



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Pós-Graduação em Matemática em Rede
Nacional/PROFMAT

Odilon Júlio dos Santos

A Relação de Euler para Poliedros

Natal, Março de 2014.

Odilon Júlio dos Santos

A Relação de Euler para Poliedros

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Matemática

Orientador:

Prof.^o Dr.^o Claudio Carlos Dias

Natal, Março de 2014.

Odilon Júlio dos Santos

A Relação de Euler para Poliedros

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Matemática

Aprovado em: 31 / 03 / 2014

Banca Examinadora:

Prof^o. Dr^o. Claudio Carlos Dias
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Prof^o. Dr^o. Ronaldo Freire de Lima
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof^o. Dr^o. José de Arimatéria Fernandes
UFCG
Examinador Externo

Dedicatória

À minha esposa, Priscila Praxedes, pela paciência manifestada durante a construção deste trabalho e pelo carinho constante.

Ao meu filho Odilon Filho por ser, acima de tudo, o principal incentivador do meu crescimento humano e profissional.

Agradecimentos

À Deus, por ter permitido, no seu tempo, que esse trabalho pudesse ser concluído.

Ao Prof^o Dr. Claudio Carlos Dias pela orientação, apoio e paciência manifestados durante o construção deste trabalho.

À Prof^a. Dr^a. Viviane Simioli Medeiros Campos, Coordenadora do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFRN, pela sua dedicação constante na gestão desse Programa de Mestrado em Rede Nacional.

Ao Prof^o Mestre Carlos Alexandre Gomes, pela brilhante idéia inicial sobre a escolha da temática a ser desenvolvida nesta pesquisa.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UFRN pelo esforço e dedicação demonstrados nas aulas das disciplinas ministradas por estes nos fins de semana, bem como por se doarem inteiramente ao programa, sanando dúvidas pelo ambiente Moodle.

Ao Prof^o Mestre Luciano Nóbrega e pela destreza e empenho que demonstrou na revisão deste material.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que fosse possível a realização deste **Trabalho de Conclusão de Curso**.

”O mundo pertence a quem se atreve, e a vida é muito para ser insignificante.”

Charles Chaplin

Resumo

Neste trabalho, analisamos a Relação de *Euler* de uma maneira geral, utilizando, como meios de visualização, a manipulação de materiais concretos, a fim de que haja maior facilidade na percepção do conteúdo, expandindo a aprendizagem aos alunos de nível médio e até fundamental. O estudo faz uma introdução ao tema e leva o leitor a entender que a Relação de *Euler*, se apresentada de maneira inadequada, não é suficiente para determinar a existência de um poliedro. Pois, analisando alguns exemplos, o texto insere a idéia de dúvida, mostrando casos onde não é suficiente encaixar números que validem a Relação de *Euler*. A pesquisa destaca ainda um teorema, certamente desconhecido de muitos alunos e professores que pesquisam sobre os poliedros, apresentando algumas inequações muito simples, relacionando as quantidades de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo, as quais definem de forma precisa as condições suficientes e necessárias para que possamos constatar, sem a necessidade da visualização, a existência do sólido em tela. E para que possamos visualizar vários poliedros e facilitar a compreensão do que estamos expondo, utilizaremos o Geogebra, aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra e pode ser encontrado por meio do link <http://www.geogebra.org>.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Relação de *Euler*. Manipulação de materiais concretos. Poliedros convexos. Característica de *Euler*.

Abstract

In this paper we analyze the *Euler* Relation generally using as a means to visualize the fundamental idea presented manipulation of concrete materials, so that there is greater ease of understanding of the content, expanding learning for secondary students and even fundamental. The study is an introduction to the topic and leads the reader to understand that the notorious *Euler* Relation if inadequately presented, is not sufficient to establish the existence of a polyhedron. For analyzing some examples, the text inserts the idea of doubt, showing cases where it is not fit enough numbers to validate the *Euler* Relation. The research also highlights a theorem certainly unfamiliar to many students and teachers to research the polyhedra, presenting some very simple inequalities relating the amounts of edges, vertices and faces of any convex polyhedron, which clearly specifies the conditions and sufficient necessary for us to see, without the need of viewing the existence of the solid screen. And so we can see various polyhedra and facilitate understanding of what we are exposed, we will use Geogebra, dynamic application that combines mathematical concepts of algebra and geometry and can be found through the link <http://www.geogebra.org>.

Keywords: Teaching math. *Euler* Relation. Manipulation of concrete materials. Convex polyhedra. The *Euler* characteristic.

Sumário

1	Introdução	7
2	Analisando a Relação de <i>Euler</i>	9
2.1	Alguns Poliedros Convexos	9
2.1.1	Definição de <i>poliedro</i>	11
2.2	Vestindo o Cubo...	13
2.2.1	Quais os objetivos desta atividade?	13
2.2.2	Qual material será utilizado nessa atividade?	13
2.2.3	Passo-a-passo	13
3	A Relação de <i>Euler</i>	16
3.1	Uma Demonstração Formal	16
3.1.1	Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico	20
3.2	$V - A + F = 2$ Garante a Existência do Poliedro?	23
3.3	Pensando Além da Relação de <i>Euler</i>	24
3.4	Finalmente, o Poliedro Existe	31
3.4.1	Um Teorema Interessante	31
3.4.2	Alguns Exemplos	42
	Bibliografia	47

Capítulo 1

Introdução

Em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$.



Figura 1.1: Leonhard *Euler* (1707 – 1783).

Esta é a relação de *Euler* para poliedros. A simplicidade do enunciado, a sua generalidade e a facilidade de ilustrá-lo com belos desenhos o tornam atraente, ou mesmo fascinante, para o estudante. Ao longo da história (o teorema foi descoberto em 1758), diversas demonstrações apareceram, mas nem todas corretas ou completas.

Embora os poliedros já fossem conhecidos desde a antiguidade, até o século *XVIII* ninguém havia percebido qualquer relação de natureza combinatória entre suas faces, arestas e vértices, até que por volta de 1750, Leonhard *Euler* (1707 – 1783) fez uma

descoberta que descreveu a seu amigo também matemático, Christian Goldbach (1690–1764), em uma correspondência enviada a este.

Na carta, *Euler* afirma que havia descoberto que se F é o número de faces, A o número de arestas e V o número de vértices, de um poliedro convexo, então

$$V + F = A + 2.$$

Euler enfatizava a veracidade dessa fórmula, desconhecida pelos matemáticos até então, embora não pudesse ainda demonstrá-la. À medida que o tempo foi passando *Euler* e outros matemáticos, dentre eles Adrien Legendre (1752–1833), Augustin Cauchy (1789–1857) e Henri Poincaré (1854–1912) demonstraram a veracidade desta fórmula, embora as demonstrações de *Euler* e Cauchy apresentassem falhas. Há fortes indícios de que esta fórmula já fosse, há mais de um século, do conhecimento de René Descartes (1596–1650), por volta de 1630, portanto, há mais de um século antes. Após a morte de Descartes, um navio contendo seus pertences naufragou, mas ainda foi possível salvar um manuscrito, que foi posteriormente copiado pelo matemático e filósofo Gottfried Leibniz (1646–1716). A cópia de Leibniz também foi perdida mas, por volta de 1860, numa recatologação dos pertences deixados por Leibniz foi novamente encontrada. Na verdade, a fórmula descoberta por Descartes não é exatamente a que foi descoberta por *Euler*, mas lhe é equivalente. Ao estudar a geometria dos poliedros, em seu manuscrito *De Solidorum Elementis*, Descartes declarou (sem demonstrar) que se P é o número total de ângulos planos das faces, então

$$P = 2F + 2V - 4.$$

Descartes, porém, nada mais acrescentou após declarar tal fato. Como $P = 2A$, igualdade que passou despercebida aos olhos de Descartes, conclui-se que

$$2A = 2F + 2V - 4,$$

ou seja,

$$V - A + F = 2.$$

Por isso, muitos atribuem a Descartes o descobrimento da fórmula de *Euler*, e alguns a chamam de fórmula de Descartes-*Euler*.

Nos dias de hoje, há generalizações desta fórmula envolvendo, em vez de poliedros, superfícies de espaços tridimensionais, em uma retomada que começou com Poincaré por volta do ano 1895.

Capítulo 2

Analizando a Relação de *Euler*

Começaremos a estudar a fórmula de *Euler* utilizando um recurso que nos permitirá analisar o problema da contagem de vértices, arestas e faces do poliedro, nos mais diversos casos. A análise destes dados nos permitirá construir a fórmula e, por sua vez, generalizá-la para outros poliedros. Por questões práticas utilizaremos, no nosso experimento, um sólido simples e fácil de ser encontrado no mundo real, que pode ter a forma de um cubo, por exemplo. Alertamos, no entanto, que o mesmo procedimento pode ser utilizado para outros poliedros. E é o que faremos em seguida.

2.1 Alguns Poliedros Convexos

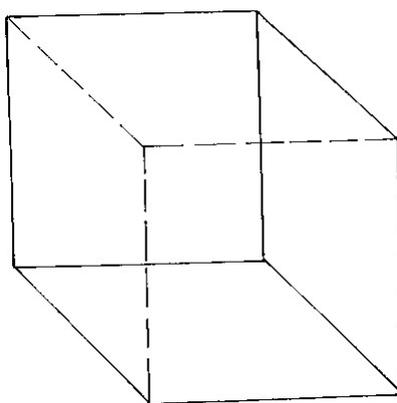


Figura 2.1: Cubo.

Observando o cubo acima, na Figura 2.1, é fácil ver que ele possui 8 vértices, 6 faces e 12 arestas. Neste caso, $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$. Assim, é válida a relação de *Euler*. Mas isso é um fato já conhecido, pois tal relação, segundo o enunciado, é

válida para *todo poliedro convexo*, que é o caso do poliedro apresentado na Figura 2.1.

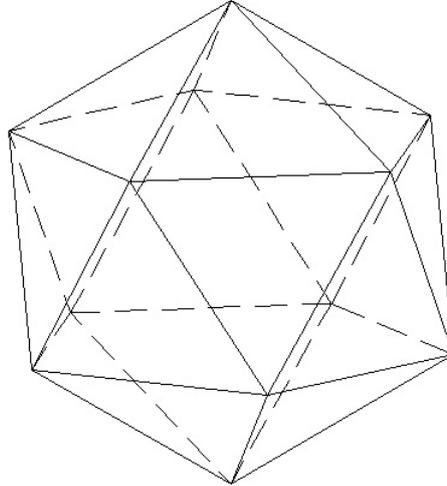


Figura 2.2: Icosaedro.

Agora, vamos contar as faces, as arestas e os vértices do icosaedro mostrado acima. Naturalmente, constatamos que existem 20 faces, 30 arestas e 12 vértices. Então,

$$V - A + F = 12 - 30 + 20 = 2.$$

Assim, na Figura 2.2, verificamos a validade da relação de *Euler*.

Vejam, agora, um prisma regular de base hexagonal, mostrado na Figura 2.3.

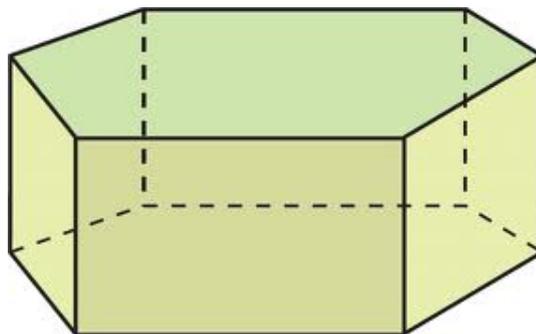


Figura 2.3: Prisma regular de base hexagonal.

O poliedro mostrado na Figura 2.3 também é convexo. Portanto, a relação de *Euler* é obviamente válida. Observe que esse poliedro possui 12 vértices, 18 arestas e 8 faces. Assim,

$$12 - 18 + 8 = 2.$$

Ora, mas será que esta é a única relação encontrada entre os vértices, arestas e faces de um poliedro convexo? E, dado $V - A + F = 2$, existe o poliedro?

Para ficarmos aptos a pensar sobre tais indagações, necessitamos entender, inicialmente, a definição precisa de poliedro. É o que apresentamos a seguir.

2.1.1 Definição de *poliedro*

Existem diversos tipos de poliedros, dentre os quais alguns são convexos. Estes, já que estamos falando na relação de *Euler*, são os que nos interessam definir.

Um poliedro convexo é uma reunião de um número finito de polígonos planos de modo que:

- (a) Cada lado de um polígono é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- (b) O plano que contém um desses polígonos deixa todos os outros de um mesmo lado.

A primeira afirmativa nos diz que cada um dos lados dos polígonos, pertence, necessariamente, a dois polígonos distintos. Como exemplo, adjacentes a um polígono de 4 (quatro) lados, teremos, obrigatoriamente, 4 (quatro) polígonos. E, ao lado de polígonos de 6 (seis) lados, teremos outros 6 (seis) polígonos. Assim, adjacentes aos polígonos quaisquer de n lados, teremos, sempre, um número n de polígonos.

Dessa forma, jamais haverá "espaços" ou "buracos" no poliedro convexo, pois as suas faces estão totalmente conectadas entre si, face a face, por meio de cada uma das arestas que, como foi dito, será utilizada por duas faces distintas e adjacentes.

Já na segunda afirmativa, encontramos a idéia de que o plano que contém qualquer desses polígonos jamais interceptará a um outro polígono, concluindo que todas os demais estariam de um único lado do plano citado.

Cada polígono é denominado *face* do poliedro, cada lado comum é denominado *aresta* do poliedro e cada vértice de um desses polígonos é também *vértice* do poliedro.

Sabemos que todo poliedro convexo satisfaz a relação de *Euler*, mas facilmente nos deparamos com exemplos de poliedros não convexos para os quais tal relação ainda vale, como o poliedro mostrado na Figura 2.4.

Observe, agora, o poliedro apresentado na Figura 2.5.

Assim, os poliedros mostrados nas Figuras 2.4 e 2.5 são considerados *poliedros equivalentes*. O primeiro poliedro não é convexo, pois não satisfaz a condição (b) da definição de poliedro convexo, mas o segundo é. Tal exemplo nos faz, naturalmente,

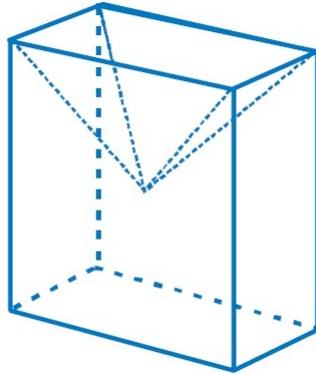


Figura 2.4: Poliedro não-convexo.

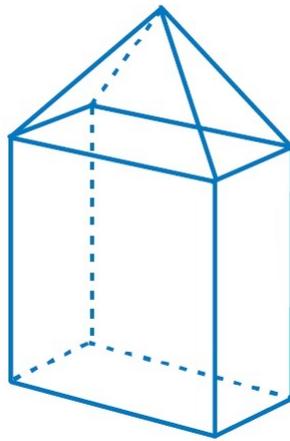


Figura 2.5: Poliedro convexo.

ter a seguinte idéia: transformar um poliedro que não é convexo em outro que seja convexo, de forma suave.

Fazendo deformações na superfície de um poliedro, "esticando", "amassando" ou "dobrando", ou realizando qualquer outra ação que não "fure", "corte" ou "separe" partes que antes estavam unidas, teremos a idéia de que os pontos vizinhos sempre permanecerão vizinhos, apesar de feitas as deformações.

Pensando nessas ações que podemos realizar em um poliedro, facilmente percebemos que a área da superfície do poliedro pode ser alterada, bem como o volume interno de um poliedro que foi deformado, mas as quantidades referentes as arestas, vértices e faces não se alteram.

Dessa forma, poliedros equivalentes, além de outras particularidades, possuem o mesmo número de arestas, vértices e faces.

Uma definição *nada formal* dada para o que foi exposto nos parágrafos anteriores é a seguinte:

Dois poliedros são equivalentes se existe uma deformação contínua que transforma qualquer um deles no outro.

No caso anterior, a deformação ilustrada nada mais é do que "puxar" o vértice interior da pirâmide para fora.

Utilizando essa definição, podemos mudar a forma de um poliedro como se ele fosse construído em borracha, sem que haja preocupação se as faces permanecerão planas e as arestas retas.

Neste texto, a palavra *poliedro* estará representando um objeto equivalente a um poliedro convexo. Isso permite dar maior simplicidade, nos próximos parágrafos, sem que haja a necessidade frequente de citar a convexidade a cada instante.

2.2 Vestindo o Cubo...

Aqui, vamos usar material concreto para mostrar a idéia interposta na relação de *Euler*...

2.2.1 Quais os objetivos desta atividade?

Visualizar faces, vértices e arestas de um poliedro qualquer projetados sobre uma superfície plana, após uma deformação do poliedro.

2.2.2 Qual material será utilizado nessa atividade?

- i Uma tesoura;
- ii Um balão de borracha;
- iii Um poliedro pequeno;
- iv Uma caneta;
- v Alfinetes ou percevejos;
- vi Uma folha de E.V.A. ou assemelhados.

2.2.3 Passo-a-passo

Primeiramente, vamos *vestir* o poliedro com uma roupa de borracha bem justa, conforme Figura 2.6. Abra a boca do balão inflável e coloque o sólido dentro. Tome

cuidado de escolher um material que seja resistente, mas que não corte a borracha. Estique o balão diminuindo ao máximo as bolhas de ar.

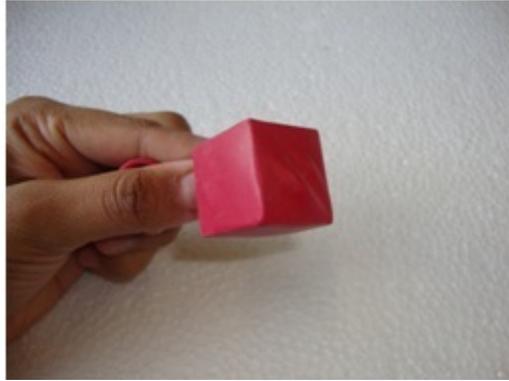


Figura 2.6: Cubo já *vestido* com uma roupa de borracha bem justa.

Agora vamos transferir o poliedro para o balão, utilizando uma caneta (caneta para transparências, ou marcador permanente). Vamos cobrir todas as arestas do poliedro, conforme ilustrado na Figura 2.7.



Figura 2.7: Cobrindo as arestas do poliedro com marcador permanente.

Vamos cortar uma face do poliedro suprimindo-a, com o uso de uma tesoura, sem que suas arestas e seus vértices sejam retirados. Veja a Figura 2.8.

Nosso próximo passo será alongar o buraco deixado pela face retirada. Primeiro, estiquemos o balão sobre um pedaço de E.V.A. (ou semelhantes) apoiado em uma superfície plana (um tampo de mesa ou de uma carteira). Com calma vá prendendo na E.V.A. um alfinete em cada vértice da face retirada, tome o cuidado de prender os alfinetes no lado inverso para não sofrer nenhum acidente.

Através dos procedimentos anteriores conseguimos obter uma região plana delimitada pela curva composta das arestas e vértices (alfinetes) da face retirada e constituída pelos polígonos deformados das demais faces originais do poliedro. Observemos que esta



Figura 2.8: Cortando uma face, utilizando uma tesoura.



Figura 2.9: Prendendo, com alfinetes, sobre um pedaço de E. V. A.

região plana tem o mesmo número de arestas (lados), vértices (alfinetes) do poliedro original, só que com uma face a menos, que é a face que foi inicialmente retirada. Nosso problema agora foi transferido para o plano, ou seja, temos que mostrar que a região plana acima obtida tem característica de *Euler*, ou seja, o número $F - A + V$, igual a 1. Basta contar e encontraremos 5 faces, 12 arestas e 8 vértices. Desta forma, $F - A + V = 5 - 12 + 8 = 1$.

Veja que retiramos uma face, a fim de poder planificar o poliedro. Desta forma, adicionando a face retirada ao número de faces encontrados na planificação, concluímos que a característica de *Euler* do poliedro é 2, como queríamos demonstrar.

Capítulo 3

A Relação de *Euler*

3.1 Uma Demonstração Formal

Adrien Marie Legendre (1752 + 81 = 1833) foi um notável matemático francês. Dentro de uma tradição que muitos dos seus compatriotas ainda seguem, sua destacada posição científica não o impediu de se interessar pelo ensino elementar. Com efeito, uma de suas obras mais conhecidas é o livro "Éléments de Géométrie", publicado pela primeira vez em 1794, traduzido em inglês, alemão, italiano, romeno e até mesmo português. A biblioteca do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, sediado no Rio de Janeiro/RN, possui um exemplar da 14^a. edição, impresso em Paris em 1846, treze anos depois da morte do autor.

Vale salientar que essa pesquisa tem como objetivo principal mostrar que a Relação de Euler não é suficiente para garantir a existência de um poliedro, mas é necessária. Pensando nisso, vamos apresentar uma demonstração formal da Relação de Euler, a fim de dar subsídio à construção da nossa meta. Tal demonstração está sendo apresentada, apenas, para deixar nossa idéia completa e independente de quaisquer outra leitura. Trata-se de completar o ciclo e, para isso, precisamos mostrar que a Relação de Euler é verdadeira.

Após conhecer essa bela e elegante demonstração da Relação de Euler, vamos nos ater ao fato de que tal relação precisa de algo mais para garantir que os números V , A e F não são apenas números, mas que representam a quantidade, respectivamente, de vértices, arestas e faces de um poliedro.

A Geometria de Legendre, que tanto ajudou no treinamento matemático de sucessivas gerações em vários países, é um livro fascinante pela clareza, simplicidade e originalidade de apresentação. Além disso, suas edições consecutivas contam a história das repetidas tentativas de seu autor, buscando demonstrar o postulado das paralelas.

Mas esse é outro assunto. Da Geometria de Legendre, interessa-nos aqui e agora a demonstração da Relação de Euler para poliedros convexos. Foi a primeira demonstração inteligível desse teorema a ser publicada. Trata-se de uma demonstração de rara elegância, o qual passaremos a expor.

Teorema 3.1.1. *Em todo poliedro convexo, com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$.*

Demonstração. Seja P um poliedro convexo, com V vértices, A arestas e F faces. Por conveniência, suporemos que as faces de P são triângulos. (Se isto não for verdade, por meio de diagonais, decomponemos cada face em triângulos, sem alterar o número $V - A + F$. Com efeito, cada vez que traçarmos uma diagonal numa face, o número V não altera, enquanto cada um dos números A e F aumenta de uma unidade, e esses aumentos se cancelam na expressão $V - A + F$.)

Consideremos uma esfera E contida no poliedro P , de raio r , cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro P . Projetando radialmente o poliedro P sobre a esfera E , obtemos uma decomposição de E em triângulos esféricos, dispostos de modo semelhante à situação das faces de P . Em particular, a esfera E fica recoberta por F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices.

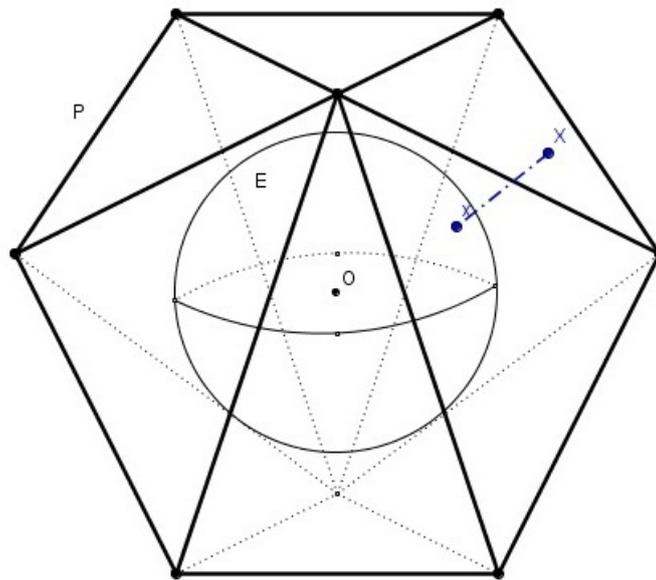


Figura 3.1: O ponto x da esfera E é a projeção radial do ponto X do poliedro P .

Esclarecemos que uma figura sobre a esfera E chama-se de um *triângulo esférico* quando seus três lados são arcos de círculos máximos (todos menores do que uma semi-circunferência). Note que a interseção $E \cap L$ de uma esfera E com qualquer plano L

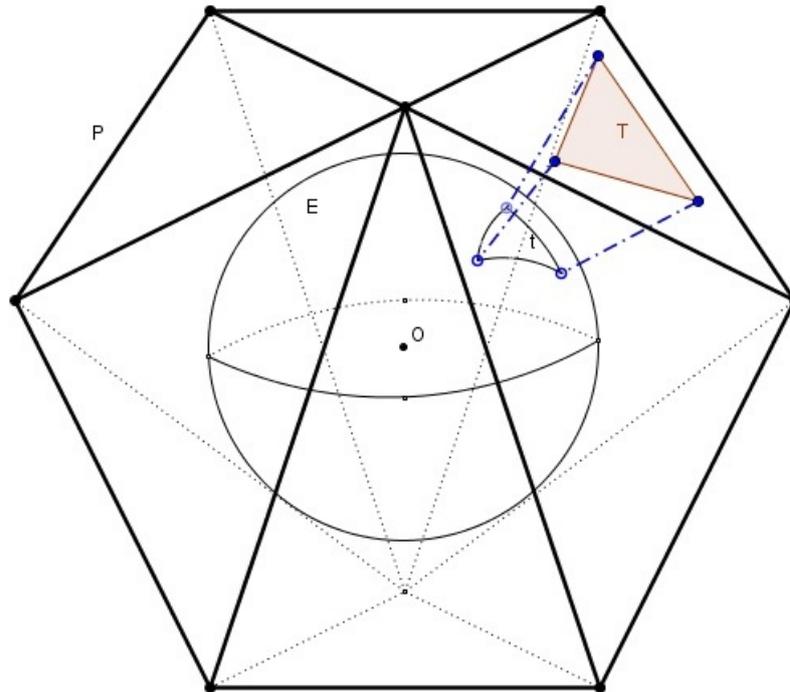


Figura 3.2: O triângulo esférico t , sobre a esfera E , é a projeção radial do triângulo T .

que a encontre, é um círculo (ou um ponto, no caso excepcional em que o plano L é tangente à esfera) e quando o plano L passa pelo centro da esfera E , a interseção $E \cap L$ chama-se *círculo máximo*. A projeção radial de um segmento de reta AB é um arco de círculo máximo ab sobre a esfera E (salvo no caso em que A , B e o centro O da esfera estão na mesma reta). Com efeito, A , B e O determinam um plano, que corta a esfera segundo um círculo máximo do qual ab é um arco.

O geômetra francês Albert Girard demonstrou (em 1629) que se os ângulos α , β e γ de um triângulo esférico forem medidos em radianos, a soma $\alpha + \beta + \gamma$ é dada pela fórmula

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2},$$

onde a é a área do triângulo e r é o raio da esfera. Esta fórmula é o fato básico no qual se fundamentou Legendre para demonstrar a Relação de Euler. Na seção seguinte, provaremos a Fórmula de Girard. Agora vamos mostrar como a Relação de Euler resulta dela, de forma simples e elegante.

Voltemos à nossa decomposição de esfera E em F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices. Para cada um desses triângulos t , vale a fórmula de Girard $s_t = \pi + a_t/r^2$, onde s_t é a soma dos ângulos e a_t é a área do triângulo esférico t . Temos ao todo, F igualdades como esta acima. Somando-as todas vem:

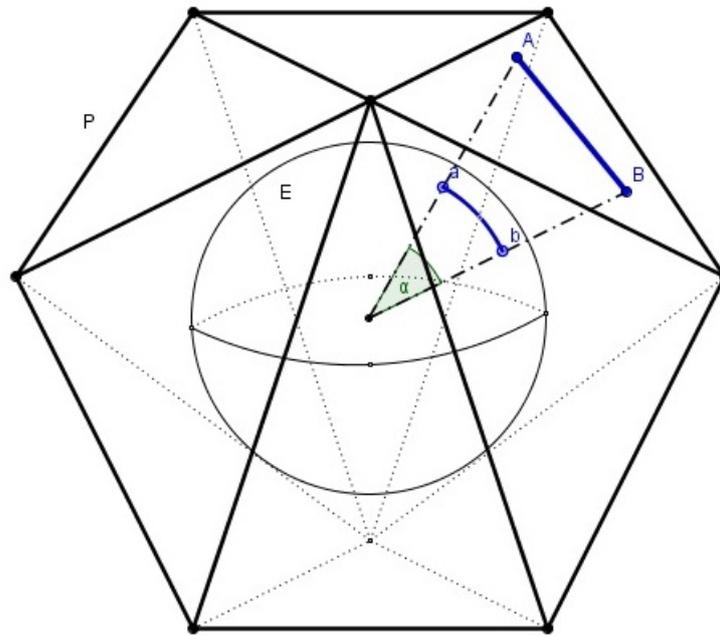


Figura 3.3: A reta esférica.

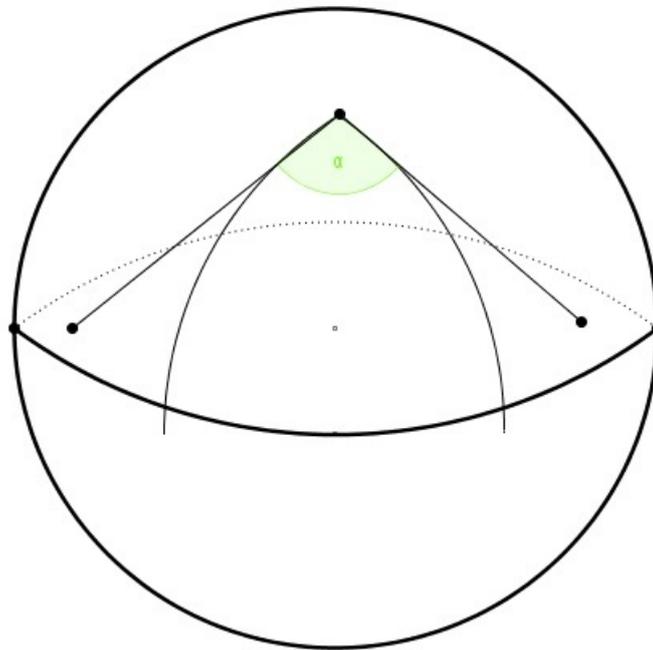


Figura 3.4: Quando dois arcos de círculos têm uma extremidade comum, o ângulo α formado por esses arcos é, por definição, o ângulo entre as semi-retas tangentes a esses arcos.

$$\sum s_t = \pi F + \frac{\sum a_t}{r^2}.$$

Ora, $\sum s_t = 2\pi V$ porque a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a 2π . Além disso, $\sum a_t = 4\pi r^2 =$ área da superfície esférica E . Portanto, a igualdade acima se escreve $2\pi.V = \pi.F + 4\pi r^2/r^2$. Simplificando, temos $2V = F + 4$, isto é:

$$2V - F = 4(*)$$

Para obter uma relação entre F (número de triângulos esféricos) e A (número total de lados desses triângulos), observamos que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de 2 triângulos, logo $3F = 2A$, ou seja:

$$F = 2A - 2F.$$

Substituindo F por este valor na igualdade (*), vem $2V - 2A + 2F = 4$, donde

$$V - A + F = 2,$$

que é a Relação de Euler.

3.1.1 Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Aqui, vamos provar a Fórmula de Girard, a qual deu validade à demonstração da Relação de Euler que acabamos de mostrar. Essa demonstração da Fórmula de Girard foi extraída da quinta edição da Revista do Professor de Matemática N.º05, onde o Prof. Elon Lages Lima apresenta uma demonstração para a Fórmula de Girard.

Seja E uma esfera de centro O e raio r , a qual permanecerá fixa no decorrer desta seção.

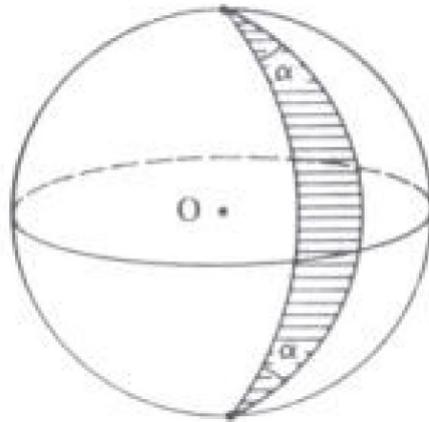
Um *fuso* é uma região da esfera compreendido entre dois círculos máximos. Esses círculos têm dois pontos (diametralmente opostos) em comum, chamados os vértices do fuso. O *ângulo* do fuso é, por definição, o ângulo a entre dois círculos máximos que constituem os lados do fuso.

Um fuso de ângulo $\alpha = \pi$ é um hemisfério (cujo área é $2\pi r^2$). Um fuso de ângulo $\frac{\pi}{2}$ ocupa $\frac{1}{4}$ da esfera, de modo que sua área é πr^2 de um modo geral a área de um fuso é proporcional ao seu ângulo.

Assim sendo, se o ângulo do fuso mede α radianos, a área desse fuso é igual a $2\alpha r^2$.

Dado um ponto qualquer x na esfera, seu antípoda x' é, por definição, o único ponto da esfera tal que o segmento de reta xx' contém o centro O .

Dado um fuso φ na esfera, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de φ é ainda um fuso φ' , chamado o fuso antípoda de φ . A reunião $\Phi = \varphi \cup \varphi'$ chama-se um

Figura 3.5: Um fuso de ângulo α .

fuso completo.

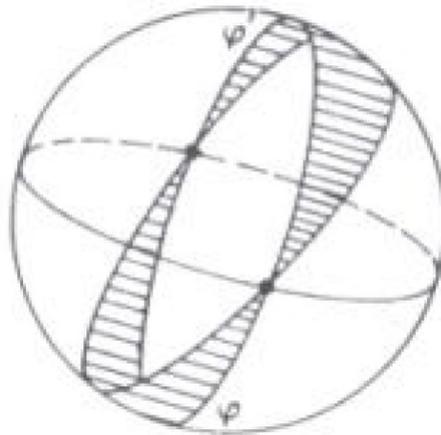


Figura 3.6: Um fuso completo.

Teorema 3.1.2. *Seja Φ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R, R' do fuso completo Φ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha r^2$.*

Demonstração. Consideremos a função $f : E \rightarrow E$, que transforma cada ponto $x \in E$ em seu antípoda $f(x) = x'$. Esta função tem as seguintes propriedades: 1ª.) se x é um ponto do hemisfério H , seu antípoda $x' = f(x)$ pertence ao hemisfério oposto H' ; 2ª.) se x é um ponto do fuso completo Φ , seu antípoda $x' = f(x)$ ainda pertence a Φ ; 3ª.) dada qualquer região R na esfera, a região antípoda $R' = f(R)$, formada pelos pontos antípodas dos pontos de R , tem a mesma área de R . Portanto, se chamarmos de R a

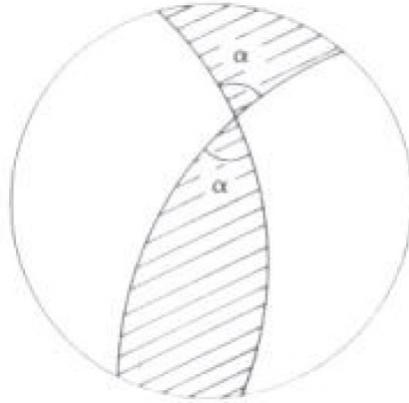


Figura 3.7: A região hachurada é a parte de um fuso completo contida num hemisfério arbitrário. Sua área é $2\alpha r^2$.

parte do fuso completo Φ situada no hemisfério H , veremos que sua região antípoda R' é a parte de Φ situada no hemisfério H' e que área de $\Phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2(\text{área de } R)$, logo, a área de $R = 2\alpha r^2$.

Agora, podemos demonstrar a teorema de Girard.

Teorema 3.1.3. *Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, onde a é a área desse triângulo.*

Demonstração. Consideremos um hemisfério H que contenha o triângulo dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo α , até encontrarem o bordo do hemisfério H , obtemos uma região $R_\alpha \subset H$, cuja área mede $2\alpha r^2$, de acordo com o teorema anterior.

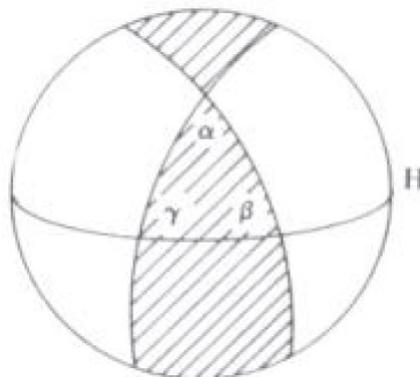


Figura 3.8: A parte hachurada é região R_α .

Fazendo o mesmo com os ângulos β e γ , obtemos regiões R_β e R_γ , cujas áreas medem respectivamente $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$. A reunião dessas três regiões é o hemisfério H ,

com o triângulo dado contado três vezes (duas vezes mais do que devia). Segue-se que a soma das áreas das regiões R_α , R_β e R é igual à área do hemisfério H mais duas vezes a área a do triângulo dado, ou seja, $2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2a$, pois a área de H é $2\pi r^2$. Simplificando, vem $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, como queríamos demonstrar. \square

A fórmula de Girard mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre superior a dois ângulos retos.

A diferença $\frac{a}{r^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ é chamado de "excesso esférico", isto é, em quanto a soma dos ângulos internos do triângulo esférico excede π . Essa diferença sempre é maior que zero. Para um triângulo de área muito pequena, o excesso esférico é insignificante. Por outro lado, se tomarmos um triângulo esférico na superfície da terra com um lado sobre o equador e um vértice no pólo norte, os outros dois lados serão arcos de meridianos, logo dois ângulos serão retos. Se a base for um arco de um quarto do equador, os três ângulos desse triângulo serão todos retos. O leitor pode imaginar triângulos esféricos com $\alpha + \beta + \gamma$ tão próximo de 6 ângulos retos quanto ele deseje ($\alpha + \beta + \gamma$ é sempre maior que 2 ângulos retos e menor que 6 ângulos retos, ou seja, em graus, $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$). Basta tomar os três vértices equidistantes e bem próximos do equador.

Resulta ainda da fórmula de Girard que se s e t são triângulos situados sobre a mesma esfera e os ângulos de s são iguais aos de t , então s e t possuem a mesma área. Na realidade, pode-se provar bem mais: se os ângulos de s são iguais aos de t (sempre supondo s e t sobre a mesma esfera) então os lados de s também são iguais aos de t . Isto é bem diferente da Geometria Plana. Em particular, não há semelhança de triângulos sobre a mesma esfera, salvo quando a razão de semelhança é igual a 1. (Esta última afirmação também pode ser constatada se lembrarmos que dois arcos de círculo semelhantes subentendem o mesmo ângulo central e a razão de semelhança) é a mesma razão entre os raios dos círculos a que pertencem, portanto arcos de grande círculo sobre a mesma esfera só podem ser semelhantes quando têm o mesmo comprimento.

3.2 $V - A + F = 2$ Garante a Existência do Poliedro?

A pergunta natural que se impõe é a seguinte: dados três números naturais V , A e F tais que $V - A + F = 2$, existe sempre um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces?

Observe que não se trata de demonstrar a veracidade da Relação de *Euler*. Pois ela é válida e pode ser demonstrada de várias maneiras. Existem vários livros com exemplos

distintos de demonstrações desta relação. Para poliedros mais comuns, facilmente visualizamos e, em seguida, contamos e constatamos que a Relação de *Euler* funciona mesmo. Isso mesmo, basta contar!

Aqui, faremos evidência ao fato de que muitos autores de livros de matemática, ao tratar sobre este tema em seus livros didáticos, citam exemplos numéricos que respeitam a equação $V - A + F = 2$, mas não atentam para o fato de que tais valores, por si só, nem sempre representam um poliedro. Desta forma, há casos onde não existe possibilidade de *montar* um poliedro com o número indicado de vértices, faces e arestas.

Por exemplo, $V = 7$, $A = 9$ e $F = 4$ satisfazem a Relação de *Euler*, $V - A + F = 2$ ¹, mas não são números de nenhum poliedro, uma vez que com 4 faces só existe o tetraedro², que tem 4 vértices e 6 arestas. Desta forma, a resposta para a pergunta do parágrafo inicial desta seção é **não**.

Portanto, quais as condições que os números V , A e F devem respeitar, além da relação de *Euler*, para que possamos garantir a existência de um poliedro com esses números de vértices, arestas e faces? Obter a resposta para essa pergunta é um dos objetivos deste **Trabalho de Conclusão de Curso**.

3.3 Pensando Além da Relação de *Euler*

A partir de agora, vamos descobrir as condições suficientes para que a Relação de *Euler* garanta a existência do poliedro, analisando cuidadosamente relações entre os números de vértices, arestas e faces de um dado poliedro.

Naturalmente, um polígono qualquer sempre terá que ter ao menos 3 lados, pois seria impossível "fechar" um polígono que tivesse apenas 2 lados. Isso é óbvio. Além disso, não podemos esquecer que cada face de um poliedro é, também, um polígono. Desta forma, qualquer poliedro terá que ter suas faces com, no mínimo, 3 arestas³, mas nada irá impedir de encontrarmos faces quadrangulares (quadradas), pentagonais, ou formadas por polígonos de n -lados, com $n \in \mathbb{N}$, onde $n \geq 3$.

Abaixo, iremos analisar diversos poliedros, relacionando seus números, ou seja, vértices, arestas e faces, dois a dois, a fim de estabelecer uma regra geral que possa nos introduzir a um teorema futuro.

Seja P um poliedro com todas as suas faces triangulares. Vejamos como exemplo o poliedro da Figura 3.9, onde podemos contar 4 faces e 6 arestas. Neste caso, o número

¹Substituindo na Relação de *Euler*, temos $V - A + F = 7 - 9 + 4 = 2$.

²O tetraedro também pode ser chamado de pirâmide de base triangular.

³Faces com três arestas são polígonos com três lados, ou seja, triângulos. Na geometria plana, não existe polígono com menos de três lados.

de faces está para o número de arestas, assim como 4 está para 6. Dessa forma,

$$\frac{F}{A} = \frac{4}{6} \rightarrow \frac{F}{A} = \frac{2}{3} \rightarrow 3F = 2A.$$

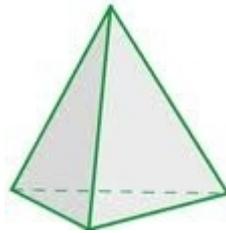


Figura 3.9: Pirâmide de base triangular ou tetraedro.

Analisando mais um exemplo, o octoedro, na Figura 3.10, contamos 8 faces e 12 arestas. Assim, neste caso, o número de faces está para o número de arestas, assim como 8 está para 12. Logo,

$$\frac{F}{A} = \frac{8}{12} \rightarrow \frac{F}{A} = \frac{2}{3} \rightarrow 3F = 2A.$$

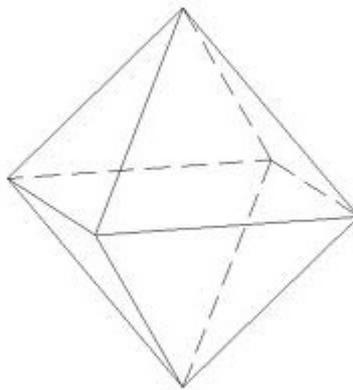


Figura 3.10: Octoedro.

Continuando com nossas contagens, encontramos no icosaedro, Figura 3.11, 20 faces e 30 arestas. Assim, também neste caso, o número de faces está para o número de arestas, assim como 20 está para 30. Logo,

$$\frac{F}{A} = \frac{20}{30} \rightarrow \frac{F}{A} = \frac{2}{3} \rightarrow 3F = 2A.$$

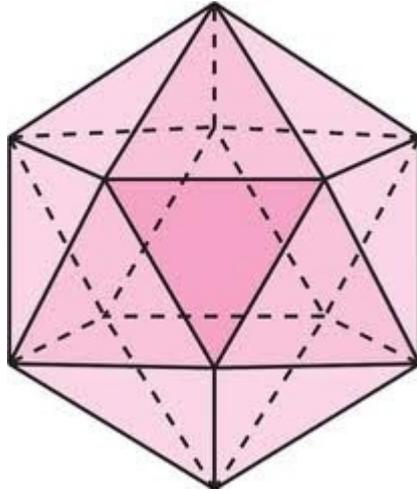


Figura 3.11: Icosaedro.

Assim, nestes casos encontramos sempre $3F = 2A$, uma vez que cada aresta é lado de exatamente duas faces. É como dizer que cada aresta *possui* duas faces e cada face *possui* três arestas. Pelo visto, isso ocorrerá toda vez que tivermos apenas faces triangulares (Nada foi provado ainda, pois é apenas uma suposição). Veja na Figura 3.12, a qual possui algumas faces que não são triangulares, que temos 5 faces e 9 arestas. Nesse exemplo, não temos $3F = 2A$, pois

$$3F = 3 \cdot 5 \neq 2 \cdot 9 = 2A.$$

Na verdade,

$$3 \cdot 5 < 2 \cdot 9 \rightarrow 3F < 2A.$$

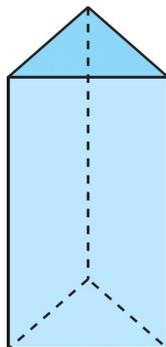


Figura 3.12: Prisma de base triangular.

Portanto, se P possuir alguma face não triangular, então $3F < 2A$. Ora, é como se fizéssemos uma afirmativa dizendo que cada aresta de P *possui* duas faces ($2A$),

mas nem toda face *possui* apenas três arestas ($3F$). Isso é uma idéia totalmente intuitiva, lembrando que nada disso está sendo demonstrado matematicamente. Assim, necessariamente $3F \leq 2A$. Isso abrange todos os casos possíveis, já que qualquer poliedro que encontrarmos se enquadra em uma das duas possibilidades: possuir apenas faces triangulares, resultando em $3F = 2A$; ou não possuir apenas faces triangulares, concluindo que $3F < 2A$. Tudo isso, levando em consideração que não existem faces (polígonos) com menos de três lados.

Até agora, falamos sobre uma relação que existe entre o número de faces e o de arestas. Fazendo uso de um raciocínio análogo, vamos relacionar, dois a dois, estes números com os de vértices.

Suponha que, no poliedro P , cada vértice seja ponto comum a três arestas. Se tentarmos imaginar, não há possibilidade de um vértice ser ponto comum de menos de três arestas, pois estamos tratando de sólidos, e não polígonos no plano. Veja um exemplo, na Figura 3.13, onde isso ocorre.

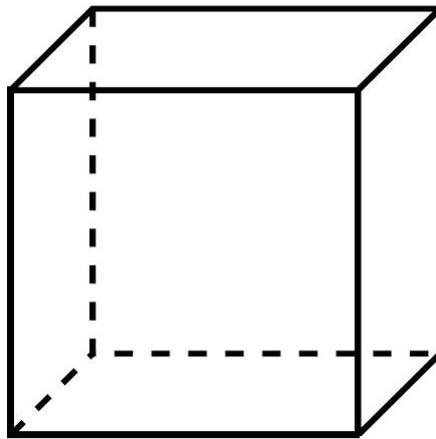


Figura 3.13: Cubo.

Veja que, na Figura 3.13, temos 8 vértices e 12 arestas. Podemos dizer que o número de vértices está para 8, da mesma maneira que o número de arestas está para 12. Isso, nos faz imaginar a seguinte igualdade:

$$\frac{V}{A} = \frac{8}{12} \rightarrow \frac{V}{A} = \frac{2}{3} \rightarrow 3V = 2A$$

Será que poderíamos encontrar essa igualdade em outros poliedros? De fato, isso parece ocorrer sempre que, num poliedro P , cada vértice for ponto comum de três arestas. Assim, $3V = 2A$, pois contando as arestas que incidem em cada vértice, teremos contado cada uma duas vezes.

Entretanto, existem também os casos onde cada vértice é ponto comum de mais de três arestas. Como exemplo, temos o octoedro (poliedro com oito faces), apresentado anteriormente, que tem cada um de seus vértices como ponto comum de, exatamente, quatro arestas. Veja a Figura 3.10. Neste caso, contamos 6 vértices e 12 arestas. Estes números não condizem com a igualdade $3V = 2A$, pois veja que $3 \cdot 6 \neq 2 \cdot 12$, ou melhor, $3 \cdot 6 < 2 \cdot 12$. Assim, teríamos $3V < 2A$.

Finalmente, podemos dizer que, se P possui *algum* vértice onde incide em mais de 3 arestas, teremos $3V < 2A$. Observe que não é necessário que todos os vértices sejam ponto comum de mais de três arestas, bastando que um único vértice tenha essa característica. Excluindo o caso em que incidem em cada vértice menos de três arestas, senão não teríamos um poliedro.

Assim, necessariamente $3V \leq 2A$.

Pelo que vimos, conseguimos relacionar, por meio de exemplos gerais, o número de faces com o número de arestas e, em seguida, o número de vértices com o número de arestas. Agora, podemos afirmar que, em todo poliedro, são necessárias as desigualdades $3F \leq 2A$ e $3V \leq 2A$.

E o quê isso quer dizer? Qual o real motivo de estarmos encontrando essas relações entre os números de um poliedro?

Seja P um poliedro com V vértices, A arestas e F faces, ao usar convenientemente a Relação de Euler, temos

$$V - A + F = 2 \rightarrow 6 = 3V - 3A + 3F,$$

usando a desigualdade $3F \leq 2A$, obtemos

$$6 = 3V - 3A + 3F \leq 3V - 3A + 2A = 3V - A.$$

Logo,

$$6 \leq 3V - A \rightarrow A + 6 \leq 3V.$$

Mas, ao usarmos a desigualdade $3V \leq 2A$, dá $A + 6 \leq 3V \leq 2A$. Por outro lado, usando a Relação de Euler, obtemos

$$6 = 3V - 3A + 3F \leq 2A - 3A + 3F = -A + 3F.$$

Assim,

$$6 \leq -A + 3F \rightarrow A + 6 \leq 3F.$$

Até o momento, fizemos algo muito simples: *misturamos* a relação de *Euler* com as duas desigualdades encontradas. Estamos, aqui, direcionando os cálculos para uma regra geral que garanta que o poliedro existe.

Observe que, juntando as idéias anteriores, temos que $A+6 \leq 3F$ e $3F \leq 2A \rightarrow A+6 \leq 3F \leq 2A$ e, seguindo o mesmo raciocínio, sobre os vértices e arestas, $A+6 \leq 3V$ e $3V \leq 2A \rightarrow A+6 \leq 3V \leq 2A$.

Guarde na memória essas duas inequações, pois são parte do que estamos tentando encontrar: um conjunto de regras que definem, por si só, a existência de um poliedro. Ora, pelo que entendemos, os números de vértices, arestas e faces de todo poliedro terão que respeitar essas inequações, senão não haverá poliedro. Até aqui, é isso que sabemos. Mas será que existe mais alguma regra a ser obedecida? Ou apenas estas inequações (que já usam como verdadeira a Relação de *Euler*.) são suficientes?

Naturalmente, qualquer uma das duas inequações diz que $A+6 \leq 2A$. Então,

$$6 \leq 2A - A \rightarrow 6 \leq A.$$

Portanto, todo poliedro terá que ter, no mínimo, 6 arestas. Mas, visualmente, isso é fácil de aceitar. O mais simples⁴ dos poliedros é o tetratedro (pirâmide de base triangular), o qual possui exatamente 6 arestas. Curiosamente o tetraedro possui apenas faces triangulares e cada um de seus vértices é ponto comum de apenas três arestas. É um exemplo de poliedro que respeita simultaneamente as igualdades $3F = 2A$ e $3V = 2A$.

Concluimos que, para a existência de um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, é necessário que, além da relação de *Euler*, tenhamos

$$6 \leq A.$$

Dessa forma, olhando apenas o número de arestas, podemos afirmar se pode ou não existir o poliedro. Veja que se o número de arestas for menor que 6, temos a certeza que o poliedro não existe, mas se for maior ou igual a 6, não podemos afirmar que ele existe. O poliedro pode ou não existir, dependendo ainda de outras verificações.

Se o número de arestas for bem pequeno e maior ou igual a 6, podemos analisar o aspecto de alguns poliedros. Exemplo: Como são os poliedros que possuem 10 arestas?

Considerando as condições que constatamos, se $A = 10$, devemos ter

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A \rightarrow 16 \leq 3F \leq 20$$

⁴Trata-se de um poliedro com os menores números de vértices, arestas e faces.

e

$$A + 6 \leq 3V \leq 2A \rightarrow 16 \leq 3V \leq 20.$$

Analisando com cuidado e lembrando que $F \in \mathbb{Z}$, $V \in \mathbb{Z}$, e que o único número múltiplo de 3 entre 16 e 20, inclusive, é o 18, concluímos que $3F = 3V = 18$.

Portanto, $F = V = 6$.

Construindo um exemplo que possua 6 vértices, 6 faces e 10 arestas, apresentamos o poliedro da Figura 3.16, o qual é uma pirâmide de base pentagonal.

Observe que não é possível construir um poliedro, com as características estabelecidas, somente com faces triangulares. Logo, com os números dados, pelo menos uma das faces não será triangular, pois como já foi mostrado, se um poliedro possui somente faces triangulares, então $3F = 2A$, o que não é o caso dos poliedro observado na Figura 3.16.

Acabamos de encontrar as condições necessárias para que um poliedro possa existir. São elas a relação de *Euler* propriamente dita, ou seja, $V - A + F = 2$, além das três seguintes desigualdades:

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A,$$

$$A + 6 \leq 3V \leq 2A$$

$$A \geq 6.$$

Faz-se necessário salientar aqui que a terceira desigualdade ($A \geq 6$) pode ser suprimida, pois ela é adquirida com as duas desigualdades anteriores.

Além das condições necessárias para que um poliedro exista, é fundamental encontrar as condições suficientes para a existência de um poliedro com V vértices, A arestas e F faces.

Você deve estar se fazendo as seguintes perguntas: Como assim? Será que o que encontramos não é o suficiente para determinar a existência de um poliedro? Na verdade, se, dados três números, forem respeitadas a relação de *Euler* e as três inequações, ainda não podemos dizer com certeza se existe o poliedro, pois ainda não verificamos se são só estas as regras que os números devem respeitar. Será que ainda há uma outra equação ou inequação a ser encontrada? Um outra regra que ainda não foi constatada?

A fim de facilitar o aprendizado, representaremos por (V, A, F) qualquer um dos poliedros da família de todos os poliedros que possuem V vértices, A arestas e F faces. Por exemplo, $(6, 10, 6)$ representa a pirâmide mostrada na Figura 3.16, além de representar qualquer outro poliedro que tenha 6 vértices, 10 arestas e 6 faces. Por isso,

dizemos que essa simbologia irá representar uma família⁵ de poliedros que tenham os mesmos números.

Daqui pra frente, usaremos naturalmente essa simbologia, sem nos ater ao fato de representar geometricamente exemplos destas famílias de poliedros.

3.4 Finalmente, o Poliedro Existe

O teorema a seguir tem como finalidade definir que se todos os seus itens forem respeitados de forma algébrica, o poliedro existirá, sem que haja a necessidade de representá-lo graficamente. Isso é simplesmente espetacular!! Imagine tentar "conferir" visualmente a existência de um poliedro com um número de faces maior que 100 sem ter um computador por perto... Praticamente impossível.

3.4.1 Um Teorema Interessante

Teorema 3.4.1. *Existe um poliedro convexo com V vértices, A arestas, e F faces se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições:*

$$(a) \quad V - A + F = 2$$

$$(b) \quad A + 6 \leq 3F \leq 2A$$

$$(c) \quad A + 6 \leq 3V \leq 2A$$

Demonstração. Já vimos que os itens citados são condições necessárias pra que possamos *montar* um poliedro. Vamos então provar que tais condições são suficientes.

Primeiramente, vamos *definir* os poliedros (famílias) que chamaremos de primitivos. São os seguintes: (4, 6, 4), o tetraedro, exemplificado na Figura 3.14; (5, 8, 5), a pirâmide de base quadrangular, conforme Figura 3.15; (6, 10, 6), a pirâmide de base pentagonal que ilustramos na Figura 3.16.

O número de arestas dos poliedros primitivos foram definidos levando em consideração que, como concluímos, $A \geq 6$. Assim, só nos convém analisar esses casos.

A escolha desses três poliedros para serem chamados de *primitivos* é devida ao fato de tais poliedros serem poliedros mais simples, ou seja, com menor número de arestas. Levando em consideração que qualquer número, quando dividido por três, só tem três possibilidades de resto: Ou deixa resto zero, ou um ou dois. Não há outra possibilidade. Assim, cada cada um dos três poliedros escolhidos se encaixa em uma,

⁵Vários objetos com mesmas características. Similar a conjunto de coisas. Neste caso, conjunto de poliedros.

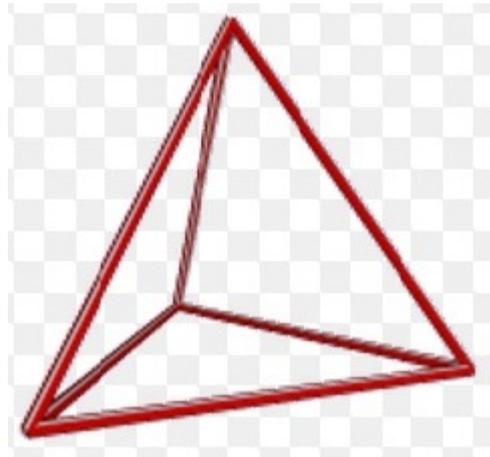


Figura 3.14: Tetraedro, que será representado por $(V, A, F) = (4, 6, 4)$.

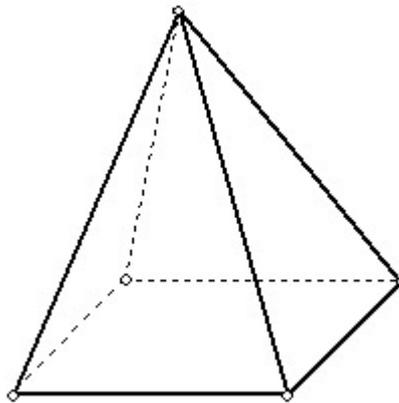


Figura 3.15: Pirâmide de base quadrangular, que será representada por $(V, A, F) = (5, 8, 5)$.

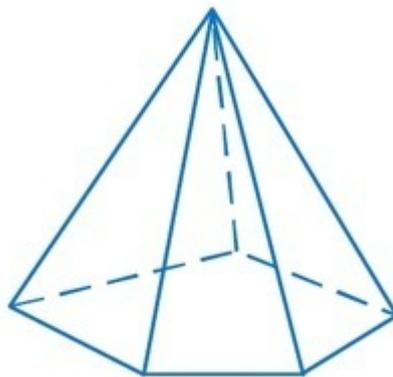


Figura 3.16: Pirâmide de base pentagonal, que será representada por $(V, A, F) = (6, 10, 6)$.

e apenas uma, dessas situações. Veja que o poliedro $(4, 6, 4)$ possui 6 arestas. E que 6 dividido por 3 deixa resto 0. Poderíamos pensar num poliedro que possua 7 arestas. Mas, se $A = 7$, lembrando que $A + 6 \leq 2A$, temos $7 + 6 > 2 \cdot 7$, concluindo que não podemos construir um poliedro com 7 arestas. No segundo poliedro primitivo, $(5, 8, 5)$, encontramos 8 arestas. Veja que 8 dividido por 3 deixa resto 2. No terceiro e último poliedro primitivo, $(6, 10, 6)$, temos 10 arestas, que dividido por 3, deixa resto 1. Logo, cada um dos poliedros se enquadra em um dos três restos possíveis da divisão por três.

Pensando assim, podemos afirmar que, no poliedro primitivo $(4, 6, 4)$, o número de arestas é igual à $3q$, onde $q = 2$. Da mesma forma, analisando o poliedro primitivo $(5, 8, 5)$, dizemos que o número de arestas é igual à $3q + 2$, com $q = 2$. E, no poliedro primitivo $(6, 10, 6)$, vemos que o número de arestas é igual a $3q + 1$, com $q = 3$. Fato que justifica não pensarmos em definir poliedros primitivos com 9, 11 ou mais arestas, pois estes seriam provenientes dos primitivos definidos, já que se enquadram nos casos dos restos possíveis.

Vamos agora definir duas transformações⁶ a serem aplicadas nos poliedros primitivos (aqueles mostrados nas Figuras 3.16, 3.14 e 3.15): A transformação denotada por $(2, 3, 1)$ acrescenta a um poliedro dois vértices, três arestas e uma face. Com isso, se o poliedro primitivo escolhido for $(4, 6, 4)$, aplicando a transformação $(2, 3, 1)$, teremos a seguinte operação: $(4 + 2, 6 + 3, 4 + 1)$. Assim, após transformado, teríamos o poliedro $(6, 9, 5)$, resultante da operação mostrada. Ela é realizada, geometricamente, ajustando as arestas que incidem em um vértice, acrescentando uma nova face triangular como mostra a Figura 3.17. As arestas e os vértices novos estão em destaque na mesma Figura 3.17

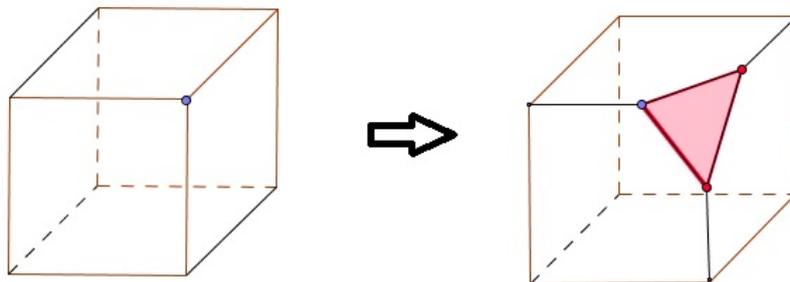


Figura 3.17: A transformação $(2, 3, 1)$ acima acrescenta a um poliedro, dois vértices, três arestas e uma face.

⁶A idéia dessas transformações deve-se a *Edward Bender*, da Universidade da Califórnia, que as publicou no artigo *The number of three dimensional convex polyhedra*, *American Mathematical Monthly*, volume 94, January, 1987, Washington, D.C.

A transformação denotada por $(1, 3, 2)$ acrescenta a um poliedro um vértice, três arestas e duas faces. De modo análogo à aplicação mostrada no parágrafo anterior, utilizando o poliedro primitivo $(5, 8, 5)$, realizando a transformação $(1, 3, 2)$, teríamos $(5 + 1, 8 + 3, 5 + 2)$ que resultaria no poliedro $(6, 11, 7)$, o qual possui 6 arestas, 11 vértices e 7 faces. Sendo assim, trata-se de um poliedro com 7 (sete) faces advindo de um poliedro de 5 (cinco) faces. Ela é realizada, introduzindo duas faces triangulares novas a partir de duas arestas adjacentes de uma face do poliedro, conforme a Figura 3.18. As arestas novas e o vértice novo estão em destaque.

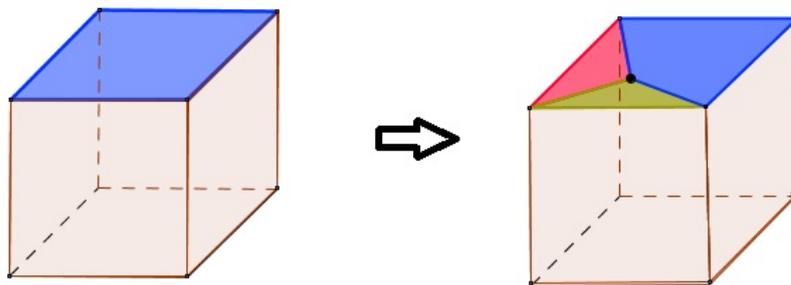


Figura 3.18: A transformação $(1, 3, 2)$ acima acrescenta a um poliedro, um vértice, três arestas e duas faces.

Perceba que, em qualquer um dos dois tipos de transformação citados, sempre vamos adicionar um número múltiplo de 3 às arestas do poliedro primitivo. Por exemplo, se as arestas do poliedro primitivo forem da forma $3q + 1$, teremos, mesmo após finitas transformações, o número de arestas resultante também da forma $3q + 1$, onde $q \in \mathbb{Z}$. Essa idéia é válida também para os casos onde o número de arestas é do tipo $3q$ ou $3q + 1$. Esse raciocínio, é a idéia chave para formar novos poliedros a partir dos poliedros primitivos.

Veja, agora, os poliedros primitivos e ao lado o resultado de suas transformações. Sendo que foram utilizadas as cores vermelha e azul para representar as aplicações de cada uma das duas transformações realizadas em cada poliedro primitivo.

Na Figura 3.19, encontramos, do lado esquerdo, o poliedro primitivo $(4, 6, 4)$, uma pirâmide de base triangular, e aplicando a transformação $(1, 3, 2)$, resulta no poliedro central. Aplicando mais uma vez a transformação $(1, 3, 2)$, ou seja, adicionando um vértice, três arestas e duas faces, obtemos o poliedro da direita.

Na Figura 3.20, vê-se o poliedro primitivo $(5, 8, 5)$ à esquerda e, ao centro, o poliedro $(6, 11, 7)$ com destaque na cor vermelha dos vértices, arestas e faces que foram adicionadas, aplicando a transformação $(1, 3, 2)$. Em seguida, à direita, mostra-se na cor azul o resultado de mais uma aplicação $(1, 3, 2)$.

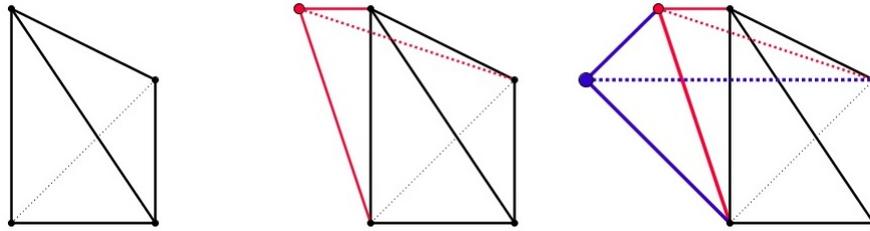


Figura 3.19: O poliedro primitivo $(4,6,4)$ ao lado dos poliedros $(5,9,6)$ e $(6,12,8)$, os quais são resultados de transformações utilizando $(1,3,2)$.

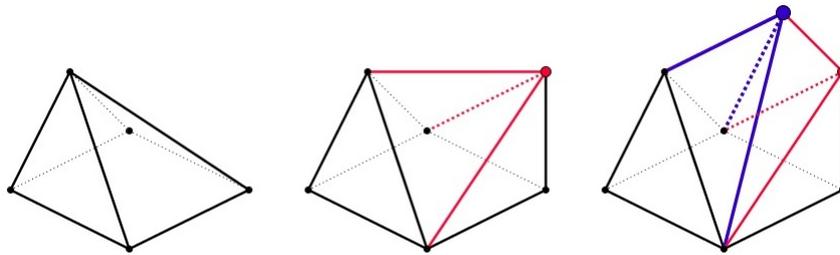


Figura 3.20: O poliedro primitivo $(5,8,5)$ ao lado dos poliedros $(6,11,7)$ e $(7,14,9)$, os quais são resultantes de transformações utilizando $(1,3,2)$.

Analogamente, a Figura 3.21 mostra, respectivamente, da esquerda pra direita, o poliedro $(6,10,6)$, e os poliedros $(7,13,8)$ e o $(8,16,10)$, provenientes das tranformações aplicando $(1,3,2)$.

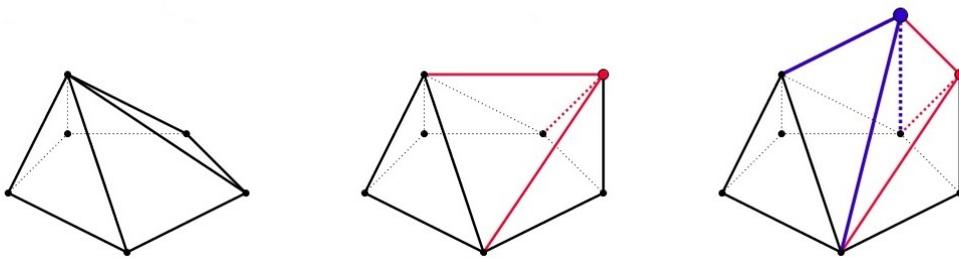


Figura 3.21: O poliedro primitivo $(6,10,6)$ ao lado dos poliedros $(7,13,8)$ e $(8,16,10)$, os quais são resultados de transformações utilizando $(1,3,2)$.

Veja na Figura 3.22 que o poliedro primitivo $(4,6,4)$, representado pelo poliedro à esquerda, é transformado no poliedro central acrescentando (na cor vermelha) dois vértices, três arestas e uma face. O mesmo acontece para construirmos o poliedro da direita, pois adicionamos também (na cor azul) dois vértices, três arestas e uma face.

Utilizando ainda a mesma transformação $(2,3,1)$, aplicada duas vezes no poliedro da esquerda da Figura 3.23, formamos os poliedros do centro e da direita, nesta ordem, o primeiro tendo suas transformações aplicadas em vermelho e o segundo em azul.

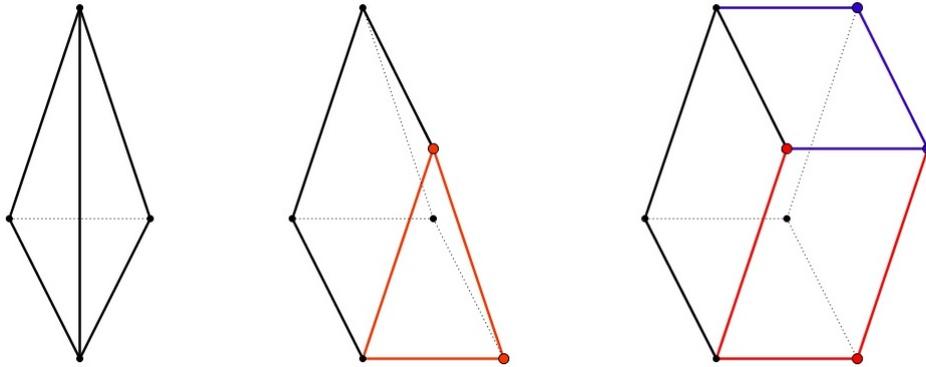


Figura 3.22: O poliedro primitivo $(4,6,4)$ ao lado dos poliedros $(6,9,5)$ e $(8,12,5)$, os quais são resultados de transformações utilizando $(2,3,1)$.

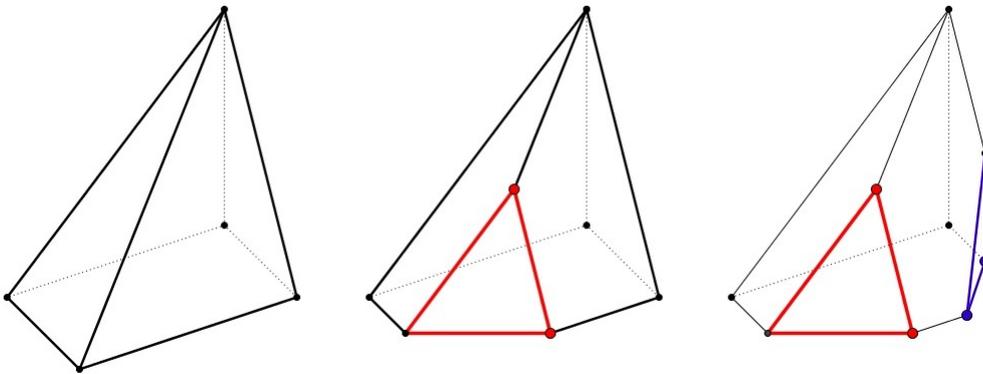


Figura 3.23: O poliedro primitivo $(5,8,5)$ ao lado dos poliedros $(7,11,6)$ e $(9,14,7)$, os quais são resultados de transformações utilizando $(2,3,1)$.

Ainda aplicando a transformação $(2,3,1)$, na Figura 3.24 temos na esquerda o poliedro primitivo $(6,10,6)$ e no centro e à direita os poliedros obtidos por meio da transformação.

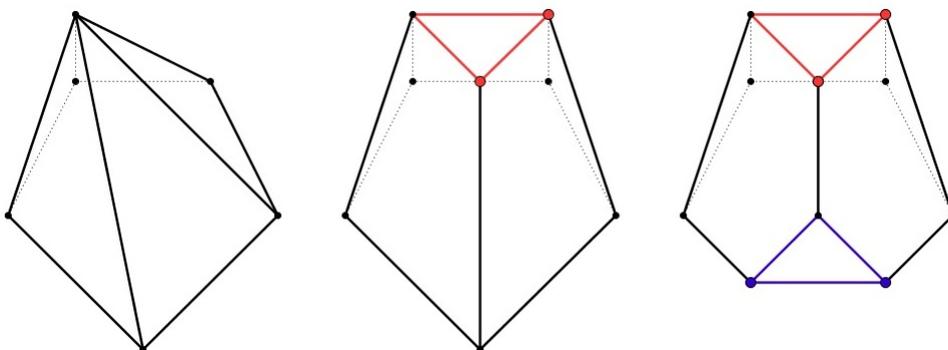


Figura 3.24: O poliedro primitivo $(6,10,6)$ ao lado dos poliedros $(8,13,7)$ e $(10,16,8)$, os quais são resultados de transformações utilizando $(2,3,1)$.

É bom lembrar que estamos tratando de poliedros construídos a partir de **poliedros primitivos**. Os **poliedros primitivos** (aqueles descritos anteriormente como famílias representadas pelos poliedros das Figuras 3.13, 3.14 e 3.15) satisfazem as condições (a),(b) e (c) do **Teorema 3.4.1** e, aplicando-se a eles qualquer número de transformações (1, 3, 2) ou (2, 3, 1), continuamos obtendo poliedros que satisfazem essas condições e é o que faremos a seguir.

Seja $(V, A, F) = (V', A', F') + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1)$, onde (V', A', F') é um poliedro primitivo, dessa forma

$$(V, A, F) = (V' + x + 2y, A' + 3x + 3y, F' + 2x + y).$$

Veja que $V = V' + x + 2y$, $A = A' + 3x + 3y$ e $F = F' + 2x + y$. Vamos mostrar que, para quaisquer valores não negativos de x e y , se (V', A', F') respeita todas condições do Teorema 3.4.1, (V, A, F) também respeita. Em outras palavras, se (V', A', F') é um poliedro (e sabemos que é, pois trata-se de um poliedro primitivo), (V, A, F) também é um poliedro, independente dos valores não negativos de x e y .

Sabendo que $A' + 6 \leq 3V' \leq 2A'$, temos

$$A + 6 = A' + 6 + 3x + 3y \leq 3V' + 3x + 3y \leq 3V' + 3x + 6y = 3V \rightarrow A + 6 \leq 3V.$$

E

$$3V = 3V' + 3x + 6y \leq 2A' + 3x + 6y \leq 2A' + 6x + 6y = 2A \rightarrow 3V \leq 2A.$$

Conclui-se que $A + 6 \leq 3V \leq 2A$.

Ainda, lembrando que $A' + 6 \leq 3F' \leq 2A'$, temos

$$A + 6 = A' + 6 + 3x + 3y \leq 3F' + 3x + 3y \leq 3F' + 6x + 3y = 3F \rightarrow A + 6 \leq 3F.$$

E

$$3F = 3F' + 6x + 3y \leq 2A' + 6x + 3y \leq 2A' + 6x + 6y = 2A \rightarrow 3F \leq 2A.$$

Conclui-se que $A + 6 \leq 3F \leq 2A$.

Vimos que (V, A, F) respeitam as condições (b) e (c) do Teorema 3.4.1. Basta, agora, mostrar que respeita também a condição (a).

Assim, observando que $A' \geq 6$, fica

$$A = A' + 3x + 3y \rightarrow A \geq 6 + 3x + 3y \rightarrow A \geq 6.$$

E, como $V' - A' + F' = 2$, temos que

$$V - A + F = V' + x + 2y - A' - 3x - 3y + F' + 2x + y = V' - A' + F' = 2.$$

Isso nos trás o resultado de que aplicando aos poliedros primitivos, os quais respeitam as condições do Teorema 3.4.1, um número x de vezes as transformação $(1, 3, 2)$ e um número y de vezes as transformação $(2, 3, 1)$, sempre vamos obter valores de V , A e F que satisfazem as quatro condições do Teorema 3.4.1.

Nesta última parte, mostraremos que se V , A e F satisfazem as condições (a) , (b) e (c) , existe um poliedro com esses números de vértices, arestas e faces.

Assim, dado (V, A, F) , satisfazendo as condições (a) , (b) e (c) do Teorema 3.4.1, existem inteiros não negativos x e y e existe um poliedro primitivo (V', A', F') tais que

$$(V, A, F) = (V', A', F') + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1),$$

ou seja, (V, A, F) pode ser construído a partir de um dos poliedros primitivos.

Para provar isso, escrevamos

$$(V, A, F) = (V', A', F') + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1),$$

o que é equivalente aos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} V = V' + x + 2y \\ A = A' + 3x + 3y \\ F = F' + 2x + y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 2y = V - V' \\ 3x + 3y = A - A' \\ 2x + y = F - F' \end{cases} \quad (3.1)$$

Se x e y satisfazem a segunda e a terceira equações, então também satisfazem a primeira equação, uma vez que subtraindo a terceira da segunda e usando a Relação de Euler, encontramos a primeira equação. Senão, vejamos que,

$$A - F = A - F' + 3x - 2x + 3y - y \rightarrow V - 2 = V' - 2 + x + 2y \rightarrow V = V' + x - 2y. \quad (3.2)$$

Mas, $V = V' + x - 2y$ é a primeira equação do Sistema 3.1.

Isso deixa claro que o Sistema 3.1 possui soluções, pois "misturamos" duas de suas equações e utilizamos a relação de *Euler*, a qual já pode ser entendida como válida pois já foi provada anteriormente aqui a sua validade, e concluímos que o poliedro primitivo obedece a relação de *Euler*.

Basta, daqui pra frente, trabalharmos os cálculos utilizando a segunda e a terceira equações, já que, se x e y satisfazem a segunda e a terceira equações, também satisfazem a primeira.

Devemos ainda mostrar que as soluções x e y do Sistema 3.3 são números inteiros não negativos.

$$\begin{cases} 3(x + y) = A - A' \\ 2x + y = F - F' \end{cases} \quad (3.3)$$

Multiplicando a segunda equação do Sistema 3.3 por -3 , fica

$$\begin{cases} 3x + 3y = A - A' \\ -6x - 3y = -3(F - F') \end{cases} \quad (3.4)$$

Resolvendo, utilizando o método da soma, obtemos

$$-3x = (A - A') - 3(F - F') \rightarrow x = \frac{3(F - F') - (A - A')}{3}. \quad (3.5)$$

Substituindo x na segunda equação do Sistema 3.3, temos

$$2x + y = F - F' \rightarrow y = F - F' - 2x. \quad (3.6)$$

Assim,

$$y = F - F' - 2 \frac{3(F-F')-(A-A')}{3} \rightarrow y = \frac{-3(F-F')+2(A-A')}{3}. \quad (3.7)$$

Para provar que x é inteiro não negativo, vamos mostrar que $3(F - F') - (A - A')$ é múltiplo de 3 e que $3(F - F') - (A - A') \geq 0$.

Vamos analisar essa expressão para cada um dos poliedros primitivos. Para isso, começaremos pelo caso $(V', A', F') = (4, 6, 4)$, ou seja, o caso onde $A = 3q$ ($q \in \mathbb{Z}$).

Portanto,

$$3(F - F') - (A - A') = 3(F - 4) - (3q - 6) = 3F - 12 - 3q + 6 = 3F - 3q - 6.$$

No caso $(V', A', F') = (5, 8, 5)$, ou seja, quando $A = 3q + 2$ ($q \in \mathbb{Z}$), vemos que

$$3(F - F') - (A - A') = 3(F - 5) - (3q + 2 - 8) = 3F - 15 - 3q - 2 + 8 = 3F - 3q - 6 - 3.$$

No terceiro e último caso, no qual $(V', A', F') = (6, 10, 6)$, ou seja, quando $A = 3q + 1$ ($q \in \mathbb{Z}$), resulta em

$$3(F - F') - (A - A') = 3(F - 6) - (3q + 1 - 10) = 3F - 18 - 3q - 1 + 10 = 3F - 3q - 6 - 3.$$

Perceba que $3F - 3q - 6$ e $3F - 3q - 9$ são múltiplos de 3. Logo, $3(F - F') - (A - A')$ é múltiplo de 3. Implicando que x é inteiro.

Falta mostrar que x é um número não negativo. Temos que provar que $3(F - F') - (A - A') \geq 0$. Logo, devemos provar que, no primeiro caso, $3F - 3q - 6 \geq 0$, e nos segundo e terceiro casos, $3F - 3q - 9 \geq 0 \rightarrow 3F - 3q - 6 \geq 3$.

Perceba que, em todo caso, $A = 3q + r$, onde $r \in \{0, 1, 2\}$. Assim,

$$A + 6 \leq 3F \rightarrow 3q + r + 6 \leq 3F \rightarrow 3F - 3q - 6 \geq r.$$

No caso $r = 0$, temos $A = 3q$. Logo, $3F - 3q - 6 \geq 0$.

No caso $r = 1$, temos $A = 3q + 1$. Logo, $3F - 3q - 6 \geq 1$.

Se for $3F - 3q - 6 = 1$, fica $3(F - q) = 7$. Levando em consideração que $F - q$ é um número inteiro, temos uma contradição, pois 7 não é múltiplo de 3.

Se for $3F - 3q - 6 = 2$, fica $3(F - q) = 8$. Levando em consideração que $F - q$ é

um número inteiro, temos uma contradição, pois 8 não é múltiplo de 3.

Logo, no caso $r = 1$, temos $3F - 3q - 6 \geq 3$.

No caso $r = 2$, temos $A = 3q + 2$. Logo, $3F - 3q - 6 \geq 2$.

Se for $3F - 3q - 6 = 2$, fica $3(F - q) = 8$. Levando em consideração que $F - q$ é um número inteiro, temos uma contradição, pois 8 não é múltiplo de 3.

Logo, no caso $r = 2$, temos $3F - 3q - 6 \geq 3$.

Portanto, x é um inteiro não negativo.

Vamos, agora, provar que y é inteiro não negativo.

Para provar que y é inteiro não negativo, vamos mostrar que $-3(F - F') + 2(A - A')$ é múltiplo de 3 e que $-3(F - F') + 2(A - A') \geq 0$.

Vamos analisar essa expressão para cada um dos poliedros primitivos. Para isso, começaremos pelo caso $(V', A', F') = (4, 6, 4)$, ou seja, o caso onde $A = 3q$ ($q \in \mathbb{Z}$).

Portanto,

$$-3(F - F') + 2(A - A') = -3(F - 4) + 2(3q - 6) = -3F + 12 + 6q - 12 = 6q - 3F = 3(2q - F).$$

No caso $(V', A', F') = (5, 8, 5)$, ou seja, quando $A = 3q + 2$ ($q \in \mathbb{Z}$), vemos que

$$\begin{aligned} -3(F - F') + 2(A - A') &= -3(F - 5) + 2(3q + 2 - 8) = \\ &= -3F + 15 + 6q + 4 - 16 = 6q - 3F + 3 = 3(2q - F + 1). \end{aligned}$$

No terceiro e último caso, no qual $(V', A', F') = (6, 10, 6)$, ou seja, quando $A = 3q + 1$ ($q \in \mathbb{Z}$), resulta em

$$\begin{aligned} -3(F - F') + 2(A - A') &= -3(F - 6) + 2(3q + 1 - 10) = \\ &= -3F + 18 + 6q + 2 - 20 = 6q - 3F = 3(2q - F). \end{aligned}$$

Perceba que $3(2q - F)$ e $3(2q - F + 1)$ são múltiplos de 3. Logo, $-3(F - F') + 2(A - A')$ é múltiplo de 3. Implicando que y é inteiro.

Falta mostrar que y é um número não negativo. Temos que provar que $-3(F - F') + 2(A - A') \geq 0$. Desta forma, devemos provar que, em todo caso, $2q - F \geq 0$.

Lembre-se que $A = 3q + r$, onde $r \in \{0, 1, 2\}$. Assim,

$$3F \leq 2A \rightarrow F \leq \frac{2A}{3} \rightarrow -F \geq -\frac{2A}{3} \rightarrow 2q - F \geq 2q - \frac{2A}{3}.$$

Mas,

$$A = 3q + r \rightarrow \frac{2A}{3} = \frac{2(3q + r)}{3} = 2q + \frac{2r}{3}.$$

Desse modo,

$$2q - F \geq 2q - \left(2q + \frac{2r}{3}\right) \rightarrow 2q - F \geq -\frac{2r}{3}.$$

No caso $r = 0$, temos $A = 3q$. Logo, $2q - F \geq 0$.

No caso $r = 1$, temos $A = 3q + 1$. Logo, $2q - F \geq -\frac{2}{3}$. Nesse caso, lembrando que $2q - F$ é inteiro e que $-1 < -\frac{2}{3} < 0$, temos que $2q - F \geq 0$.

No caso $r = 2$, temos $A = 3q + 2$. Logo, $2q - F \geq -\frac{4}{3}$. Nesse caso, lembrando que $2q - F$ é inteiro e que $-2 < -\frac{4}{3} < -1$, temos que $2q - F \geq -1 \rightarrow 2q - F + 1 \geq 0$.

Veja que, no caso $(V', A', F') = (5, 8, 5)$, teremos $3(2q - F + 1) \geq 0$.

Mostramos que y não é negativo nos três casos. Portanto, y é um inteiro não negativo.

Não resta dúvidas que x e y são inteiros não negativos, em qualquer caso possível.

Assim, completa-se a demonstração. □

3.4.2 Alguns Exemplos

Após de demonstrar o Teorema 3.4.1, vamos estudar alguns exemplos.

Exemplo: Dado $(V, A, F) = (7, 15, 10)$ mostre que é possível construir o poliedro.

Como $A = 15$ deixa resto 0 quando dividido por 3, devemos começar com o poliedro primitivo $(4, 6, 4)$.

Logo, o poliedro primitivo que gera $(7, 15, 10)$ é o $(4, 6, 4)$.

Desta forma, podemos armar a seguinte equação:

$$(V, A, F) = (V', A', F') + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1) \rightarrow (7, 15, 10) = (4, 6, 4) + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1).$$

Que resulta no sistema

$$\begin{cases} 7 = 4 + x + 2y \\ 15 = 6 + 3x + 3y \\ 10 = 4 + 2x + y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3(x + y) = 9 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \quad (3.8)$$

Lembrando que basta trabalhar duas equações para resolver o Sistema 3.8. Utilizando a primeira e a terceira equação, temos $x = 3 - 2y$ e

$$2x + y = 6 \rightarrow 2(3 - 2y) + y = 6 \rightarrow 6 - 4y + y = 6 \rightarrow y = 0.$$

Assim, $x = 3$.

Como encontramos x e y inteiros não negativos, verifica-se que $(7, 15, 10)$ é um poliedro proveniente de 3 transformações $(1, 3, 2)$ sobre o poliedro primário $(4, 6, 4)$, como ilustrado na Figura 3.27.

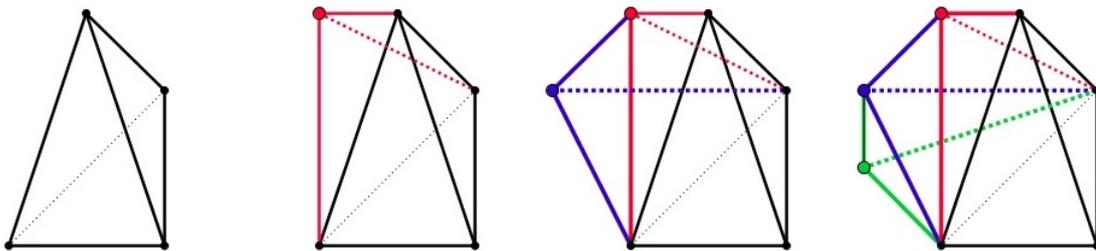


Figura 3.25: O poliedro primário $(4, 6, 4)$ sofrendo três transformações seguidas $(1, 3, 2)$, a primeira em vermelho, a segunda em azul e a terceira em verde, ao final, obtendo o poliedro $(7, 15, 10)$.

Exemplo $(V, A, F) = (12, 19, 9)$

Como $A = 19$ deixa resto 1 quando dividido por 3, devemos iniciar com o poliedro primitivo $(6, 10, 6)$.

Logo, o poliedro primitivo que *gera* $(12, 19, 9)$ é o $(6, 10, 6)$.

Desta forma, podemos armar a seguinte equação:

$$(V, A, F) = (V', A', F') + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1) \rightarrow (12, 19, 9) = (6, 10, 6) + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1).$$

Que resulta no sistema

$$\begin{cases} 12 = 6 + x + 2y \\ 19 = 10 + 3x + 3y \\ 9 = 6 + 2x + y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3(x + y) = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad (3.9)$$

Lembrando que basta trabalhar duas equações para resolver o Sistema 3.9. Utilizando a primeira e a terceira equação, temos $x = 6 - 2y$ e

$$2x + y = 3 \rightarrow 2(6 - 2y) + y = 3 \rightarrow 12 - 4y + y = 3 \rightarrow y = 3.$$

Assim, $x = 6 - 2 \cdot 3 = 0$.

Como encontramos x e y inteiros não negativos, verifica-se que $(12, 19, 9)$ é um poliedro proveniente de 3 transformações $(2, 3, 1)$ sobre o poliedro primário $(6, 10, 6)$, como ilustrado na Figura 3.26.

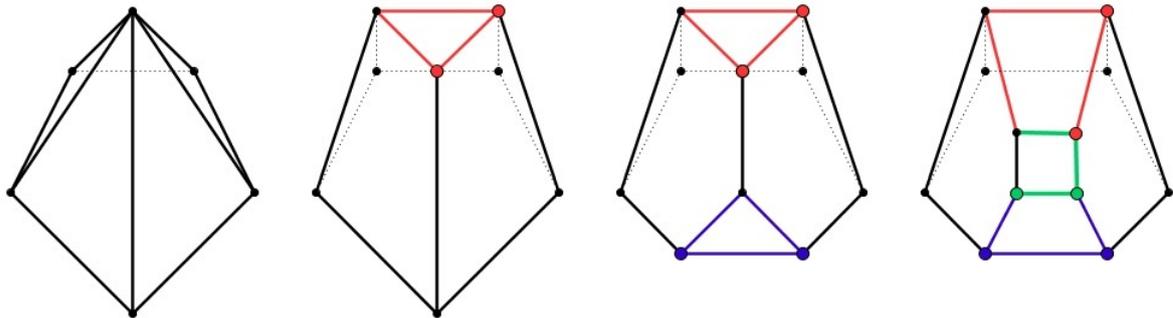


Figura 3.26: O poliedro primário $(6, 10, 6)$ sofrendo três transformações seguidas $(2, 3, 1)$, a primeira em vermelho, a segunda em azul e a terceira em verde, ao final, obtendo o poliedro $(12, 19, 9)$.

Exemplo $(V, A, F) = (10, 20, 12)$

Como $A = 20$ deixa resto 2 quando dividido por 3, devemos iniciar com o poliedro primitivo $(5, 8, 5)$.

Logo, o poliedro primitivo que *gera* $(10, 20, 12)$ é o $(5, 8, 5)$.

Desta forma, podemos armar a seguinte equação:

$$(V, A, F) = (V', A', F') + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1) \rightarrow (10, 20, 12) = (5, 8, 5) + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1).$$

Que resulta no sistema

$$\begin{cases} 10 = 5 + x + 2y \\ 20 = 8 + 3x + 3y \\ 12 = 5 + 2x + y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3(x + y) = 12 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \quad (3.10)$$

Lembrando que basta trabalhar duas equações para resolver o Sistema 3.10. Utilizando a primeira e a terceira equação, temos $x = 5 - 2y$ e

$$2x + y = 7 \rightarrow 2(5 - 2y) + y = 7 \rightarrow 10 - 4y + y = 7 \rightarrow y = 1.$$

Assim, $x = 5 - 2 \cdot 1 = 3$.

Como encontramos x e y inteiros não negativos, verifica-se que $(10, 20, 12)$ é um poliedro proveniente de 3 transformações $(1, 3, 2)$ e 1 transformação $(2, 3, 1)$ sobre o poliedro primário $(5, 8, 5)$, como ilustrado na Figura 3.27.

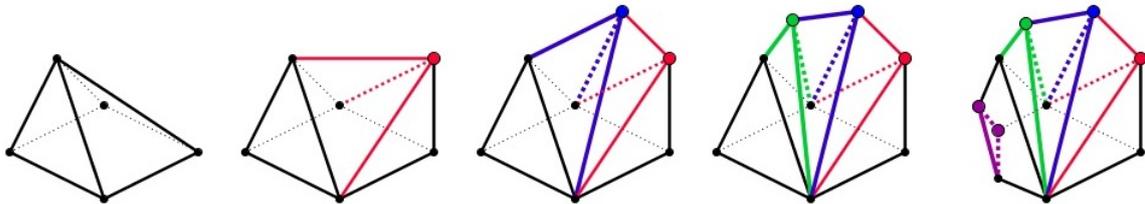


Figura 3.27: O poliedro primário $(5, 8, 5)$ sofrendo três transformações seguidas $(1, 3, 2)$, a primeira em vermelho, a segunda em azul e a terceira em verde, e uma transformação $(2, 3, 1)$ na cor roxa, ao final, obtendo o poliedro $(10, 20, 12)$.

Considerações Finais

Acabamos que ver três exemplos muito interessantes que aplicam diretamente tudo que foi falado, até aqui, proporcionando ao leitor uma rápida e precisa "constatação" da veracidade do Teorema 3.4.1.

Na Revista do Professor de Matemática N.º 47, o Prof. Eduardo Wagner publicou um artigo com uma demonstração completa, bem como uma bela explanação sobre este tema.

Ao final, poderemos lançar o seguinte afirmativa: **A equação $(V, A, F) = (V', A', F') + x(1, 3, 2) + y(2, 3, 1)$ possui soluções inteiras não negativas se, e somente se, V, A e F satisfizerem as condições (a), (b) e (c) do Teorema 3.4.1.**

Espera-se que essa análise que foi feita aqui neste texto faça diminuir a quantidade excessiva de problemas equivocados encontrados nos livros didáticos que apresentam valores para a aplicação da Relação de Euler, sem que haja a preocupação quanto à existência do poliedro.

Bibliografia

[1] WAGNER, E. $V - A + F = 2$, *EXISTE O POLIEDRO?* Revista do Professor Professor de Matemática n° 47, 2001.

[2] BENDER, E. A. *The number of three dimensional convex polyedra*. The American Mathematical Monthly, volume 94, number 1, January, 1987, Washington, D.C.

[3] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias: O Teorema de Euler sobre Poliedros*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 206 p.

[4] LIMA, E. L. *Ainda Sobre o Teorema de Euler para Poliedros Convexos* Revista do Professor Professor de Matemática n° 05, 1984.

[5] ZANELLA, I. A. *Geometria Esférica: Uma proposta de atividades com aplicações*. Londrina, 2013. 129 f.:il.

[6] DIAS, C.C. e SAMPAIO, J.C.V. *Material da Especialização em Matemática de EAD da UFRN/UFSCar, São Carlos/SP, 2010*.