \\ & \frac{1}{25} (a^{2n+3} - 4a^n b^n + b^{2n+3})^2 + \frac{4}{25} (a^{2n+3} + a^n b^n + b^{2n+3})^2 = \\ & \frac{1}{25} (a^{4n+6} + 16a^{2n} b^{2n} + b^{4n+6} - 8a^{3n+3} b^n + 2a^{2n+3} b^{2n+3} - 8a^n b^{3n+3}) + \\ & \frac{4}{25} (a^{4n+6} + a^{2n} b^{2n} + b^{4n+6} + 2a^{3n+3} b^n + 2a^{2n+3} b^{2n+3} + 2a^n b^{3n+3}) = \\ & \frac{5a^{4n+6} + 20a^{2n} b^{2n} + 5b^{4n+6} + 10a^{2n+3} b^{2n+3}}{25} \implies \\ & (f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = \frac{a^{4n+6} + 4a^{2n} b^{2n} + b^{4n+6} + 2a^{2n+3} b^{2n+3}}{5}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

**2º membro:**

$$\begin{aligned} (f_{2n+3})^2 &= \left( \frac{a^{2n+3} - b^{2n+3}}{\sqrt{5}} \right)^2 \Rightarrow \\ f_{2n+3})^2 &= \frac{a^{4n+6} - 2a^{2n+3}b^{2n+3} + b^{4n+6}}{5}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Agora devemos mostrar que (1.1) = (1.2). Para isto, igualemos as referidas expressões e manipulá-las-emos até chegarmos numa igualdade óbvia. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{a^{4n+6} + 4a^{2n}b^{2n} + b^{4n+6} + 2a^{2n+3}b^{2n+3}}{5} &= \frac{a^{4n+6} - 2a^{2n+3}b^{2n+3} + b^{4n+6}}{5} \\ 4a^{2n}b^{2n} + 2a^{2n+3}b^{2n+3} &= -2a^{2n+3}b^{2n+3} \\ 4a^{2n}b^{2n} &= -4a^{2n+3}b^{2n+3} \\ a^{2n}b^{2n} &= -a^{2n+3}b^{2n+3} \\ (ab)^{2n} &= -(ab)^{2n} \cdot (ab)^3 \\ 1 &= -(ab)^3 \\ 1 &= -(-1)^3 \\ 1 &= 1, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

Da Propriedade 1.16, podemos ainda escrever

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)^2,$$

a qual serve para gerar triplas pitagóricas como será visto na Subseção 2.3.3.

Seguem abaixo mais duas propriedades cuja demonstração será facilitada se for usada a mesma estratégia que foi usada na demonstração anterior.

**Propriedade 1.30.** Para todo  $n \geq 4$ ,

$$f_n^2 - f_{n+3}f_{n-3} = 4(-1)^{n+1}.$$

**Propriedade 1.31.** Para  $n \geq 3$ ,

$$f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 + \dots + f_n^3 = \frac{f_{3n+2} + (-1)^{n+1}6f_{n-1} + 5}{10}.$$



# Capítulo 2

## Resultados especiais e algumas Curiosidades dos Números de Fibonacci

*“O matemático não estuda a Matemática pura porque ela seja útil; ele a estuda porque deleita-se com ela, e deleita-se com ela porque ela é bela.”*

Henri Poincaré

Apresentaremos, neste capítulo, alguns resultados especiais envolvendo os Números de Fibonacci, os quais derivam de definições e de resultados referentes ao mdc e a divisão euclidiana entre dois números inteiros, onde esses últimos serão abordados na primeira seção. Ao final, exporemos algumas curiosidades dos Números de Fibonacci.

### 2.1 Preliminares

**Definição 2.1** (Divisibilidade). Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Dizemos que  $a$  divide  $b$ , denotando  $a \mid b$ , quando existe um  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = a \cdot k$ . Neste caso, dizemos também que  $a$  é um *divisor* ou um fator de  $b$ , ou ainda, que  $b$  é um *múltiplo* de  $a$ . Se  $a$  não divide  $b$ , escrevemos  $a \nmid b$ .

**Proposição 2.1.** Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  e  $k \in \mathbb{Z}$ . Tem-se que

i)  $1 \mid k$ ,  $a \mid a$  e  $a \mid 0$ .

ii) Se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então  $a \mid c$ .

*Demonstração.* i) A prova decorre das igualdades  $k = 1 \cdot k$ ,  $a = a \cdot 1$  e  $0 = a \cdot 0$ .

ii) Se  $a \mid b$  e  $b \mid c$  então existem  $m, n \in \mathbb{Z}$  tais que  $b = a \cdot m$  e  $c = b \cdot n$ . Substituindo o valor de  $b$  da primeira equação na segunda equação, obtemos

$$c = b \cdot n = (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n) \Rightarrow a \mid c.$$



**Proposição 2.2.** Se  $a, c \in \mathbb{Z}^*$  e  $b, d \in \mathbb{Z}$ , então

$$a \mid b \text{ e } c \mid d \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d.$$

*Demonstração.* Se  $a \mid b$  e  $c \mid d$ , então existem  $m, n \in \mathbb{Z}$ , tais que  $b = a \cdot m$  e  $d = c \cdot n$ .

Daí,

$$b \cdot d = (a \cdot m)(c \cdot n) = (a \cdot c)(m \cdot n) \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d.$$

Em particular, se  $a \mid b$ , então  $a \cdot k \mid b \cdot k$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}^*$ . ■

**Proposição 2.3.** Se  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , então

$$i) \quad ac \mid ad \text{ e } a \neq 0 \Rightarrow c \mid d.$$

$$ii) \quad a \mid b, \quad a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|.$$

$$iii) \quad a \mid b \text{ e } b \mid a \Rightarrow |a| = |b|.$$

$$iv) \quad a \mid b \text{ e } a \neq 0 \Rightarrow (b/a) \mid b.$$

*Demonstração.* i) De  $ac \mid ad$ , temos que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$ad = ack \Rightarrow d = ck \Rightarrow c \mid d.$$

ii) Das hipóteses, temos que existe  $k \in \mathbb{Z}^*$  tal que  $b = ak$ . Como  $|k| \geq 1$ , segue-se que  $|a| \leq |a||k| = |b|$ .

iii) Por hipótese, existem  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  tais que  $b = ak_1$  e  $a = bk_2$  e, portanto,  $a = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2)$ . Se  $a = 0$  então  $b = 0$ . Logo, o resultado vale nesse caso.

Se  $a \neq 0$ , então  $k_1k_2 = 1$ , o que implica  $k_1 = k_2 = \pm 1$ . Logo, sendo  $b = \pm a$ , então segue que  $|b| = |a|$ .

iv) Por hipótese, existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ak$  e, portanto,  $b/a$  é um inteiro. Como  $(b/a) \cdot a = b$ , segue-se que  $(b/a) \mid b$ . ■

**Proposição 2.4.** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $a \mid (b + c)$ . Então

$$a \mid b \Leftrightarrow a \mid c.$$

*Demonstração.* De  $a \mid (b + c)$ , temos que existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $b + c = a \cdot m$ .

Se  $a \mid b$ , então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = a \cdot n$ . Substituindo o valor de  $b$  da última equação na primeira, temos

$$a \cdot n + c = a \cdot m \Rightarrow c = a \cdot m - a \cdot n = a(m - n) \Rightarrow a \mid c.$$

A prova da outra implicação se faz de maneira análoga. ■

**Proposição 2.5.** Se  $a, b, c, p, q \in \mathbb{Z}$ , com  $a \neq 0$ , são tais que  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , então

$$a \mid (pb + qc).$$

*Demonstração.* De  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , temos que existem  $m, n \in \mathbb{Z}$  tais que  $b = am$  e  $c = an$ . Daí

$$pb + qc = p(am) + q(an) = a(pm + qn) \Rightarrow a \mid (pb + qc).$$

■

**Teorema 2.6** (Eudoxius). Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b \neq 0$ , então  $a$  é um múltiplo de  $b$  ou se encontra entre dois múltiplos consecutivos de  $b$ , isto é, a cada par de inteiros  $a$  e  $b$ , com  $b \neq 0$ , existe um inteiro  $q$  tal que,

$$bq \leq a < b(q + 1), \quad \text{para } b > 0$$

e

$$bq \leq a < b(q - 1), \quad \text{para } b < 0.$$

**Teorema 2.7** (Divisão Euclidiana). Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b > 0$ , existe um único par de inteiros  $q$  e  $r$ , chamados, respectivamente, de quociente e de resto da divisão de  $a$  por  $b$ , tais que

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < b \quad (r = 0 \Leftrightarrow b \mid a)$$

*Demonstração.* Dados os inteiros  $a$  e  $b$ , temos, pelo Teorema de Eudoxus, que existe um inteiro  $q$  tal que

$$bq \leq a < b(q + 1) \Rightarrow 0 \leq a - bq < b.$$

Dessa forma, definindo  $r = a - bq$ , garantimos a existência de  $q$  e  $r$ .

Quanto à unicidade, suponhamos que existam outros inteiros  $q'$  e  $r'$  tais que

$$a = bq' + r', \quad \text{com } 0 \leq r' < b.$$

Disto, segue-se que

$$0 = a - a = bq + r - (bq' + r') \Rightarrow b(q - q') = r' - r \Rightarrow b \mid (r' - r).$$

Mas, de  $r < b$  e  $r' < b$  implicando em  $|r' - r| < b$  mais o fato que  $b \mid (r' - r)$ , devemos ter  $r' - r = 0$ , ou seja,  $r' = r$ .

E da última igualdade acima, obtemos

$$r' = r \Rightarrow a - bq' = a - bq \Rightarrow bq' = bq \Rightarrow q' = q.$$

■

**Definição 2.2** (Máximo divisor comum). O *máximo divisor comum* (mdc) de dois números inteiros  $a$  e  $b$ , não simultaneamente nulos, denotado por  $(a, b)$ , é o maior inteiro  $d$  que divide  $a$  e  $b$ .

Isto significa que  $d$  possui as seguintes propriedades:

- i) É um divisor comum de  $a$  e  $b$  e
- ii) É divisível por todo divisor de  $a$  e  $b$ .

Se  $(a, b) = 1$ , dizemos que  $a$  e  $b$  são *primos entre si*.

**Teorema 2.8.** Se  $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$  e  $a = bq + r$ , então

$$(a, b) = (b, r).$$

*Demonstração.* De  $a = bq + r$ , temos que se  $c \mid b$  e  $c \mid r$  então, pela Proposição 2.5,  $c \mid a$ . E mais, de  $r = a - bq$ , se  $c \mid a$  e  $c \mid b$  então, novamente pela Proposição 2.5,  $c \mid r$ . Portanto, o conjunto dos divisores comuns de  $b$  e  $r$  é igual ao conjunto dos divisores comuns de  $a$  e  $b$ . Isto nos garante que  $(a, b) = (b, r)$ . ■

Aplicando sucessivamente a divisão euclidiana a partir de  $a$  e  $b$  até onde faça sentido, ou seja, até onde encontrarmos um resto nulo, teremos a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &= r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}. \end{aligned}$$

Segue do Teorema 2.8 que

$$r_n = (r_{n-1}, r_n) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = \dots = (b, r_1) = (a, b).$$

Disto, concluímos que o mdc de  $a$  e  $b$  é o último resto não-nulo da sequência de igualdades acima.

O processo descrito acima chama-se *Algoritmo de Euclides*<sup>1</sup>.

**Lema 2.9.** Sejam  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ ; então

$$(a, b) = (a, b + na).$$

---

<sup>1</sup>Euclides de Alexandria viveu entre os Séculos III e II a.C. e é considerado por muitos como o “Pai da Geometria”, devido ao seu mais famoso trabalho, *Os Elementos*, que é a obra matemática mais duradoura de todos os tempos, utilizada até os dias de hoje.

*Demonstração.* Seja  $d = (a, b + na)$ . Como  $d \mid a$  e  $d \mid (b + na)$ , então, pela Proposição 2.5,  $d \mid b$ , pois  $b = (-na) + (b + na)$ . Logo,  $d$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ .

Supondo agora que  $k$  seja um divisor comum de  $a$  e  $b$ ; logo,  $k$  é um divisor comum de  $a$  e de  $b + na$  e, portanto,  $k \mid d$ . Isso nos garante que  $d = (a, b)$ . ■

Apresentaremos, a seguir, mais alguns resultados envolvendo o mdc de números inteiros, onde não apresentaremos as respectivas demonstrações por serem fáceis e pra não deixar este trabalho longo.

**Proposição 2.10.** *Se  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $a \mid b$ , com  $a \neq 0$ , então*

$$(a, b) = a.$$

**Corolário 2.11.** *Se  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a \mid bc$ , com  $a \neq 0$  e  $(a, b) = 1$ , então*

$$a \mid c.$$

**Corolário 2.12.** *Se  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  são divisores de  $c \neq 0$  e  $(a, b) = 1$ , então*

$$ab \mid c.$$

**Corolário 2.13.** *Seja  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  e  $(a, b) = 1$ ; então,*

$$(a, bc) = (a, c).$$

## 2.2 Resultados especiais

**Lema 2.14.** *Dois Números de Fibonacci consecutivos,  $f_n$  e  $f_{n+1}$ , são primos entre si.*

*Demonstração.* Seja  $d = (f_n, f_{n+1})$ . Devemos mostrar que  $d = 1$ , para todo  $n$ . De fato, como  $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$  e  $d \mid f_n$  e  $d \mid f_{n+1}$ , pela Proposição 2.5, segue que  $d \mid f_{n-1}$ . Então  $d \mid f_n$  e  $d \mid f_{n-1}$ . De  $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$  e usando os mesmos argumentos acima, segue que  $d \mid f_{n-2}$ .

Prosseguindo nesse raciocínio, chegaremos a

$$d \mid f_2 \Rightarrow d \mid 1.$$

Portanto,  $d = 1$ . ■

**Lema 2.15.** *Se  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $m \mid n$ , então  $f_m \mid f_n$ .*

*Demonstração.* De  $m \mid n$ , temos  $n = mr$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ . Para cada  $n$ , faremos a demonstração por indução sobre  $r$ .

A afirmação é verdadeira para  $r = 1$ , pois teremos  $m = n$  e, então, é imediato que  $f_m \mid f_n$ . Logo, vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para um certo  $r = k$ , ou seja, que  $f_m \mid f_{mk}$  (HI).

Devemos mostrar que ela vale também para  $r = k + 1$ , ou seja, que  $f_m \mid f_{m(k+1)}$ .

De fato, da Propriedade 1.8, temos

$$f_{m(k+1)} = f_{mk+m} = f_{mk-1}f_m + f_{mk}f_{m+1}$$

e, como  $f_m \mid f_{mk-1}f_m$  e  $f_m \mid f_{mk}f_{m+1}$ , pois pela HI,  $f_m \mid f_{mk}$ , então  $f_m$  divide a soma desses dois produtos, ou seja,  $f_m \mid f_{m(k+1)}$ , o que conclui a demonstração. ■

**Lema 2.16.** *Se  $m, n, q, r \in \mathbb{N}$  com  $m = nq + r$ ,  $0 \leq r < n$ , então*

$$(f_m, f_n) = (f_n, f_r).$$

*Demonstração.* Seja  $d = (f_m, f_n)$ . Levando em consideração a Propriedade 1.8 e os Lemas 2.15 e 2.9, temos

$$d = (f_m, f_n) = (f_{nq+r}, f_n) = (f_{nq-1}f_r + f_{nq}f_{r+1}, f_n) = (f_{nq-1}f_r, f_n).$$

Agora vamos mostrar que  $(f_{nq-1}, f_n) = 1$ . Seja  $c$  um divisor comum de  $f_{nq-1}$  e de  $f_n$ . De  $c \mid f_n$  e  $f_n \mid f_{nq}$  implica  $c \mid f_{nq}$ , então segue que, pela Proposição 2.5,  $c \mid (f_{nq-1} + f_{nq})$ , ou seja,  $c \mid f_{nq+1}$ . Mas se  $c \mid f_{nq}$  e  $c \mid f_{nq+1}$ , então o Lema 2.14 nos assegura que  $c = 1$  e, então,  $(f_{nq-1}, f_n) = 1$ .

Usando agora o Corolário 2.13, obtemos

$$d = (f_m, f_n) = (f_{nq-1}f_r, f_n) = (f_r, f_n) = (f_n, f_r),$$

o que completa a prova. ■

**Teorema 2.17.** *Seja  $d = (m, n)$ . Então*

$$(f_m, f_n) = f_d.$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $m \geq n$ . Aplicando o Algoritmo de Euclides para  $m$  e  $n$ , obtemos a sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1, & 0 < r_1 < n \\ n &= r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} & \Rightarrow & r_n = d. \end{aligned}$$

Pelos Lemas 2.16 e 2.15, obtemos

$$(f_m, f_n) = (f_n, f_{r_1}) = \dots = (f_{r_{n-1}}, f_{r_n}) = f_{r_n} = f_d.$$

■

**Corolário 2.18.** *Se  $f_m \mid f_n$  e  $m \neq 2$ , então*

$$m \mid n.$$

*Demonstração.* Seja  $d = (m, n)$ . De  $f_m \mid f_n$  segue que  $(f_m, f_n) = f_m$ . Mas pelo teorema acima, temos  $(f_m, f_n) = f_d$ .

Então  $f_m = f_d$ . Se  $m > 2$ , então  $f_m \geq 2$ , logo  $f_d \geq 2$  e, portanto,  $d > 2$ , o que implica  $m = d$ .

Disto, segue que para todo  $m \neq 2$ ,  $m = d$ , ou seja,

$$d = (m, n) \Rightarrow m = (m, n) \Rightarrow m \mid n.$$

■

## 2.3 Algumas Curiosidades

### 2.3.1 1/89

A Sequência de Fibonacci possui um número muito curioso: o seu 11º termo, 89. A representação decimal do seu inverso é igual a

$$0,01123595\dots$$

Organizaremos os Números de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., como números decimais da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 0,01 \\ 0,001 \\ 0,0002 \\ 0,00003 \\ 0,000005 \\ 0,0000008 \\ 0,00000013 \\ 0,00000021 \\ 0,000000034 \\ \dots, \end{array}$$

onde o algarismo das unidades do 1º número de Fibonacci está na segunda casa decimal; o algarismo das unidades do 2º número de Fibonacci está na terceira casa decimal e assim sucessivamente, ou seja, o algarismo das unidades do  $n$ -ésimo número de Fibonacci está na  $(n + 1)$ -ésima casa decimal.

Somando todos esses números decimais, obtemos, curiosamente,

$$0,01123595\dots = 1/89.$$

Em [30], é apresentada uma outra curiosidade envolvendo o 89.

### 2.3.2 Periodicidade

Os Números de Fibonacci apresentam uma regularidade quanto à repetição de seus últimos dígitos.

O dígito das unidades se repete com uma periodicidade de 60, ou seja, a cada 60 números. Por exemplo, enquanto o 2º número é 1, o 62º é 4.052.739.537.881 que também é terminado em 1. O 122º número 14.028.366.653.498.915.298.923.761 também termina em 1. O mesmo vale para o 182º e o 242º números e assim por diante.

Esta curiosidade foi descoberta em 1774 pelo matemático franco-italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813).

A periodicidade não vale apenas para o dígito das unidades. Os últimos dois dígitos se repetem com uma periodicidade de 300, os três últimos com uma periodicidade de 1500, os últimos quatro dígitos com uma periodicidade de 15 mil, os últimos cinco dígitos a cada 150 mil vezes e os últimos seis dígitos com uma periodicidade de 1.500.000.

O matemático israelense Dov Jarden mostrou a possibilidade de se provar que para qualquer número de Fibonacci com últimos dígitos acima de três, a periodicidade é  $15 \cdot 10^{n-1}$ , onde  $n$  é o número de dígitos que são repetidos.

As informações apresentadas nesta subseção foram obtidas em [17].

### 2.3.3 Ternos pitagóricos

Quaisquer quatro Números de Fibonacci consecutivos geram uma tripla pitagórica – três números que podem servir como medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Tomemos como exemplo 1, 1, 2 e 3. O produto dos números das pontas,  $1 \cdot 3 = 3$ , o dobro do produto dos números de dentro,  $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ , e a soma dos quadrados dos números de dentro,  $1^2 + 2^2 = 5$ , formam a tripla pitagórica mais conhecida, 3, 4 e 5 ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ).

Podemos observar ainda, neste contexto, que o número que serve como hipotenusa será sempre um número de Fibonacci. As Propriedades 1.16 e 1.29 combinadas confirmam esse fato.



### 2.3.4 Sofisma geométrico

Ilustraremos agora um *sofisma geométrico* que foi apresentado pela primeira vez pelo matemático americano Sam Loyd (1841–1911), grande criador de quebra-cabeças matemáticos.

Consideremos um quadrado cujos lados tenham comprimento igual à soma de dois Números de Fibonacci consecutivos. O quadrado da Figura 2.1, tem lados iguais a  $8 = 3+5$  e área  $8^2 = 64$ . Este quadrado se apresenta dividido em 4 pedaços e esses 4 pedaços são reagrupados dando origem ao retângulo, na mesma figura, de lados 5 e 13 e área  $5 \cdot 13 = 65$ .

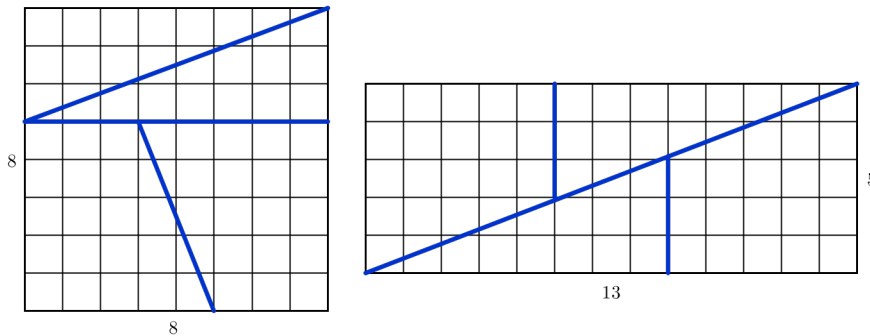


Figura 2.1: Sofisma geométrico.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Verificamos que a área das duas figuras diferem em uma unidade, sendo a do retângulo a maior. Se tivéssemos escolhido os números 5 e 8, teríamos verificado que o quadrado seria maior que o retângulo em uma unidade. Isso depende da ordem dos Números de Fibonacci escolhidos. Esse fato é verificado na Propriedade 1.10.

Entretanto, independentemente da propriedade citada acima, o quadrado e o retângulo da Figura 2.1 tem de apresentar áreas numericamente iguais. A explicação para o paradoxo matemático é que o encaixe ao longo da diagonal do retângulo não é exato. A depender dos Números de Fibonacci escolhidos, ficará uma folga ou uma sobreposição (escondida sob a linha grossa que marca a longa diagonal) de uma unidade de área.

Para provarmos esse fato, observamos o retângulo na Figura 2.2 que é o mesmo da Figura 2.1.

Por visualização,  $DE = 2$ . Se conseguirmos mostrar que na verdade  $DE \neq 2$ , ou melhor, que  $DE < 2$ , teremos encontrado a justificativa do aparente paradoxo matemático.

De fato, como  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ , temos:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}.$$

De  $AD = 5$ ,  $AB = 8$  e  $BC = 3$ , obtemos:

$$\frac{5}{DE} = \frac{8}{3} \Rightarrow DE = 1,875 < 2,$$

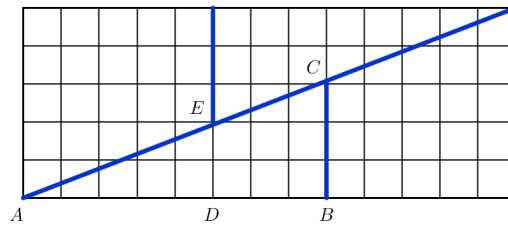


Figura 2.2: Solução do sofisma.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

como queríamos demonstrar.

Na Observação 3.6 veremos uma série somatória que proporciona um encaixe perfeito.

# Capítulo 3

## O Número de Ouro

*“A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras. O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média. O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro. O segundo podemos chamar de uma joia preciosa”.*

Johannes Kepler

Neste capítulo definiremos e apresentaremos as principais propriedades do Número de Ouro, do pentágono regular, do pentagrama e do retângulo, do triângulo e da espiral áurea, bem como, a surpreendente conexão existente entre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci.

### 3.1 Definição e um pouco de história

Na história da humanidade nenhum outro número tem intrigado tanto os homens, seja pelas propriedades matemáticas que possui como pela beleza e harmonia que sucinta, como o Número de Ouro. Venerado desde os tempos de Euclides, esse número tem a característica de aparecer em lugares inesperados.

Menos conhecido que o Pi é um outro número, o Fi ( $\Phi$ ), que, em muitos aspectos, é ainda mais fascinante. Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Secção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de “Proporção Divina” (LÍVIO, 2011, p. 13, grifo do autor).

Além dos nomes citados acima por Lívio, esse número é também chamado de *Proporção Divina* ou *Divina Proporção*, devido ao seu caráter místico, pois se acreditou (ou se acredita) ser esse número um dos alicerces com o qual deus ou os deuses construíram o universo.

Em 1899, o matemático americano Mark Barr batizou-o pela letra grega phi ( $\Phi$ ), lê-se fi, em homenagem ao escultor grego Fídias (Phídias) que viveu entre 490 e 430 a.C., por se acreditar que o mesmo tenha usado esse número em algumas de suas obras, a exemplo do Partenon e da estátua de Zeus.

A ubiquidade desse número fica evidente não apenas por ter sido usado por Pitágoras, Euclides, Fibonacci, Kepler<sup>1</sup> e outros matemáticos, físicos e astrônomos do passado e do presente, mas sim por ser estudado e usado por biólogos, arquitetos, artistas em geral e profissionais das mais diversas áreas que buscam nesse número a fonte de toda a beleza e harmonia.

De qualquer forma ele foi descoberto, sua presença é marcante não só nos vegetais, mas nos seres vivos em geral, inclusive no homem, nos cristais, na Natureza e no próprio cosmos. Depois de sua descoberta, de forma brilhante, o homem, através da Álgebra, o equacionou e chegou numa proporção, à qual deu o nome de *Proporção Áurea*, e foi através, principalmente, da Geometria que pode vislumbrar as formas perfeitas que a ele estão relacionadas. Foi através dele que buscou o entendimento não só da estrutura da Natureza e do Universo mas, principalmente, do próprio homem (CONTADOR, 2011, p. 18-19, grifo do autor).

Geometricamente, o Número de Ouro surge a partir da divisão de um segmento em razão extrema e média, definido pela primeira vez há 300 anos a.C. por Euclides, da seguinte forma:

**Definição 3.1.** Uma linha reta é cortada na *razão extrema e média* quando, assim como a linha toda está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte.

Usando a definição dada acima e observando que na Figura 3.1  $AB > AC > CB$ , temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}.$$

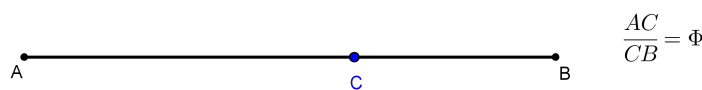


Figura 3.1: Divisão de um segmento na razão extrema e média.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Fazendo  $AC = x$  e  $CB = 1$  e, conseqüentemente,  $AB = x + 1$ , obtemos:

$$\frac{x + 1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Notando que  $\frac{AC}{CB}$  é a Razão Áurea, ou seja,  $\frac{AC}{CB} = \frac{x}{1} = x = \Phi$ , a raiz positiva da equação nos fornecerá o valor do Número de Ouro.

<sup>1</sup>Johannes Kepler (1571–1630) foi matemático e astrônomo alemão e figura central da revolução científica do Século XVII. É mais conhecido por ter formulado as três leis fundamentais da mecânica celeste, conhecidas como Leis de Kepler.

Resolvendo a equação, encontramos:

$$x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Tomemos a primeira raiz por ser positiva o valor de  $\Phi$  (phi maiúsculo). A outra raiz chamaremos de  $\phi$  (phi minúsculo). Sendo assim:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

e

$$\phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180339887\dots$$

Sendo assim,  $\Phi$  é um número irracional da mesma forma que o  $\pi$ , ou seja, tais números não podem ser representados como uma razão de números inteiros.

## 3.2 Propriedades e Potências de $\Phi$

### 3.2.1 Propriedades

Antes de apresentarmos algumas propriedades de  $\Phi$ , observemos o seguinte:

- $\Phi^2 = 1 + \Phi \Rightarrow \Phi^2 = 2,6180339887\dots$
- $\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\phi = 0,6180339887\dots$

Disto, concluímos que  $\Phi$ ,  $\Phi^2$  e  $\frac{1}{\Phi}$  têm exatamente os mesmos dígitos após a vírgula. Isso significa que  $\Phi$  tem as propriedades únicas de produzir seu quadrado apenas adicionando 1 e seu inverso subtraindo 1.

Além disso, pelas propriedades das raízes de uma equação quadrática, temos  $\Phi + \phi = 1$  e  $\Phi \cdot \phi = -1$ .

**Propriedade 3.1.** *A soma de duas potências inteiras consecutivas de  $\Phi$  resulta na potência de  $\Phi$  seguinte, ou seja:*

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

*Demonstração.* Basta observar que, no caso  $n > 0$ :

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^n(1 + \Phi) = \Phi^n \cdot \Phi^2 = \Phi^{n+2}.$$

Para  $n = -r$ , com  $r > 0$ , o que implica  $n < 0$ , basta dividir  $\Phi^2 = 1 + \Phi$  por  $\Phi^{r+2}$ :

$$\frac{\Phi^2}{\Phi^{r+2}} = \frac{1}{\Phi^{r+2}} + \frac{\Phi}{\Phi^{r+2}} \Rightarrow \frac{1}{\Phi^r} = \frac{1}{\Phi^{r+2}} + \frac{1}{\Phi^{r+1}} \Rightarrow$$

$$\Phi^{-r} = \Phi^{-r-2} + \Phi^{-r-1} \Rightarrow \Phi^n = \Phi^{n-2} + \Phi^{n-1}.$$

E para  $n = 0$ , basta observar que:

$$1 + \Phi = \Phi^2 \Rightarrow \Phi^0 + \Phi^1 = \Phi^2.$$

■

Da propriedade acima podemos concluir que a sequência,

$$(\dots, \Phi^{-n}, \dots, \Phi^{-3}, \Phi^{-2}, \Phi^{-1}, 1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \dots, \Phi^n, \dots)$$

é ao mesmo tempo geométrica e aditiva (é na verdade uma sequência de Fibonacci, pois cada termo é igual à soma dos dois anteriores), por isso que é conhecida como *progressão geométrica áurea* ou, simplesmente, *série áurea*. Segundo Contador, este é o principal motivo desta sequência desempenhar importância central no estudo do crescimento e da vida dos organismos, principalmente na Botânica.

**Propriedade 3.2** (Somatório de potências de  $\Phi$  com expoentes inteiros negativos).

$$\Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \dots = \Phi.$$

*Demonstração.* Agrupando as parcelas do primeiro membro de duas em duas e usando a propriedade anterior, temos:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \dots &= (\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) + (\Phi^{-3} + \Phi^{-4}) + (\Phi^{-5} + \Phi^{-6}) + \dots \\ &= \Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \Phi^{-6} + \dots \\ &= 1 + \Phi^{-2}(\Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \Phi^{-6} + \dots). \end{aligned}$$

Como a soma entre parêntesis acima é uma soma de termos de uma Progressão Geométrica Infinita Convergente (a razão desta PG,  $q = \Phi^{-2} = \frac{1}{\Phi^2}$ , está entre 0 e 1), o seu valor é:

$$\Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \Phi^{-6} + \dots = \frac{\Phi^0}{1 - \frac{1}{\Phi^2}} = \frac{1}{\frac{\Phi^2 - 1}{\Phi^2}} = \frac{\Phi^2}{\Phi^2 - 1} = \frac{\Phi^2}{\Phi} = \Phi.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \dots &= 1 + \Phi^{-2}(\Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \Phi^{-6} + \dots) = \\ &= 1 + \Phi^{-2} \cdot \Phi = 1 + \Phi^{-1} = 1 + \frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi + 1}{\Phi} = \frac{\Phi^2}{\Phi} = \Phi, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

■

**Observação 3.3.** De  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $\phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , a Fórmula de Binet (ver Proposição 1.28) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n - \phi^n).$$

Esta fórmula já apresenta uma forte conexão entre os termos da Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro; uma conexão mais do que curiosa, pois ela mostra que é necessário recorrer-se a uma fórmula que envolve números irracionais para representar os termos da dita sequência que são números naturais.

**Proposição 3.4.** *Se  $f_n$  é um número de Fibonacci, então vale a desigualdade*

$$f_n \geq \Phi^{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Através do Segundo Princípio de Indução sobre  $n$ .

A afirmação é verdadeira para  $n = 1$ , pois  $f_1 = 1$  e  $\Phi^{1-2} = \frac{1}{\Phi} < 1$ , ou seja,  $f_1 \geq \Phi^{-1}$ . Para  $n = 2$ , segue que  $f_2 = 1 = \Phi^0 = \Phi^{2-2}$ . Logo vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para todo  $n$  tal que  $1 \leq n \leq k$ , com  $k$  inteiro, mostraremos que ela é também verdadeira para  $k + 1$ .

De fato, basta usarmos a fórmula recursiva dos Números de Fibonacci combinada com a Propriedade 3.1 e com a hipótese de indução:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \geq \Phi^{k-2} + \Phi^{k-3} = \Phi^{k-1},$$

o que encerra a prova. ■

**Corolário 3.5.** *Se  $f_n$  é um número de Fibonacci, então vale a estimativa*

$$\Phi^{n-2} \leq f_n \leq \Phi^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Pela proposição anterior, segue que  $\Phi^{n-2} \leq f_n$ .

Então, para completarmos a demonstração, basta provarmos que  $f_n \leq \Phi^n$ . Para isso, usaremos o Segundo Princípio de Indução sobre  $n$ .

A afirmação é trivialmente verdadeira para  $n = 1$  e  $n = 2$ . Logo, vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $n$  inteiro tal que  $1 \leq n \leq k$ , com  $k$  inteiro. Sendo assim, escrevemos:

$$f_k \leq \Phi^k$$

e

$$f_{k-1} \leq \Phi^{k-1}.$$

Disto segue que:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq \Phi^k + \Phi^{k-1} = \Phi^{k+1},$$

como queríamos demonstrar. ■

### 3.2.2 Potências

Vamos mostrar agora uma relação entre as potências de  $\Phi$  e os termos da Sequência de Fibonacci.

- $\Phi^1 = 0 + \Phi$ ;
- $\Phi^2 = 1 + \Phi$ ;
- $\Phi^3 = \Phi \cdot \Phi^2 = \Phi(1 + \Phi) = \Phi + \Phi^2 = \Phi + (1 + \Phi) = 1 + 2\Phi$ ;
- $\Phi^4 = \Phi \cdot \Phi^3 = \Phi(1 + 2\Phi) = \Phi + 2\Phi^2 = \Phi + 2(1 + \Phi) = 2 + 3\Phi$ ;
- $\Phi^5 = \Phi \cdot \Phi^4 = \Phi(2 + 3\Phi) = 2\Phi + 3\Phi^2 = 2\Phi + 3(1 + \Phi) = 3 + 5\Phi$ ;
- $\Phi^6 = \Phi \cdot \Phi^5 = \Phi(3 + 5\Phi) = 3\Phi + 5\Phi^2 = 3\Phi + 5(1 + \Phi) = 5 + 8\Phi$ ;
- Etc.

Vamos resumir na Tabela 3.1 os resultados obtidos acima e levando em consideração que  $f_0 = 0$ .

$n$	$\Phi^n$
1	$0 + \Phi = f_0 + f_1\Phi$
2	$1 + \Phi = f_1 + f_2\Phi$
3	$1 + 2\Phi = f_2 + f_3\Phi$
4	$2 + 3\Phi = f_3 + f_4\Phi$
5	$3 + 5\Phi = f_4 + f_5\Phi$
6	$5 + 8\Phi = f_5 + f_6\Phi$
7	$8 + 13\Phi = f_6 + f_7\Phi$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.1: Potências de  $\Phi$ .

Lembrando que  $\Phi$  é uma raiz da equação  $x^2 = x + 1$ , então pela Propriedade 1.21 e considerando  $f_0 = 0$ , podemos escrever:

$$\Phi^n = f_{n-1} + f_n\Phi, \quad \forall n \geq 1,$$

na qual a Tabela 3.1 está condizente.



**Observação 3.6.** A série áurea

$$1, \Phi, 1 + \Phi, 1 + 2\Phi, 2 + 3\Phi, 3 + 5\Phi, 5 + 8\Phi, \dots$$

é a única que proporciona encaixe perfeito com relação ao *sofisma geométrico* visto na Subseção 2.3.4. Se o quadrado da Figura 2.1 tivesse lados iguais a  $(1 + 2\Phi) + (2 + 3\Phi) = 3 + 5\Phi$ , o retângulo teria lados iguais a  $2 + 3\Phi$  e  $5 + 8\Phi$ , conforme Figura 3.2.

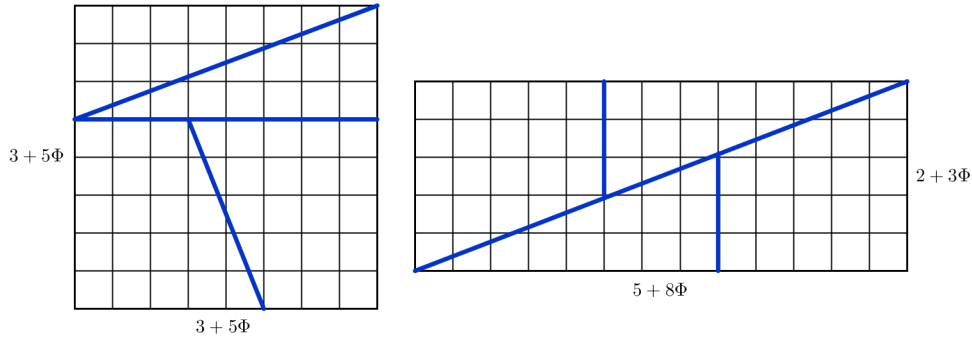


Figura 3.2: Encaixe perfeito.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Suas áreas seriam:

- Quadrado:  $(3 + 5\Phi)^2 = 9 + 30\Phi + 25\Phi^2 = 9 + 30\Phi + 25(1 + \Phi) = 34 + 55\Phi$ ;
- Retângulo:  $(2 + 3\Phi)(5 + 8\Phi) = 10 + 16\Phi + 15\Phi + 24\Phi^2 = 10 + 31\Phi + 24(1 + \Phi) = 34 + 55\Phi$ ,

portanto, iguais.

**Observação 3.7.** Podemos representar  $\Phi$  através de uma expansão infinita simples em radicais. De  $\Phi^2 = 1 + \Phi$  implicando em  $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$ , substituiremos nessa última igualdade,  $\Phi$  (o de dentro do radical) por  $\sqrt{1 + \Phi}$ , de maneira indefinida, obtendo

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

**Observação 3.8.** Podemos, também, representar  $\Phi$  através de uma série. De  $\Phi^2 = \Phi + 1$  implicando em  $\Phi = \frac{\Phi + 1}{\Phi}$ , isto é,  $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ , substituiremos, nessa última igualdade,  $\Phi$  (o do segundo membro) por  $1 + \frac{1}{\Phi}$ , gerando uma fração contínua infinita simples, como se segue:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Para Lívio (2011, p. 103), como a fração contínua correspondente à Razão Áurea (Número de Ouro) é composta somente de uns, ela converge muito lentamente. A Razão Áurea é, neste sentido, mais “difícil” de expressar como uma fração do que qualquer outro número irracional – é o “mais irracional” dos irracionais.

Além disso, olhando para as frações contínuas parciais, notamos que:

- $1 + \frac{1}{1} = 2;$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3};$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5};$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8};$
- Etc.,

onde todos os resultados são uma razão entre Números de Fibonacci consecutivos. Calcularemos tais razões com aproximação de 4 casas decimais e, em seguida, registrá-las-emos na Tabela 3.2.

Isso motiva a conjecturarmos o surpreendente resultado que é o do limite da razão de termos sucessivos da Sequência de Fibonacci ser igual ao Número de Ouro, como veremos na próxima seção.

### 3.3 Uma conexão surpreendente com a Sequência de Fibonacci

Finalmente, apresentaremos um dos resultados centrais deste trabalho, no qual conjecturamos na seção anterior.

Razão	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	1,5
5/3	1,666
8/5	1,600
13/8	1,625
21/13	1,6153
34/21	1,6190
55/34	1,6176
89/55	1,6181
144/89	1,6179
⋮	⋮

Tabela 3.2: Razão entre Números de Fibonacci consecutivos.

**Teorema 3.9.** *A razão entre dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci tende para o Número de Ouro quando  $n$  tende a infinito, isto é,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi.$$

*Demonstração.* Pela Fórmula de Binet, temos:

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

e

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Logo,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} =$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}.$$

Como  $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

■

Notamos ainda pela Tabela 3.2 que a sequência,

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots$$

possui as seguintes propriedades:

- Os termos de ordem par são decrescentes:  $2 > 1,666 > 1,625 > 1,6190, \dots$ ;
- Os termos de ordem ímpar são crescentes:  $1 < 1,5 < 1,600 < 1,6153, \dots$ ;
- Os termos consecutivos aparecem em ordem alternada.

Segundo Lívio (2011, p. 121), esta conexão foi descoberta em 1611 (embora possivelmente um anônimo italiano o tenha feito antes) pelo famoso astrônomo alemão Johannes Kepler. Porém, mais de cem anos se passaram antes que esta conexão fosse provada (e, mesmo assim, não totalmente) pelo matemático escocês Robert Simson (1687–1768). Kepler, aliás, ao que tudo indica, topou com a Sequência de Fibonacci por conta própria e não lendo o *Liber Abaci*.

Como se não bastasse a surpresa que esse resultado nos proporciona, ele na verdade está presente em qualquer sequência de Fibonacci, como bem elucidada Huntley (1985, p. 55):

[...] o *fi*, em conformidade com sua característica de aparecer inesperadamente em locais estranhos, está relacionado com qualquer sequência de inteiros formada de acordo com a lei segundo a qual cada termo é soma dos dois termos anteriores, quaisquer que sejam os dois primeiros termos:  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ . A razão de termos sucessivos,  $u_{n+1}/u_n$ , aproxima-se cada vez mais de *fi* à medida que  $n$  aumenta.

Podemos tomar como exemplo a sequência de Fibonacci de termos iniciais 4 e 7:

$$4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots,$$

cujas razões dos termos consecutivos com aproximação de 4 casas decimais

$$\begin{aligned} 7/4 &= 1,75 \\ 11/7 &= 1,5714 \\ 18/11 &= 1,6363 \\ 29/18 &= 1,6111 \\ 47/29 &= 1,6206 \\ 76/47 &= 1,6170 \\ 123/76 &= 1,6184 \\ 199/123 &= 1,6178, \end{aligned}$$

se aproximam rapidamente de  $\Phi$ .

Para demonstrar esse resultado geral, basta usar a Proposição 1.27.

### 3.4 O Retângulo, o Triângulo e a Espiral Áureos

**Definição 3.2.** Chama-se *retângulo áureo* a qualquer retângulo no qual as suas medidas estão na Razão Áurea.

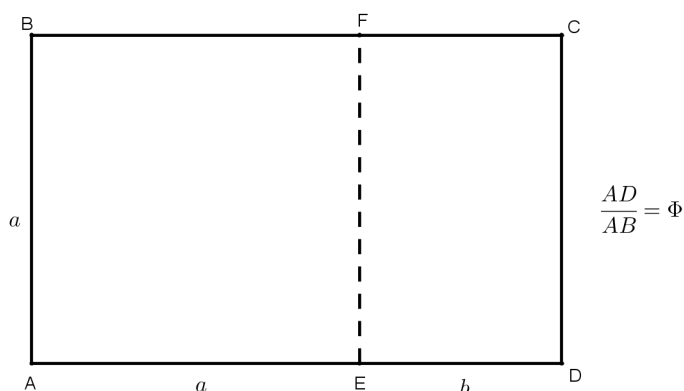


Figura 3.3: Retângulo Áureo.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Isto significa que, se no retângulo áureo da Figura 3.3, destacarmos o quadrado  $ABFE$ , o retângulo restante,  $CDEF$ , será semelhante ao retângulo original.

De fato, seja  $AB = AE = a$  e  $DE = b$ . Pela definição acima, temos:

$$\Phi = \frac{AD}{AB} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \Phi - 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\Phi - 1} = \frac{1}{-\phi} = \Phi = \frac{CD}{DE}.$$

Isto significa que se o retângulo de lados  $a + b$  e  $a$  é áureo, então também será áureo o retângulo de lados  $a$  e  $b$ .

Prosseguindo nessa tarefa, ou seja, destacamos agora um quadrado do retângulo áureo  $CDEF$ , obtemos outro retângulo interior a este, o qual também obedece às proporções áureas, e, assim, de maneira infinita, construiremos infinitos retângulos, todos eles guardando as proporções áureas, conforme a Figura 3.4. Esta propriedade se chama *auto-propagação*.

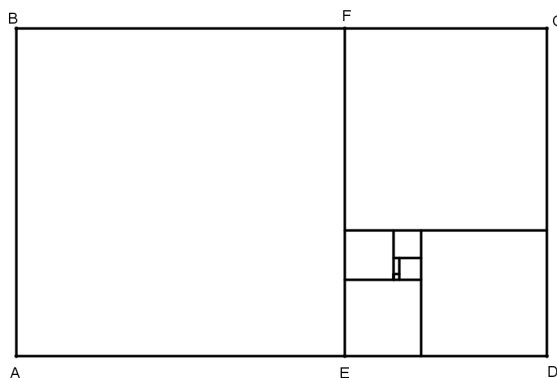


Figura 3.4: Sequência infinita de retângulos áureos.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Diante disto, dados os números  $a$  e  $b$  em Proporção Áurea, formamos a sequência:  $a_1 = a + b$ ,  $a_2 = a$ ,  $a_3 = b$ ,  $a_4 = a - b$ ,  $\dots$ ,  $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$ ,  $\dots$ , cujos termos são, dois a dois, lados de um retângulo áureo. A sequência fica então

$$a + b, a, b, a - b, 2b - a, 2a - 3b, 5b - 3a, 5a - 8b, 13b - 8a, \dots,$$

onde tais termos são decrescentes e incomensuráveis, já que os mesmos são oriundos do processo anterior de retirar quadrados de retângulos áureos, onde a razão entre os lados de cada um desses retângulos é irracional (igual a  $\Phi$ ).

Segundo Lívio (2011, p. 104), tal sequência de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto inalcançável que, devido às propriedades “divinas” atribuídas à Razão Áurea, o matemático Clifford A. Pickover sugeriu que deveríamos nos referir a esse ponto como “O Olho de Deus”. Tal ponto é chamado, na literatura matemática, de foco.

Muitos estudiosos afirmaram que o retângulo áureo é o retângulo mais esteticamente agradável. Tendo exercido, ao longo de séculos, muita influência na pintura e na arquitetura, atualmente, o mesmo é muito utilizado, também, no formato de capas de livros e cadernos, cartões de crédito, cartas de baralho, carteira de identidade, janelas, etc.

O filósofo e matemático alemão Gustav Theodor Fechner (1801–1887), realizou na década de 1860 experiências cujo objetivo era o de mostrar qual tipo de retângulo era o preferido pela maioria das pessoas. Tais experiências consistiam em mostrar a vários voluntários dez retângulos onde o quociente entre comprimento e largura variavam de 1,00 (no caso de um quadrado) à 2,5 (o que seria um retângulo alongado). Era pedido aos voluntários que escolhessem o retângulo mais agradável, elegante e harmônico. Fechner constatou que 76% das escolhas se concentraram em três retângulos que tinham as razões 1,50, 1,62 e 1,75, com pico no retângulo áureo (1,62). Cada um dos demais retângulos foi escolhido por menos de 10% dos voluntários. Para maiores detalhes dessa experiência e de outras que foram realizadas por outros pesquisadores, consultar [17].

**Definição 3.3.** Chama-se *triângulo áureo* a todo triângulo isósceles cujos ângulos internos são  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $72^\circ$ .

O  $\triangle ABC$  da Figura 3.5 é áureo.

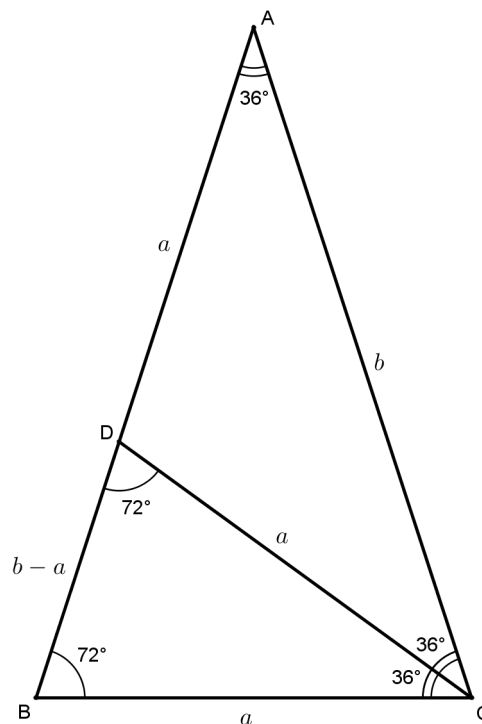


Figura 3.5: Triângulo áureo.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Isto significa que os seus lados congruentes estão na Razão Áurea com a base e, se traçarmos a bissetriz interna de um dos ângulos de  $72^\circ$ , a mesma dividirá o lado oposto na Razão Áurea.

De fato, notamos, primeiramente, que, pela Figura 3.5, do  $\triangle BCD$  isósceles, temos  $CD = CB = a$  e, da mesma forma, do  $\triangle ACD$  isósceles, temos  $AD = CD = a$ . E como

os  $\triangle ABC$  e  $\triangle BCD$  são semelhantes, pois possuem ângulos internos congruentes, então possuem os respectivos lados correspondentes proporcionais. Disto segue,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}.$$

Como  $BC = CD = AD$ , então

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BD},$$

o qual significa que o ponto  $D$  divide o lado  $AB$  na Razão Áurea.

Ainda, como  $AD = BC$ , concluímos que:

$$\frac{AB}{BC} = \Phi.$$

Da mesma forma que num retângulo áureo, podemos continuar o processo descrito acima de maneira infinita, ou seja, se traçarmos a bissetriz interna de um dos ângulos da base do triângulo  $BCD$ , teremos formado um novo triângulo áureo e, assim por diante, conforme a Figura 3.6.

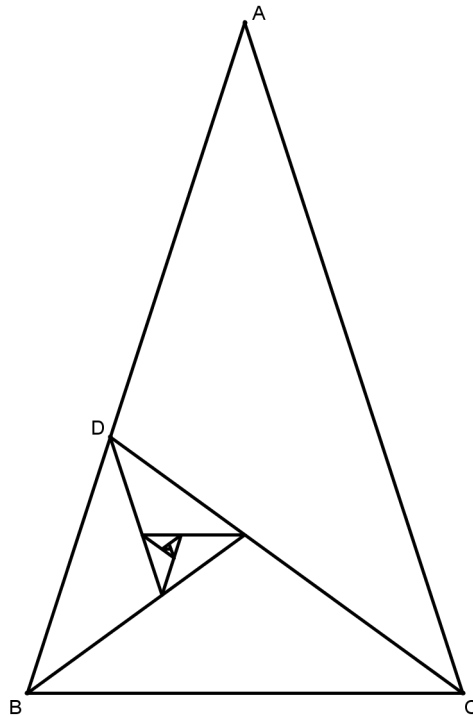


Figura 3.6: Sequência infinita de triângulos áureos.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

A partir da sequência infinita de retângulos áureos, Figura 3.4, podemos desenhar a *espiral áurea* traçando o quarto de circunferência de cada um dos quadrados, resultando na Figura 3.7.



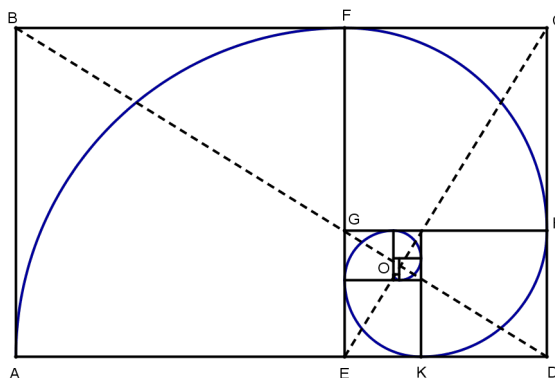


Figura 3.7: Espiral áurea.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Tal curva é também conhecida como *spira mirabilis*<sup>2</sup>, *espiral de ouro*, *espiral equian-gular*<sup>3</sup>, ou *espiral logarítmica*.

Esta espiral possui algumas propriedades interessantes. A seguir, descrevemos de acordo com [12] e [15], sem demonstrar, algumas delas:

- As diagonais  $BD$  e  $CE$  são perpendiculares entre si.
- As triplas de pontos  $BOD$ ,  $COE$ ,  $DOG$ , etc., onde  $O$  é o centro (polo) da espiral, são colineares.
- Os quatro ângulos retos com origem em  $O$  têm os segmentos  $FK$  e  $AH$  como bissetrizes.
- As relações  $\frac{BO}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OE} = \dots$  são válidas, pois os segmentos de cada uma dessas razões são os catetos de triângulos retângulos que são, cada um deles, exatamente a metade de um retângulo áureo.

Huntley (1985, p. 101) descreve uma outra propriedade da espiral áurea:

A espiral possui outra propriedade interessante digna de nota. Por mais diferentes que dois segmentos da curva possam ser em tamanho, eles não são diferentes em formato. Suponhamos que, com a ajuda de um microscópio, fosse tirada uma fotografia das convoluções, próximas ao polo  $O$ , pequenas demais para serem vistas a olho nu. Se fosse adequadamente ampliada, essa cópia poderia ser encaixada exatamente em uma espiral do tamanho da Figura 7.6. A espiral não possui ponto terminal: ela pode crescer para fora (ou para dentro) indefinidamente, mas seu formato não se altera.

Tal propriedade da espiral de não alterar seu formato à medida que seu tamanho aumenta é conhecida por *autossimilaridade*. Esta propriedade é consequência do retângulo que serve de base para a construção dela ter Proporção Áurea.

<sup>2</sup>Este nome foi usado como título de um tratado escrito por Jacques Bernoulli (1654–1705) acerca dessa curva. Jacques Bernoulli era tão impressionado com a beleza dessa curva a ponto de pedir que a mesma e o lema que se atribui a ela: “Eadem mutato resurgo” (“embora mudado, ressurjo o mesmo”), fossem gravados em seu túmulo.

<sup>3</sup>Este nome foi dado pelo matemático e filósofo francês René Descartes (1596–1650), devido ao fato de que toda linha reta que parte do polo da espiral cortará a mesma em ângulos congruentes.

A espiral de ouro também pode ser traçada a partir da sequência infinita de triângulos áureos. Da Figura 3.6, basta ligar, progressivamente, os vértices dos triângulos áureos, através de arcos centrados nos pontos que dividem um dos seus lados na Proporção Áurea, conforme a Figura 3.8.

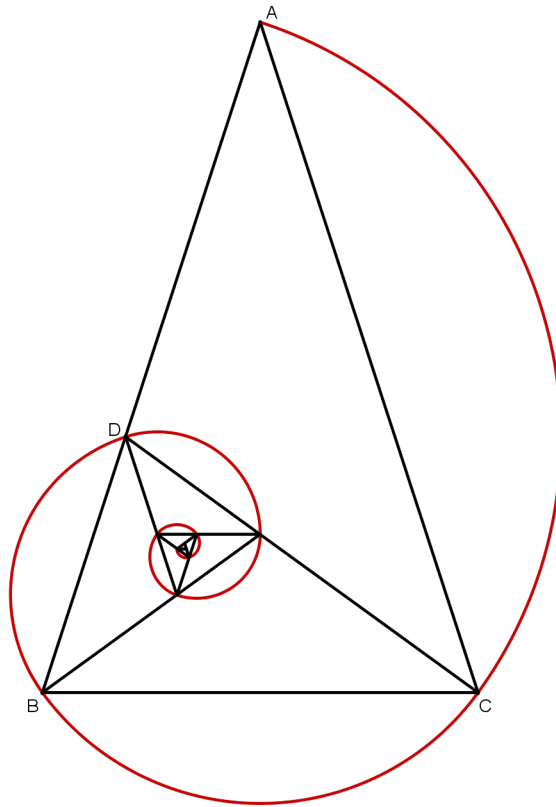


Figura 3.8: Espiral de ouro.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

A espiral de ouro está intimamente relacionada com a Sequência de Fibonacci, pois se considerarmos o menor quadrado da Figura 3.4 com lado medindo uma unidade de comprimento, os demais quadrados, de dentro para fora, terão comprimentos 1, 2, 3, 5 e, assim por diante, no qual formam a referida sequência.

Da mesma forma, se considerarmos o menor triângulo áureo, da Figura 3.6, com base unitária, o lado dele valerá  $\Phi$ , pois sendo assim a razão entre essas medidas será  $\Phi/1 = \Phi$ , portanto, em Razão Áurea. Daí, como esse último lado será a base do próximo triângulo áureo, de dentro pra fora, o lado deste último valerá  $1 + \Phi$ , pois  $(1 + \Phi)/\Phi = \Phi^2/\Phi = \Phi$  e, continuando nesse raciocínio, encontraremos a sequência 1,  $\Phi$ ,  $1 + \Phi$ ,  $1 + 2\Phi$ ,  $2 + 3\Phi$ ,  $3 + 5\Phi$ , ..., que é uma sequência de Fibonacci.

Existe um outro tipo de espiral, a *espiral retangular*, que possui propriedades interessantes. O leitor interessado poderá consultar [12] e [15].

A Natureza escolheu, caprichosamente, a espiral áurea para dar forma a várias coisas, tais como: conchas do mar, girassóis, redemoinhos, chifres de carneiros, galáxias, etc.,

como veremos no próximo capítulo.

### 3.5 O Pentágono regular e o Pentagrama

De todas as figuras geométricas planas a que mais chamou a atenção dos matemáticos e filósofos da Grécia Antiga foi o pentagrama ou estrela de cinco pontas, ou ainda, o pentágono estrelado (Figura 3.9).

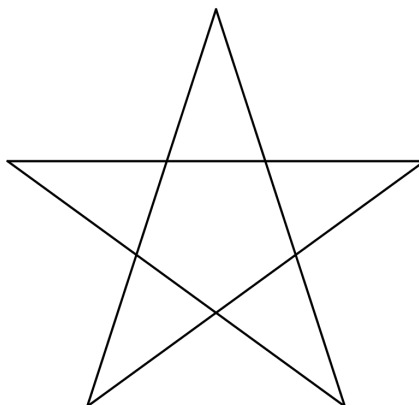


Figura 3.9: Pentagrama.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Associado ao pentagrama está o pentágono regular (polígono de cinco lados e cinco ângulos congruentes), pois traçando todas as diagonais do pentágono, obtemos o pentagrama e um outro pentágono no centro. Traçando, agora, as diagonais do novo pentágono, formaremos mais um pentágono e um pentagrama, sendo que esse processo, conhecido como *auto-propagação*, pode ser continuado, infinitamente, obtendo pentágonos e pentagramas cada vez menores, conforme Figura 3.10.

Provaremos a seguir que a diagonal e o lado de um pentágono regular estão na Razão Áurea e, como o  $\Phi$  é um número irracional, esse seria o motivo do processo descrito acima não ter fim.

Seja o pentágono regular, Figura 3.11-*a*, no qual traçamos as diagonais  $AD$  e  $AC$ .

Deste pentágono, temos três triângulos isósceles,  $\triangle ACD$ ,  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADE$ , além do que, os dois últimos são congruentes.

Da Geometria Plana sabemos que um polígono regular tem os seus ângulos internos congruentes cuja soma é dada por  $S = (n - 2)180^\circ$ , onde  $n$  representa o número de lados do polígono. Daí, temos que num pentágono regular essa soma vale  $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$ , onde cada ângulo interno vale então  $540^\circ/5 = 108^\circ$ .

Usando, ainda, o fato de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale  $180^\circ$  e, que os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles são congruentes, obtemos  $\angle BAC = \angle BCA = \angle ADE = \angle DAE = (180^\circ - 108^\circ)/2 = 36^\circ$ . Além disso,  $\angle CAD = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$  e  $\angle ACD = \angle ADC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ , conforme a Figura 3.11-*b*.

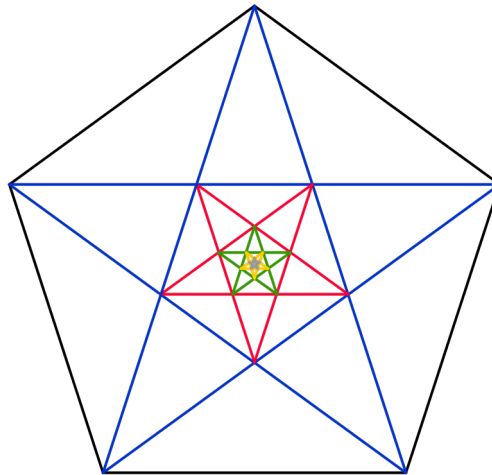


Figura 3.10: Sequência infinita de pentágonos regulares e de pentagramas.  
 Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

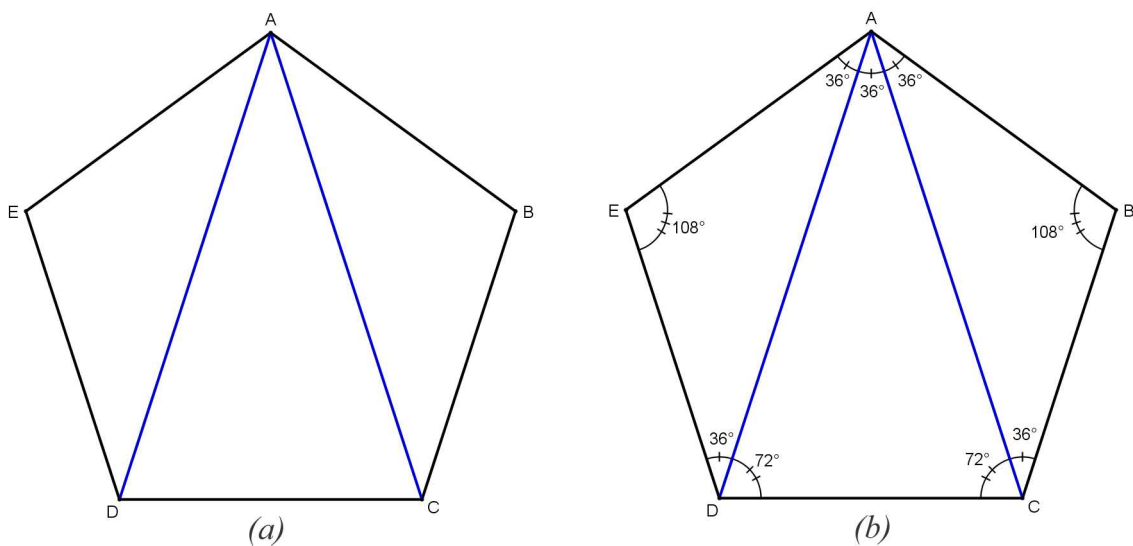


Figura 3.11: Pentágono regular com duas de suas diagonais.  
 Figuras feitas pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Diante disto, segue que o triângulo  $ACD$  da Figura 3.11-*b* é áureo e, portanto (consultar a Seção 3.4),

$$\frac{AD}{DC} = \Phi,$$

ou seja, acabamos de mostrar que a diagonal e o lado de um pentágono regular estão na Razão Áurea.

Vamos mostrar, agora, que o ponto de intersecção de duas diagonais quaisquer de um pentágono regular divide ambas na Razão Áurea. Seja, então, o pentágono regular da Figura 3.11-*a* com o acréscimo da diagonal  $CE$ , sendo  $P$  o ponto de intersecção das diagonais  $AD$  e  $CE$ , conforme a Figura 3.12.

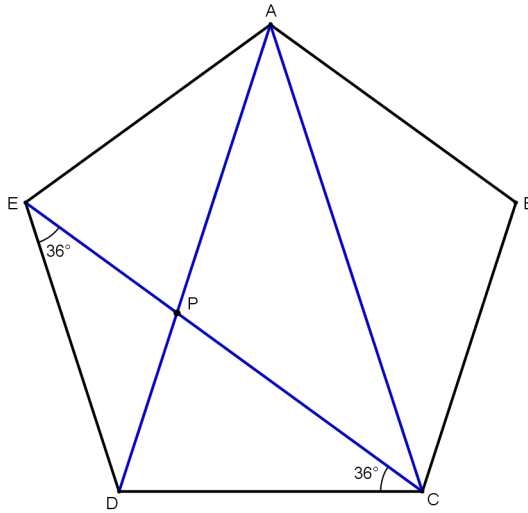


Figura 3.12: Pentágono regular com duas de suas diagonais intersectando-se.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Do  $\triangle CDE$  isósceles, temos  $\angle CED = \angle DCE = (180^\circ - 108^\circ)/2 = 36^\circ$  e, consequentemente,  $CE$  é bissetriz do  $\angle ACD$  e, dessa forma, consultando a Seção 3.4 novamente, concluímos que:

$$\frac{AP}{PD} = \Phi.$$

Do  $\triangle ACE$  áureo, tiramos também que  $\frac{CP}{PE} = \Phi$  e, assim por diante.

Antes de apresentarmos outras relações dentro do pentágono regular, vamos calcular o valor do  $\cos 36^\circ$  e do  $\cos 72^\circ$ .

Seja então o  $\triangle DEP$ , Figura 3.13-a, de altura  $PM$  relativa ao lado  $DE$ . Disto, determinamos um  $\triangle EMP$ , reto em  $M$ , onde  $EM = MD = DE/2$ , pois o  $\triangle DEP$  é isósceles e, consequentemente, sua altura coincide com sua mediana. Então:

$$\cos 36^\circ = \cos \angle MEP = \frac{EM}{EP} = \frac{DE/2}{EP} = \frac{DE}{EP} \cdot \frac{1}{2},$$

e como  $DE = CP$ , pois  $\frac{CE}{DE} = \frac{CE}{CP} = \Phi$  implica  $DE = CP$ , obtemos

$$\cos 36^\circ = \frac{CP}{EP} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{\Phi}{2}.$$

E pela fórmula de multiplicação de arcos, sabemos que  $\cos 72^\circ = \cos^2 36^\circ - \text{sen}^2 36^\circ$ , que combinada com a Relação Trigonométrica Fundamental e lembrando das potências de  $\Phi$ , obtemos:

$$\cos 72^\circ = \cos^2 36^\circ - (1 - \cos^2 36^\circ) = \cos^2 36^\circ - 1 + \cos^2 36^\circ = 2 \cos^2 36^\circ - 1 =$$

$$2 \cdot \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2 - 1 = \frac{\Phi^2}{2} - 1 = \frac{\Phi^2 - 2}{2} = \frac{(\Phi + 1) - 2}{2} = \frac{\Phi - 1}{2} = \frac{-\phi}{2} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{2\Phi}.$$

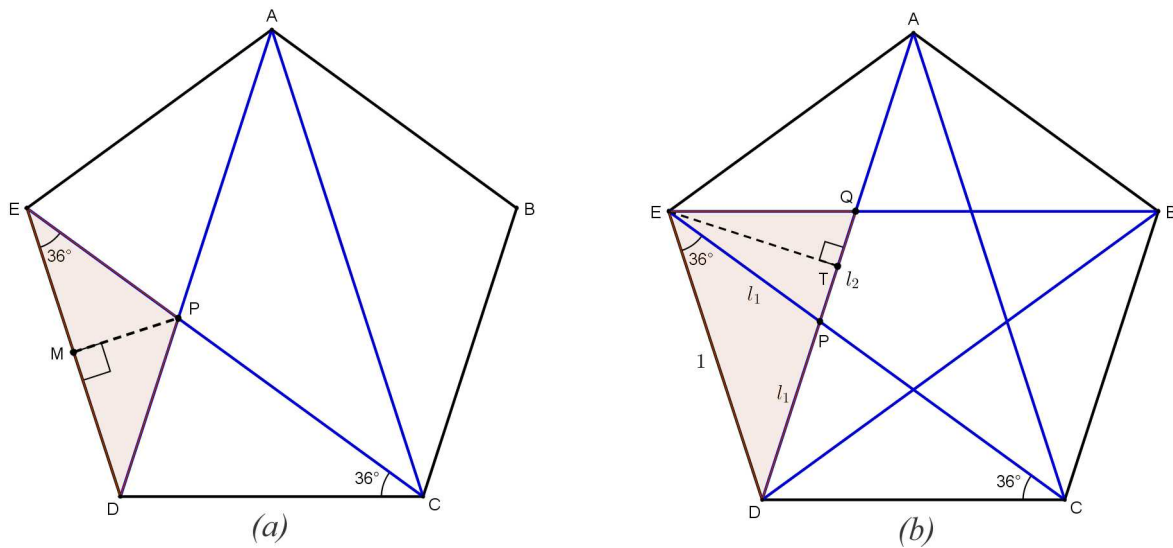


Figura 3.13: Triângulos destacados no pentágono regular.

Figuras feitas pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Agora, consideremos o lado do pentágono regular da Figura 3.13-a de lado medindo 1 unidade de comprimento, ou seja,  $AB = BC = CD = DE = EA = 1$ . Iremos obter o valor de  $l_1 = EP = PD$  do  $\triangle DEP$  isósceles, Figura 3.13-b, aplicando a Lei dos Cossenos:

$$l_1^2 = 1^2 + l_1^2 - 2 \cdot 1 \cdot l_1 \cdot \cos 36^\circ \Rightarrow 2l_1 \cos 36^\circ = 1 \Rightarrow l_1 = \frac{1}{2 \cos 36^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\Phi}{2}} \Rightarrow l_1 = \frac{1}{\Phi}.$$

Notando ainda que na Figura 3.13-b o  $\triangle EPQ$  é isósceles, pois  $\angle EPQ = \angle EQP = 72^\circ$ , traçamos a sua altura relativa ao lado  $PQ$ , obtendo o  $\triangle ETQ$ , reto em  $T$ .

Daí,

$$\frac{1}{2\Phi} = \cos 72^\circ = \cos \angle EPT = \frac{PT}{PE} = \frac{PT}{l_1} = \frac{PT}{\frac{1}{\Phi}} \Rightarrow PT = \frac{1}{2\Phi^2}$$

e, portanto,

$$l_2 = PQ = 2PT = 2 \cdot \frac{1}{2\Phi^2} = \frac{1}{\Phi^2}.$$

Determinaremos, agora, a medida da diagonal  $AD$ . Conforme a Figura 3.13-b, notando que  $\triangle AEQ \sim \triangle DEP$  implica  $AQ = DP = l_1 = \frac{1}{\Phi}$  e usando a Tabela 3.1, temos pela Figura 3.14 que

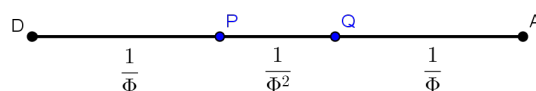


Figura 3.14: Diagonal do pentágono regular.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

$$DA = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi + 1 + \Phi}{\Phi^2} = \frac{1 + 2\Phi}{\Phi^2} = \frac{\Phi^3}{\Phi^2} = \Phi.$$

Observamos ainda que,

$$DQ = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} = \frac{\Phi + 1}{\Phi^2} = \frac{\Phi^2}{\Phi^2} = 1,$$

e daí,

$$\frac{DA}{DQ} = \frac{\Phi}{1} = \Phi,$$

o que mostra novamente que o ponto de intersecção de duas diagonais quaisquer de um pentágono regular divide ambas na Razão Áurea.

Também podemos escrever

$$\frac{QA}{QP} = \frac{\frac{1}{\Phi}}{\frac{1}{\Phi^2}} = \Phi.$$

A partir desses resultados, podemos conjecturar que ao se montar uma sequência infinita de pentágonos e pentagramas a partir de um pentágono regular, conforme Figura 3.10, encontramos a sequência

$$\left(1, \frac{1}{\Phi}, \frac{1}{\Phi^2}, \frac{1}{\Phi^3}, \dots\right),$$

onde os termos de ordem ímpar (termos  $1/\Phi^n$ , com  $n = 0, 2, 4, \dots$ ) formam a subsequência dos lados da sequência de pentágonos regulares e, a subsequência dos termos de ordem par (termos  $1/\Phi^n$ , com  $n = 1, 3, 5, \dots$ ) formam a subsequência dos lados dos pentagramas construídos.

De fato, observando a Figura 3.15-*a* temos que o  $\triangle PQO$  é isósceles cujos ângulos da base são  $\angle QPO = \angle OQP = 36^\circ$ . Encontraremos  $l_3$  através da Lei dos Cossenos:

$$l_3^2 = \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^2 + l_3^2 - 2 \cdot \frac{1}{\Phi^2} \cdot l_3 \cdot \cos 36^\circ \Rightarrow l_3^2 = \frac{1}{\Phi^4} + l_3^2 - \frac{2l_3}{\Phi^2} \cdot \frac{\Phi}{2} \Rightarrow l_3 = \frac{1}{\Phi^3}.$$

E que de forma geral, a cada passo  $n$  da iteração, com  $n = 0, 2, 4, \dots$ , da construção dos pentágonos regulares, onde para  $n = 0$  temos o pentágono inicial, obtemos um triângulo isósceles de ângulos da base iguais a  $36^\circ$  e base igual a  $\frac{1}{\Phi^n}$ , conforme Figura 3.15-*b*.

Dessa forma, o lado  $l_{n+1}$  do referido triângulo vale:

$$l_{n+1}^2 = \left(\frac{1}{\Phi^n}\right)^2 + l_{n+1}^2 - 2 \cdot \frac{1}{\Phi^n} \cdot l_{n+1} \cdot \cos 36^\circ \Rightarrow \frac{2l_{n+1}}{\Phi^n} \cdot \cos 36^\circ = \frac{1}{\Phi^{2n}} \Rightarrow$$

$$l_{n+1} = \frac{\Phi^n}{2 \cdot \cos 36^\circ \cdot \Phi^{2n}} \Rightarrow l_{n+1} = \frac{\Phi^n}{2 \cdot \frac{\Phi}{2} \cdot \Phi^{2n}} \Rightarrow l_{n+1} = \frac{1}{\Phi^{n+1}},$$

mostrando então que a Figura 3.10 gera a sequência  $\left(1, \frac{1}{\Phi}, \frac{1}{\Phi^2}, \frac{1}{\Phi^3}, \dots\right)$ .

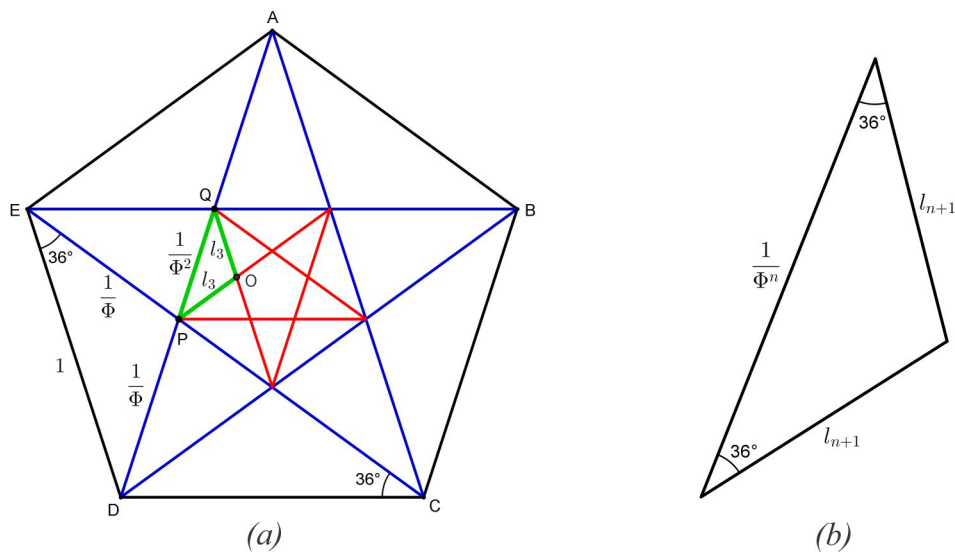


Figura 3.15: Triângulos destacados num pentágono regular.

Figuras feitas pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Podemos encontrar outras relações envolvendo o Número de Ouro no pentagrama e no pentágono regular. Para uma referência, consultar [8] e [12].

Na Antiguidade, o pentagrama era venerado, principalmente, pelos pitagóricos. Só para se ter uma ideia dessa veneração, o pentagrama era usado como símbolo dessa irmandade que o chamava de “Saúde”, e que por essa insígnia se reconhecia um membro associado.

Um escritor grego, Iamblicos, conta-nos que um membro da comunidade pitagórica, distante de sua casa, por motivo de viagem, passou uma noite em uma estalagem de beira de estrada. Caiu enfermo e a despeito dos cuidados do simpático estalajadeiro, que tentou, com consideráveis despesas, restaurar-lhe a saúde, faleceu. Antes de morrer, reconhecendo que a sua situação era desesperadora e vendo-se incapaz de recompensar seu anfitrião, ele conseguiu uma tábua e nela inscrevera um pentagrama. Entregando-a ao estalajadeiro, pediu-lhe que fosse afixada em local onde todos os passantes pudesse vê-la. No devido tempo, um cavaleiro de passagem avistou o símbolo. Desmontando, fez perguntas e, ao ouvir a história do estalajadeiro, recompensou-o generosamente (HUNTLEY, 1985, p. 41).

Dos sólidos regulares (ou sólidos platônicos) existentes – sólidos cujas faces são polígonos equiláteros e idênticos, a saber: o tetraedro (com quatro faces triangulares), o cubo (com seis faces quadradas), o octaedro (com oito faces triangulares), o dodecaedro (com doze faces pentagonais) e o icosaedro (com vinte faces triangulares), o dodecaedro era o mais venerado justamente porque suas faces são pentágonos regulares.

O fascínio dos pitagóricos com o pentágono regular e com o pentagrama é um grande indício de que eles já tinham conhecimento da Razão Áurea, ou seja, de que os pitagóricos tinham conhecimento da incomensurabilidade do lado de um pentágono regular com sua diagonal, o que implica no conhecimento dos números irracionais.



# Capítulo 4

## Manifestações e aplicações

*“Descobri os segredos do mar meditando sobre uma gota de orvalho”.*

Khalil Gibran

A Sequência de Fibonacci ficou famosa não apenas porque está associada à reprodução de coelhos. Para além de sua conexão com a referida reprodução e com o Número de Ouro, a Sequência de Fibonacci está associada a diversos fenômenos tais como num comportamento da luz, na árvore genealógica de um zangão, na bolsa de valores, no Triângulo de Pascal, no crescimento das plantas, no formato de diversos seres vivos, etc.

Neste capítulo, além de fazermos uma abordagem de algumas dessas conexões, faremos uma descrição da aplicação da Razão Áurea no campo das artes e da arquitetura, bem como, buscaremos desmistificar algumas crenças quanto a sua aplicação ao longo dos tempos.

### 4.1 Comportamento da luz

Consideremos um sistema formado por duas placas de vidro colocadas face a face, com diferentes índices de refração. Analisaremos o número de caminhos distintos percorridos por um raio de luz em função do número de reflexões, Figura 4.1, levando em conta que o número de reflexões internas de um raio de luz antes de emergir é potencialmente infinito.

Podemos verificar que quando não ocorre nenhuma reflexão, teremos um único caminho, para uma reflexão, dois caminhos distintos, para duas reflexões, três caminhos distintos e, assim por diante. Notemos, então, que as quantidades de caminhos descritos pelo raio de luz formam a Sequência de Fibonacci com supressão do primeiro termo, isto é, chamando o número de reflexões de  $n$ , o número de caminhos correspondentes  $f(n)$  será um número de Fibonacci.

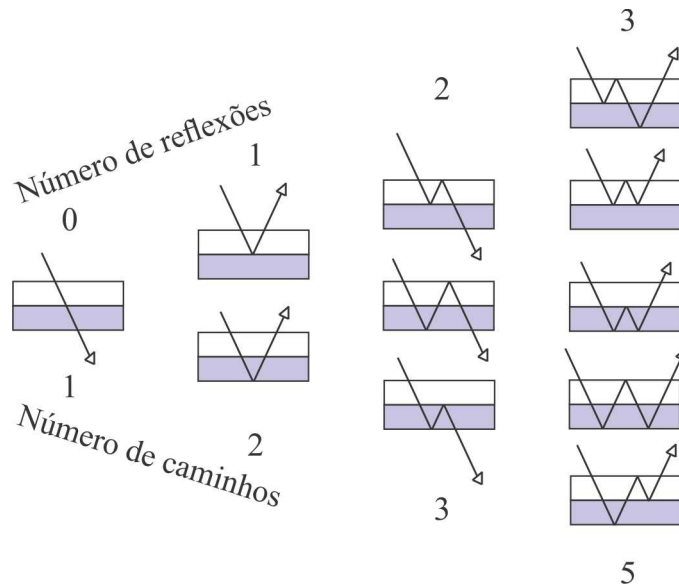


Figura 4.1: Reflexões e refrações de um raio de luz em placas de vidro.

Figura feita pelo autor usando o software CorelDRAW X6.

## 4.2 Árvore genealógica de um zangão

Os Números de Fibonacci também surgem de maneira inusitada na árvore genealógica de um zangão, o macho da abelha.

Os ovos das abelhas que são fertilizados geram abelhas, enquanto os ovos não fertilizados geram zangões. Disto, podemos dizer que uma abelha tem “pai” e “mãe” enquanto um zangão tem apenas “mãe”. Sendo assim, um zangão tem uma mãe, dois avós (os pais de sua mãe), três bisavós (os dois pais da avó mais a mãe do avô), cinco trisavós (dois pais para cada bisavó e uma mãe para o seu bisavô), etc. Os números encontrados nessa árvore genealógica, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., formam a Sequência de Fibonacci, conforme a Figura 4.2.

## 4.3 Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é um dos padrões numéricos mais notáveis da Matemática. A sua construção é muito simples e segue abaixo:

$$\begin{array}{cccc}
 \binom{0}{0} & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} \\
 \dots, & & & 
 \end{array}$$

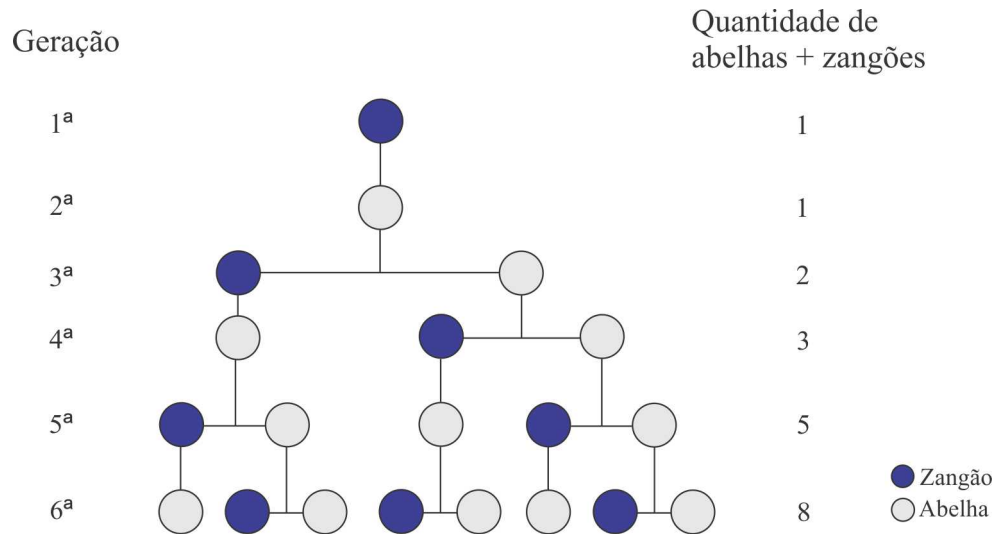


Figura 4.2: Árvore genealógica de um zangão até a sexta geração.  
 Figura feita pelo autor usando o software CorelDRAW X6.

onde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ , com  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $k = 0, 1, \dots, n$ , é chamado de *número binomial*, pois estes formam os coeficientes do Binômio de Newton  $(a + b)^n$ .

Substituindo os binomiais acima pelos seus respectivos valores, o Triângulo de Pascal passa a ter a seguinte forma:

1
1   1
1   2   1
1   3   3   1
1   4   6   4   1
1   5   10   10   5   1
1   6   15   20   15   6   1
...

Este padrão numérico apresenta propriedades notáveis que são objeto de investigação até os dias de hoje. Entretanto, o que nos interessa aqui, é o surgimento dos Números de Fibonacci no mesmo, conforme Figura 4.3.

**Teorema 4.1.** *A soma dos elementos da n-ésima “diagonal inversa” do Triângulo de Pascal é o número de Fibonacci  $f_{n+1}$ .*

*Demonstração.* Denotaremos a soma dos elementos da n-ésima diagonal inversa por  $F_n$ .

Primeiramente, observamos que para  $n = 0, 1, 2$ , temos  $F_0 = 1 = f_1$ ,  $F_1 = 1 = f_2$  e  $F_2 = 2 = f_3$ .

Se conseguirmos mostrar que  $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ , para todo  $n > 2$ , teremos finalizado a prova.



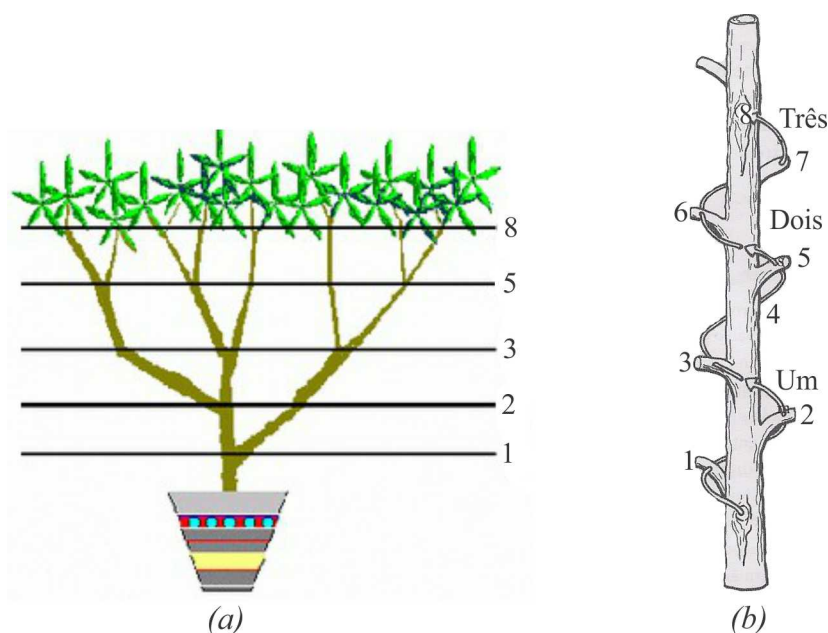


Figura 4.4: Sequência de Fibonacci no mundo vegetal.

Fontes: [8] e [17].

Consideremos uma planta qualquer que cresça verticalmente. Tomando uma folha qualquer como referência e contando as folhas seguintes até chegar à outra folha com a orientação mais próxima da folha de referência, teremos certamente um número de Fibonacci que chamaremos de  $q$ . Da mesma forma, encontraremos um número de Fibonacci, que chamaremos de  $p$ , se contarmos o número de voltas da espiral<sup>1</sup> que se percorreu até chegar à folha desejada. O quociente  $p/q$  é chamado pelos botânicos de *divergência* ou *razão filotática*, a qual serve para descrever a separação angular das bases de duas folhas sucessivas ao longo de um galho.

Na Figura 4.4-*b*, partindo do ramo 1 precisaremos de 3 voltas completas para chegarmos no ramo 8 que estará praticamente na mesma posição e acima do 1º ramo. Logo, a razão filotática dessa planta é  $3/8$ .

Nas tílias americanas, a razão filotática é  $1/2$ , pois normalmente as folhas nascem em dois lados opostos, o que corresponde à metade de uma volta em torno dos ramos. Na amoreira, aveleira e faia, encontraremos, geralmente, 3 folhas dispostas em uma volta, logo a razão filotática é  $1/3$ . No carvalho, macieira e damasqueiro, encontraremos, normalmente, 5 folhas dispostas ao longo de 2 voltas (razão filotática  $2/5$ ). No salgueiro chorão e na pereira, encontraremos, geralmente, 8 folhas distribuídas em 3 voltas (razão filotática  $3/8$ ). Notemos, nestes exemplos, que de fato os termos das razões filotáticas tendem a ser Números de Fibonacci.

Destas observações, concluímos que as folhas não crescem diretamente uma sobre a outra, e sim em pontos com espaçamento bem regular de forma a otimizar sua exposição

<sup>1</sup>Espirai traçada da raiz da planta para o sentido de crescimento dela. Tal espiral recebe o nome de *espiral generativa*.

à chuva, ao sol e ao ar. É isso que nos diz Contador (2011, p. 213):

É fácil entender porque as folhas ao longo de um ramo de uma planta ou os galhos em torno do caule tendem a crescer de forma espiralada. Acontece que esta forma propicia um melhor aproveitamento de sua exposição ao sol, à chuva e ao ar. Observe o leitor que as folhas não crescem uma em cima da outra, este posicionamento certamente prejudicaria as folhas de baixo.

Devido a constante presença dos Números de Fibonacci na filotaxia, a qual permite uma distribuição bem regular de folhas e galhos, é de se conjecturar que o espaçamento angular entre folhas sucessivas, medido através da espiral generativa, tenda a ser um ângulo fixo.

Em 1837, os irmãos Bravais descobriram que a separação angular entre folhas sucessivas tendem de fato a ser um ângulo fixo, conhecido como *ângulo áureo* cujo valor, em geral, é próximo de  $137,5^\circ \cong 360^\circ/\Phi^2$ . E mais uma vez, encontramos o Número de Ouro na Natureza. E para nossa maior surpresa, o ângulo que divide uma volta completa na Proporção Áurea é  $360^\circ/\Phi \cong 222,5^\circ$ , e como este ângulo é maior do que meia volta, pegaremos então o seu replemento que é  $360^\circ - 222,5^\circ = 137,5^\circ$ , justamente o ângulo áureo.

A Figura 4.5 mostra o ramo de uma planta e um corte da mesma no sentido transversal, onde as folhas são numeradas de acordo com a ordem em que aparecem. Sendo assim, a folha de número 1, a mais baixa, é a primeira. Observamos no corte transversal que as folhas sucessivas formam ângulos aproximadamente iguais.

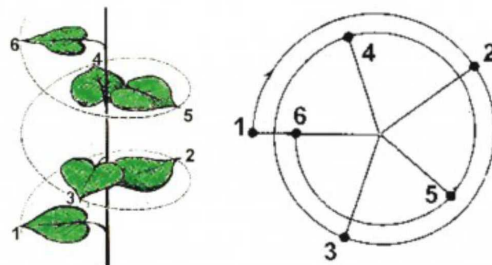


Figura 4.5: Espaçamento angular entre as folhas de uma planta.

Fonte: [26].

No mundo vegetal, a Sequência de Fibonacci não está apenas presente na disposição de folhas e galhos. Podemos observar num abacaxi, Figura 4.6, uma manifestação de rara beleza de filotaxia, onde a referida sequência se faz presente nas espirais formadas pelos gomos das cascas. Cada gomo tem a forma aproximada de um hexágono e é parte de 3 diferentes espirais que se cruzam. Geralmente, cada uma destas espirais se distribuem em grupos de 8, 13, 21 ou 34 espirais paralelas em diferentes inclinações. Todos eles, Números de Fibonacci.

De forma semelhante, encontramos o mesmo padrão nas pinhas onde as suas pétalas estão distribuídas de modo que formam duas espirais, uma para à direita e outra para

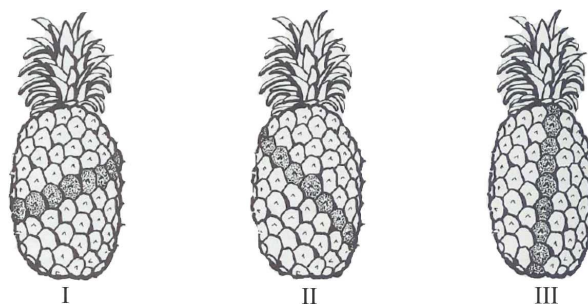


Figura 4.6: Abacaxi e suas espirais.

Fonte: [12].

à esquerda, conforme Figura 4.7. Tais espirais seguem, quase sempre, os Números de Fibonacci, já que uma pinha possui normalmente 5 e 8 ou 8 e 13 espirais.

Também encontramos padrão parecido na distribuição das pétalas da alcachofra, onde normalmente apresenta 5 e 8 linhas paralelas de pétalas, Figura 4.7.

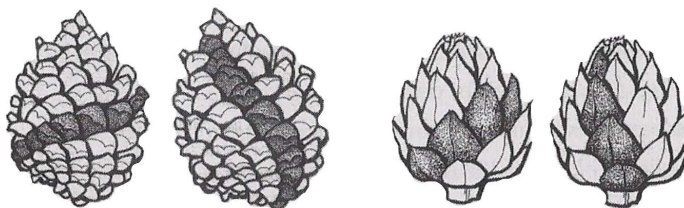


Figura 4.7: À esquerda 2 pinhas e à direita 2 alcachofras.

Fonte: [12].

Podemos encontrar muitas outras situações da presença dos Números de Fibonacci no mundo vegetal. Só para dar mais exemplos, segue na Figuras 4.8 alguns exemplos de flores com os seus respectivos números de pétalas. Todos eles Números de Fibonacci.

Não poderíamos deixar de falar do girassol, cuja beleza nos encanta. Olhando com atenção o seu núcleo, Figura 4.9, notamos que suas sementes estão distribuídas em várias espirais nos sentidos horário e anti-horário. O número dessas espirais depende do tamanho do girassol e, para nossa não mais surpresa, tendem a ser Números de Fibonacci ou números vizinhos a estes. O mais comum é que existam 34 espirais em um sentido e 54 espirais no outro. Mas, também, encontramos girassóis com 21 e 34 espirais, 55 e 89 espirais e, mais raramente, com 89 e 144 espirais.

Igualmente os girassóis, as margaridas, Figura 4.8, também seguem esse padrão, na qual suas sementes se distribuem, geralmente, em 13, 21 ou 34 espirais.

Analisando, agora, o arranjo de pétalas de uma rosa com sua exuberante beleza, também encontraremos a Razão Áurea. Cálculos mostram que os ângulos que definem as posições das pétalas em frações de uma volta completa, são partes fracionárias de múltiplos simples de  $\Phi$ . Na Figura 4.10, segue uma ilustração onde a pétala 1 está a



Íris com 3 pétalas



Jasmim manga com 5 pétalas



Tasneira com 13 pétalas



Margarida com 34 pétalas

Figura 4.8: Exemplo de flores com seus respectivos números de pétalas.

Fonte: [8].

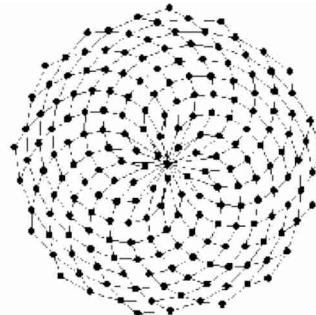
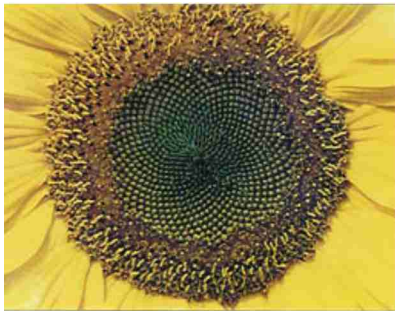


Figura 4.9: Girassol e a representação esquemática de suas sementes.

Fonte: [18].

0,6180 de uma volta completa da pétala 0 (ou  $1 \cdot \frac{1}{\phi} = 0,6180$ ), a pétala 2 está a 0,236 de uma volta completa da pétala 1 (ou  $2 \cdot \frac{1}{\phi} = 1,236$ ), etc.

Uma pergunta que normalmente se faz é: por que na filotaxia as folhas sucessivas tendem a ser separadas por um ângulo de  $137,5^\circ$ , o ângulo áureo? Uma resposta é dada pelas teorias que se concentram na geometria da configuração.

Lívio (2011, p. 134) cita os trabalhos seminais dos matemáticos Harold S. M. Coxeter e I. Adler e do cristalógrafo N. Rivier que mostram que botões de flor são distribuídos de forma mais eficiente se forem colocados ao longo de uma espiral generativa separados pelo ângulo áureo.

Isso é evidente, pois caso contrário, se pensarmos que o ângulo divergente fosse, digamos, de  $60^\circ$  (igual a  $360^\circ/6$ ), ou qualquer outro múltiplo racional de  $360^\circ$ , as folhas iriam



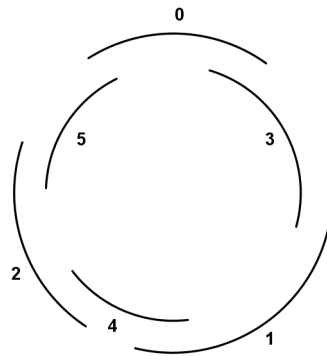


Figura 4.10: Representação esquemática das pétalas de uma rosa.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

se alinhar radialmente, nesse caso, ao longo de 6 linhas, deixando grandes espaços no meio. Isso não acontece se o ângulo divergente for áureo, como bem elucidada Lívio (2011, p. 134):

[...] um ângulo divergente como o Ângulo Áureo (que é um múltiplo irracional de 360 graus) garante que os botões de flor não se alinhem ao longo de qualquer direção radial específica e encham o espaço de modo eficiente. O Ângulo Áureo prova que é ainda melhor que outros múltiplos irracionais de 360 graus porque a Razão Áurea é o mais irracional de todos os números irracionais no seguinte sentido. Lembre-se de que a Razão Áurea é igual a uma fração contínua composta inteiramente de uns. Essa fração contínua converge mais lentamente do que qualquer outra fração contínua. Em outras palavras, a Razão Áurea está mais longe de poder ser expressa como uma fração do que qualquer outro número irracional.

Ainda segundo Lívio (2011, p. 134-135), um algoritmo matemático simples foi usado por um grupo de cientistas da Université de Provence em Marselha (França), liderados por N. Rivier para mostrar que quando o ângulo áureo é usado como sendo o ângulo de crescimento, obtém-se estruturas que se parecem com girassóis reais (Figura 4.11).

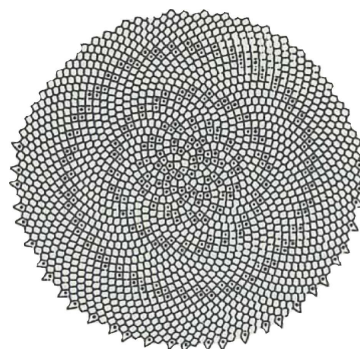


Figura 4.11: Estrutura parecida com o núcleo de um girassol.

Fonte: [17].

Uma outra teoria que procura dar uma justificativa sobre a tendência da presença do ângulo áureo no mundo vegetal, sugere uma causa verdadeiramente dinâmica para ela.

Para uma referência, consultar [11], onde no Capítulo 4 encontra-se uma descrição de experimentos em Física feitos por Douady e Couder.

No final do Capítulo 3, vimos que a presença da Razão Áurea no pentágono regular é farta. Talvez, então, esse seja o motivo da Natureza ter escolhido essa forma geométrica para dar forma a vários seres vivos. Só para citar alguns exemplos dentre os milhares que existem, temos a estrela do mar, o jasmim estrela, a flor de cera e a petúnia.

Para Contador (2011, p. 204-205), talvez não seja uma mera coincidência a relação entre números e as características de alguns entes da Natureza:

Todas as plantas que possuem a forma pentagonal estão ligadas diretamente à Proporção Áurea ou à secção áurea, pois ela está em seu interior. Também sem dificuldades podemos dizer que elas estão ligadas diretamente ao número cinco. A secção áurea está presente em todas as flores que possuem cinco pétalas ou um número múltiplo de cinco, característica comum das flores das plantas que dão frutos comestíveis. Talvez seja mera coincidência, possuímos exatamente cinco dedos em cada uma das mãos. Logo o número cinco se caracteriza pelas estruturas das formas vivas, já os números seis e o oito, são característicos da geometria das estruturas minerais. É interessante salientar que as plantas que possuem uma estrutura ligada ao número seis, como a tulipa ou a papoula, são em sua maioria venenosas ou servem como fornecedoras de drogas Medicinais para o homem.

Tudo o que vimos aqui em filotaxia não nos garante que podemos sair por aí encontrando, na maior parte das vezes, esse padrão no mundo vegetal. Para Lívio (2011, p. 136), o crescimento da planta também depende de outros fatores além do espaçamento ideal. Consequentemente, as regras de filotaxia que descrevemos não podem ser vistas como algo que se aplica a todas as circunstâncias como se fosse uma lei da Natureza. Em vez disso, nas palavras do famoso matemático canadense Coxeter, elas são “apenas uma *tendência* fascinantemente predominante”.

Os Números de Fibonacci também estão, abundantemente, presentes no reino animal e na Natureza de um modo geral, onde suas manifestações se dão, quase sempre, através da espiral de ouro. Este tipo de espiral possui um padrão de crescimento conhecido como “lei da natureza” e se encontra presente, além das sementes dos girassóis, em algumas conchas do mar, em alguns chifres de animais, no formato de algumas galáxias, etc., conforme Figura 4.12.

Um dos exemplos mais fantásticos dessa manifestação acontece numa concha marinha onde mora o molusco *Nautilus pompilius*. À medida que esse molusco cresce dentro da concha, ele constrói câmaras cada vez maiores, onde as menores são fechadas por não serem mais usadas. Tais câmaras sucessivas estão relacionadas, aproximadamente, na Razão Áurea. Dessa forma, o molusco vê uma “casa” idêntica durante toda a vida. Isso acontece devido a propriedade de *autossimilaridade* presente nas espirais áureas.

Vimos no Capítulo 3 que a espiral áurea é também conhecida como espiral equiangular, pois se desenharmos uma linha reta a partir do seu polo, esta linha cortará a curva em ângulos congruentes. Esta é justamente a propriedade usada pelos falcões-peregrinos ao atacar suas presas. Curiosamente, este predador poderia seguir uma trajetória retilínea, a qual é mais curta, e não espiral, Figura 4.13, já que naquela o mesmo atingiria seu alvo num menor intervalo de tempo.



Carneiro e seu chifre espiralado



Galáxia



Nautilus pompilius



Redomoinho

Figura 4.12: Formas espiraladas na Natureza.

Fontes: [6], [8] e [23].

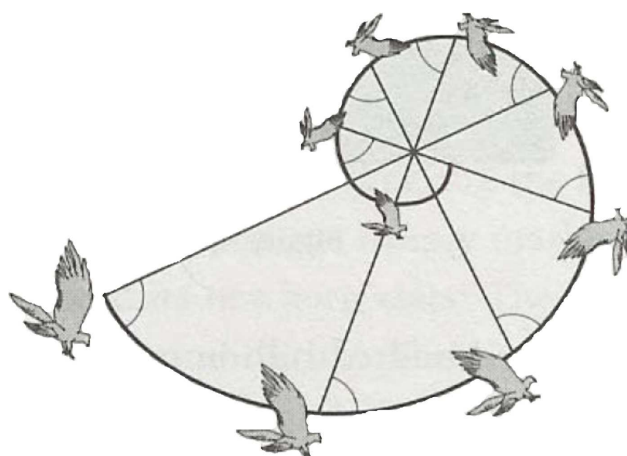


Figura 4.13: Falcão-peregrino perseguindo sua presa.

Fonte: [17].

Intrigado com esta questão é que o biólogo Vance A. Tucker, da Universidade de Duke, na Carolina do Norte (EUA), concluiu, depois de muitas observações e experiências, que como os olhos dos falcões-peregrinos ficam nas laterais de suas cabeças, eles precisariam inclinar a cabeça de  $40^\circ$  de um lado para o outro, o que os deixariam mais lentos, caso seguissem uma trajetória retilínea. Devido a propriedade equiangular da espiral áurea, esses falcões perseguem suas presas, através de uma trajetória espiralada, estando as mesmas no polo da espiral, mantendo a visão fixa a elas.

Os Números de Fibonacci também estão presentes na forma de muitos animais. Dentre eles podemos citar, de acordo com [12], o corpo do escorpião o qual consiste de duas partes, o rabo contendo 5 pares de membros e sua barriga contendo 8 segmentos. Existe uma espécie de lagosta que possui 5 pares de pés na qual cada pé consiste em 5 porções, 5 penas na calda e sua barriga consiste em 5 segmentos.

A carapaça da tartaruga possui 13 placas, nas quais 5 delas estão no centro e as outras 8 na periferia, 5 dedos nas patas e a espinha dorsal possui 34 vértebras. O tronco do crocodilo contém 55 placas. Vários animais possuem, aproximadamente, 13 ossos no seu esqueleto e 34 ou 55 vértebras (o cervo gigante tem 34 vértebras e a baleia, 55).

## 4.5 O Número de Ouro no Corpo Humano

Para encontrarmos o Número de Ouro na Natureza não é preciso irmos muito longe, pois existe em nosso corpo uma tendência incrível dela se manifestar. Tal tendência ocorre desde o formato espiralado da orelha até o umbigo dividindo todo o comprimento do corpo nessa razão.

Apesar de haver evidências de que na Grécia Antiga já se conhecia a presença do Número de Ouro no corpo humano, esse fato só passou a ser analisado, com maior precisão, no Renascimento, a partir do conceito do *Homem Vitruviano*.

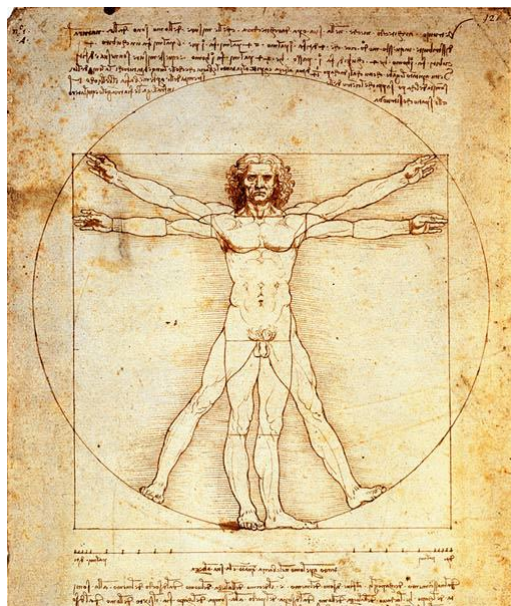
O Homem Vitruviano, Figura 4.14, foi desenhado por Leonardo da Vinci<sup>2</sup> em 1492 depois dele ter lido o livro *De architectura*<sup>3</sup>, onde está escrito: *o corpo humano constrói-se a partir do círculo e do quadrado*. Tal conceito representa o corpo humano deitado de barriga para cima, com as pernas e braços estendidos podendo ser inscrito num círculo com centro no umbigo, assim como no quadrado.

Hoje, conhecemos várias razões em nosso corpo que tendem a ser áureas. Segue, abaixo, algumas delas:

- Razão da altura total pela altura do umbigo.
- Razão entre a medida que vai do ombro até a ponta do dedo médio pela medida do cotovelo até a ponta do dedo médio.
- Razão da altura dos quadris pela altura dos joelhos.
- Razão da medida da cintura até a cabeça pela medida da cintura até o tórax.
- Razão do tamanho dos dedos pela medida da dobra central até a ponta.

<sup>2</sup>Leonardo di Ser Piero da Vinci (1452–1519), foi um gênio italiano que se destacou como pintor, cientista, matemático, músico, engenheiro, anatomista, escultor, arquiteto, botânico, poeta e inventor. É ainda conhecido como o precursor da balística e da aviação e como um dos maiores pintores de todos os tempos. Para muitos, ele foi a pessoa dotada de talentos mais diversos a ter existido.

<sup>3</sup>Livro escrito pelo arquiteto e engenheiro romano Marcus Vitruvius Pollio, mais conhecido como Vitruvius, que viveu no Século I a.C..

Figura 4.14: *Homem Vitruviano*.

Fonte: [18].

- Razão da medida da dobra central até a ponta pela medida da segunda dobra até a ponta.
- Etc.

Alguns estudos apontam que existe uma relação áurea entre a harmonia do sorriso e a dentição. A Figura 4.15-*a* mostra os dentes frontais na Razão Áurea, um em relação ao outro, ou seja, a largura do incisivo central com a largura do incisivo lateral; a largura do incisivo lateral com a largura do canino e a largura do canino com a do primeiro pré-molar, estão na Razão Áurea.

Na Figura 4.15-*b*, temos uma face relaxada na qual a linha dos lábios divide a medida que vai do queixo até a ponta do nariz na Razão Áurea. Para maiores detalhes da Razão Áurea na odontologia, consultar [8] e [19].

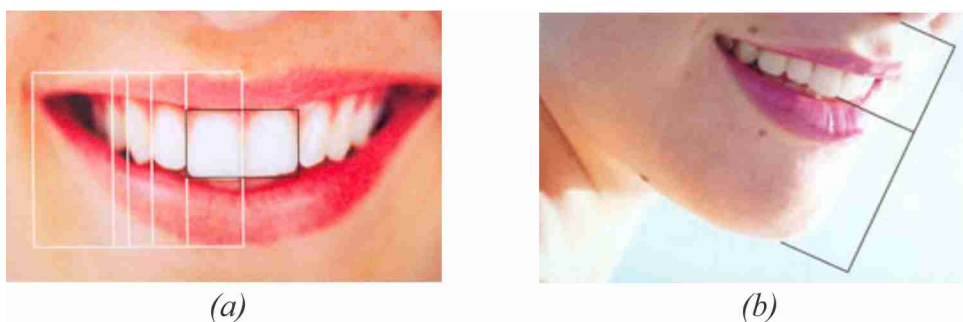


Figura 4.15: Proporção Áurea nos dentes.

Fonte: [8].

## 4.6 Aplicações do Número de Ouro

Apesar do Número de Ouro ter sido considerado ao longo dos séculos sinônimo de harmonia e beleza, não é verdade, ou ao menos não se pode afirmar com contundência, que o mesmo foi utilizado em muitas obras, tais como em algumas arquiteturas da Antiguidade e em algumas pinturas do Renascimento, como querem os aficionados da Razão Áurea nos fazer crê.

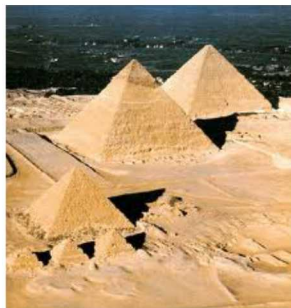
As Pirâmides de Gizé no Egito, construídas por volta de 2500 a.C., o Partenon, construído na Acrópole de Atenas (Grécia), no Século V a.C. e algumas pinturas feitas durante o Renascimento, Figura 4.16, estão entre as obras que mais foram “vítimas” de malabarismos numéricos feitos por numeristas áureos que, ao longo dos tempos, querem nos convencer de que em tais obras foi feito o uso da Proporção Áurea e, que até hoje, essa afirmação é reproduzida em livros e artigos. Para maiores detalhes, consultar [17].



*O Nascimento de Vênus* de Sandro Botticelli



*O Partenon*



*As Pirâmides de Gizé*



*Mona Lisa* de Leonardo da Vinci

Figura 4.16: Exemplos de obras com o suposto uso da Razão Áurea.

Fontes: [6] e [18].

É de consenso, entre os pesquisadores da área, que a partir do livro *De architectura* (Século I a.C.), escrito por Vitruvius, a Razão Áurea deixou de ser apenas um conceito estudado e explorado na Matemática para fazer parte da Arquitetura e da Arte. Esta obra aborda a relação da arquitetura com as proporções do corpo humano, que já sabemos tenderem a se aproximar do Número de Ouro.

No entanto, a Razão Áurea só passou a ganhar um status maior dentro da Matemática, bem como fora dela, a partir de alguns pintores e matemáticos renascentistas. Neste contexto, destacaram-se o alemão Albrecht Dürer (1471–1528) e os italianos Leonardo da Vinci, Piero della Francesca (1415–1492) e o monge franciscano Luca Pacioli (1445–1517).

Pacioli merece um destaque especial, pois dentre suas obras, o *Summa*, publicado em 1494, e o Tratado em três volumes, *Divina proportione (A Proporção Divina)*, publicado em 1509, merece atenção especial esta última por ter sido o primeiro escrito em Matemática dedicado à Razão Áurea, onde é apresentada, de forma detalhada, as propriedades da referida razão, à qual ele se refere como a “Divina Proporção”.

No quinto capítulo do primeiro volume de *A Proporção Divina*, Pacioli apresenta cinco razões pelas quais acredita ser *Proporção Divina* o nome apropriado para a Razão Áurea, como nos diz Contador (2011, p. 159-160):

- A primeira consiste no fato de que a Proporção Áurea é única e, pelo fato de ser única, de acordo com as doutrinas filosóficas, é uma propriedade somente atribuída a deus.
- A segunda propriedade é o fato de que sua construção depende de três elementos assim como a da santíssima trindade, que é expressa nas três pessoas, o Pai, o Filho e o Espírito Santo.
- A terceira propriedade consiste no fato de como deus, que não pode ser determinado e esclarecido por nenhuma palavra, nossa proporção não pode ser expressa por um número racional.
- A quarta propriedade foi associada por Pacioli à onipresença e a invariabilidade de deus a Proporção Áurea, uma vez que esta tem sempre o mesmo valor e não depende do tamanho da linha a ser dividida ou do tamanho do pentágono no qual a proporção é calculada.
- A quinta propriedade vem de que a deus é conferido todo o cosmo através da quinta essência, esta representada pelo dodecaedro, então a Proporção Áurea confere o símbolo do dodecaedro que não pode ser construído sem a dita proporção.

É também importante destacar que o segundo volume de *A Proporção Divina* é um tratado de arquitetura baseado no trabalho de Vitruvius, o qual apresenta regras que devem ser levadas em consideração na construção civil. Toda a obra tem cerca de 60 ilustrações genialmente feitas por Leonardo da Vinci.

Mesmo apesar de muitos pintores e matemáticos terem tido contado com *A Proporção Divina* de Pacioli, não se pode afirmar, com certeza, que eles usaram a Razão Áurea em seus trabalhos. Concentrando um pouco na figura de Leonardo da Vinci que teve o seu primeiro contato com Pacioli em 1497 – existem evidências de que Leonardo só passou a conhecer a Razão Áurea a partir dessa parceria, alguns autores ainda continuam insistindo em afirmar que mesmo nas obras concluídas antes dessa data, como a “Virgem dos Rochedos”, “uma cabeça de ancião”, “São Jerônimo” e a “Mona Lisa”, foi feito o uso dessa razão. A Figura 4.17 apresenta duas dessas obras.

Com relação à Mona Lisa, sua obra mais famosa, vejamos o que nos diz Lívio (2011, p. 186-187):



Figura 4.17: À esquerda *São Jerônimo* e à direita a *Virgem dos Rochedos*.

Fonte: [8].

[...] Ela foi tema de tantos livros de especulações contraditórias de estudiosos e populares que é praticamente impossível se chegar a qualquer conclusão inequívoca. E supõe-se que a Razão Áurea deveria ser encontrada nas dimensões de um retângulo em torno do rosto da Mona Lisa. Na falta de qualquer indicação clara (e documentada) do lugar exato onde esse retângulo deveria ser desenhado, essa ideia representa apenas outra oportunidade para malabarismos numéricos.

Podemos encontrar em [17] uma análise das obras de Leonardo da Vinci que foram citadas até aqui. Embora existam muitas dúvidas sobre o uso da Razão Áurea pelo próprio Leonardo da Vinci que, além de amigo de Pacioli, foi ilustrador de *A Proporção Divina*, então isso significa que mais nenhum outro artista (das mais diversas áreas) a usou?

A resposta é não. Só pra citar alguns ícones das artes visuais, temos o francês Paul Sérusier (1864–1927), o italiano Gino Severini (1883–1966), o americano Jay Hambidge (1867–1924), a russa Marie Vorobëva (1892–1984), conhecida como Marevna, o espanhol Juan Gris (1887–1927), o lituano Jacques Lipchitz (1891–1973), e os brasileiros, Cândido Portinari (1903–1962) e a professora Anita Malfatti (1889–1964), usaram a Razão Áurea em suas obras.

Um dos exemplos mais conhecidos do uso da Razão Áurea ocorre no “Sacramento da Última Ceia”, Figura 4.18, do artista espanhol Salvador Felipe Jacinto Dali Domènech (1904–1989), conhecido como Salvador Dali. Esta obra foi pintada num retângulo áureo, onde as duas pessoas ajoelhadas em frente da mesa são responsáveis pela divisão áurea do retângulo maior. Acima dos personagens pode ser visto parte de um dodecaedro (poliedro formado por 12 pentágonos regulares) que sabemos ser dotado da Razão Áurea.

Merece destaque especial, aqui, o famoso arquiteto e pintor suíço-francês Charles-Édouard Jeanneret (1887–1965), mais conhecido como Le Corbusier que foi um dos mais importantes defensores da aplicação da Razão Áurea na Arquitetura e na Arte.

Le Corbusier propôs um sistema de medidas proporcionadas a que deu o nome de *Modulor*. Esse sistema de medidas forneceria “uma medida harmônica para a escala humana, universalmente aplicável na arquitetura e na mecânica”, no sentido da famosa frase de





Figura 4.18: *O Sacramento da Última Ceia* de Salvador Dalí.

Fonte: [23].

Protágoras (Século V a.C.): “O homem é a medida de todas as coisas”. Para Contador (2011, p. 162):

Le Corbusier propôs um sistema de medidas para seus projetos arquitetônicos inteiramente baseado nas proporções humanas. Acreditava ele que seu sistema de medidas iria satisfazer tanto as exigências de beleza, por derivar da Proporção Áurea, quanto as exigências funcionais, pois também estava relacionado às medidas do homem, seu sistema recebeu o nome de *Modulor*, (módulo de ouro), figura a seguir. Para ele, seria um instrumento universal, pois uma vez que era baseado nas proporções do ser humano, seria de fácil execução e podia ser usado no mundo inteiro levando racionalidade e beleza.

O *Modulor* era baseado na estatura média do ser humano,  $1,75\text{ m}$ . Mas, devido ao aumento da estatura média da população europeia, Le Corbusier passou a usar a estatura de  $1,83\text{ m}$ , conforme Figura 4.19.

Na realidade, o *Modular* é simplesmente uma tabela cuja construção é baseada no Número de Ouro, na Sequência de Fibonacci e nas proporções médias humanas. Ela foi baseada em três medidas básicas,  $43\text{ cm}$ ,  $70\text{ cm}$  e  $113\text{ cm}$ . Percebemos, de imediato, que  $113 = 70 + 43$  e  $113/70 \cong 1,6142$  que, na prática, é igual ao número  $\Phi$ . Verificamos também que  $43$  é, na prática, o ponto áureo de  $70$ , assim como  $27$  é de  $43$ , e que  $27 = 70 - 43$  e, assim por diante.

Segundo Contador (2011, p. 162), foi usando esse raciocínio que Le Corbusier, partindo de  $113$ , construiu, nos dois sentidos, uma série de secções áureas a que chamou de série vermelha:

4, 6, 10, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296.

Segue na Figura 4.20 alguns exemplos de obras onde Le Corbusier fez uso do *Modular*.

O grande arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907–2012), que era confesso seguidor de Le Corbusier, criou junto com ele uma parceria de sucesso internacional onde nasceu o projeto da sede do Ministério da Educação e Saúde chamado palácio Gustavo Capanema, no Rio de Janeiro.

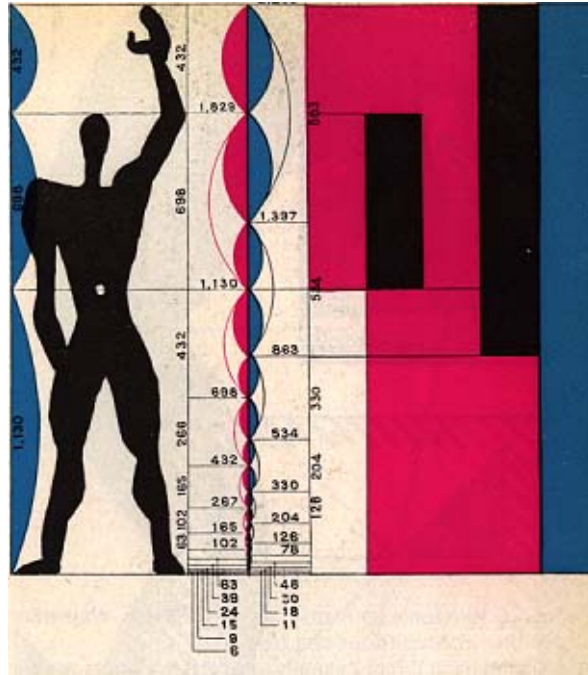


Figura 4.19: O Modulor.

Fonte: [11].



Chapel de Notre Dame du Haut



Residência suburbana em Paris

Figura 4.20: Obras arquitetônicas cujos projetos foram de Le Corbusier.

Fontes: [11] e [18].

Embora muitos artistas, principalmente, das artes visuais, dos Séculos XIX e XX, usaram em algum momento a Razão Áurea, não é verdade que o pontilhista francês Georges Seurat (1859–1891) e o pintor holandês Piet Mondrian (1872–1944) fizeram uso dessa razão. Da mesma forma que não existe base concreta para se afirmar que os compositores, o genial vienense Wolfgang Amadeus Mozart (1756–1791), o húngaro Béla Bartók (1881–1945) e o francês Claude Debussy (1862–1918) fizeram uso da Divina Proporção em suas composições musicais. Para uma análise detalhada, consultar [17].

# Capítulo 5

## Sugestões de atividades para a sala de aula

Segue, neste capítulo, algumas sugestões de atividades para a sala de aula referentes a alguns dos tópicos abordados neste trabalho.

Tais sugestões se constituem em atividades que buscam promover uma discussão e reflexão de padrões e conexões presentes nos temas abordados. Neste sentido, as atividades devem ser desenvolvidas e discutidas pelos alunos em pequenas equipes para, na sequência, serem apresentadas a todos os colegas.

Neste contexto, cabe ao professor intermediar as discussões através de questionamentos dirigidos aos alunos, tanto no acompanhamento das discussões nas equipes quanto no momento da apresentação.

### 5.1 Deduzindo a Sequência de Fibonacci

#### **Público**

Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio.

#### **Material**

Lápis, borracha e atividade impressa.

#### **Tempo previsto**

Três horas/aulas.

#### **Objetivos**

- Deduzir a Sequência de Fibonacci.

- Promover trabalhos em equipes e realizar interação de respostas obtidas por outras equipes.
- Instigar a busca de relações entre as soluções das atividades propostas.
- Trazer a Matemática para o cotidiano do aluno e mostrar sua presença em várias situações de uma maneira clara e objetiva.
- Mostrar que a Matemática apresentada nesse tópico pode ser trabalhada até mesmo com alunos que apresentam dificuldades.
- Despertar a atitude positiva em relação à Matemática, valorizando sua lógica, sua utilidade e sua beleza.

## Pré-requisitos

Noções básicas de Números Inteiros e Sequências Numéricas.

## Desenvolvimento da atividade

Inicialmente, o professor deverá expor que a solução das três atividades propostas formam a chamada *Sequência de Fibonacci* cuja importância reside no fato dela aparecer, além das situações referentes nas três atividades, em situações completamente inesperadas, como na disposição dos galhos de uma árvore, na árvore genealógica de um zangão e nas formas espiraladas de redemoinhos, de algumas galáxias e de algumas conchas de moluscos.

Em seguida, o professor deverá organizar os alunos em pequenas equipes e, então, explicar as atividades propostas. Concluídas as atividades, cada equipe apresentará aos demais colegas os seus resultados.

Após as apresentações das resoluções das atividades, o professor fará a definição formal da Sequência de Fibonacci, destacando o seu aspecto recursivo (sua lei de formação é a de que qualquer termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, cujos termos iniciais são iguais a 1), e ressaltando que mesmo apesar do número 1 não ser o segundo termo da sequência obtida nos problemas das Atividades 1 e 2, tal sequência pode ser considerada a Sequência de Fibonacci com supressão do primeiro termo.

### ATIVIDADE 1

*Uma pessoa está subindo uma escada. Supondo que ela consiga subir de uma só vez dois degraus, no máximo, ou seja, ela pode subir um ou dois degraus de cada vez, de quantas maneiras diferentes essa pessoa pode subir uma escada de 6 degraus?*

Vamos representar por  $M_n$  o número de maneiras que a pessoa tem para subir uma escada de  $n$  degraus. Se existe somente um degrau, certamente, só há uma maneira de

subir a escada,  $M_1 = 1$ . Se a escada possui dois degraus, a pessoa pode subir os dois degraus de uma só vez ou subir um de cada vez, isto é,  $M_2 = 2$ . Se existem três degraus, existem 3 maneiras de subir a escada:  $1 + 1 + 1$ , ou  $1 + 2$ , ou  $2 + 1$ , ou seja,  $M_3 = 3$ , e assim por diante.

A partir desse raciocínio, preencha o restante da Tabela 5.1.

Nº de degraus	Maneiras possíveis	Total
1	1	1
2	1+1, ou 2	2
3	1+1+1, ou 1+2, ou 2+1	3
4		
5		
6		

Tabela 5.1: Solução resumida do problema de *subir uma escada*.

## ATIVIDADE 2

*Consideremos um sistema formado por duas placas de vidro colocadas face a face com diferentes índices de refração. Qual é o número de caminhos distintos percorridos por um raio de luz se ao incidir no sistema sofrerá 6 reflexões?*

Podemos verificar na Figura 4.1 que quando não ocorre nenhuma reflexão, teremos 1 caminho; para uma reflexão, teremos 2 caminhos distintos; para duas reflexões, teremos 3 caminhos distintos; para 3 reflexões, teremos 5 caminhos distintos e, assim por diante.

Use o mesmo raciocínio para encontrar o que está sendo pedido.

## ATIVIDADE 3

*Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?*

Deve-se considerar que neste problema não haja morte e nem migração de coelhos (nem de dentro pra fora e nem de fora pra dentro).

Para os cinco primeiros meses temos o seguinte:

- No 1º mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes).
- No 2º mês, continuamos com um par de coelhos (agora adultos).
- No 3º mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos e um par de filhotes).
- No 4º mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes).
- No 5º mês, o par inicial gera o seu terceiro par de filhotes; o segundo par de adultos gera o seu primeiro par de filhotes e o par de filhotes gerado no mês anterior, agora adulto. Logo, temos cinco pares de coelhos (três pares de adultos mais dois pares de filhotes).
- Etc.

A Figura 1.2 mostra a reprodução dos coelhos até o sexto mês.

Com base nesse raciocínio, preencha o restante da Tabela 5.2 e encontre o que está sendo pedido.

Mês	Nº de pares de adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º			
7º			
8º			
9º			
10º			
11º			
12º			

Tabela 5.2: Solução do problema da reprodução de coelhos.

## 5.2 Divisão de um segmento na Razão Áurea

### Público

Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio.

## Material

Lápis, borracha, régua, esquadro, compasso e atividade impressa.

## Tempo previsto

Duas horas/aulas.

## Objetivos

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica.
- Promover trabalhos em equipes e realizar interação de respostas obtidas por outras equipes.
- Desenvolver a coordenação motora dos alunos.
- Mostrar que a Matemática apresentada nesse tópico pode ser trabalhada até mesmo com alunos que apresentam dificuldades.
- Despertar a atitude positiva em relação à Matemática, valorizando sua lógica, sua utilidade e sua beleza.

## Pré-requisitos

Noções básicas de Números Racionais e Números Irracionais, Razão e Proporção, Geometria Plana (quadrado e retângulo), Teorema de Pitágoras e Resolução de Equações Quadráticas.

## Desenvolvimento da atividade

O professor deverá, inicialmente, expor que a Razão Áurea, ou o Número de Ouro, ou a Proporção Áurea, ou a Divina Proporção, ou ainda, a Proporção Divina é a proporção que, ao longo dos séculos, mais despertou a atenção de matemáticos e de artistas. Para isso, o professor poderá tomar como referência a Seção 3.1.

Em seguida, o professor deverá organizar os alunos em pequenas equipes para que os mesmos discutam as atividades, porém, no caso da Atividade 2, cada aluno deverá desenvolver a sua.

O professor deverá destacar que a equação quadrática que aparecerá na Atividade 1, produzirá duas raízes irracionais, uma positiva e outra negativa. O aluno deverá considerar a raiz positiva chamando-a de  $\Phi$  (fi maiúsculo). Esse será o chamado *Número de Ouro* ou *Razão Áurea*.

Concluída a Atividade 1, cada equipe apresentará às demais equipes o seu resultado.

Quanto a Atividade 2, após a localização do “ponto áureo” do segmento  $AB$ , o aluno deverá, com auxílio do professor, proceder à justificativa dos passos, provando que de fato o ponto localizado é áureo.

### ATIVIDADE 1

Na Grécia Antiga, a Razão Áurea era chamada de “razão extrema e média” e foi definida pela primeira vez por Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C., da seguinte forma:

“Dizemos que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte”.

Desta definição e da Figura 5.1, podemos escrever:

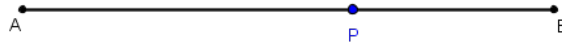


Figura 5.1: Segmento  $AB$  dividido na Razão Áurea.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}.$$

Encontre o valor desta razão considerando  $AP = x$  e  $PB = 1$  e, conseqüentemente,  $AB = x + 1$ .

### ATIVIDADE 2

O aluno deverá, a partir do segmento  $AB$ , Figura 5.2, seguir os passos abaixo para localizar o “ponto áureo”, ou seja, o ponto que dividirá  $AB$  na Razão Áurea.



Figura 5.2: Segmento  $AB$ .

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

1. Marque o ponto médio  $M$  do segmento  $AB$ . (Pressupõe-se que os alunos já saibam como encontrar tal ponto.)
2. Pelo ponto  $B$ , trace o segmento  $BC$  perpendicular a  $AB$ , com  $BC = MB$ , formando o triângulo retângulo  $ABC$ .
3. Com o centro do compasso em  $C$  e raio  $CB$ , trace o arco de circunferência para obter o ponto  $D$  sobre a hipotenusa  $AC$ . O ponto  $D$  é tal que  $CD = CB$ .



4. Com o centro do compasso em  $A$  e raio  $AD$ , trace o arco de circunferência para obter o ponto  $P$  sobre  $AB$ . O ponto  $P$  é tal que  $AP = AD$ .

O ponto  $P$  obtido, é o ponto que divide  $AB$  na Razão Áurea.

## 5.3 Desenhando um Retângulo Áureo e uma Espiral Áurea

### Público

Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio.

### Material

Lápis, borracha, régua, esquadro, compasso e atividade impressa.

### Tempo previsto

Duas horas/aulas.

### Objetivos

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica.
- Promover trabalhos em equipes e realizar interação de respostas obtidas por outras equipes.
- Desenvolver a coordenação motora dos alunos.
- Expor que o Retângulo Áureo é considerado, segundo as experiências de Gustav Theodor Fechner (1801–1887), o retângulo esteticamente preferido pela maioria das pessoas.
- Mostrar que na Natureza existem inúmeros seres vivos e outros entes que apresentam forma espiralada.
- Encorajar os alunos a apreciar a beleza da Matemática na Natureza e na Biologia.
- Mostrar que a Matemática apresentada nesse tópico pode ser trabalhada até mesmo com alunos que apresentam dificuldades.
- Despertar a atitude positiva em relação à Matemática, valorizando sua lógica, sua utilidade e sua beleza.

## Pré-requisitos

Noções básicas de Números Racionais e Números Irracionais, Razão e Proporção, Geometria Plana (quadrado e retângulo) e Teorema de Pitágoras.

## Desenvolvimento da atividade

Inicialmente, o professor deverá definir Retângulo Áureo como sendo um retângulo cujas medidas estão na Razão Áurea, ou seja, um retângulo cuja razão entre o lado maior e o lado menor é igual a  $\Phi$ . Também deverá mostrar que esta definição implica na propriedade de que se traçarmos um quadrado interno a um Retângulo Áureo, a partir do seu menor lado, o retângulo restante também será áureo, sendo que esse processo pode ser repetido, indefinidamente, formando infinitos retângulos áureos, cada vez menores. Esta propriedade é chamada de *auto-propagação*. Além disso, o professor deverá destacar que esse tipo de retângulo é considerado por artistas e matemáticos, desde muito tempo, como o mais harmônico.

Da mesma forma, o professor deverá mostrar que a Espiral Áurea, ou Espiral Logarítmica, além de sua beleza, está presente na Natureza como nos chifres de alguns animais, nas conchas de alguns moluscos, na orelha humana e em algumas galáxias.

Para tanto, o professor poderá tomar como referência as Seções 3.4 e 4.4.

Em seguida, o professor deverá organizar os alunos em pequenas equipes para que os mesmos discutam a atividade, porém no caso da construção do Retângulo Áureo e da Espiral Áurea, cada aluno deverá fazer a sua.

Após a construção do Retângulo Áureo, Atividade 1, cada aluno deverá, com auxílio do professor, proceder à justificativa dos passos para provar que de fato o retângulo construído é áureo.

Com relação à Atividade 2, cada aluno poderá aproveitar o Retângulo Áureo traçado na Atividade 1, caso o professor ache conveniente.

### ATIVIDADE 1

*O aluno deverá a partir do quadrado ABCD de lado a, Figura 5.3, seguir os passos abaixo para construir um Retângulo Áureo.*

1. Marque o ponto médio  $M$  do lado  $AD$ .
2. Com o centro do compasso em  $M$  e raio  $MC$ , trace o arco de circunferência  $CF$  onde  $F$  é o ponto de intersecção do arco com a reta suporte de  $AD$ .
3. Prolongue  $BC$  e pelo ponto  $F$  trace o segmento  $FE$  perpendicular a  $AD$  com  $E$  na reta suporte de  $BC$ .
4. Trace o retângulo  $ABEF$ .

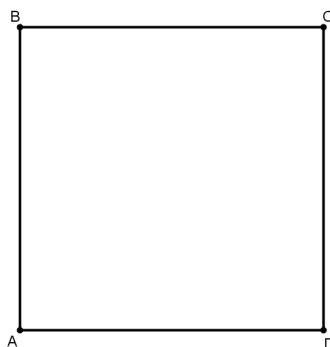


Figura 5.3: Quadrado ABCD.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

O retângulo  $ABEF$  obtido é áureo.

## ATIVIDADE 2

O aluno deverá a partir do Retângulo Áureo da Figura 5.4, seguir os passos abaixo para construir a Espiral Áurea.

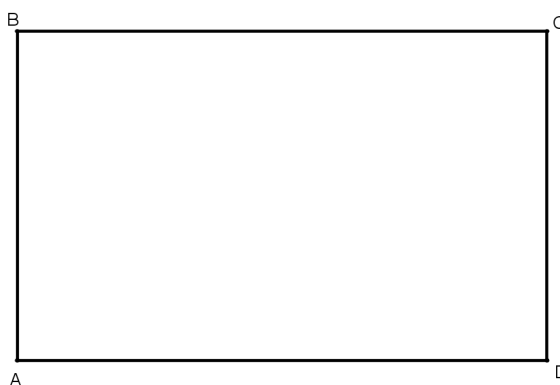


Figura 5.4: Retângulo Áureo.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

1. Com o centro do compasso em  $A$  e raio  $AB$  marque o ponto  $E$  em  $AD$ , com  $AE = AB$ , e trace  $EF$  perpendicular a  $AE$ , com  $F$  em  $BC$  e obtenha o quadrado  $ABEF$ .
2. De forma análoga, construa um novo quadrado a partir de  $FC$ , lado menor do retângulo áureo  $CDEF$  e, assim, construa ao todo um total de uns 5 quadrados.
3. Com o centro do compasso em  $E$  e raio  $EA$ , trace o quarto de circunferência interno ao quadrado  $ABEF$ . De modo análogo, trace o quarto de circunferência de cada um dos quadrados construídos, de forma que a curva apresente o aspecto de uma espiral.

A curva obtida é uma Espiral Áurea.

## 5.4 Relação entre as medidas de objetos que têm a forma retangular

### Público

Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio.

### Material

Lápis, borracha, régua, calculadora, atividade impressa e objetos do cotidiano que possuem forma retangular.

### Tempo previsto

Duas horas/aulas

### Objetivos

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica.
- Promover trabalhos em equipes e realizar interação de respostas obtidas por outras equipes.
- Estudar Razões e Proporções, utilizando-as para obter razões entre as medidas de objetos retangulares.
- Identificar objetos do cotidiano que têm a forma retangular cuja razão entre suas medidas seja áurea ou que se aproxime dela.
- Trazer a Matemática para o cotidiano do aluno e mostrar sua presença em várias situações de uma maneira clara e objetiva.
- Expor que o Retângulo Áureo é considerado, segundo as experiências de Gustav Theodor Fechner (1801–1887), o retângulo esteticamente preferido pela maioria das pessoas.
- Mostrar que a Matemática apresentada nesse tópico pode ser trabalhada até mesmo com alunos que apresentam dificuldades.
- Despertar a atitude positiva em relação à Matemática, valorizando sua lógica, sua utilidade e sua beleza.

### Pré-requisitos

Noções básicas de Números Racionais e Números Irracionais, Razão e Proporção e Geometria Plana (retângulo).

## Desenvolvimento da atividade

Essa atividade será aplicada após a aplicação da atividade *Desenhando um Retângulo Áureo e uma Espiral Áurea*, pois nesta última o professor terá falado da importância estética que a presença da Razão Áurea proporciona nos objetos.

Em seguida, o professor deverá organizar os alunos em pequenas equipes para que os mesmos discutam e realizem a atividade proposta.

Utilizando a régua, cada equipe medirá o comprimento e a largura dos objetos que apresentam forma retangular e, em seguida, registrá-los na atividade impressa, onde aparecerão algumas sugestões de tais objetos, porém as equipes estarão livres para fazerem outras escolhas.

Após as medições, as equipes deverão calcular a razão entre as medidas de cada objeto, do lado maior para o lado menor, que também serão registradas, ao mesmo tempo que verificará qual objeto possui a razão entre suas medidas mais próxima da Razão Áurea.

Em seguida, cada equipe apresentará para o restante da turma os seus resultados.

## ATIVIDADE

Segue na Tabela 5.3, algumas sugestões de objetos que têm a forma retangular, porém outros objetos poderão ser incluídos pelo professor ou pelos alunos, onde as equipes deverão preencher o que se pede.

Objetos	Comprimento	Largura	Razão entre as medidas
Cartão de CPF			
Carteira de Estudante			
Carteira de Identidade			
Capa do livro de Matemática			
Capa de um caderno			
Tela da TV			
Janela da sala			
Porta da sala			
⋮			

Tabela 5.3: Razão das medidas de objetos retangulares.

## 5.5 Elegendo o Casal Mister Áureo

### Público

Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio.

## Material

Lápis, borracha, fita métrica, calculadora e atividade impressa.

## Tempo previsto

Duas horas/aulas.

## Objetivos

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica.
- Promover trabalhos em equipes e realizar interação de respostas obtidas por outras equipes.
- Estudar Razões e Proporções, utilizando-as para obter razões entre algumas partes do corpo humano.
- Mostrar que algumas razões entre partes do corpo humano tendem a se aproximar da Razão Áurea.
- Trazer a Matemática para o cotidiano do aluno e mostrar sua presença em várias situações de uma maneira clara e objetiva.
- Mostrar que a Matemática apresentada nesse tópico pode ser trabalhada até mesmo com alunos que apresentam dificuldades.
- Despertar a atitude positiva em relação à Matemática, valorizando sua lógica, sua utilidade e sua beleza.

## Pré-requisitos

Noções básicas de Números Racionais, Razão e Proporção e Média Aritmética.

## Desenvolvimento da atividade

Inicialmente, o professor deverá comentar o fato de que desde a Grécia Antiga já se sabia que a razão entre algumas medidas do corpo humano tendem a ser o número  $\Phi$ , bem como, abordar o conceito do *homem vitruviano*. Para isso, o professor poderá tomar como referência a Seção 4.5.

Em seguida, o professor deverá organizar os alunos em equipes para que os mesmos discutam e realizem a atividade proposta.

Após a formação das equipes (as equipes deverão conter alunos e alunas em quantidades equilibradas), cada uma receberá do professor a atividade impressa onde constará uma tabela onde serão registradas as medidas ali pedidas de cada componente da equipe.

Em seguida, serão efetuados os cálculos das razões pedidas e da média aritmética dessas razões, referente a cada componente da equipe. Concluído os cálculos das médias, as equipes deverão verificar quais alunos (um homem e uma mulher) componentes apresentam a média mais próxima da Razão Áurea.

Dando sequência à atividade, o professor juntamente com os alunos verificarão qual o aluno e a aluna da turma apresenta a média aritmética de suas razões mais próxima da Razão Áurea e, assim, eleger o *Casal Mister Áureo*.

## ATIVIDADE

Cada equipe preencherá a Tabela 5.4 e, em seguida, verificará quais componentes (um aluno e uma aluna) apresentam a média aritmética de suas razões mais próxima da Razão Áurea.

Medidas	Alunos(as)					
Da altura - $a$						
Do umbigo até o chão - $b$						
Do ombro até a ponta do dedo médio - $c$						
Do cotovelo até a ponta do dedo médio - $d$						
Da perna - $e$						
Do joelho até o chão - $f$						
Do queixo ao alto da testa - $g$						
Do queixo até a altura dos olhos - $h$						
Razões	Resultados					
$a/b$						
$c/d$						
$e/f$						
$g/h$						
<b>Média aritmética das 4 razões</b>						

Tabela 5.4: Razão entre algumas medidas do corpo humano.

## 5.6 Construindo um Pentágono Regular e um Pentagrama

### Público

Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio.

## Material

Lápis, borracha, régua, compasso, transferidor e atividade impressa.

## Tempo previsto

Duas horas/aulas.

## Objetivos

- Tratar das relações áureas no Pentágono Regular e no Pentagrama, assunto que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica.
- Promover trabalhos em equipes e realizar interação de respostas obtidas por outras equipes.
- Desenvolver a coordenação motora dos alunos.
- Mostrar que ao traçarmos as diagonais de um Pentágono Regular obtemos um Pentagrama, figura geométrica que foi o símbolo da irmandade pitagórica.
- Mostrar que o ponto de intersecção de duas diagonais quaisquer de um Pentágono Regular divide as mesmas na Razão Áurea.
- Encorajar os alunos a apreciar a beleza da Matemática através das razões áureas no Pentágono Regular.
- Mostrar que a Matemática apresentada nesse tópico pode ser trabalhada até mesmo com alunos que apresentam dificuldades.
- Despertar a atitude positiva em relação à Matemática, valorizando sua lógica, sua utilidade e sua beleza.

## Pré-requisitos

Noções básicas de Números Racionais e Números Irracionais e Geometria Plana.

## Desenvolvimento da atividade

Inicialmente, o professor deverá falar da importância que o Pentágono Regular e o Pentagrama representam para o estudo da Razão Áurea, visto que tal razão está fortemente presente em tais figuras geométricas. O professor deverá falar também que o Pentagrama era usado como símbolo da irmandade pitagórica, cujo significado era “saúde”.

Em seguida, o professor deverá organizar os alunos em equipes para que os mesmos discutam a atividade, porém cada aluno deverá fazer a sua.



Concluídas as construções e calculadas as razões pedidas, as equipes deverão escrever se chegaram ou não a alguma conclusão acerca das relações (razões) entre as medidas do Pentágono Regular construído.

Certamente, a maioria das equipes deverá chegar à conclusão de que as razões calculadas são de fato a Razão Áurea e, se o professor achar conveniente, o que vai depender do nível de conhecimento de seus alunos em Geometria Plana, deverá auxiliá-los a demonstrar formalmente as conclusões obtidas.

O professor poderá tomar como referência a Seção 3.5.

## ATIVIDADE

*O aluno deverá seguir os passos abaixo para construir o Pentágono Regular e o Pentagrama.*

1. *Trace uma circunferência de raio qualquer (de preferência que o raio não seja muito pequeno).*
2. *Com o transferidor, divida o ângulo central em 5 ângulos iguais a  $72^\circ$ , cada um.*
3. *Estes ângulos determinam 5 pontos, A, B, C, D e E, sobre a circunferência. Una estes pontos e obtenha o Pentágono Regular.*
4. *Trace as diagonais do Pentágono e obtenha um Pentagrama. O aluno deverá chegar a uma figura como a da Figura 5.5.*
5. *Utilize a régua para medir a diagonal AD, o lado DC e os segmentos DF, AF e FG e, em seguida, calcule as razões  $AD/DF$ ,  $DF/AF$ ,  $AD/DC$  e  $AF/FG$ , registrando-as na Tabela 5.5.*

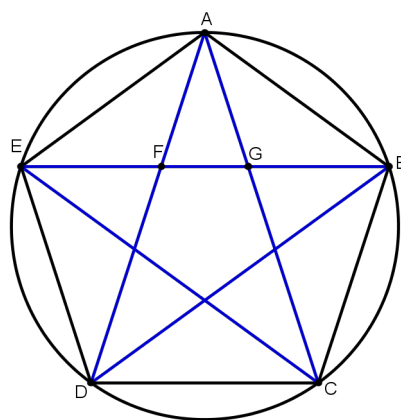


Figura 5.5: Pentágono Regular e o Pentagrama.

Figura feita pelo autor usando o software GeoGebra 4.0.

Medidas	Valores
$AD$	
$DC$	
$DF$	
$AF$	
$FG$	
Razões	Resultados
$AD/DF$	
$DF/AF$	
$AD/DC$	
$AF/FG$	

Tabela 5.5: Razão entre algumas medidas do Pentágono Regular.

## 5.7 Conexão do Número de Ouro com uma sequência de Fibonacci qualquer

### Público

Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio.

### Material

Lápis, borracha, calculadora e atividade impressa.

### Tempo previsto

Duas horas/aulas.

### Objetivos

- Promover trabalhos em equipes e realizar interação de respostas obtidas por outras equipes.
- Calcular as razões entre os termos consecutivos de uma sequência de Fibonacci qualquer.
- Conjecturar a conexão entre o Número de Ouro e uma sequência de Fibonacci qualquer.
- Encorajar os alunos a apreciar a beleza da Matemática através da surpreendente conexão existente entre o Número de Ouro e uma sequência de Fibonacci qualquer.

- Mostrar que a Matemática apresentada nesse tópico pode ser trabalhada até mesmo com alunos que apresentam dificuldades.
- Despertar a atitude positiva em relação à Matemática, valorizando sua lógica, sua utilidade e sua beleza.

## Pré-requisitos

Noções básicas de Números Racionais e Números Irracionais e Sequências Numéricas.

## Desenvolvimento da atividade

Inicialmente, o professor deverá dar uma definição geral para Sequência de Fibonacci como sendo qualquer sequência numérica, não nula, em que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, quaisquer que sejam os dois primeiros termos:  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ , com  $n \geq 3$ . E quando for feita referência à Sequência de Fibonacci (no singular), deve-se considerar a Sequência de Fibonacci original (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...).

O professor também poderá adiantar, caso ache conveniente, que a razão de termos sucessivos,  $u_{n+1}/u_n$ , tende a apresentar uma certa conexão com o Número de Ouro. Em seguida, o professor deverá organizar os alunos em equipes para que os mesmos discutam a atividade, porém cada aluno deverá fazer a sua.

Concluídas as atividades, cada equipe apresentará aos demais colegas sua conclusão quanto aos resultados encontrados nas razões pedidas.

Ao final, o professor deverá explorar o fato de que a razão de termos sucessivos de uma sequência de Fibonacci qualquer aproxima-se cada vez mais do Número de Ouro, pois tal conexão é dotada de uma beleza capaz de surpreender e encantar a todos e, dessa forma, despertar vocações latentes para a Matemática.

O professor poderá tomar como referência a Seção 3.3.

## ATIVIDADE

*As equipes deverão preencher as células vazias na Tabela 5.6, onde A formará a Sequência de Fibonacci e B, C, D, E e F formarão sequências de Fibonacci quaisquer.*

*As equipes chegaram a alguma conclusão a respeito das razões dos termos sucessivos,  $u_{n+1}/u_n$ , das sequências de Fibonacci e o Número de Ouro?*

Sequências de Fibonacci	Termos									
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
A	1	1								
B	2	2								
C	1	2								
D	2	5								
E	5	10								
F	15	9								
<b>Razões</b>	<b>2°/1°</b>	<b>3°/2°</b>	<b>4°/3°</b>	<b>5°/4°</b>	<b>6°/5°</b>	<b>7°/6°</b>	<b>8°/7°</b>	<b>9°/8°</b>	<b>10°/9°</b>	<b>---</b>
A										---
B										---
C										---
D										---
E										---
F										---

Tabela 5.6: Razão entre termos consecutivos de uma sequência de Fibonacci qualquer.

# Conclusão

O presente trabalho mostrou como uma simples definição de “razão extrema e média” dada por Euclides (interessado em usá-la na construção do pentágono regular e do pentagrama) e o problema, aparentemente inocente, da “procriação de coelhos”, apresentado por Leonardo Fibonacci, puderam gerar tantos desdobramentos e indagações na comunidade acadêmica, tanto dentro da Matemática como fora dela.

Vimos que o Número de Ouro (ou Razão Áurea) é o número que desde a Antiguidade mais intrigou matemáticos, cientistas e filósofos, devido às propriedades matemáticas que possui, pela beleza e harmonia que sucinta e pela característica de aparecer em lugares inesperados.

Constatamos, também, que a Sequência de Fibonacci se manifesta como um processo de auto-organização em sistemas naturais e é igualmente dotada de tal característica, além de apresentar propriedades matemáticas curiosas e interessantes que são estudadas em Teoria dos Números. Vários são os exemplos vistos em situações onde os Números de Fibonacci, inesperadamente, surgem: comportamento da luz ao incidir em duas placas de vidro com diferentes índices de refração, árvore genealógica de um zangão, Triângulo de Pascal e Filotaxia.

Mas, eis que, naturalmente, surge uma pergunta: existe alguma relação entre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci, já que os mesmos apresentam características comuns? A resposta é positiva. Existe uma conexão surpreendente entre estes dois conceitos: o limite de razões sucessivas dos termos da Sequência de Fibonacci é o Número de Ouro. E o que ainda mais nos fascina é o fato deste resultado valer para uma sequência de Fibonacci qualquer.

Vimos que os pitagóricos tinham uma veneração especial pelo pentagrama, pois os mesmos sabiam que dentro do pentagrama e do pentágono regular, a Razão Áurea está fortemente presente, conforme mostramos neste trabalho.

Exibimos, algumas das principais propriedades de uma das mais belas curvas, a espiral áurea ou espiral maravilhosa, a qual é construída através da justaposição de retângulos ou de triângulos áureos.

Vimos que apesar do Número de Ouro ser considerado sinônimo de beleza e harmonia, foi desmistificado a ideia de que é possível mostrar que o mesmo foi utilizado no projeto das imponentes Pirâmides de Gizé, no Partenon de Atenas e, principalmente, nas pinturas feitas no Renascimento, particularmente, as de Leonardo da Vinci.

No último capítulo, mostramos, através de algumas sugestões de atividades para a sala de aula, como os conceitos de Razão Áurea e de Sequência de Fibonacci podem ser utilizados no desenvolvimento de diversos conteúdos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio como o de Razões e Proporções, Números Irracionais, Equações Quadráticas, Sequências Numéricas, noção de Limites e Geometria Plana.

Diante destas considerações, pensamos que o desenvolvimento deste trabalho foi muito importante para nós enquanto professores, pois dentre outras contribuições trazidas pelo mesmo, destaca-se o fato dele mostrar a beleza da Matemática e a utilidade dela, a qual serve como principal modelo para descrever fenômenos e objetos da Natureza.

Como não tínhamos a pretensão de escrever um trabalho que contemplasse toda a literatura referente ao Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci, o leitor interessado poderá consultar [8] e [17] onde se encontra uma abordagem do Número de Ouro na Música, bem como, pode ser encontrado, ainda, em [17], uma abordagem da Ladrilharia de Penrose, dos quase cristais, da Geometria Fractal e do Princípio das Ondas de Elliott (ascensão e queda das Bolsas de Valores) e em [30], encontrar a forma de como se relacionam a Sequência de Fibonacci com o número  $\pi$  e o número  $\Phi$  com a unidade imaginária.

# Referências

- [1] ALVES, A. F. **Algumas importantes constantes em Matemática**. Dissertação de Mestrado. – Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas, 1999. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?view=000170389>>. Acesso em: 06 dez. 2012.
- [2] ÁVILA, Geraldo. Retângulo Áureo e divisão áurea in: **Explorando o Ensino da Matemática: artigos**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, v. 1, p. 109-116, 2004.
- [3] ÁVILA, Geraldo. Retângulo Áureo, divisão áurea e Sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**. – São Paulo, v. 6, p. 9-14, 1985.
- [4] AZEVEDO, A. Sequências de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**. – São Paulo, v. 45, p. 44-47, 2001.
- [5] BIEMBENGUT, Maria Salett. **Número de Ouro e secção áurea: Considerações e sugestões para a sala de aula**. Blumenau/SC: Ed. da FURB, 1996.
- [6] BOAVENTURA, D. B.; CRUZ, D. P. **Sequência de Fibonacci**. Trabalho de Conclusão de Curso – Formosa, Universidade Estadual de Goiás, 2009. Disponível em: <<http://pt.scribd.com/doc/64585981/Sequencia-de-Fibonacci>>. Acesso em: 15 nov. 2012.
- [7] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza Gomide. – São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1974.
- [8] CÂMARA, M. A.; RODRIGUES, M. S. O Número  $\Phi$ . – **FAMAT em Revista**, nº 11, p. 81-184, 2008.
- [9] CARVALHO, J. B. P. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**. – São Paulo, v. 17, p. 4-9, 1990.
- [10] CARVALHO, J. B. P. Euclides, Fibonacci e Lamé. **Revista do Professor de Matemática**. – São Paulo, v. 24, p. 32-40, 1993.
- [11] CELUQUE, Leonardo. **A série de Fibonacci: um estudo das relações entre as ciências da complexidade e as artes**. Dissertação de

- Mestrado – Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004. Disponível em: <<http://twiki.ufba.br/twiki/pub/PPGEFHC/DissertacoesPpgefhc/LCeluque.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2012.
- [12] CONTADOR, P. R. M. **A matemática na arte e na vida**. – 2. ed. rev. – São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [13] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. – São Paulo: Atual, 1991.
- [14] HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. – 2. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [15] HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção: um ensaio sobre a beleza na Matemática**. Tradução: Luís Carlos Ascêncio Nunes. – Brasília: Editora da UnB, 1985.
- [16] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Projeto Euclides – Vol 1. 12. ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [17] LÍVIO, Mário. **Razão Áurea: a história de  $\Phi$ , um número surpreendente**. Tradução: Marco Shinobu Matsumura. – 6. ed. – Rio de Janeiro: Record, 2011.
- [18] OLIVEIRA, E.; FERREIRA, T. E. O Número de Ouro e suas manifestações na Natureza e na Arte. **Revista Complexus**. – Instituto Superior de Engenharia Arquitetura e Design – Ceunsp, Salto-SP, Ano. 1, n° 2, p. 64-81, Setembro/2010.
- [19] PANFIGLIO, S. G. et al. Prevalência da Proporção Áurea em indivíduos adultos-jovens. **Revista Odonto Ciência** – Faculdade Odonto da PUC-RS, v. 21, n. 54, out./dez. 2006.
- [20] PRESTES, M. L. M. **A Pesquisa e a Construção do Conhecimento Científico: do planejamento aos textos, da Escola à Academia**. – 4. ed. – São Paulo: Rêspel, 2012.
- [21] QUEIROZ, R. M. **Razão Áurea: A Beleza de uma Razão Surpreendente (Propostas de Atividades)**. – Londrina/PR, 2007. Disponível em: <<http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-atividades.pdf>>. Acesso em: 10 dez. 2012.
- [22] RIBORDY, Léonard. **Arquitetura e geometria sagradas pelo mundo: à luz do Número de Ouro**. Tradução: Jefferson Rosado. – São Paulo: Madras, 2012.
- [23] RYNDACK, D. G. et al. **O Número de Ouro: Razão e Proporção**. Universidade Federal do Paraná – Curso de Verão 2012. Disponível em: <[http://www.pibid.ufpr.br/pibid\\_new/uploads/matematica2009/arquivo/74/Razao\\_e\\_Proporcao.pdf](http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2009/arquivo/74/Razao_e_Proporcao.pdf)>. Acesso em: 12 nov. 2012.



- [24] SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria dos Números**. Coleção Matemática Universitária. – Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 2000.
- [25] SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. – 23. ed. rev. e atual. – São Paulo: Cortez, 2007.
- [26] SODRÉ, U.; TOFFOLI, S. F. L. **Sequências de Fibonacci: Aplicações**. – Londrina/PR, 2005. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm>>. Acesso em: 20 dez. 2012.
- [27] SODRÉ, U.; TOFFOLI, S. F. L. **Sequências de Fibonacci: Propriedades matemáticas**. – Londrina/PR, 2005. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm>>. Acesso em: 20 dez. 2012.
- [28] SUNG, V. S. H. **Sequência de Fibonacci e suas Aplicações**. Trabalho de conclusão de curso – São Carlos/SP: Universidade Federal de São Carlos – UfsCar, 2012. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/MonografiaVictor.pdf>>. Acesso em: 04 nov. 2012.
- [29] VOROBIOV, N. N. **Numeros de Fibonacci. Lecciones populares de matemáticas**. – Editora Mir, Moscú, 1974.
- [30] ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. – Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2011.