

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

UM NOVO OLHAR SOBRE AS DÍZIMAS PERIÓDICAS

BRUNA PATRÍCIA DE JESUS

DOURADOS, 2014

BRUNA PATRÍCIA DE JESUS

UM NOVO OLHAR SOBRE AS DÍZIMAS PERIÓDICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre. Sob orientação do Professor PhD Cosme E. Rubio Mercedes.

DOURADOS, 2014

BRUNA PATRÍCIA DE JESUS

UM NOVO OLHAR SOBRE AS DÍZIMAS PERIÓDICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre. Sob orientação do Professor PhD Cosme E. Rubio Mercedes.

Professor Cosme E. Rubio Mercedes, PhD.

Presidente da Banca - Orientador

Professor Vando Narciso, Dr.

Membro

Professor Robert Jesus Rodriguez Reyes, Dr.

Membro

DOURADOS, 2014

*Aos profissionais da educação que participaram e contribuíram com minha formação,
aos excelentes professores que tive o privilégio de aprender com eles.*

*Pessoas as quais muitas não têm nenhum reconhecimento da sociedade nem das classes
políticas governantes, mas que desempenham um nobre papel frente às salas de aula
em nosso país.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, meu Criador Onipotente, Onisciente e Onipresente ao qual devo todas as conquistas.

Agradeço a todos meus familiares, em especial a minha avó, que sempre foi meu alicerce e em alguns momentos se sacrificou para contribuir com minha formação.

Agradeço ao meu namorado Mário, pelo apoio incondicional, o que contribuiu de maneira decisiva para a realização desse sonho e por compreender minhas constantes ausências.

Aos meus amigos Julio e Ângela, que foram anjos enviados pelo Senhor para me encorajar nos momentos em que pensei fraquejar.

Ao meu Professor Orientador Cosme E. Rubio Mercedes, por desprender a mim parte de seu tempo para me proporcionar novos conhecimentos.

Agradeço a toda a equipe envolvida no PROFMAT local da UEMS: ao coordenador e aos professores que não mediram esforços para contribuir com o conhecimento dos discentes; à secretária, que se desdobrou para conseguir atender as demandas recebidas; e a cada aluno, colega de estudos que enfrentaram juntos os obstáculos de um programa desafiador, incluindo aqueles colegas que por diferentes razões não conseguiram terminar a jornada, mas que foram importantes no processo.

RESUMO

O trabalho se baseia na história das dízimas periódicas, no ensino dos números racionais, como a mesma é ensinada na educação básica e em duas propostas de como diversificar o ensino das dízimas periódicas, sendo que, a primeira utiliza expressões decimais e a segunda série geométrica convergente. Seguindo a mesma linha de pensamento o trabalho visa servir de embasamento teórico para educadores e discentes de forma a contribuir com a melhoria da educação.

Palavras-chave:. Dízimas Periódicas; Expressões Decimais; Série Geométrica Convergente.

ABSTRACT

The work is based on history of periodic decimates, in the teaching of rational numbers, as it is taught in basic education and in two proposals on how to diversify the teaching of periodic decimates, where the first uses decimal expression and the second convergent geometric series. Following the same line of thought, this work aims to provide a theoretical foundation for educators and students to contribute to the improvement of education.

Keywords: Periodic tithes; Decimal expressions; Convergent Geometric Series.

SUMÁRIO

1.0	INTRODUÇÃO.....	09
2.0	UM POUCO DA HISTÓRIA DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS	11
3.0	O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS	12
4.0	ENSINO DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA	14
5.0	EXPRESSÕES DECIMAIS.....	16
6.0	NOVAS PROPOSTAS PARA O ESTUDO DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS	18
	6.1 Utilizando Expressões Decimais	18
	6.2 Utilizando Séries Geométricas Convergentes	22
7.0	CONSIDERAÇÕES FINAIS	28
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	29

1.0 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios, o ser humano estabeleceu um envolvimento com a Matemática. Passou a contar, medir, calcular, atendendo às necessidades práticas da vida. Com a evolução e, ao acompanhar os avanços da humanidade, o ser humano vem fazendo com que a Matemática adquira forma, passando a desenvolver uma estrutura com caráter científico.

A Matemática percorre um caminho de estudos conforme dois aspectos distintos: o prático, aplicando conhecimentos em diversas situações da realidade, e o formalista, vinculado às relações puramente matemáticas.

O ritmo acelerado de transformações em que se encontra o mundo vem fazendo com que a Matemática, por meio de uma harmonia dos aspectos práticos e formalistas, permita um estudo de cunho analítico e quantitativo. Dessa forma, ela estabelece relações entre o ser humano e sua realidade, instrumentalizando-o para uma ação interativa e transformadora da sociedade na qual vive.

O ensino da Matemática deve propiciar o desenvolvimento das capacidades, como a percepção, a visualização, o reconhecimento, a identificação, as definições, a argumentação, o espírito crítico, buscando sempre estabelecer conexões entre as demais disciplinas e transformando essas capacidades em aprendizado.

Nessa perspectiva abordaremos o ensino dos Números Racionais, dando ênfase ao estudo das dízimas periódicas, carregando consigo a história das dízimas periódicas, sua representação na Matemática e duas propostas de como diversificar o ensino das mesmas. Assim, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o ensino fundamental:

as dificuldades encontradas no processo de aprendizagem dos números racionais, em especial, dos decimais finitos e infinitos deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõem rupturas com ideias construídas para os números naturais. (BRASIL, 1998, p 67).

Em geral, os alunos carregam um paradigma de que os números racionais são complicados e de difícil compreensão, fazendo com que seja necessária a apresentação desse

conteúdo de forma sucinta e desmitificada. Sendo que nos absteremos ao nosso foco principal que é olhar para as diferentes representações de uma dízima periódica, bem como, subsidiar professores com estratégias metodológicas e colaborar com o aprendizado nessa área de modo que ocasione a melhoria do ensino dos Números Racionais e conseqüentemente da Matemática.

2.0 – UM POUCO DA HISTÓRIA DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS

Dízima periódica é um Número Racional (que pode ser escrito na forma $\frac{a}{\overline{b}}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$) que se origina de uma fração geratriz. As notícias mais antigas do uso das frações segundo (Giovanni Jr, Castrucci e Giovanni, 2007) vêm do Egito Antigo por volta de 3000 a.C, onde um faraó de nome Sesóstris dividiu as terras que margeavam o Rio Nilo entre os grupos familiares, em troca de pagamentos de tributos ao Estado. Como o Rio Nilo sofria inundações periódicas, as terras tinham de serem sempre medidas e remarcadas, já que o tributo era pago proporcionalmente à área a ser cultivada.

Os egípcios usavam cordas para fazer a medição e cuja unidade de medida usada era o tamanho da própria corda, por mais adequada que fosse a unidade de medida, dificilmente cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno. Foi por essa razão que os egípcios criaram um novo tipo de número: o número fracionário. Representar um número por meio de uma fração sempre foi um problema antigo da matemática, por volta de 800 d.C os hindus encontraram uma nova forma de representar os números, surgindo assim os primeiros decimais, contudo, como aponta ALLAN (2007, p. 465) somente em 1585 “Simon Stevin foi quem realmente introduziu os decimais no cotidiano, apesar de uma notação um pouco complicada.”

Pode-se mesmo dizer, sem cometer exageros, que o uso das frações decimais foi um grande fator de progresso para a Astronomia, para a Navegação e, conseqüentemente, para a Humanidade, de um modo geral. Para que tal adoção se desse, foi necessário, entretanto, encontrar um meio de representar qualquer fração sob a forma decimal: o segredo está em admitir frações decimais ilimitadas. A transformação de frações ordinárias em decimais, dando origem ao fenômeno das chamadas dízimas periódicas, é sem dúvida um assunto que provoca questões, suscita controvérsias e gera problemas, fato este, que iremos discorrer.

3.0 – O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Sabemos que a Matemática está relacionada à nossa vida desde os primeiros anos e que sem ela, é como se alguém que sabe ler e escrever não tivesse completado a sua alfabetização (MACHADO, 2001). Essa disciplina embora até recentemente tenha sido ensinada de forma desvinculada da língua materna, não condiz com a realidade atual, pois ambas são de extrema necessidade e possuem uma ligação muito forte entre si, bem como outras disciplinas propostas no currículo da Educação Básica. Além da ligação com as disciplinas estudadas pelos alunos, a Matemática, ao ser lecionada, tem objetivos muito importantes que vão além de uma simples resolução de “contas” e cálculos aritméticos:

“A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural”. (PCN’s: Matemática, 1998).

Nessa conjectura, o ensino da Matemática se faz necessário de forma clara e coesa, ou seja, precisa ser contextualizada e partir da realidade do aluno, para que o conteúdo tenha sentido e, de certa maneira, maior analogia com a sua vida. Visando que a aprendizagem seja significativa, precisamos partir do concreto para, então abstrair aos poucos o conhecimento adquirido pelo aluno, além de, uma abordagem histórica de modo que os alunos compreendam os processos deflagrados desde o surgimento do conteúdo até a atualidade e o momento histórico pelo qual a sociedade vivenciava.

O ensino dos Números Racionais compreende desde a numeração decimal, as frações, as dízimas periódicas, as porcentagens, dentre outros, propicia melhor compreensão e atuação no dia-a-dia do aluno. Ao resolver problemas que envolvam números racionais, o aluno consegue conseqüentemente analisar fatos cotidianos, haja vista que os mesmos se fazem presentes em boa parte de nossa vida, seja ela escolar ou não, sendo que a utilização dos Números Racionais é muito vasta.

O conjunto dos Números Racionais recebe destaque por ser um conteúdo que no início é tratado como parte da realidade do aluno, onde o mesmo consegue assimilar e vivenciar

situações de seu cotidiano e até usar material concreto para a utilização do mesmo. A partir do momento em que o aluno consegue compreender a idéia de “frações”, o professor, na maioria das vezes deixa de utilizar o referido material e a contextualização para continuar o ensino desse conteúdo, ou até mesmo antes do seu entendimento. O uso do material concreto é utilizado apenas na parte introdutória do conteúdo, sendo abandonado logo em seguida.

Nesse momento, a dificuldade do aluno poderá aumentar ou iniciar a partir do momento da abstração desse conteúdo, onde é primordial que o mesmo entenda os processos envolvidos, bem como suas operações e propriedades. Observamos que os alunos da Educação Básica, ao invés de entender o processo de desenvolvimento do conteúdo, procuram decorar regras, o que acaba prejudicando os, quando se trata de interpretar problemas, ao invés de apenas resolvê-lo de forma mecânica. E devido, ao fato de não conseguirem interpretar problemas simples é que nos encontramos na situação em que mais de 50% dos alunos da Educação Básica não conseguem atingir a média necessária para a fase na qual estão matriculados, conforme SAEB desde 1993 (PCN’S: Matemática, 1998), com resultados insatisfatórios em relação à Matemática, principalmente quando se trata de problema envolvendo Números Racionais.

Um Número Racional se apresenta como fração, que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Podemos assim representar o Conjunto dos Números Racionais: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$. Esse número fracionário pode também ser representado como número decimal em que, ao dividirmos o numerador a pelo denominador b , obteremos um número com vírgula que exige um processo a ser realizado para se chegar a esse valor. Caso esse número decimal seja infinito e venham repetidos valores com uma seqüência determinada, chamamos esse número decimal de dízima periódica, que por sua vez pode ser simples (quando é formada apenas pelo período após a vírgula) ou composta (se possui uma parte que não se repete entre a parte inteira e o período). As dízimas periódicas podem ser simples (o período apresenta-se logo após a vírgula) ou compostas (entre o período e a vírgula existe uma parte não periódica.).

4.0 – ENSINO DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Procurando analisar a representação das dízimas periódicas ensinadas na educação básica, vejamos a seguinte situação proposta no livro “Novo olhar – Matemática”, de Joamir Souza, na página 250 sobre uma dízima periódica simples:

- Determine a fração geratriz da dízima periódica $1, 2525\dots$ para resolvê-la, utilizamos o seguinte algoritmo, ensinado no ensino médio.

Chamando a dízima $1, 252525\dots$ de x então temos: $x = 1, 252525\dots$ (I)

De acordo com a quantidade de algarismos do período (no caso $2525\dots$ são dois algarismos) multiplica-se a dízima periódica por 10, 100, 1000, 10.000, etc. Assim, para esse problema em questão, multiplicamos a equação $x = 1, 252525\dots$ por 100, obtemos:

$$100x = 125, 252525\dots \text{ (II)}$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira temos:

$$100x = 125, 252525\dots \text{ (II)}$$

$$\underline{- x = 1, 252525\dots \text{ (I)}}$$

$$99x = 124$$

$$x = \frac{124}{99}$$

A explicação para esse algoritmo é a seguinte: chama-se a dízima de x , pois é de simples compreensão já que x é o número fracionário que é necessário encontrar. Convém sublinhar que se multiplica o período da dízima porque se trata de uma representação para frações com potências de 10^n com $n \in \mathbb{N}$ no denominador da fração. Notemos que na representação decimal, a quantidade de algarismos do período é igual à quantidade de nove no denominador da fração correspondente, portanto, ao se subtrair uma igualdade da outra - algoritmo implementado por Gauss - conseguimos eliminar a parte periódica, ficando apenas os números não periódicos.

Nem sempre a parte decimal apresenta apenas os algarismos do período, o que caracteriza uma dízima composta. Então, o que deve ser feito quando a dízima apresentar outros algarismos que não os do período na parte decimal? Vejamos a seguinte situação obtida do Livro Didático Integrado de Matemática da Editora Positivo, 8º ano, 1º volume, páginas 7 e 8:

- Determine a fração geratriz da dízima periódica $0,1555\dots$, inicialmente separaremos em:

Algarismo do período: 5

Algarismo não periódico: 1

Fração geratriz procurada: x

Chamamos a dízima periódica composta de $x = 0,155\dots$

Procedimentos:

1º Multiplique por 10 ambos os membros da equação, a fim de representar, na parte decimal, somente os algarismos do período.

$$10x = 10,1555\dots$$

$$10x = 1,555\dots$$

2º Apresente o número decimal encontrado no segundo membro da equação como soma do respectivo inteiro com o valor decimal.

$$10x = 1 + 0,555\dots$$

3º Represente a parte decimal na forma de fração.

$$10x = 1 + \frac{5}{9}$$

4º Encontre o valor de x (fração geratriz) resolvendo a equação:

$$10x = \frac{9}{9} + \frac{5}{9}$$

$$10x = \frac{14}{9}$$

$$90x = 14$$

$$x = \frac{14}{90}$$

A explicação para esse método é bem semelhante ao citado por Joamir Souza, no livro “Novo olhar – Matemática”, na página 250, porém a diferença é que, a parte decimal apresenta algarismos que não fazem parte do período. Então devemos multiplicar por 10, 100, 1000 ou outro número da forma 10^n , com $n \in \mathbb{N}$ (Naturais) de acordo com o número de algarismos não-periódicos, depois, escrevemos o número decimal como soma do respectivo inteiro e o decimal, utilizando o método descrito por Joamir Souza escrevemos a parte decimal na forma de fração, em seguida, também escrevemos a parte inteira como fração, efetuamos a soma de frações com denominadores comuns, calculamos o m.m.c (mínimo múltiplo comum) e, finalmente encontramos a fração geratriz resolvendo a equação.

Normalmente são esses os métodos ensinados aos alunos da educação básica quase que de forma mecânica, onde o aluno não consegue compreender o porquê de se aplicar determinado algoritmo. Isso faz com que o aluno decore o método sem entender o processo e, conseqüentemente possui dificuldades de posteriormente aplicá-lo na resolução de problemas.

5.0 – EXPRESSÕES DECIMAIS

A fim de facilitar os cálculos, a forma mais eficiente de representar os números reais é por meio de expressões decimais. Iremos abordar as expressões decimais considerando apenas os números reais positivos, de modo que, para considerar os números reais negativos basta acrescentar o sinal negativo.

Uma expressão decimal pode assim ser representada:

$$\alpha = a_0, a_1, a_2, \dots a_n \dots,$$

Onde a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ são dígitos, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n , chamado o n -ésimo dígito da expressão decimal α . O número natural a_0 chama-se a parte inteira de α . Tomemos como exemplo o número $\alpha = 12, 43800\dots$ que o representaremos como uma expressão decimal α , dessa forma:

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \quad (I)$$

Essas reticências no final da igualdade nos leva a entender de que se trata de uma soma com infinitas parcelas, mas isso não teria sentido. O significado da igualdade (I) tem por valores aproximados os números racionais:

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Quando se substitui α por α_n , o erro cometido não é superior a

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}.$$

Dessa forma a_0 é o maior número natural contido em α , a_1 é o maior dígito tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha,$$

a_2 é o maior dígito tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha, \text{ etc.}$$

Assim, tem-se uma seqüência não-decrescente de números racionais

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots$$

Que são valores cada vez mais aproximados do número real α , ou seja, tem-se $0 \leq \alpha - \alpha_n \leq 10^{-n}$ para cada $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$.

O corpo ordenado dos números reais é completo, isto é, que tem os α_n como os seus valores aproximados, mais especificamente o número real α é o limite desta seqüência de números racionais.

6.0 – NOVAS PROPOSTAS PARA O ESTUDO DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS

6.1 – Utilizando Expressões Decimais

Analisaremos algumas situações particulares que merecem ser estudadas separadamente. A primeira é quando, a partir de certo ponto, todos os dígitos na dízima se tornam iguais a zero:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$$

Então:

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

Trata-se de um número racional, que escrito na forma de fração decimal apresenta no denominador uma potência de 10, Por exemplo:

$$17,329400\dots = 17 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{4}{10.000} = \frac{173\,294}{10\,000}$$

Mesmo que a expressão decimal não termine em zeros, podemos representar um número racional periódico por meio da expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Começaremos com um caso bastante intrigante, o número real

$$\alpha = 0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots + \frac{9}{10^n}, \text{ com } n \text{ tendendo ao infinito.}$$

Afirmamos que $\alpha = 1$. Os valores aproximados de α são $\alpha_1 = 0,9$, $\alpha_2 = 0,99$, $\alpha_3 = 0,999$, e assim por diante. Temos $1 - \alpha_1 = 0,1$, $1 - \alpha_2 = 0,01$, $1 - \alpha_3 = 0,001$ e, mais geralmente, $1 - \alpha_n = 10^{-n}$. Portanto, tomando n suficientemente grande, a diferença $1 - \alpha_n$ pode tornar-se tão pequena quanto deseje. O que nos permite dizer que os números racionais $\alpha_n = 0,999\dots 9$ são valores cada vez mais aproximados de 1, ou seja, têm como limite 1. A igualdade $1 = 0,999\dots$ costuma causar estranheza, todavia, o único meio de desfazer esse paradoxo é esclarecer que o símbolo $0,999\dots$ na realidade significa o número cujos valores aproximados são $0,9$, $0,99$, $0,999$ etc. E, como explicitado acima, esse número é 1. Estabeleceremos que:

$$0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10^n} + \dots = 1,$$

Em decorrência, temos:

$$0,111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10^n} + \dots = \frac{1}{9}.$$

Por conseguinte, para todo dígito a , tem-se:

$$0,aaa\dots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \frac{a}{10^n} + \dots = \frac{a}{9}.$$

Por exemplo,

$$0,555\dots = \frac{5}{9}$$

Podemos aprofundar mais, observando que

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}, \frac{9}{1000} + \frac{9}{10.000} = \frac{99}{10.000}, \text{ e assim por diante,}$$

Chegamos

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}\right) + \left(\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4}\right) + \dots \\ &= \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \dots \\ &= 99 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots\right), \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots\right) = \frac{1}{99}$$

Por exemplo, temos:

$$0,454545\dots = \frac{45}{100} + \frac{45}{100^2} + \frac{45}{100^3} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= 45 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right) \\
 &= 45 \cdot \frac{1}{99} \\
 &= \frac{45}{99}
 \end{aligned}$$

Uma expressão decimal $\alpha = a_0, a_1a_2a_3\dots$ chama-se dízima periódica simples, de período $a_1a_2a_3\dots a_n$, quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Assim, $0,555\dots$ e $0,454545\dots$ são dízimas periódicas simples, com períodos 5 e 45 respectivamente.

Toda dízima periódica simples representa um número racional que pode ser representada por uma fração chamada geratriz. Mais precisamente:

A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e o denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.

Exemplo:

$$0,234234234\dots = \frac{234}{999}$$

Toda dízima periódica representa um número racional. Existem ainda as dízimas periódicas compostas, aquelas que depois da vírgula têm uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica. Para obtermos a fração geratriz de uma dízima periódica composta, procederemos como exemplificado logo abaixo.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0,23\overline{152} \\
 100\alpha &= 23,152152\dots \\
 &= 23\frac{152}{999} = \\
 &= \frac{23 \times 999 + 152}{999} \\
 &= \frac{23 \cdot (1000 - 1) + 152}{999}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{23000 + 152 - 23}{999}$$

$$= \frac{23152 - 23}{999}$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{23152 - 23}{99900}$$

Chegamos à regra almejada:

A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica (23) seguida da parte periódica (152) menos a parte não-periódica (23) e o denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica.

Concluindo, expressões decimais periódicas simples ou compostas podem ser representadas por meio de uma fração geratriz e, conseqüentemente são números racionais.

Utilizaremos essa mesma regra para encontrarmos a fração geratriz de algumas dízimas periódicas simples, analise:

- $0, \overline{175} = \frac{175}{999}$

Nesse caso temos uma dízima periódica simples com período (175), a fração geratriz é composta pelo numerador formado pelo período (175) e o denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período (999).

- $0, \overline{15} = \frac{15}{99}$

Dízima periódica simples com período (15), a fração geratriz composta pelo numerador formado pelo período (15) e o denominador formado por dois noves (99), porque o período é formado por dois algarismos.

- $1, \overline{2} = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9}$

Trata-se de uma dízima periódica simples, porque é formada apenas pelo período após a vírgula, a fração geratriz é formada pelo numerador composto pela parte inteira (1), seguida da parte periódica (2) menos a parte inteira (1) e o denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período (9).

Agora analisaremos algumas dízimas periódicas compostas:

$$\bullet \quad 3,2\bar{1} = \frac{321-32}{90} = \frac{289}{90}$$

Fração geratriz de uma dízima periódica composta, com o numerador formado pela parte não-periódica (32) seguida da parte periódica (1), formando o número 321, menos a parte não-periódica (32), o denominador é formado por um nove (9), pois temos apenas um algarismo no período, seguido de um zero (0) porque temos apenas um algarismo na parte não-periódica.

$$0,14\bar{3} = \frac{143-14}{900} = \frac{129}{900}$$

A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica (14) seguida da parte periódica (3) menos a parte não-periódica (14) e o denominador é composto por apenas um nove (9) porque o período é formado por apenas um algarismo, seguidos de dois zeros (00) visto que a parte não-periódica possui dois algarismos (14).

6.2 – Utilizando Séries Geométricas Convergentes

Podemos determinar a fração geratriz de uma dízima periódica, utilizando séries geométricas convergentes, assim definidas:

$$a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + \dots + a.r^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}, \text{ com } a \neq 0 \text{ e razão } r.$$

Em que ela convergirá se $|r| < 1$ e terá como soma $S = \frac{a_1}{1-r}$.

Acompanhe o seguinte exemplo:

- Determinar a fração geratriz da dízima periódica simples 1, 363636...

Utilizaremos os conceitos acima mencionados, teremos:

$$\begin{aligned} 1, 363636\dots &= 1 + 0, 36 + 0, 0036 + 0, 000036 + \dots \\ &= 1 + \frac{36}{100} + \frac{36}{10\,000} + \frac{36}{1\,000\,000} + \dots \end{aligned}$$

Observe que $\left(\frac{36}{100} + \frac{36}{10\,000} + \frac{36}{1\,000\,000} + \dots\right)$ é uma série geométrica convergente, pois $r = \frac{1}{100}$ e

$a_1 = \frac{36}{100}$. Então, a soma é dada por:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-r} \\ S &= \frac{\frac{36}{100}}{1-\frac{1}{100}} \\ S &= \frac{\frac{36}{100}}{\frac{99}{100}} \\ S &= \frac{36}{100} \cdot \frac{100}{99} \\ S &= \frac{36}{99} \end{aligned}$$

A fração geratriz pode ser assim definida:

$$1 + \frac{36}{99} = \frac{99 + 36}{99} = \frac{135}{99}$$

- Agora, iremos determinar a fração geratriz de uma dízima periódica composta 3, 2111... utilizando as séries geométricas convergentes.

$$\alpha = 3, 2111\dots$$

Primeiramente multiplicaremos a dízima por 10, porque existe um algarismo (2) que não pertence ao período.

$$\alpha = 3, 2111\dots (\times 10)$$

$$\alpha = 32, 111\dots$$

Então, utilizaremos a abordagem de série geométrica, fazendo:

$$32, 111\dots = 32 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$$

$$= 32 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

Note que $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right)$ é uma série geométrica convergente, pois $r = \frac{1}{10}$ e

$$a_1 = \frac{1}{10}.$$

Portanto, a soma é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$S = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$S = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$$S = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9}$$

$$S = \frac{1}{9}$$

A fração geratriz é dada por:

$$32 + \frac{1}{9} = \frac{288 + 1}{9} = \frac{289}{9}$$

Como no início multiplicamos a dízima $3, 2111\dots$ por 10, também devemos multiplicar o denominador da fração por 10. E, então obteremos $\frac{289}{90}$.

- Utilizando o mesmo exemplo anterior, mas com essa nova abordagem, determine a fração geratriz da dízima $0, 14333\dots$

$$\alpha = 0, 14333\dots$$

Temos dois algarismos que não pertencem ao período (14), logo, multiplicaremos por 100, afim de, isolarmos o período (3).

$$\alpha = 0, 14333\dots (\times 100)$$

$$\alpha = 14, 333\dots$$

Por conseguinte, faremos

$$14, 333\dots = 14 + 0,3 + 0, 03 + 0, 003 + \dots$$

$$= 14 + \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \right)$$

Como $\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \right)$ é uma série geométrica convergente, temos $r = \frac{1}{10}$ e

$a_1 = \frac{3}{10}$. A soma é dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$S = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$S = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$$S = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9}$$

$$S = \frac{3}{9}$$

Portanto, a fração geratriz será dada por:

$$14 + \frac{3}{9} = \frac{126+3}{9} = \frac{129}{9}$$

Multiplicando o denominador por 100, teremos a fração geratriz $\frac{129}{900}$.

Analisemos outro exemplo um pouco mais complexo:

- Determinar a fração geratriz da dízima periódica composta 0, 456424242...

$$\alpha = 0, 456424242\dots$$

Como temos três algarismos que não pertencem ao período, devemos multiplicar por 1000.

$$\alpha = 0, 456424242\dots \text{ (x1000)}$$

$$\alpha = 456, 424242\dots$$

Em seguida, faremos:

$$456, 424242\dots = 456 + 0, 42 + 0, 0042 + 0, 000042 + \dots$$

$$= 456 + \left(\frac{42}{100} + \frac{42}{10\,000} + \frac{42}{1\,000\,000} + \dots \right)$$

Como $\left(\frac{42}{100} + \frac{42}{10\,000} + \frac{42}{1\,000\,000} + \dots \right)$, é uma série geométrica convergente.

Pois, $r = \frac{1}{100}$ e $a_1 = \frac{42}{100}$. Conseqüentemente a soma é dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$S = \frac{\frac{42}{100}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$S = \frac{\frac{42}{100}}{\frac{99}{100}}$$

$$S = \frac{42}{100} \cdot \frac{100}{99}$$

$$S = \frac{42}{99}$$

E a fração geratriz é dada por

$$456 + \frac{42}{99} = \frac{45\ 144 + 42}{99} = \frac{45\ 186}{99}$$

Multiplicando o denominador por 1000, teremos $\frac{45\ 186}{99\ 000}$.

A quantidade de algarismos que não pertencem ao período determina a quantidade de zeros do denominador da fração.

Ressaltamos que ao determinar a fração geratriz de uma dízima periódica utilizando séries geométricas convergentes, devemos primeiramente identificar o período da dízima, e multiplicar por 10^n , com $n \in \mathbb{N}$, onde n representa a quantidade de algarismos que estão à direita da vírgula e que não pertencem ao período, a fim de, deixarmos à direita da vírgula somente os algarismos pertencentes ao período. Após essas considerações preliminares é de suma importância que o professor ministre o ensino de forma livre, de modo que, o mesmo possa escolher o método que julgar mais fácil.

7.0 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

A fim de obtermos a melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem em relação à Matemática, mais especificamente em relação ao estudo das dízimas periódicas, faz-se necessário que os profissionais da educação analisem o que vem ocorrendo em sala de aula, na qual os alunos não conseguem absorver todos os conteúdos de forma satisfatória, para isso, é imprescindível procurar contextualizar os conteúdos de modo que faça sentido para os alunos, pois é muito melhor conseguirmos assimilar um conteúdo que faz parte da nossa realidade a outro que não tem nenhum sentido em nossa vida.

Desse modo a utilização da história da Matemática na abordagem dos conteúdos se torna indispensável, pois possibilita ao aluno entender os processos de desenvolvimentos e entender o contexto em que a sociedade estava inserida, permitindo ao mesmo fazer um paralelo entre o momento histórico e o atual.

Com o referido trabalho, buscou-se fazer uma investigação a cerca dos diferentes métodos para o ensino das dízimas periódicas, a fim de diversificar o ensino, propiciando a melhor absorção e desmistificação desse conteúdo, servindo como embasamento teórico e fonte de pesquisa para profissionais da educação. Por isso, é importante que o professor apresente os diferentes métodos a seus alunos e, permita aos mesmos escolher qual a maneira que julgar mais fácil, tornando as aulas mais diversificadas e instigando o aluno a fazer suas próprias escolhas, deixando a seu cargo, a escolha de problemas posteriores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ELON, Lages Lima. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. p.158-170.

FINKLER, Aleksandra Cibelly *et al.* *Ensino Fundamental: 7ª série, 8º ano*. Curitiba: Positivo, 2008.4v.

GIOVANNI JR, J. R, CASTRUCCI, B, GIOVANNI, J. R. **A Conquista da Matemática**. 6ª série. Editora FTD, 2007.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna: Análise de uma impregnação mútua**. 5. Ed. – São Paulo: Cortez, 2001.

NASCIMENTO, A.C; WEBER, T. C; MERLI, R. F. Dízimas periódicas – dois olhares: do ensino médio e do superior. Disponível em: http://www.fap.com.br/forum_2012/forum/pdf/Exatas/Comunicacao_Oral/ResExaCO07.pdf.

Acesso em: 14 jan. 2014.

NELO D. ALLAN. Decimais Infinitos. *Revista Brasileira de História da Matemática - RBHM*. São Paulo, SP, vol. especial nº1, p.463-475, 2007.

Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

SOUZA, J. **Novo olhar matemática**. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2010.