Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luiz Fernando Nascimento Vasconcellos

Utilização do método de Gauss-Jordan no ensino médio

Juiz de Fora

2014

Luiz Fernando Nascimento Vasconcellos

Utilização do método de Gauss-Jordan no ensino médio

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Vasconcellos, Luiz Fernando Nascimento.

Utilização do método de Gauss-Jordan no ensino médio / Luiz Fernando Nascimento Vasconcellos. – 2014.

70 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki.

Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Matemática. 2. Gauss-Jordan. 3. Sistema Linear. 4. Matriz Inversa. 5. Determinante. I. Miyagaki, Olímpio Hiroshi, orient. II. Título.

Luiz Fernando Nascimento Vasconcellos

Utilização do método de Gauss-Jordan no ensino médio

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 18 de março de 2014

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Abílio Lemos Cardoso Júnior
Universidade Federal de Viçosa

À Fabiana Nunes Coutinho Vasconcellos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- Primeiramente, a Deus, por sempre me dar forças para seguir em frente;
- À minha esposa Fabiana, pela confiança e apoio nas horas difíceis;
- Às pessoas que estiveram em minha volta e souberam compreender que todo o tempo que me afastei delas foi necessário para que esse curso fosse concluído;
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki, pela disponibilidade e apoio em todos os momentos;
- A todos os professores, pelo conhecimento que nos foi transmitido de forma incansável;
- Ao companheiro de viagem Aroldo e sua esposa Cida, que sempre me receberam tão bem para nossas tardes de estudo;
- Ao Miguel, companheiro de jornada, e sua esposa Marly, por transformarem sua casa em um agradável ambiente de estudo para nosso grupo;
- A todos os demais companheiros de grupo, em especial Júnior, Marisa e Marta; que sempre me fizeram aprender um pouco mais;
- À minha amiga Giovanna Sampaio Gomes, que muito me ajudou com o “Résume”;
- Finalmente, à CAPES, pelo apoio financeiro.

“Num mundo de enigmas
Há mistérios a serem desvendados...
Somente um
olhar minucioso
Revela
a quantidade;
a distância;
o tempo;
as formas;
as cores;
que nos envolvem a cada instante
fazendo da vida
um cálculo constante...”

Irani Henriques

RESUMO

Este trabalho é voltado para professores e alunos do Ensino Médio. Tem como objetivo mostrar a utilização do Método da Eliminação de Gauss-Jordan para a resolução de sistemas de equações lineares, cálculo de matrizes inversas e cálculo de determinantes. A motivação para a escolha desse tema é que, cada vez mais, o estudo das matrizes, dos determinantes e, consequentemente, dos sistemas de equações lineares vem sendo deixado de lado no Ensino Médio. Inicialmente, é feito um pequeno apanhado sobre o que são matrizes equivalentes e operações elementares, além de se falar sobre cofator de um elemento de uma matriz e sobre matriz adjunta, necessária para o cálculo da inversa utilizando-se determinantes. Apresenta-se um pouco da história de Gauss e de Jordan e, logo em seguida, o método propriamente dito. Também é visto o que acontece com o método quando as matrizes não são invertíveis, os sistemas são possíveis e indeterminados ou os sistemas são impossíveis. Quanto aos determinantes, são apresentadas suas propriedades e mostrada a eficácia do método para determinantes de ordem $n \geq 3$ e, além disso, é mostrada a aplicação dos determinantes no cálculo de inversas e na resolução de sistemas de equações pela Regra de Cramer. Finalmente, são apresentadas sugestões de exercícios com uma breve resolução.

Palavras-chave: Matemática. Gauss-Jordan. Sistema Linear. Matriz Inversa. Determinante.

ABSTRACT

This work is oriented to teachers and students in the high school. It aims to show the usage of Gauss-Jordan's Elimination Method to solve systems of linear equations, calculation of inverse matrices and determinants. The motivation behind the selection of this topic is that, more and more, the study of matrices, determinants, and consequently, systems of linear equations has been ignored in the high school. Firstly, an abridgement is done on what equivalent matrices and elementary operations are. Secondly, it explains about the cofactor of an element of a matrix and about adjoint matrices, needed for the calculation of the inverse matrix using determinants. A little introduction of Gauss and Jordan's histories is made, and then, the method itself. It is also shown what happens with the method when the matrices are not invertible, the systems are possible but undetermined, or, the systems are not possible. Concerning determinants, their properties are presented and the method's efficacy for determinants of order $n \geq 3$ is shown and furthermore, it is shown the application of the determinants in the calculation of inverse matrices and resolutions of systems using Cramer's Rule. Finally, some suggestions for exercises are presented with brief resolutions.

Key-words: Mathematics. Gauss-Jordan. Linear System. Inverse Matrix. Determinant.

RÉSUME

Ce travail est destiné aux enseignants et aux étudiants de l'école secondaire. Vise à montrer l'utilisation de la méthode d' élimination de Gauss-Jordan pour la résolution d'équations linéaires, le calcul des matrices inverses et calcul des déterminants. La motivation du choix de ce sujet est que, de plus en plus, l'étude des matrices, les déterminants et, en conséquence, le système linéaire d'équations est laissé de côté à l'école secondaire. D'abbord, on parle un peu sur qui sont des matrices équivalentes et opérations élémentaires, en plus de parler de cofacteur d' un élément d'une matrice et sur la matrice adjointe, nécessaire pour le calcul de l'inverse en utilisant déterminants. On présente partie de l'histoire de Gauss et la Jordan et donc la méthode elle-même. On voit également ce qui se passe à la méthode lorsque les matrices sont pas inversible, les systèmes sont possibles et indéterminé ou les systèmes sont impossibles. En ce qui concerne les determinants leurs propriétés sont presentes, montré l'efficacité de la méthode pour les determinants de l'ordre et, en outre, est montrée l' application des déterminants dans le calcul des inverses et dans la resolution des systèmes d'équations par la règle de Cramer. Enfin, des suggestions d'exercices sont présentés avec une brève résolution.

Mots-clés: Mathématiques. Gauss-Jordan. Système linéaire. Matrice inverse. Déterminant.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – SPD 2×2 66
Figura 2 – SPI 2×2 67
Figura 3 – SI 2×2 68
Figura 4 – SPD 3×3 69
Figura 5 – SPI 3×3 70
Figura 6 – SI 3×3 70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
MEC	Ministério da Educação.
SEEDUC	Secretaria de Estado de Educação - RJ
SI	Sistema impossível
SPD	Sistema possível e determinado
SPI	Sistema possível e indeterminado
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFSCAR	Universidade Federal de São Carlos
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNITAU	Universidade de Taubaté

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **13**

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS **15**

2.1 MATRIZES. 15

2.2 MATRIZ TRANSPOSTA 15

2.3 OPERAÇÕES ELEMENTARES 15

2.4 MATRIZES EQUIVALENTES. 16

2.5 MATRIZ ESCALONADA. 16

2.6 ALGORITMO PARA ENCONTRAR A MATRIZ ESCALONADA. . . 16

3 O QUE É O MÉTODO DE GAUSS-JORDAN **18**

3.1 QUEM FOI GAUSS? 18

3.2 QUEM FOI JORDAN? 18

3.3 O MÉTODO DE GAUSS-JORDAN. 18

4 RESOLVENDO SISTEMAS LINEARES **20**

4.1 EQUAÇÕES LINEARES. 20

4.2 SISTEMAS LINEARES. 20

4.3 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES. 21

4.3.1 **Sistemas possíveis e determinados.** 21

4.3.2 **Sistemas possíveis e indeterminados.** 26

4.3.3 **Sistemas impossíveis.** 29

4.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS 31

4.4.1 **Respostas.** 33

5 ENCONTRANDO MATRIZES INVERSAS **37**

5.1 O QUE É UMA MATRIZ INVERSA? 37

5.2 MATRIZES INVERSÍVEIS. 37

5.3 MATRIZES NÃO INVERSÍVEIS. 42

5.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS 45

5.4.1 **Respostas** 46

6 CALCULANDO DETERMINANTES **49**

6.1 O QUE SÃO OS DETERMINANTES? 49

6.2 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES. 49

6.3 CÁLCULO DE DETERMINANTES 50

6.4 APLICAÇÃO DOS DETERMINANTES. 53

6.4.1 **Cálculo de Matrizes Inversas.** 53

6.4.1.1 *Definições.* 53

6.4.1.2 *Calculando Matrizes Inversas.* 54

6.4.1.2.1 Matrizes de ordem 2. 54

6.4.1.2.2 Matrizes de ordem 3. 55
6.4.2 **Resolução de sistemas lineares - Regra de Cramer.** 56
6.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS 60
6.5.1 **Respostas** 62
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 64

REFERÊNCIAS 65
APÊNDICE A – Interpretação Geométrica 66

1 INTRODUÇÃO

Nos dias de hoje temos muito acesso à informação, por meio da Internet, televisão e livros, todavia, esse acesso à informação não se traduz em conhecimento. A educação precisa ser repensada, ser revista.

Muitas vezes nós, professores, nos deparamos com perguntas de nossos alunos do tipo: "Pra que serve isto?", "Onde que eu vou aplicar isto na minha vida?" ou "Será que eu vou usar isto fora da escola algum dia?"

E qual a resposta que a maioria de nós fornece? "Isso será necessário para você passar de série!"; "Você vai precisar saber no ENEM!" ou "Você precisa saber e ponto final!".

Será que com isso estamos sendo de fato mediadores do conhecimento?

A Matemática é tão utilizada no nosso dia a dia que às vezes nem nos damos conta. Temos assuntos que estão embutidos na tecnologia, como, por exemplo, o conceito de matriz aplicado à informática, ou ainda, nos deparamos com certas situações que podem ser resolvidas através de sistemas lineares.

O motivo pelo qual escolhi este tema para dissertar, foi que, cada vez mais, o estudo das matrizes, determinantes e sistemas lineares vem sendo deixado de lado no Ensino Médio.

Podemos observar em [2], que o cálculo de determinantes no Estado do Rio de Janeiro só é feito para matrizes 2×2 e 3×3, isso nos sugere que muitos professores só resolvem sistemas de equações 2×2 e 3×3, já que a maioria desses professores utiliza a Regra de Cramer para a resolução de sistemas lineares.

Porém, segundo [10], nas páginas 77 e 78, devemos abandonar essa regra. Veja:

> $(\cdots)$ A resolução de um sistema 2×2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa que geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 também pode ser feita via operações elementares (o processo do escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistema com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equações 3×3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver sistemas quadrados com solução única. $(\cdots)$

Podemos reparar que, nesse texto, também só se recomenda trabalhar com sistemas de, no máximo, 3 equações e 3 incógnitas, mas por meios de operações elementares.

Aí vem a grande questão: Por que não ensinar um método que pode ser utilizado tanto para a resolução de sistemas de equações lineares de qualquer ordem $m \times n$, quanto para o cálculo de inversas de matrizes (que é outra pedra nos sapatos dos professores e alunos) e para cálculo de determinantes de matrizes quadradas de qualquer ordem n?

O método proposto nesse trabalho não é inédito, muito menos revolucionário, mas pode ser de grande valia na aplicação no Ensino Médio, além de ser de fácil compreensão.

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nesse primeiro momento, vamos relembrar alguns conceitos que nos serão úteis para a melhor compreensão do método de Gauss-Jordan.

2.1 MATRIZES.

De acordo com [3], as matrizes são ferramentas básicas da Álgebra Linear, já que são bastante úteis para resolução de sistemas de equações lineares.

Definimos uma matriz real de ordem $m \times n$ como uma tabela formada por $m \cdot n$ elementos de $\mathbb{R}$ dispostos em m linhas e n colunas. Esses elementos de $\mathbb{R}$ são denominados entradas da matriz.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2 e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade 3×3.

2.2 MATRIZ TRANSPOSTA

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de transposta de A, e denotamos por A^t, a matriz $[b_{ij}]_{n \times m}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e para todo $1 \leq j \leq m$.

Por exemplo, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, temos $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Observação: Uma matriz é A é dita simétrica se $A^t = A$ e é dita antissimétrica se $A^t = -A$.

2.3 OPERAÇÕES ELEMENTARES

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

1. Permuta da linha i com a linha j. $(L_i \leftrightarrow L_j)$
2. Multiplicação da linha i por um escalar não nulo k. $(L_i \leftarrow k \cdot L_i)$
3. Substituição da linha i pela linha i mais k vezes a linha j. $(L_i \leftarrow L_i + k \cdot L_j)$

2.4 MATRIZES EQUIVALENTES.

Sejam A e B matrizes do tipo $m \times n$. Dizemos que B é equivalente por linhas a A, se B for obtida por um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

2.5 MATRIZ ESCALONADA.

Segundo [1], entendemos como matriz escalonada, a matriz que possui as seguintes características:

1. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
2. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
3. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.
4. Se as linhas 1, ..., r são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_r$.

Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está na forma escalonada.

Note que, devido a última condição acima, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

2.6 ALGORITMO PARA ENCONTRAR A MATRIZ ESCALONADA.

Segundo [8], podemos encontrar a matriz escalonada A_n, equivalente à matriz A, seguindo os seguintes passos:

1. Identificar a primeira coluna (mais à esquerda) que não seja nula, por exemplo, a coluna j;
2. Trocar duas linhas, se necessário, para deslocar para a primeira linha uma entrada não nula da coluna j;
3. Multiplicar a primeira linha pelo inverso da sua primeira entrada não nula, para obter 1;

4. Somar cada linha i, $i \neq 1$, a um múltiplo escalar apropriado da linha 1, de forma a anular cada uma das entradas da coluna j, abaixo da primeira;

5. Repetir os passos $1 - 4$ na parte da matriz abaixo da linha $i - 1$, até que tenhamos todos os elementos abaixo da coluna j iguais a zero;

6. Trabalhando de baixo para cima, somar um múltiplo apropriado de cada linha i a cada uma das linhas acima, de modo a anular todas as entradas acima e na mesma coluna da primeira entrada não nula da linha i.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.1. Encontre a matriz escalonada equivalente à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

.

Resolução:

Como a primeira coluna contém elementos não nulos e o elemento a_{11} já é igual a 1, devemos fazer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$. Assim, temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Fazendo agora $L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2$ e $L_3 \leftarrow -L_3$, temos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{4}L_3$, temos

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por fim, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$, temos

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz A_4 está na forma escalonada e é equivalente à matriz A.

□

3 O QUE É O MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Antes de falarmos do Método de Gauss-Jordan propriamente dito, vamos fazer um pequeno apanhado sobre quem foram esses grandes pensadores.

3.1 QUEM FOI GAUSS?

Segundo [4], Johann Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica.

Alguns o referem como "o príncipe da matemática". Sabemos que Gauss tinha uma marca influente em muitas áreas da matemática e da ciência e é um dos mais influentes na história da matemática. Ele referia-se à matemática como "a rainha das ciências".

Gauss desenvolveu um método para a resolução de sistemas lineares denominado Eliminação de Gauss (ou método de escalonamento). Este método consiste em aplicar sucessivas operações elementares em um sistema linear, afim de transformá-lo num sistema de mais fácil resolução (cuja matriz estendida fosse uma matriz triangular superior), tendo este as mesmas soluções que o sistema inicial.

3.2 QUEM FOI JORDAN?

De acordo com [5], Wilhelm Jordan $(1842 - 1899)$ foi um geodesista (pessoa que estuda a forma e as dimensões da Terra) e matemático alemão.

Jordan ficou conhecido na matemática pelo algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan, tendo Jordan melhorado a estabilidade numérica do algoritmo da Eliminação de Gauss, possibilitando sua aplicação para a minimização dos erros quadráticos na soma de uma série de observações em agrimensura. Esta técnica algébrica foi publicada na terceira edição do Manual de Geodésia.

Devemos ter cuidado, pois Wilhelm Jordan não deve ser confundido com o matemático Camille Jordan (teorema da curva de Jordan) nem com o físico Pascual Jordan (álgebra de Jordan).

3.3 O MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

O Método de Gauss-Jordan, também conhecido como Eliminação de Gauss-Jordan é um método pelo qual se pode resolver sistemas lineares com m equações e n incógnitas, encontrar matrizes inversas de matrizes inversíveis dadas e calcular determinantes de matrizes de ordem n.

Evidências sugerem que um obscuro francês de nome Clasen também desenvolveu o método da eliminação de Gauss-Jordan independentemente de Jordan, e ambos publicaram o método em 1888. Gauss não contribuiu diretamente com as duas publicações. Um fato interessante é que Clasen pode ter publicado apenas esse artigo científico.

Esse método, em geral, consiste em obtermos uma matriz escalonada equivalente a uma matriz dada.

4 RESOLVENDO SISTEMAS LINEARES

4.1 EQUAÇÕES LINEARES.

Sabemos que equações lineares são equações que tem a forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b,$$

onde $a_i, b \in \mathbb{R}$, com $i = 1, \cdots, n$.

Nas equações lineares temos

- a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} e a_n, são os coeficientes;
- x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1} e x_n, são as variáveis;
- b é o termo independente.

4.2 SISTEMAS LINEARES.

Sistemas lineares $m \times n$ são sistemas de equações compostos exclusivamente por m equações lineares com n incógnitas:

$$S : \left\{ \begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right. ,$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ com $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$.

Nesse sistema, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes de S, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes de S e a matriz

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

é a matriz estendida de S.

Um sistema linear é classificado de acordo com o seu número de soluções, a saber:

- Uma solução $\rightarrow$ Sistema possível e determinado (SPD);
- Infinitas soluções $\rightarrow$ Sistema possível e indeterminado (SPI);
- Nenhuma solução $\rightarrow$ Sistema impossível (SI).

4.3 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES.

Para que possamos utilizar o Método de Gauss-Jordan na resolução de sistemas lineares, devemos conhecer os seguintes teoremas:

Teorema 4.1. Dois sistemas que possuem matrizes estendidas equivalentes são equivalentes.

Teorema 4.2. Toda matriz $A_{m\times n}$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada.

As demonstrações desses teoremas fogem ao propósito desse trabalho. Se o leitor tiver curiosidade, pode encontrá-las em [1].

Utilizando esse método, devemos primeiramente obter a matriz estendida dos coeficientes das variáveis do sistema. Feito isso, devemos, utilizando operações elementares, obter a matriz escalonada referente a matriz original do sistema.

A grande vantagem desse método está na resolução de sistemas de ordem maior que 3 e na obtenção da solução de sistemas indeterminados.

4.3.1 **Sistemas possíveis e determinados.**

Exemplo 4.1. Um grupo de quatro ciclistas, Antônio, Bernardo, Carlos e Daniel, percorreram em suas bicicletas, em uma semana, 1800 quilômetros. Sabe-se que Daniel percorreu o dobro do que Antônio e que Antônio e Bernardo juntos percorreram 100 quilômetros a mais que Daniel. Além disso, a soma das distâncias percorridas por Antônio e Daniel é igual à soma das distâncias percorridas por Bernardo e Carlos. Quantos quilômetros percorreu cada ciclista?

Resolução:

Fazendo as distâncias percorridas por Antônio, Bernando, Carlos e Daniel respectivamente iguais a a, b, c e d, a situação apresentada pode ser modelada no seguinte sistema linear:

$$S:\begin{cases} a & +b & +c & +d & =1800\\ 2a & & & -d & =0\\ a & +b & & -d & =100\\ a & -b & -c & +d & =0 \end{cases}$$

A matriz estendida do sistema é dada por

$$D=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1800\\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & 100\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, temos

$$D_1=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1800\\ 0 & -2 & -2 & -3 & -3600\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1700\\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1800 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftarrow -\frac{1}{2}L_4$, temos

$$D_2=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1800\\ 0 & -2 & -2 & -3 & -3600\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1700\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 900 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftrightarrow L_2$, temos

$$D_3=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1800\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 900\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1700\\ 0 & -2 & -2 & -3 & -3600 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$ e $L_3 \leftarrow -L_3$ temos

$$D_4=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1800\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 900\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1700\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1800 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftarrow -\frac{1}{3}L_4$, temos

$$D_5=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1800\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 900\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1700\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4$, temos

$$D_6 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 900 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, temos

$$D_7 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \end{array}\right].$$

Finalmente, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, temos

$$D_8 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \end{array}\right].$$

Note que, como a matriz D_8 é a matriz escalonada equivalente à matriz D, os sistemas S e

$$S_1 : \begin{cases} a & & & & = 300 \\ & b & & & = 400 \\ & & c & & = 500 \\ & & & d & = 600 \end{cases}$$ são equivalentes.

Assim, Antônio, Bernardo, Carlos e Daniel percorreram, respectivamente 300, 400, 500 e 600 quilômetros na semana em questão.

□

Exemplo 4.2. Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$S : \begin{cases} a & +b & -2c & +d & +2e & = 2 \\ a & -2b & +3c & -d & +e & = 1 \\ a & & -c & & +e & = 0 \\ & 2b & +3c & +d & +e & = 1 \\ & & c & +2d & -e & = 0 \end{cases}$$

Resolução:

A matriz estendida do sistema é dada por.

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, temos

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow -L_3$, temos

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_3$, temos

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$, temos

$$A_4 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_5$, temos

$$A_5 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_3$ e $L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3$, temos

$$A_6 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftarrow -\frac{1}{11}L_4$ e $L_5 \leftarrow -\frac{1}{3}L_5$, temos

$$A_7 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right].$$

Fazendo $L_5 \leftarrow L_5 - L_4$, temos

$$A_8 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{33} & -\frac{64}{33} \end{array}\right].$$

Fazendo $L_5 \leftarrow -\frac{33}{32}L_5$, temos

$$A_9 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_5$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_5$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_5$ e $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{4}{11}L_5$, temos

$$A_{10} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4$, temos

$$A_{11} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, temos

$$A_{12} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Por fim, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, temos

$$A_{13} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Como A_{13} é a matriz escalonada equivalente à matriz A, os sistemas S e $S_1 : \begin{cases} a & = -2 \\ \quad b & = -1 \\ \qquad c & = 0 \\ \qquad\quad d & = 1 \\ \qquad\qquad e & = 2 \end{cases}$ são equivalentes.

Como o conjunto solução de S_1 é $V_1 = \{(-2, -1, 0, 1, 2)\}$, o conjunto solução do sistema S é $V = \{(-2, -1, 0, 1, 2)\}$.

□

4.3.2 Sistemas possíveis e indeterminados.

Exemplo 4.3. Qual a solução do sistema S a seguir?

$$S : \begin{cases} x & -y & +3z & = 0 \\ 4x & +2y & -6z & = 0 \\ x & -5y & +15z & = 0 \end{cases}$$

Resolução:

A matriz estendida do sistema é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 15 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, temos

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -18 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2$ e $L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3$, temos

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, temos

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Note que A_3 é a matriz escalonada equivalente à matriz A. Portanto os sistemas S e

$$S_1 : \begin{cases} x & & = 0 \\ & y \quad -3z & = 0 \\ & \quad\quad 0 & = 0 \end{cases}$$ são equivalentes.

Observe que esse último sistema é um sistema possível e indeterminado com uma variável livre. Consideremos essa variável livre sendo z.

Assim, como na segunda equação do sistema S_1 temos $y = 3z$, o conjunto solução do sistema S_1, que também é o conjunto solução do sistema S, é dado por $V = \{(0, 3z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$ e portanto S possui infinitas soluções.

Note que $(0,0,0), (0,3,1), (0,6,2), (0,3\pi,\pi)$ são algumas soluções para S.

□

Exemplo 4.4. (ITA/1998) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$S_1 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

a) $\frac{a}{b} = 11$

b) $\frac{b}{a} = 22$

c) $ab = \frac{1}{4}$

d) $ab = 22$

e) $ab = 0$

Resolução:

A matriz estendida de S_1 é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & a \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, temos

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & a \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2$, temos

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a - \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Como A_2 é equivalente por linhas à A, o sistema

$$S_1' : \begin{cases} x \quad +y \quad -z \quad = 0 \\ \qquad 4y \quad +2z \quad = 1 \\ \qquad\qquad 0 \quad = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

é equivalente à S_1.

Mas, para S_1' admitir infinitas soluções, devemos ter $a - \frac{1}{2} = 0$, ou seja, $a = \frac{1}{2}$.

A matriz estendida de S_2 é dada por

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -b & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, temos

$$B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2-b & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$, temos

$$B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2-b & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - (2-b)L_2$, temos

$$B_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11-b}{3} & 0 \end{array}\right].$$

Como B_3 é equivalente por linhas à B, o sistema

$$S_2' : \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ & y & -\frac{1}{3}2z & = 0 \\ & & \frac{11-b}{3}z & = 0 \end{cases}$$

é equivalente à S_2.

Mas, para S_2' apresentar infinitas soluções, devemos ter $\frac{11-b}{3} = 0$, isto é, $b = 11$.

Assim, como $\frac{b}{a} = \dfrac{11}{\frac{1}{2}} = 22$, a alternativa correta é a (b).

□

4.3.3 Sistemas impossíveis.

Exemplo 4.5. Seja o sistema linear

$$S : \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 & -2x_5 & -x_6 & = 3 \\ 2x_1 & & +x_3 & -3x_4 & & +2x_6 & = 2 \\ & x_2 & +5x_3 & & -x_5 & & = 5 \\ 5x_1 & +8x_2 & +8x_3 & +9x_4 & -8x_5 & -x_6 & = 7 \end{cases}.$$

Determine seu conjunto solução.

Resolução:

A matriz estendida do sistema é dada por

$$A = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 9 & -8 & -1 & 7 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1$, temos

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -11 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 13 & -11 & 2 & 4 & -8 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_2$, temos

$$A_2 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & -11 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 13 & -11 & 2 & 4 & -8 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$, temos

$$A_3 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 23 & -11 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 23 & -11 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, temos

$$A_4 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 23 & -11 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right].$$

Neste caso, não precisamos continuar os cálculos. Veja:

Como A_4 é equivalente a A, os sistemas S e

$$S_1 : \left\{\begin{array}{ccccccl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 & -2x_5 & -x_6 & = 3 \\ & x_2 & +5x_3 & & -x_5 & & = 5 \\ & & 23x_3 & -11x_4 & & +4x_6 & = 16 \\ & & & & & 0 & = -14 \end{array}\right.$$

são equivalentes.

Mas o sistema S_1 é impossível. Logo, o conjunto solução de S é o conjunto vazio.

$\square$

Exemplo 4.6. Resolva o sistema

$$S : \left\{\begin{array}{l} 3x + 3y - 3z = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right. .$$

Resolução:

A matriz estendida do sistema é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_3$, temos

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, temos

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Note que, como A_2 é equivalente à matriz A, o sistema

$$S' : \begin{cases} x & +y & -z & = 1 \\ & -7y & +4z & = 1 \\ & & 0 & = -2 \end{cases}$$

é equivalente à S.

Portanto, como esse S' é impossível, o conjunto solução de S é $V = \{ \quad \}$ (ou $V = \emptyset$).

$\square$

4.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. (FUVEST/2008) João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando R$ 21,50. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando R$ 57,00. Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza R$ 10,00, calcule o preço de cada um desses itens.

2. (UNICAMP/2007 - modificado) Seja dado o sistema linear

$$S : \begin{cases} -x & +2y & = 2 \\ 2x & -y & = 2 \\ x & +y & = 2 \end{cases}.$$

a) Mostre que esse sistema não tem solução.

b) Para determinar uma solução aproximada de um sistema linear $AX = B$ impossível, utiliza-se o método dos quadrados mínimos, que consiste em resolver o sistema $A^tAX = A^tB$. Usando esse método, encontre uma solução aproximada para o sistema dado acima.

3. (UNICAMP/2009) Pedro precisa comprar x borrachas, y lápis e z canetas. Após fazer um levantamento em duas papelarias, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R$ 23,00 pelo conjunto de borrachas, lápis e canetas, enquanto a papelaria B cobra R$ 25,00 pelo mesmo material. Em seu levantamento, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R$ 1,00 pela borracha, R$ 2,00 pelo lápis e R$ 3,00 pela caneta e que a papelaria B cobra R$ 1,00 pela borracha, R$ 1,00 pelo lápis e R$ 4,00 pela caneta.

   a) Forneça o número de lápis e de borrachas que Pedro precisa comprar em função do número de canetas que ele pretende adquirir.

   b) Levando em conta que $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$, e que essas três variáveis são inteiras, determine todas as possíveis quantidades de lápis, borrachas e canetas que Pedro deseja comprar.

4. (UFAL/2006) Uma pessoa tem apenas x moedas de 5 centavos, y moedas de 10 centavos e z moedas de 25 centavos, num total de 32 unidades e totalizando a quantia de R$ 3,90. Use essas informações para afirmar se as sentenças seguintes são falsas ou verdadeiras.

   a) ( ) Uma equação matricial que permite determinar x, y e z é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,90 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

   b) ( ) Há exatamente 7 possibilidades de obter-se o total de R$ 3,90 dispondo-se apenas de moedas de 5, 10 e 25 centavos.

   c) ( ) Considere que os números de moedas de 5 e de 10 centavos somam 22 unidades e totalizam a quantia de R$1,40. Nesse caso, o número de moedas de 5 centavos excede o de 10 centavos em 10 unidades.

   d) ( ) Se o número de moedas de 10 centavos fosse 4, o problema não admitiria solução.

   e) ( ) Podem existir dois tipos de moedas distintas em quantidades iguais.

5. (Uel 2005 - modificado) Em uma rodada de um campeonato de futebol de salão, o time “Bola na rede” ganhou do time “Malukos por bola” por 8 a 0 (oito a zero). O

repórter de um jornal foi ao vestiário do time vencedor e perguntou quantos gols cada jogador havia marcado, anotando os nomes dos jogadores que fizeram gols. Escreveu em suas anotações:

- Fizeram gols: Esquerdinha, Teco, Azeitona e Dentinho.
- Teco fez 2 gols a mais que Esquerdinha.
- Azeitona fez tantos gols quanto a diferença entre os gols feitos por Teco e Esquerdinha.
- Teco fez três vezes mais gols do que Esquerdinha.

Quantos gols foram marcados por cada jogador citado?

4.4.1 Respostas.

1. Chamando de x o preço de um hambúrguer, de y o preço de um suco de laranja e de z o preço de uma cocada, podemos traduzir o problema no seguinte sistema:

$$S : \begin{cases} 3x + y + 2z & = 21,5 \\ 8x + 3y + 5z & = 57 \\ x + y + z & = 10 \end{cases}$$

A matriz estendida do sistema é

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 21,5 \\ 8 & 3 & 5 & 57 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

Como $A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2,5 \\ 0 & 0 & 1 & 3,5 \end{array}\right]$ é a matriz escalonada equivalente à matriz A, os sistemas S e $S' : \begin{cases} x & & & = 4,00 \\ & y & & = 2,50 \\ & & z & = 3,50 \end{cases}$ são equivalentes.

Logo, o hambúrguer custa R$ 4,00, o suco de laranja custa R$ 2,50 e a cocada custa R$ 3,50.

2. a) A matriz estendida do sistema é dada por

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Aplicando o Método de Gauss-Jordan para encontrar a matriz escalonada equivalente, encontramos

$$A' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Como o sistema $S' : \begin{cases} x \quad\quad = \frac{2}{3} \\ \quad y \quad = \frac{4}{3} \\ \quad\quad 0 = 2 \end{cases}$, equivalente ao sistema dado, é SI, o sistema apresentado não possui solução.

b) Escrevendo o sistema dado na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, para encontrarmos a solução aproximada do sistema, devemos fazer

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

que nos fornece o novo sistema

$$S_1 : \begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ -3x + 6y = 4 \end{cases}$$

A matriz estendida desse novo sistema é dada por $B = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 4 \\ -3 & 6 & 4 \end{array}\right]$. Como $B' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array}\right]$ é a matriz escalonada equivalente à matriz B, o sistema $S_2 : \begin{cases} x \quad = \frac{4}{3} \\ \quad y = \frac{4}{3} \end{cases}$ é equivalente ao sistema S_1.

Assim, uma solução aproximada do sistema dado é $V = \left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right\}$.

3. a) Modelando o problema, temos

$$S : \begin{cases} x + 2y + 3z = 23 \\ x + y + 4z = 25 \end{cases}$$

A matriz estendida de S é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 23 \\ 1 & 1 & 4 & 25 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de Gauss-Jordan, obtemos a matriz escalonada equivalente à matriz A:

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 27 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

Logo, o sistema

$$S' : \begin{cases} x \quad +5z = 27 \\ \quad y \; -z = -2 \end{cases}$$

é equivalente a S.

Assim, $x = 27 - 5z$ e $y = z - 2$.

b) $(x, y, z) \in \{(12, 1, 3), (7, 2, 4), (2, 3, 5)\}$

4. a) FALSA.

Modelando o problema, encontramos o seguinte sistema:

$$S : \begin{cases} 0,05x + 0,10y + 0,25z = 3,90 \\ x + y + z = 32 \end{cases}$$

Note que a equação matricial do sistema acima é dada por

$$\begin{bmatrix} 0,05 & 0,10 & 0,25 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,90 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

b) VERDADEIRA

Resolvendo o sistema

$$S : \begin{cases} 0,05x + 0,10y + 0,25z = 3,90 \\ x + y + z = 32 \end{cases}$$

encontramos $x = 3z - 14$ e $y = 46 - 4z$. Sabemos que x, y e z são inteiros positivos. Note que, se $z < 5$, temos $x < 0$ e, se $z > 11$, temos $y < 0$. Assim, como z pode assumir 7 valores distintos, existem exatamente 7 possibilidades de se obter o total de R$ 3,90 dispondo-se apenas de moedas de 5, 10 e 25 centavos.

c) VERDADEIRA

Note que, se as moedas de 5 e de 10 centavos totalizam 22 unidades, o número de moedas de 25 centavos é $z = 10$. Como $x = 3z - 14$ e $y = 46 - 4z$, temos $x = 16$ e $y = 6$.

d) VERDADEIRA

$y = 4 \Rightarrow z = \frac{21}{2}$, que não é um inteiro positivo.

e) VERDADEIRA

Note que, se $x = z = 7$, temos $y = 18$ e $0,05 \cdot 7 + 0,10 \cdot 18 + 0,25 \cdot 7 = 3,90$.

5. Sejam a, d, e e t, os números de gols marcados por Azeitona, Dentinho, Esquerdinha e Teco, respectivamente. Assim, temos

$$S : \begin{cases} a + d + e + t = 8 \\ t = e + 2 \\ a = t - e \\ t = 3e \end{cases} \Rightarrow S_1 : \begin{cases} a & +d & +e & +t & = 8 \\ & & -e & +t & = 2 \\ a & & +e & -t & = 0 \\ & & -3e & +t & = 0 \end{cases}$$

A matriz estendida do sistema é dada por

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

A matriz escalonada equivalente à matriz A é dada por

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Assim, o sistema

$$S_2 : \begin{cases} a & & & & = 2 \\ & d & & & = 2 \\ & & e & & = 1 \\ & & & t & = 3 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema S.

Então, Azeitona e Dentinho fizeram dois gols cada, Esquerdinha fez 1 e Teco fez 3 gols.

5 ENCONTRANDO MATRIZES INVERSAS

5.1 O QUE É UMA MATRIZ INVERSA?

Sabemos que uma matriz A, quadrada de ordem n, é dita inversível se existir uma matriz B, também quadrada de ordem n, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Nesse caso, B é dita inversa de A e indicada por A^{-1}.

Para que possamos utilizar o Método de Gauss-Jordan para encontrarmos matrizes inversas, devemos conhecer os seguintes teoremas:

Teorema 5.1. Se A é uma matriz inversível, sua matriz escalonada equivalente é a matriz identidade I.

Teorema 5.2. Se uma matriz A pode ser reduzida à matriz identidade, por uma sequência de operações elementares com linhas, então A é inversível e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.

As demonstrações desses teoremas fogem ao propósito desse trabalho. Se o leitor tiver curiosidade, pode encontrá-las em [1].

5.2 MATRIZES INVERSÍVEIS.

Podemos calcular a inversa de uma matriz utilizando o processo prático descrito a seguir.

Sabemos que, caso exista, a inversa de uma dada matriz $A = [a_{ij}]$, quadrada de ordem n, pode ser obtida a partir da matriz identidade I_n, de acordo com o teorema 5.2.

Utilizando o Método de Gauss-Jordan, devemos escrever a matriz $B_{n\times 2n} = [A|I]$, ou seja,

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

e encontrar a matriz escalonada B', equivalente a B.

Caso encontremos na matriz B' alguma linha com os n primeiros elementos iguais a zero, dizemos que a matriz A não possui inversa. Caso contrário, teremos $B' = [I|A^{-1}]$, onde A^{-1} é a inversa da matriz A.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5.1. Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Escrevamos a matriz $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Fazendo $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$, temos $B_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$, temos $B_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$.

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$, temos $B_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$.

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2$, temos $B_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$.

Portanto, como a matriz B_4 é equivalente à matriz B e $B_4 = [I|A^{-1}]$, temos $A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

$\square$

Exemplo 5.2. Encontre a inversa da matriz $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$ tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 3i - 2j, & se \quad i \neq j; \\ i^2, & se \quad i = j. \end{cases}$$

.

Resolução:

Primeiramente vamos escrever a matriz B na forma tabular.

$$B = \begin{bmatrix} 1^2 & 3\cdot 1 - 2\cdot 2 & 3\cdot 1 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot 2 - 2\cdot 1 & 2^2 & 3\cdot 2 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot 3 - 2\cdot 1 & 3\cdot 3 - 2\cdot 2 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Agora, escreveremos a matriz $C = [B|I]$ e encontraremos sua equivalente na forma escalonada.

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$, temos

$$C_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \frac{1}{8}L_2$ e $L_3 \leftarrow \frac{1}{12}L_3$, temos

$$C_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{12} & 0 & \frac{1}{12} \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, temos

$$C_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3$, temos

$$C_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{array}\right].$$

Por fim, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, temos

$$C_5 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{11}{16} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{array}\right].$$

Como C_5 é a matriz escalonada equivalente a C e $C_5 = [I|B^{-1}]$, temos

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & \frac{11}{16} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 5.3. Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Determine C^{-1}.

Resolução:

Vamos escrever a matriz $B = [C|I]$.

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 3 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftrightarrow L_1$, temos

$$B_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow -L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$, temos

$$B_2 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 11 & 4 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$, temos

$$B_3 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, temos

$$B_4 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_4$, temos

$$B_5 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 7 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 & -32 & 5 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$, temos

$$B_6 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 7 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{32}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$, temos

$$B_7 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{43}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{67}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{46}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{32}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Como B_7 é a matriz escalonada equivalente a B e $B_7 = [I|C^{-1}]$, temos

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{43}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{28}{3} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{67}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{46}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{32}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{23}{3} \\ 1 & 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 5.4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

Encontre a matriz X, sabendo que $A \cdot X = B$.

Resolução:

O problema só admite solução se A for inversível. Caso isso ocorra, temos

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I_3 \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Vamos, então escrever a matriz $K = [A|I]$ e encontrar sua matriz escalonada equivalente.

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, temos

$$K_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, temos

$$K_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$, temos

$$K_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, temos

$$K_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Como K_4 é equivalente por linhas a K e $K_4 = [I|A^{-1}]$, temos $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Assim, temos

$$X = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Note que, no exemplo anterior, encontrar a matriz X significa resolver o sistema

$$S : \begin{cases} x & & +z & = 9 \\ & y & & = 2 \\ 2x & +3y & +4z & = 34 \end{cases}.$$

Portanto, podemos também resolver um sistema possível e determinado S, com n equações e n incógnitas, utilizando a inversa da matriz dos coeficientes de S.

Como S pode ser escrito da forma $A \cdot X = B$, onde A é a matriz dos coeficientes, B é a matriz dos termos independentes e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, sua solução será dada por $X = A^{-1} \cdot B$, já que A é sempre invertível em sistemas possíveis e determinados.

5.3 MATRIZES NÃO INVERSÍVEIS.

Mas, uma dúvida pode pairar em nossas cabeças: o que acontece com esse método quando a matriz não é inversível?

Para que possamos responder essa pergunta, observemos o próximo exemplo:

Exemplo 5.5. Considere a matriz A dada a seguir e responda: A admite inversa?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 18 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Vamos escrever a matriz $B = [A|I]$.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & -6 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_2$, temos

$$B_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & -6 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 18L_1$, temos

$$B_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -78 & -6 & 0 & -18 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$, temos

$$B_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Note que nunca conseguiremos escrever uma matriz $B_n = [I|A^{-1}]$, pois, no primeiro bloco da matriz B_3, temos a última linha com todos os elementos nulos.

Assim, a matriz A não é inversível.

□

Portanto, podemos afirmar que quando a matriz A, quadrada de ordem n não for inversível nunca conseguiremos encontrar uma matriz escalonada na forma $B' = [I|A^{-1}]$ equivalente por linhas à matriz $B = [A|I]$, pois teremos na matriz escalonada pelo menos uma linha com os n primeiros elementos iguais a zero.

Exemplo 5.6. (UFF/1999) Determine o(s) valor(es) de $x \in \mathbb{R}$ para que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} x^3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix}$$

não admita inversa.

Resolução:

Escrevamos a matriz $A = [M|I]$:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x^3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_2$, temos

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ x^3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - x^3 L_1$, temos

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x^4 & 1 & -x^3 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_3$, temos

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x^4 & 1 & -x^3 & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \frac{1}{1-x^4} L_3$, temos

$$A_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-x^4} & -\frac{x^3}{1-x^4} & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - xL_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, temos

$$A_5 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{1-x^4} & \frac{1}{1-x^4} & 0 \\ 0 & -x & 0 & -\frac{1}{1-x^4} & \frac{x^3}{1-x^4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-x^4} & -\frac{x^3}{1-x^4} & 0 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \leftarrow -\frac{1}{x} L_2$, temos

$$A_6 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{1-x^4} & \frac{1}{1-x^4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{x-x^5} & -\frac{x^2}{1-x^4} & -\frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-x^4} & -\frac{x^3}{1-x^4} & 0 \end{array}\right].$$

Note que, como A_6 é equivalente à matriz A e é da forma $[I|M^{-1}]$, se M apresentasse inversa, ela teria a forma

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{x}{1-x^4} & \frac{1}{1-x^4} & 0 \\ \frac{1}{x(1-x^4)} & -\frac{x^2}{1-x^4} & -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{1-x^4} & -\frac{x^3}{1-x^4} & 0 \end{array}\right].$$

Logo, para M não apresentar inversa, devemos ter $x = 0$ ou $1 - x^4 = 0$, isto é, x deve pertencer ao conjunto $\{-1, 0, 1\}$.

$\square$

5.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. (ITA/2006 - modificado) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$. Determine a matriz $C = (A + B)^{-1}$.

2. (UFPR/2007) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e I é a matriz identidade de mesma ordem, pode-se mostrar que, para cada n natural, existem números reais α e β tais que $A^n = \alpha A + \beta I$. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

   a) Encontre α e β tais que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

   b) Multiplicando a expressão do item anterior pela matriz inversa A^{-1} obtém-se a expressão $A = \alpha I + \beta A^{-1}$. Use essa informação para calcular a matriz A^{-1}.

3. (UNICAMP/2008 - modificado) Uma matriz real quadrada M é dita ortogonal se $M^t = M^{-1}$, ou seja, se sua transposta é igual a sua inversa. Uma certa matriz A pode ser escrita na forma $A = QR$, sendo

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

   e $R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$. Sabendo que Q é ortogonal, determine a solução do sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, para o vetor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, sem obter explicitamente a matriz A.

4. (ITA/2004) Se A é uma matriz real, considere as definições:

   I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se, e só se, A for inversível e $A^{-1} = A^t$.

II. Uma matriz quadrada A é dita diagonal se, e só se, $a_{ij} = 0$, para todos $i, j = 1, \cdots, n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

5. (UFSCAR/2008) Admita que a matriz cuja inversa seja formada apenas por elementos inteiros pares receba o nome de EVEN. Seja M uma matriz 2×2, com elementos reais, tal que $M = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3x & x \end{bmatrix}$. Admita que M seja EVEN, e que sua inversa tenha o elemento da primeira linha e primeira coluna igual a 2.

   a) Determine o valor de x nas condições dadas.

   b) Determine a inversa de M nas condições dadas.

5.4.1 Respostas

1. Temos $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   Escrevendo $D = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, a matriz escalonada equivalente a D é $D' = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right]$.

   Como, se $(A + B)$ é inversível, $D = [(A + B)|I] \Rightarrow D' = [I|(A + B)^{-1}]$, $C = (A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$.

2.

   a) Como $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 3\alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta & 3\alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}.$$

Da expressão acima vem o seguinte sistema:

$$S : \begin{cases} 2\alpha & +\beta & = 4 \\ 3\alpha & & = 9 \\ \alpha & +\beta & = 1 \end{cases}$$

que, solucionado, apresenta $\alpha = 3$ e $\beta = -2$.

b)

$$A = \alpha I + \beta A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \beta A^{-1}$$

Como, do item anterior, temos $\alpha = 3$ e $\beta = -2$, então

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2A^{-1}$$

Isolando A^{-1} em um dos membros da igualdade acima encontramos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. $A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow QR\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow R\vec{x} = Q^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = R^{-1}Q^{-1}\vec{b}$

Como Q é ortogonal, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Sendo $B = [R|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, temos

$B' = [I|R^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right]$. Portanto, $R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

Assim, $\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Logo $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

4. Seja M uma matriz quadrada de ordem 3 que seja simultaneamente diagonal e ortogonal. Assim M pode ser escrita da seguinte forma: $M = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Como $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = M^t$, temos $\begin{cases} \frac{1}{x} = x \\ \frac{1}{y} = y \\ \frac{1}{z} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$.

Portanto, as matrizes quadradas de ordem 3 que são simultaneamente ortogonais e diagonais são da forma $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ com $x, y, z \in \{-1, 1\}$.

5. Seja $A = [M|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3x & 1 & 0 \\ x+1 & x & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Como $A' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3x+1} & \frac{3}{3x+1} \\ 0 & 1 & \frac{x+1}{3x^2+x} & -\frac{2}{3x^2+x} \end{array}\right] = [I|M^{-1}]$ é a matriz escalonada equivalente à matriz A, $M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3x+1} & \frac{3}{3x+1} \\ \frac{x+1}{3x^2+x} & -\frac{2}{3x^2+x} \end{bmatrix}$. Assim:

a) $-\frac{1}{3x+1} = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

b) Substituindo $x = -\frac{1}{2}$ em $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3x+1} & \frac{3}{3x+1} \\ \frac{x+1}{3x^2+x} & -\frac{2}{3x^2+x} \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$.

6 CALCULANDO DETERMINANTES

6.1 O QUE SÃO OS DETERMINANTES?

Sejam n um número real, com $n \geq 2$, e $M(n)$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n.

Determinante de matrizes de coeficientes reais é uma função definida de $M(n)$ em $\mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades características:

1. D é linear como função de cada linha da matriz A separadamente;
2. Se duas linhas adjacentes da matriz A são iguais, então $D(A) = 0$;
3. Se I_n representa a matriz identidade de $M(n)$, então $D(I_n) = 1$.

Considerando uma matriz A, quadrada de ordem n, o determinante de A, indicado por $Det(A)$, será um número real obtido a partir da imagem dessa função.

Os determinantes apresentam algumas propriedades muito importantes, as quais veremos a seguir.

6.2 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES.

As propriedades a seguir foram retiradas de [9] e [6]:

Propriedade 6.1. Se A possui uma linha ou coluna na qual todas os elementos são iguais a zeros, então $Det(A) = 0$.

Propriedade 6.2. Se trocarmos a posição de duas linhas ou colunas paralelas de A, obteremos uma outra matriz A'. Vale sempre a relação: $Det(A) = -Det(A')$.

Propriedade 6.3. Quando os elementos de uma linha ou coluna de A são multiplicados por um número real k, obtemos uma nova matriz A'. Vale sempre a relação: $Det(A) = k \cdot Det(A')$.

Propriedade 6.4. Quando A possui linhas ou colunas paralelas iguais (ou proporcionais), então $Det(A) = 0$.

Propriedade 6.5. A e A^t são matrizes cujos determinantes coincidem, isto é, $Det(A) = Det(A^t)$.

Propriedade 6.6. Se A é uma matriz triangular (com todos os elementos acima, ou abaixo, da diagonal principal iguais a zero), $Det(A)$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Propriedade 6.7. (Teorema de Binet) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, vale a relação: $Det(AB) = Det(A) \cdot Det(B)$.

Propriedade 6.8. (Teorema de Jacobi) Ao multiplicarmos todos os elementos de uma linha ou coluna da matriz A por um número real k e adicionarmos os resultados aos elementos correspondentes de uma outra linha ou coluna paralela, formamos a matriz B, onde ocorre a seguinte igualdade: $Det(A) = Det(B)$.

As demonstrações dessas propriedades fogem ao objetivo desse trabalho e podem facilmente ser encontradas em [1], [3] e em [9].

6.3 CÁLCULO DE DETERMINANTES

Para calcularmos o determinante de uma matriz A, quadrada de ordem n, utilizamos as operações elementares de matrizes até encontrarmos uma matriz triangular superior A', equivalente por linhas à matriz A. Devemos ter atenção, pois quando aplicamos as operações elementares o determinante da matriz equivalente pode ser alterado, segundo as propriedades citadas acima.

Calculando o determinante de A', utilizando a propriedade 6.6 e levando em conta as propriedades 6.2, 6.3 e 6.8, podemos facilmente encontrar o determinante de A.

Vejamos alguns exemplos numéricos para ilustrar o cálculo de determinantes utilizando as operações elementares e as propriedades acima:

Exemplo 6.1. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Primeiramente, vamos encontrar uma matriz triangular correspondente por linhas a matriz A.

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$, temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A) = Det(A_1)$.

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_3$, temos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.2, $Det(A_1) = -Det(A_2) \Rightarrow Det(A) = -Det(A_2)$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2$, temos

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_2) = Det(A_3) \Rightarrow Det(A) = -Det(A_3)$.

Como, pela propriedade 6.6, $Det(A_3) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-16) = -48$, $Det(A) = -Det(A_3) = -(-48) = 48$.

□

Exemplo 6.2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Qual o valor de $Det(A)$?

Resolução:

Vamos encontrar a matriz diagonal equivalente por linhas à matriz A.

Fazendo, em A, $L_1 \leftrightarrow L_2$, temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.2, $Det(A) = -Det(A_1)$.

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$, temos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_2) = Det(A_1) \Rightarrow Det(A) = -Det(A_2)$.

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_5$, temos

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.2, $Det(A_2) = -Det(A_3) \Rightarrow Det(A) = Det(A_3)$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$ e $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$, temos

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_4) = Det(A_3) \Rightarrow Det(A) = Det(A_4)$.

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_5$, temos

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.2, $Det(A_5) = -Det(A_4) \Rightarrow Det(A) = -Det(A_5)$.

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + 9L_3$, temos

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_6) = Det(A_5) \Rightarrow Det(A) = -Det(A_6)$.

Fazendo $L_5 \leftarrow L_5 - \frac{3}{5}L_4$, temos

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{73}{5} \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_7) = Det(A_6) \Rightarrow Det(A) = -Det(A_7)$.

Como, pela propriedade 6.6, $Det(A_7) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 10 \cdot \frac{73}{5} = -146$, $Det(A) = -Det(A_7) = -(-146) = 146$.

□

6.4 APLICAÇÃO DOS DETERMINANTES.

Duas aplicações de determinantes bastante importantes é na obtenção de matrizes inversas e na Regra de Cramer para a resolução de sistemas lineares.

6.4.1 **Cálculo de Matrizes Inversas.**

6.4.1.1 *Definições.*

Para calcularmos a matriz inversa utilizando determinantes, devemos conhecer as seguintes definições:

- Cofator:

  Segundo [9], o cofator de um elemento qualquer a_{ij} de uma matriz quadrada A é indicado por A_{ij}, onde
  $$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij},$$
  em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A, eliminando sua i-ésima linha e j-ésima coluna.

  Vejamos um exemplo:

  Exemplo 6.3. Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, então, eliminando-se a segunda linha e a primeira coluna, obtemos $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{21} = 4$ é o cofator do elemento a_{21}.

  □

- Matriz Adjunta:

  De acordo com [7], dada uma matriz quadrada A, de ordem n, a matriz adjunta de A, indicada por $\overline{A}$, é a matriz $\overline{A} = C^t$, onde C é a matriz dos cofatores dos elementos de A.

  Para determinar a matriz adjunta $\overline{A}$ é necessário primeiro obtermos a matriz dos cofatores de A, representada geralmente por C, para então determinarmos a matriz adjunta A.

  Exemplo 6.4. Se a matriz dos cofatores de A for a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, então a matriz adjunta de A será a matriz $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

  □

6.4.1.2 *Calculando Matrizes Inversas.*

A matriz A^{-1}, inversa de uma matriz A, pode ser calculada, segundo [7], utilizando a seguinte fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \cdot \overline{A},$$

onde $\overline{A}$ é a matriz adjunta de A.

Observação: Se $Det(A) = 0$, então a matriz A não admite inversa, já que não existe $\frac{1}{Det(A)}$.

Porém, para calcularmos a inversa de uma matriz usando este método, devemos efetuar um número muito grande de operações. Por esse motivo, nos limitaremos apenas a encontrar inversas de matrizes de ordem 2 e ordem 3, utilizando determinantes.

6.4.1.2.1 Matrizes de ordem 2.

A inversa de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

já que a matriz dos cofatores é $C = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$.

Exemplo 6.5. Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Primeiramente vamos encontrar o valor de $Det(A)$.

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$, temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A) = Det(A_1)$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(A_1) = 2 \cdot (-\frac{3}{2}) = -3$.

Então, $Det(A) = -3$. Isso implica que A admite inversa.

Assim, $A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

□

6.4.1.2.2 Matrizes de ordem 3.

A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} & a_{13} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{33} & a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \\ a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33} & a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} & a_{13} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} \\ a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31} & a_{12} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{32} & a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{bmatrix},$$

já que a matriz dos cofatores é

$$C = \begin{bmatrix} a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} & a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33} & a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31} \\ a_{13} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{33} & a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} & a_{12} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{32} \\ a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} & a_{13} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} & a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.6. Encontre, utilizando o conceito de matriz adjunta, a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Fazendo, em M, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, temos

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propiedade 6.8, $Det(M) = Det(M_1)$.

Fazendo $L_2 \leftarrow -3L_2$ e $L_3 \leftarrow 4L_3$, temos

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & -12 & -4 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.3, $Det(M_2) = -3 \cdot 4 \cdot Det(M_1) \Rightarrow Det(M) = -\frac{1}{12}Det(M_2)$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, temos

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(M_3) = Det(M_2) \Rightarrow Det(M) = -\frac{1}{12}Det(M_3)$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(M_3) = 1 \cdot 12 \cdot (-1) = -12$.

Então, $Det(M) = -\frac{1}{12} \cdot (-12) = 1$.

Assim,

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -4 \cdot (-1) - 5 \cdot (-3) & 3 \cdot (-3) - 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) \\ 5 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-3) - (-4) \cdot 0 & 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) & 1 \cdot (-4) - 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -9 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

$\square$

6.4.2 Resolução de sistemas lineares - Regra de Cramer.

A regra de Cramer é um processo que dá a solução de um sistema de equações lineares em termos de determinantes. Recebe este nome em homenagem a Gabriel Cramer $(1704 - 1752)$.

Seja S um sistema linear $n \times n$ (n equações e n incógnitas).

Sendo D o determinante da matriz A dos coeficientes de S e D_{x_i} o determinante da matriz que obtemos quando trocamos a coluna i da matriz A pelos termos independentes de S, temos

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}.$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 6.7. Resolva, utilizando a Regra de Cramer, o sistema

$$S : \begin{cases} 3x & +2y & = 5 \\ x & -2y & = 7 \end{cases}.$$

Resolução:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes do sistema.

Fazendo em A, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$, temos $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$.

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A) = Det(A_1)$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(A_1) = 3 \cdot (-\frac{8}{3}) = -8$.

Assim, $Det(A) = -8 \Rightarrow D = -8$.

Seja $A_x = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ a matriz obtida substituindo os coeficientes de x pelos termos independentes.

Fazendo em A_x, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{5}L_1$, temos $A_{x_1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -\frac{24}{5} \end{bmatrix}$.

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_x) = Det(A_{x_1})$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(A_{x_1}) = 5 \cdot (-\frac{24}{5}) = -24$.

Assim, $Det(A_x) = -24 \Rightarrow D_x = -24$.

Logo, $x = \frac{-24}{-8} = 3$.

Seja $A_y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ a matriz obtida substituindo os coeficientes de y pelos termos independentes.

Fazendo em A_y, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$, temos $A_{y_1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}$.

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_y) = Det(A_{y_1})$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(A_{y_1}) = 3 \cdot \frac{16}{3} = 16$.

Assim, $Det(A_y) = 16 \Rightarrow D_y = 16$.

Logo, $y = \frac{16}{-8} = -2$.

Portanto, a solução do sistema é $V = \{(3, -2)\}$.

□

Exemplo 6.8. (UFES/2007) Um produtor de laticínios do estado do Espírito Santo vende o quilo de queijo a preços distintos, de acordo com o destino do produto. Na Grande Vitória, o preço do quilo é R$ 10,00; nos outros municípios do Espírito Santo, o preço é R$ 15,00; para os demais estados do Brasil, o preço é R$ 20,00. Num determinado mês, ele vendeu 500 quilos de queijo no Brasil. O dinheiro que obteve com as vendas para os municípios do Espírito Santo fora da Grande Vitória foi R$ 3.600,00 a mais do que obteve com as vendas para a Grande Vitória. O dinheiro que obteve com as vendas no Espírito Santo foi uma vez e meia o dinheiro obtido com a venda para os outros estados. Calcule quantos quilos de queijo o produtor vendeu para cada um dos três destinos, nesse mês.

Resolução:

Sejam x, y e z as quantidades de quilos vendidos para a Grande Vitória, demais municípios do Espírito Santo e demais estados do Brasil, respectivamente. Assim, temos o seguinte sistema:

$$S : \begin{cases} x & +y & +z & = 500 \\ -10x & +15y & & = 3600 \\ 10x & +15y & -30z & = 0 \end{cases}$$

Note que a matriz dos coeficientes do sistema é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -10 & 15 & 0 \\ 10 & 15 & -30 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1$, temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 5 & -40 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A) = Det(A_1)$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2$, temos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & -42 \end{bmatrix}.$$

Note que, ainda pela propriedade 6.8, $Det(A_2) = Det(A_1) \Rightarrow Det(A) = Det(A_2)$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(A_2) = 1 \cdot 25 \cdot (-42) = -1050$, o que implica $D = -1050$.

Substituindo os termos independentes nos coeficientes de x, temos

$$A_x = \begin{bmatrix} 500 & 1 & 1 \\ 3600 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $A_{1x} = {A_x}^t$, temos

$$A_{1x} = \begin{bmatrix} 500 & 3600 & 0 \\ 1 & 15 & 15 \\ 1 & 0 & -30 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.5, $Det(A_x) = Det(A_{1x})$.

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{500}L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, temos

$$A_{2x} = \begin{bmatrix} 500 & 3600 & 0 \\ 0 & \frac{39}{5} & 15 \\ 0 & -15 & -45 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_{1x}) = Det(A_{2x}) \Rightarrow Det(A_x) = Det(A_{2x})$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{25}{13}L_2$, temos

$$A_{3x} = \begin{bmatrix} 500 & 3600 & 0 \\ 0 & \frac{39}{5} & 15 \\ 0 & 0 & -\frac{210}{13} \end{bmatrix}.$$

Note que, ainda pela propriedade 6.8, $Det(A_{2x}) = Det(A_{3x}) \Rightarrow Det(A_x) = Det(A_{3x})$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(A_{3x}) = 500 \cdot \frac{39}{5} \cdot (-\frac{210}{13}) = -63000$, o que implica $D_x = -63000$.

Portanto, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-63000}{-1050} = 60$.

Substituindo os termos independentes nos coeficientes de y, temos

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 500 & 1 \\ -10 & 3600 & 0 \\ 10 & 0 & -30 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 10L1$, temos

$$A_{1y} = \begin{bmatrix} 1 & 500 & 1 \\ 0 & 8600 & 10 \\ 0 & -5000 & -40 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_y) = Det(A_{1y})$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{25}{43}L_2$, temos

$$A_{2y} = \begin{bmatrix} 1 & 500 & 1 \\ 0 & 8600 & 10 \\ 0 & 0 & -\frac{1470}{43} \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_y) = Det(A_{1y})$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(A_{2y}) = 1 \cdot 8600 \cdot (-\frac{1470}{43}) = -294000$, o que implica $D_y = -294000$.

Portanto, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-294000}{-1050} = 280$.

Substituindo os termos independentes nos coeficientes de z, temos

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 500 \\ -10 & 15 & 3600 \\ 10 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 10L1$, temos

$$A_{1z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 500 \\ 0 & 25 & 8600 \\ 0 & 5 & -5000 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_z) = Det(A_{1z})$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2$, temos

$$A_{2z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 500 \\ 0 & 25 & 8600 \\ 0 & 0 & -6720 \end{bmatrix}.$$

Note que, pela propriedade 6.8, $Det(A_z) = Det(A_{1z})$.

Mas, pela propriedade 6.6, $Det(A_{2z}) = 1 \cdot 25 \cdot (-6720) = -168000$, o que implica $D_z = -168000$.

Portanto, $z = \frac{D_z}{D} = \frac{-168000}{-1050} = 160$.

Logo, o produtor vende 60 kg de queijo na grande vitória, 280 kg nos outros municípios do Espírito Santo e 160 kg no restante do Brasil.

$\square$

Note que este método para resolução de sistemas lineares exige um número muito maior de operações matemáticas do que a Eliminação de Gauss-Jordan, vista no capítulo 4.

6.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. (UNESP/2005) Foi realizada uma pesquisa, num bairro de determinada cidade, com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade x da criança, concluiu-se que o peso médio $p(x)$, em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz A, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Com base na fórmula $p(x) = detA$, determine:

a) o peso médio de uma criança de 5 anos;

b) a idade mais provável de uma criança cujo peso é 30 kg.

2. (UNITAU/1995) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

como produto de 3 fatores é:

a) abc.

b) $a(b+c)c$.

c) $a(a-b)(b-c)$.

d) $(a+c)(a-b)c$.

e) $(a+b)(b+c)(a+c)$.

3. (UDESC/2009) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Seja a matriz B tal que $A^{-1}BA = D$, onde a matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, então o determinante de B é igual a:

a) 3.

b) -5.

c) 2.

d) 5.

e) -3.

4. (FUVEST/1991) Determinar o número real $\lambda \neq 0$ de modo que a equação a seguir, admita duas raízes reais simétricas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & \lambda \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

5. (UFMG/1994) Sabe-se que $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + 2Ey + F$, com A, B, C, D, E e F reais, fatora-se, no conjunto dos reais, em dois fatores de primeiro grau em x e

y se, e somente se, $B^2 - AC \geq 0$ e o determinante da matriz, representada a seguir, for nulo.

$$\begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, determine m para que o polinômio $x^2+2mxy-y^2+x+y$ seja um produto de dois fatores de primeiro grau em x e y.

6.5.1 Respostas

1. Primeiramente, vamos calcular o valor de $detA$.

   Fazendo, em A, $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -x-3 \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

   Note que, pela propriedade 6.8, $detA = detA_1$.

   Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2$, temos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -x-3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}(x+4) \end{bmatrix}.$$

   Note que, pela propriedade 6.8, $detA_1 = detA_2 \Rightarrow detA = detA_2$.

   Pela propriedade 6.6, $detA_2 = 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}(x+4) = 2x+8$.

   Assim, $p(x) = 2x + 8$. Então, como

   a) $x = 5 \Rightarrow p(x) = 18$. Logo, o peso médio de uma criança de 5 anos é 18 kg.

   b) $p(x) = 30 \Rightarrow x = 11$. Logo, a idade mais provável é 11 anos.

2. Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, temos

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{vmatrix}.$$

   Pela propriedade 6.8, esse determinante é igual ao anterior.

   Fazendo agora $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, temos

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix}.$$

Ainda pela propriedade 6.8, esse determinante também possui o mesmo valor dos anteriores.

Como, pela propriedade 6.6, esse último determiante vale $a(b-a)(c-b) = a(a-b)(b-c)$, a resposta correta é o item (c).

3. Sabemos que $A^{-1}BA = D \Rightarrow Det(A^{-1}BA) = Det(D)$.

   Pela propriedade 6.7, $Det(A^{-1}BA) = Det(A^{-1}) \cdot Det(B) \cdot Det(A)$. Portanto, $Det(B) = \frac{Det(D)}{Det(A^{-1}) \cdot Det(A)} = \frac{Det(D)}{Det(A^{-1} \cdot A)} = \frac{Det(D)}{Det(I)} = Det(D)$.

   Fazendo em D, $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$, temos $D' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

   Já que, pela propriedade 6.8, $Det(D) = Det(D')$ e, pela propriedade 6.6, $Det(D') = 5$, logo $Det(B) = 5$.

   Logo, a resposta correta é a alternativa (d).

4. Resolvendo o determinante, encontramos a seguinte equação:

$$x^3 + 3x^2 - 4x + \lambda = 0$$

   Note que, já que essa equação possui duas raízes simétricas, a terceira raiz vale -3, pois, pelas Relações de Girard, $x_1 + x_2 + x_3 = -3$.

   Assim, $\lambda = -12$.

5. Temos $A = 1$, $B = m$, $C = -1$, $D = E = \frac{1}{2}$ e $F = 0$.

   Note que $B^2 - AC = m^2 + 1 \geq 0$.

   Portanto, devemos ter

$$\begin{vmatrix} 1 & m & \frac{1}{2} \\ m & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

   Calculando o determinante acima, temos

$$\frac{m}{2} = 0 \Rightarrow m = 0.$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Método de Gauss-Jordan, conforme foi visto, é muito útil para sistemas de equações lineares em geral. Esse método pode até não ser o ideal em caso de sistemas extremamente simples, mas tem a vantagem de poder ser aplicado em qualquer tipo de sistema e pode ser "mecanizado" muito facilmente. Além disso, temos a limitação da Regra de Cramer, que só pode ser aplicada em sistemas com o mesmo número de equações e de variáveis.

Além disso, em sistemas mais gerais, com aplicação, por exemplo, na avicultura ou bovinocultura para a fórmula ideal de uma ração, com várias incógnitas e várias variáveis, podem ser solucionados com programas como o MATLAB ou wxMaxima, que utilizam o Método da Eliminação de Gauss-Jordan em sua programação.

Portanto, o Método de Gauss-Jordan torna-se muito útil (praticamente indispensável) em sistemas de equações com um número de variáveis muito grande.

Vimos também que o cálculo da inversa de uma matriz utilizando determinantes é muito custoso, envolvendo um número muito grande de operações matemáticas. Como podemos perceber, o processo prático, utilizando as operações elementares, é muito vantajoso, reduzindo bastante o número de cálculos.

Por fim, também podemos perceber que conhecendo as suas propriedades, o cálculo dos determinantes pode ser bastante simplificado com essa técnica de eliminação.

REFERÊNCIAS

[1] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZELER, H. G. *Álgebra Linear*, ed. 3, São Paulo: Harbra, 1980.

[2] *Currículo Mínimo 2012 - Matemática*, Rio de Janeiro: Governo do Estado do Rio de Janeiro, Secretaria de Estado de Educação, 2012.

[3] HEFEZ, A.; FERNANDES, C. S. *Introdução à Álgebra Linear*, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss, *acessado em 10/01/2013*

[5] http://pt.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Jordan, *acessado em 10/01/2013*

[6] http://www.brasilescola.com/matematica/propriedades-dos-determinantes.htm, *acessado em 03/01/2014.*

[7] http://www.infoescola.com/matematica/matriz-adjunta/, *acessado em 21/01/2013.*

[8] http://www.ptmat.fc.ul.pt/ mimafer/alga0910/beamer-teorica5(print).pdf, *acessado em 06/01/2014.*

[9] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de *Matemática - Ciência e Aplicações*, v. 2, ed. 2, São Paulo: Atual, 2004.

[10] *Orientações Curriculares Para o Ensino Médio*, v. 2, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006.

APÊNDICE A – Interpretação Geométrica

Um sistema linear 2×2 pode ser representado como a intersecção de duas retas no plano. Assim:

- Se o sistema for possível e determinado, as retas serão concorrentes, tendo um único ponto em comum. Por exemplo:

  Exemplo A.1. Seja o sistema

  $$S_1 : \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} .$$

  Resolvendo esse sistema algebricamente, sua solução é $V = \{(1, 1)\}$. Veja a solução gráfica desse sistema:

  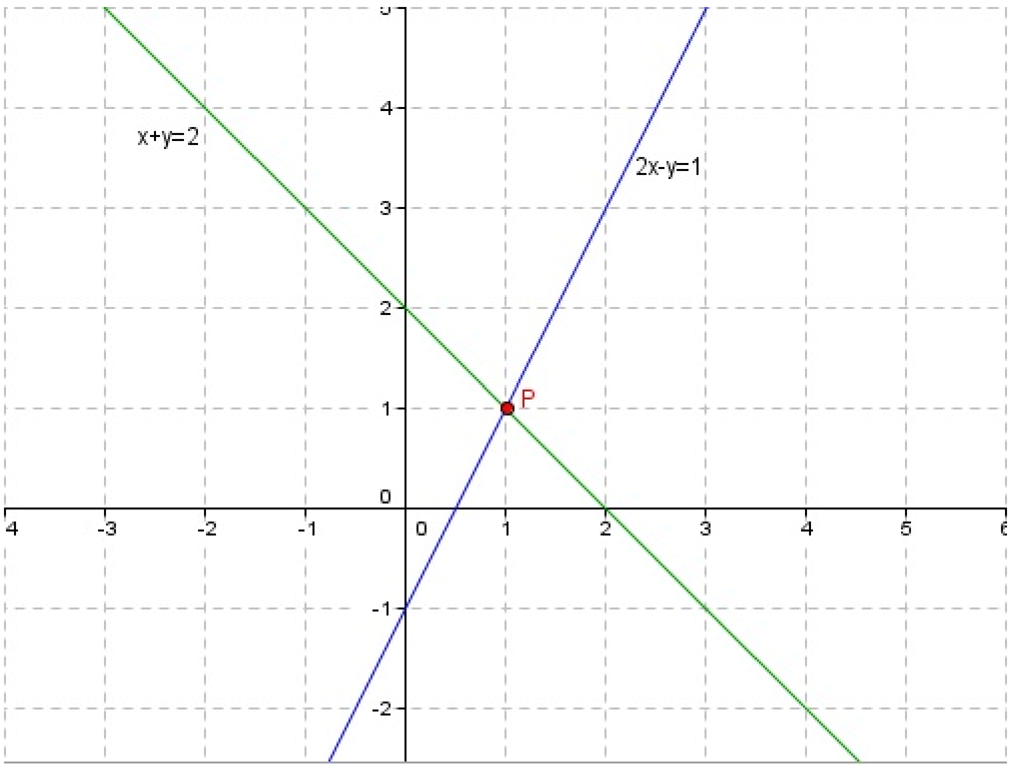

  Figura 1 – SPD 2×2

  □

- Se o sistema for possível e indeterminado, as retas serão coincidentes, tendo infinitos pontos em comum. Por exemplo:

  Exemplo A.2. Seja o sistema

  $$S_2 : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} .$$

Resolvendo esse sistema algebricamente, vemos que o sistema é SPI. Veja a solução gráfica desse sistema:

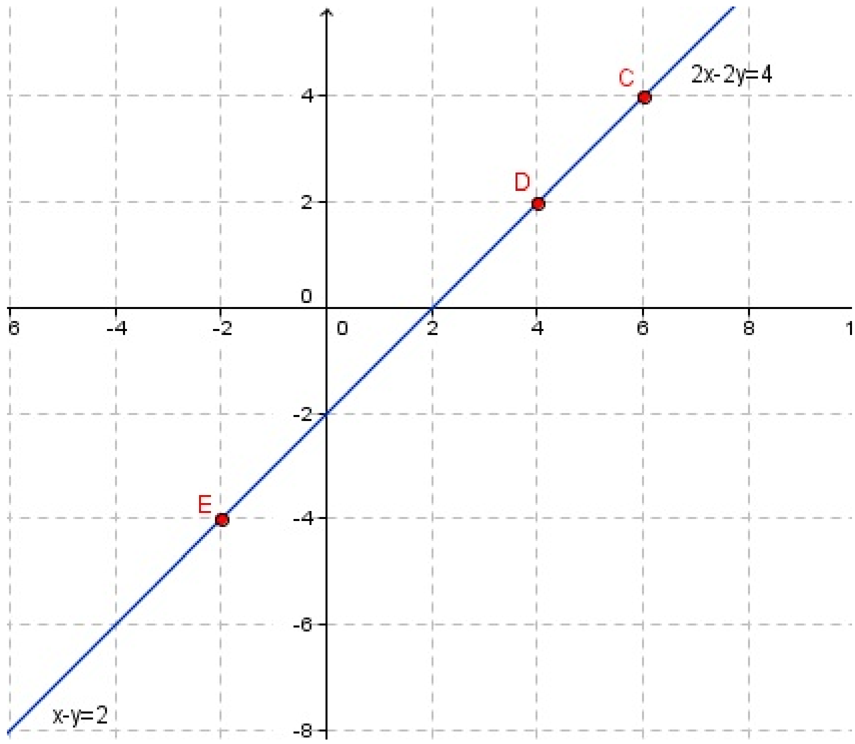

Figura 2 – SPI 2×2

$\square$

- Se o sistema for impossível, as retas serão paralelas, não tendo ponto em comum. Por exemplo:

Exemplo A.3. Seja o sistema

$$S_3 : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema algebricamente, vemos que o sistema é SI. Veja a solução gráfica desse sistema:

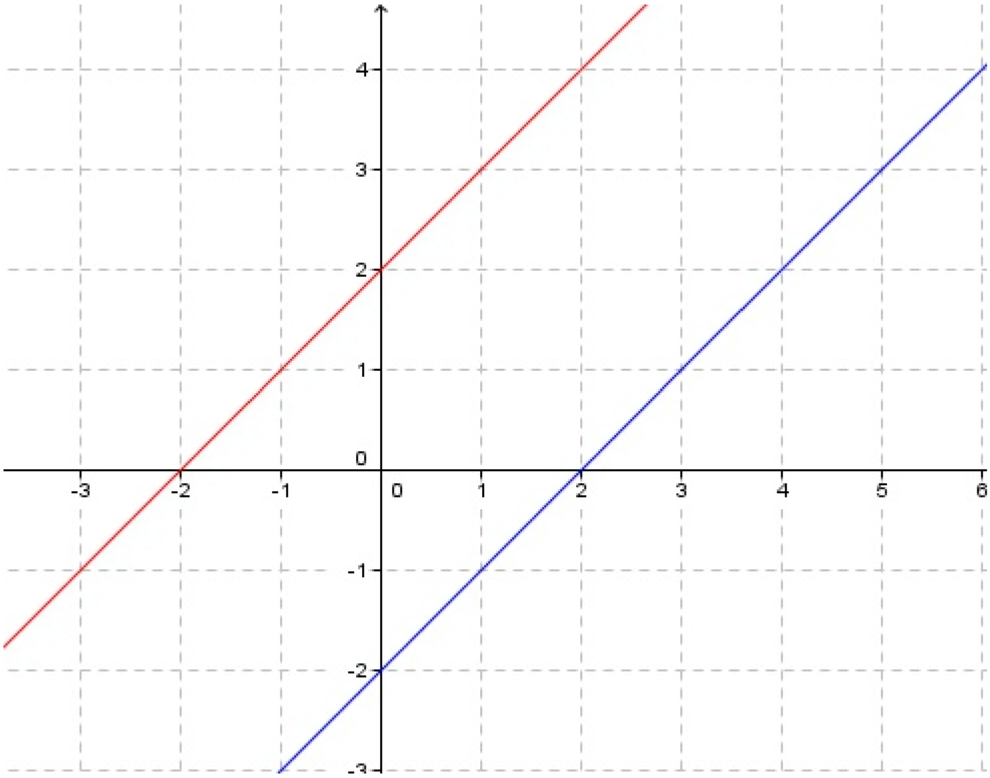

Figura 3 – SI 2×2

$\square$

Do mesmo modo, um sistema linear 3×3 pode ser representado como a intersecção de planos no espaço. Assim:

- Se o sistema for possível e determinado, os planos concorrem em um único ponto. Por exemplo:

  Exemplo A.4. Seja o sistema

$$S_4 : \begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 25 \end{cases} .$$

  Resolvendo esse sistema algebricamente, vemos que o conjunto solução do sistema é $V = \{(5, 6, 7)\}$. Veja a solução gráfica desse sistema:

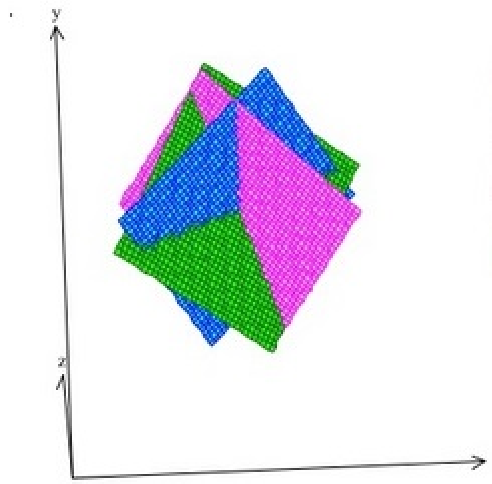

Figura 4 – SPD 3×3

□

- Se o sistema for possível e indeterminado, temos três casos a considerar:

  1. os três planos são distintos e concorrem em uma reta;
  2. os três planos são coincidentes;
  3. dois planos são coincidentes e o terceiro os corta em uma reta.

  Faremos um exemplo em que os três planos são distintos.

  Exemplo A.5. Seja o sistema

$$S_5 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + 4z = 6 \end{cases} .$$

  Resolvendo esse sistema algebricamente, vemos que o sistema é SPI. Veja a solução gráfica desse sistema:

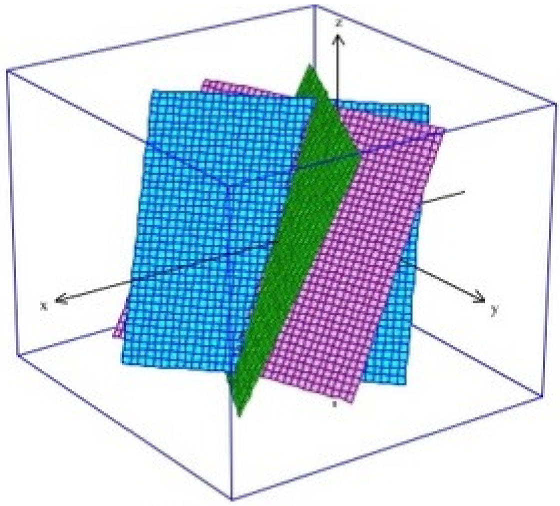

Figura 5 – SPI 3×3

□

- Se o sistema for impossível, temos quatro casos a considerar:

  1. dois planos são coincidentes e o terceiro é paralelo aos demais;
  2. os três planos são paralelos;
  3. dois planos paralelos e o terceiro intersecta os demais;
  4. os três planos se intersectam dois a dois segundo retas paralelas.

  Faremos um exemplo desse último caso.

  Exemplo A.6. Seja o sistema

$$S_6 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ 8x + y + 6z = 2 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema algebricamente, vemos que o sistema é SI. Veja a solução gráfica desse sistema:

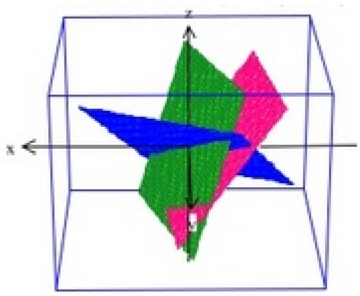

Figura 6 – SI 3×3

□