UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS

CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JAMERSON MONTENEGRO LIMA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL, SENO E COSSENO COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE WINPLOT

PALMAS

2014

JAMERSON MONTENEGRO LIMA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL, SENO E COSSENO COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE WINPLOT

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Fundação Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz

Co-orientador: Prof. Msc. Edson Luiz Kraemer

PALMAS

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

L732p Lima, Jamerson Montenegro
Uma Proposta para o Ensino das Funções Exponencial, Seno e Cosseno com o auxílio do Software Winplot / Jamerson Montenegro Lima. - Palmas, 2014.
74f.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2014.
Linha de pesquisa: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

1. Seno. 2. Cosseno. 3. Exponencial. 4. Winplot I. De La Cruz, Andrés Lázaro Barraza II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDD 510

Bibliotecária: Emanuele Santos
CRB-2 / 1309

JAMERSON MONTENEGRO LIMA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS, SENO E COSSENO COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE WINPLOT

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientador: Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

Aprovada em 27 / 03 / 2014

BANCA EXAMINADORA

Andrés Barraza

Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz (Orientador-UFT)

Sidel

Prof. Dr. Salmo Moreira Sidel (UFT)

Reis

Prof. Dr. Reginaldo Naves dos Reis (IFTO)

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais RAMOS e ANTONIETA, minha esposa ROSELENA, meus filhos ÍTALO, BEATRIZ e JÚLIA, meu irmão EMERSON e família e demais familiares.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado a vida e a sabedoria necessária;

Aos meus pais RAMOS e ANTONIETA pelo AMOR de sempre;

A minha esposa ROSELENA que sempre me incentivou, junto a cada um dos meus filhos ÍTALO, BEATRIZ e JÚLIA pela COMPREENSÃO, CARINHO e AMOR de sempre;

A meu irmão EMERSON e família pelo apoio;

Ao meu primo irmão ALEXANDRE, por sempre está presente;

Meus Avôs e Avós (paternos) e (maternos) “In Memorian” e demais familiares por fazerem parte dessa história;

Meu sogro “SEU BENISSIO”, pela simplicidade;

Meus amigos Marcio e Joaquim, pela amizade e confiança;

Aos meus colegas de mestrado, pela convivência e aprendizado;

À CAPES, pelas bolsas concedidas durante o curso;

Ao meu orientador Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz, ao Co-orientador Prof. Msc. Edson Luiz Kraemer e demais professores do Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT polo UFT, pelo incentivo, ensinamentos e paciência;

Aos professores Luiz Gustavo e Francisco Romero pela gentileza e disponibilidade;

Aos meus amigos César Zica, Rodrigo, Magno, Tiago, Antônio Marcos, Cláudia e demais colegas do Mestrado pelo convívio e ensinamentos no decorrer do curso.

RESUMO

A Matemática é uma das disciplinas que os alunos do ensino básico encontram maior dificuldade de aprendizagem. Relacionar a Matemática ensinada na escola com a Matemática do cotidiano do aluno tem fundamental importância no processo de formação e escolarização do educando como também dar significado ao conteúdo que está sendo estudado. No entanto, é necessário o entendimento dos conteúdos a serem estudados para serem eficazes nas suas aplicações. Como alternativa para atingir esse fim, este trabalho propõe a utilização do software winplot para auxiliar no entendimento da função exponencial e também das funções trigonométricas (seno e cosseno) por meio da utilização de seus recursos para a construção e visualização dos mais diversos gráficos relativos a essas funções, como também na solução de alguns problemas do cotidiano como: juros compostos, crescimento populacional e decaimento radiativo. Ainda neste trabalho são evidenciadas as características dos movimentos circular uniforme (MCU), harmônico simples (MHS) e lançamento oblíquo que estarão presentes e interligados em uma aplicação das funções seno e cosseno que apesar de ter uma modelagem matemática de equações complexas terá, com auxílio do winplot, soluções rápidas. Desta forma, com a utilização do software winplot, propõe-se ao professor e ao aluno uma forma ágil e interativa para a compreensão do comportamento dessas funções.

Palavras-chave: seno, cosseno, exponencial e winplot.

ABSTRACT

The Mathematics is one of the disciplines that students of basic education encounter greater difficulty in learning. Relate the mathematics taught in school with math everyday student has a fundamental importance in the training and education of the student process but also gives meaning to the content being studied. However, the understanding of the contents to be studied to be effective in its applications is needed. As an alternative to that end, this paper proposes the use of winplot software to assist in the understanding of exponential functions and also the trigonometric functions (sine and cosine) using of its resources for the construction and visualization of various graphs for these functions, but also in solving some real-world problems, such as compound interest, population growth and radioactive decay. Also in this work are evidenced characteristics of movements: uniform circular (MCU), simple harmonic (MHS) and oblique release that will be present and connected in an application of the sine and cosine functions that despite having a mathematical modeling of complex equations will, with the aid the winplot, quick solutions. Thus, using the winplot software, it is proposed to the teacher and the student with an agile and interactive way to understanding the behavior of these functions.

Keywords: sine, cosine, exponential, winplot.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem da disciplina matemática sempre foi motivo de questionamento, visto que, a maioria dos alunos do ensino básico possui dificuldade em aprender tal disciplina. Por conta disso, pesquisas são realizadas para que novas metodologias, dentre elas utilização de softwares, sejam utilizadas para amenizar as dificuldades em entender os conteúdos relativos à matemática.

O winplot é um software livre que permite a construção de gráficos de funções matemáticas em duas dimensões (2D) e em três dimensões (3D) e foi desenvolvido por Richard Parris da Phillips Exeter Academy. Seu download pode ser feito através do link http: math.exeter.edu/rparris/winplot.html, com opção em português e permitido na plataforma Windows (95/98/ME/2K/XP/Vista/7).

Por meio dos recursos disponíveis no winplot, o professor possui uma alternativa para construção de gráficos, dentre eles, as funções exponencial e trigonométrica permitindo assim, mais rapidez e precisão em relação aos métodos tradicionais. Além disso, esse software permite a intersecção de gráficos, trazendo com isso, outra possibilidade para resolução de equações. Outra vantagem do Winplot é que, por meio dele, pode-se verificar o comportamento do gráfico de uma função quando seus parâmetros variam. Desta forma, pode-se interpretar visualmente o efeito da variação dos parâmetros nos gráficos das funções.

Neste trabalho utilizam-se os recursos do programa winplot para o estudo das funções exponencial, seno e cosseno, verificando suas propriedades por meio da construção de seus gráficos, assim como também, na solução de equações que envolvem essas funções e que seriam difíceis de serem resolvidas analiticamente. Isto é realizado por meio de 8 atividades em forma de situação problema, destacando sua modelagem em situações práticas do dia a dia.

Este trabalho é desenvolvido em mais cinco capítulos. No segundo capítulo estão as definições necessárias para o estudo da função exponencial se destacando o exemplo 1 onde estão os passos para construir um gráfico no winplot. No terceiro capítulo, estão as atividades para o ensino da função exponencial destacando a influência da variação dos seus parâmetros no comportamento dos gráficos dessas funções. Ainda no terceiro capítulo, aparecem as aplicações da função exponencial nos juros compostos, crescimento populacional e decaimento radiativo. Nessas aplicações o winplot é usado para resolução de equações exponenciais e, para tanto, se utiliza o recurso “Interseções” para determinar a solução de tais equações. No quarto capítulo estão as definições relativas às funções seno e cosseno. No quinto capítulo estão as atividades para o ensino das funções seno e cosseno destacando a influência da variação dos seus parâmetros no comportamento dos gráficos dessas funções. Ainda nesse capítulo, estão as características dos movimentos: circular uniforme (MCU), harmônico simples (MHS) e lançamento oblíquo que estarão presentes e interligados em uma aplicação das funções seno e cosseno considerando uma roda gigante em movimento de onde é solta uma bola para acertar um alvo fixo e um alvo móvel. No sexto capítulo são feitas as considerações finais.

2. DEFINIÇÕES PRELIMINARES RELATIVAS À FUNÇÃO EXPONENCIAL

2.1. FUNÇÃO

Segundo Lima:

> "Dados os conjuntos *X* e *Y*, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de *X* em *Y*") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto *X* chama-se o domínio e *Y* é o contra-domínio da função *f*. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de *x* pela função *f*, ou o valor assumido pela função *f* no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que *f* transforma (ou leva) *x* em $f(x)$".
> (LIMA, 2006, p. 38).

Exemplo de funções:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$ que associa a cada *x* real um único *y* real igual ao dobro de *x*.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 40$ que associa a cada *x* real um único *y* real igual a 40.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4^x$ que associa a cada *x* real um único *y* real igual a 4 elevado a *x*.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ que associa a cada *x* real um único *y* real igual ao cosseno de *x*.

2.2. FUNÇÃO CRESCENTE

Uma função $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ é dita crescente quando $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in A$.

2.3. FUNÇÃO DECRESCENTE

Uma função $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ é dita decrescente quando $x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in A$.

2.4. SINAL DE UMA FUNÇÃO

Estudar o sinal de uma função $f : A \to B$ significa encontrar para quais valores de $x \in A$ a função *f* se torna positiva $f(x) > 0$;se torna negativa $f(x) < 0$ e se torna nula $f(x) = 0$.

Quando $f(x) = 0$, dizemos que *x* é um zero da função *f*.

2.5. IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

Da definição de função tem-se que, para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de *x* pela função *f*, ou o valor assumido pela função *f* no ponto $x \in X$. O conjunto todos os Y assim obtidos para cada $x \in X$ é chamado imagem da função *f*.

2.6. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Segundo Lima:

> "Seja *a* um número real positivo e diferente de 1.
>
> Chama-se função exponencial, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ de base *a*, definida por $f(x) = a^x$
>
> Propriedades: Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, teremos:
>
> 1) $a^x.a^y = a^{x+y}$
>
> 2) $a^1 = a$
>
> 3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ (crescente) quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ (decrescente) quando $0 < a < 1$". (LIMA, 2006, p. 178).

Exemplo de Funções Exponenciais:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ tal que $f(x) = 3^x$ com base $a = 3$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ tal que $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ com base $a = \frac{1}{6}$.

2.7. PROPOSIÇÃO 1

O gráfico cartesiano da função exponencial intersecta o eixo dos y no ponto de ordenada 1.

Demonstração:

Deve-se mostrar que o par ordenado $(0,1)$ pertence a função $f(x) = a^x$, para todo a $(0 < a \neq 1)$.Ou seja, que $f(0) = a^0 = 1$.

De fato,

A função $f(x) = a^x$ satisfaz a propriedade $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Tomando $x = 0$ e $y = 1$ tem-se que $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$.

Daí, $a^0 \cdot a^1 = a^1$.

Como, $a^1 = a$ segue que $a^0 = \dfrac{a}{a} = 1$ pois, $a \neq 0$ (por definição).

Logo, $f(0) = a^0 = 1$ o que garante que o par ordenado $(0,1)$ pertence à função $f(x) = a^x$.

2.8. PROPOSIÇÃO 2

A função exponencial $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ é positiva para qualquer x real.

Demonstração:

Inicialmente a função exponencial não assume o valor 0 (zero) pois, se existir um $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = f(x_1 + (x - x_1)) = f(x_1).f(x - x_1) = 0.f(x - x_1) = 0$$

Daí, f seria identicamente nula e isto não acontece pois, $f(0) = 1 \neq 0$.

Como a função exponencial $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ admite a propriedade $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, então para $x \in \mathbb{R}$, tem – se que:

$f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right).f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0$ e como não assume o valor 0 (zero), então a função exponencial $f(x) = a^x$ é tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.9. GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Pela propriedade 3 da definição da função exponencial $f(x)=a^x$, o seu gráfico pode assumir dois aspectos a depender da base *a*.

Se $a>1$, o gráfico da função exponencial $f(x)=a^x$ é uma curva crescente;

Se $(0<a<1)$, o gráfico da função exponencial $f(x)=a^x$ é uma curva decrescente.

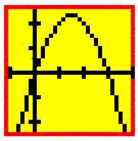
Verifica-se isto por meio de um exemplo.

Exemplo 1:

Construir, usando o software winplot, o gráfico das funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}+$ definida por $f(x)=3^x$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}+$ definida por $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Uso do winplot para construção dos gráficos

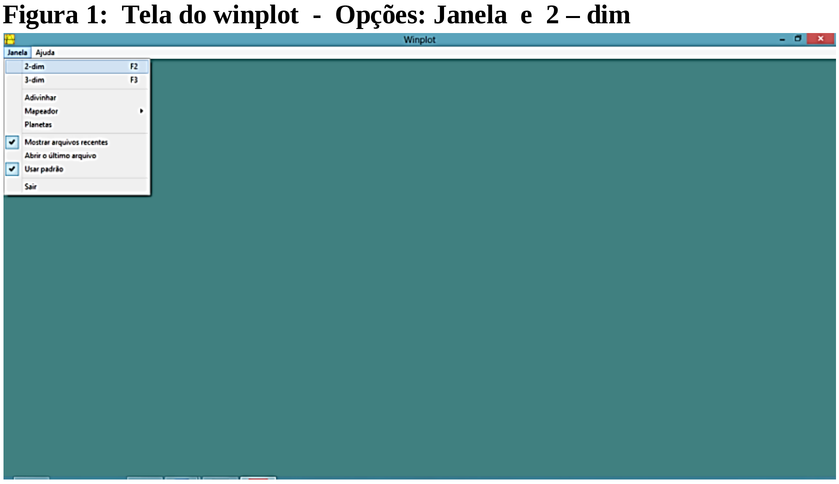
Para construir os gráficos das funções *f* e *g* utilizando o software winplot, seguem-se os seguintes passos:

1º) Abre-se a tela do software winplot, clicando no ícone 

2º) Clica-se em *Janela* e em seguida *2 – dim.*

Este passo é observado na Figura 1, a seguir:

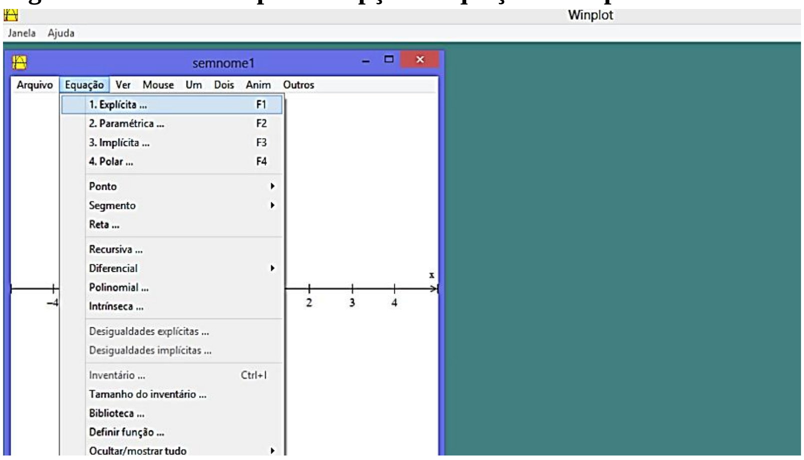
Figura 1: Tela do winplot - Opções: Janela e 2 – dim



3º) Clicando em *2 – dim* aparecerá uma janela onde deve-se clicar em *Equação* e em seguida *Explícita*.

Este passo é observado na Figura 2, a seguir:

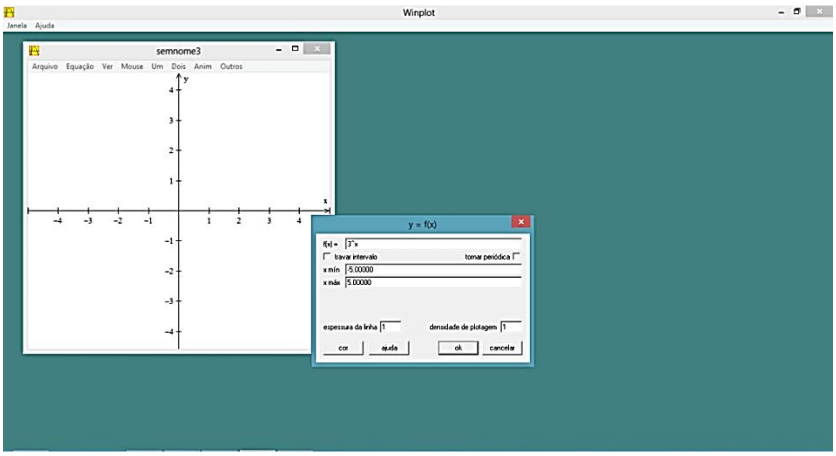
Figura 2: Tela do winplot - Opções: Equação e Explícita



4º) Clicando em *Explícita* aparecerá uma janela onde deve-se digitar $f(x) = 3\wedge x$.

Este passo é observado na Figura 3, a seguir:

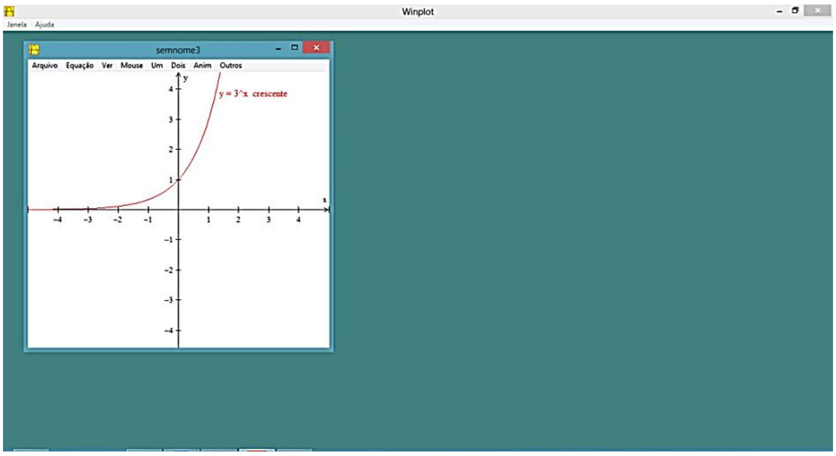
Figura 3: Tela do winplot - Digitação da função $f(x) = 3^x$



5º) Clicando ok aparecerá o gráfico de $f(x) = 3^x$.

Este passo é observado na Figura 4 a seguir:

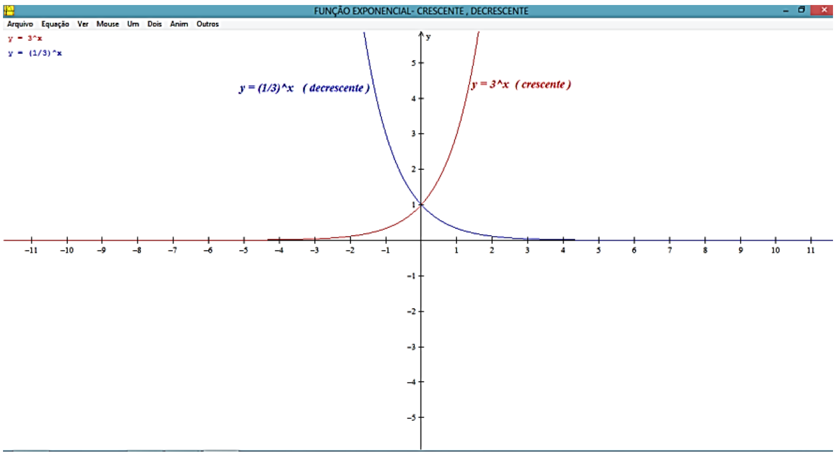
Figura 4: Gráfico da função $f(x) = 3^x$



6º) Clicando novamente em *Equação* e em seguida *Explícita*, aparecerá a janela onde deve-se digitar $g(x) = (1/3)\wedge x$ e após clicar ok aparecerá o gráfico de $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ juntamente com o gráfico de $f(x) = 3^x$.

Este passo é observado na Figura 5, a seguir:

Figura 5: Gráfico das funções exponenciais $f(x) = 3^x$ **e** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



3. PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

3.1. RELAÇÃO ENTRE A VARIAÇÃO DO PARÂMETRO *a* E O COMPORTAMENTO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

3.1.1. VARIAÇÃO DO PARÂMETRO *a* DA FUNÇÃO $f(x) = a^x \ (0 < a \neq 1)$

Atividade 1 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ dada por $f(x) = a^x \ (0 < a \neq 1)$. Utilize o winplot para construir o gráfico da função $f(x) = a^x \ (0 < a \neq 1)$ identificando um gráfico crescente e outro decrescente segundo os valores de *a*.

Objetivos da Atividade 1

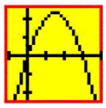
1) Verificar o comportamento do gráfico da função quando o parâmetro *a* varia;

2) Identificar funções exponenciais crescentes e decrescentes;

3) Verificar geometricamente a não existência de zeros na função exponencial.

Uso do winplot para construção do gráfico

Para traçar o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ com variação do parâmetro *a* por meio do winplot, utiliza-se os seguintes passos:

1º) Abre-se a tela do *software winplot*, clicando no ícone 

2º) Clica-se em *Janela*, selecionar "*usar padrão*" e em seguida *2 – dim*;

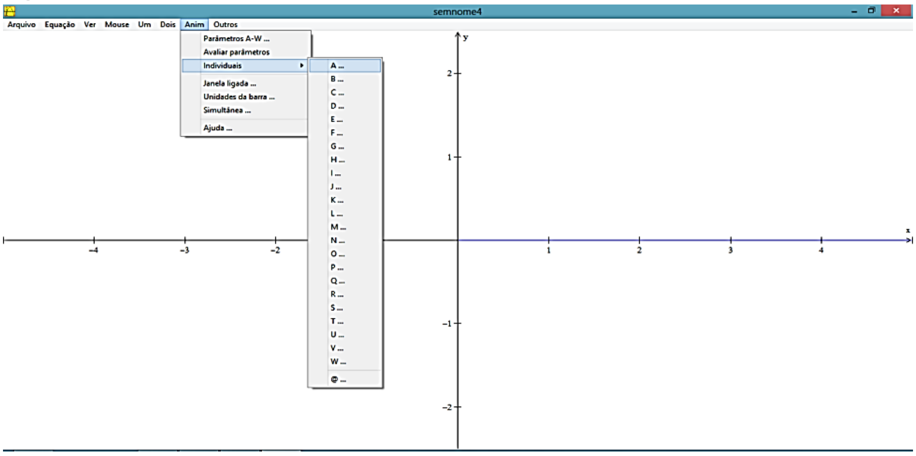
3º) Clicando em *2 – dim* aparecerá uma janela onde deve-se clicar em *Equação* e em seguida *Explícita;*

4º) Clicando em *Explícita* aparecerá uma janela onde deve-se digitar $f(x) = a\wedge x$ e clicar ok;

5º) Em seguida clica-se na sequência: *¨Anim¨, "Individuais" e "A ..."*.

Esta sequência é observada na Figura 6, a seguir:

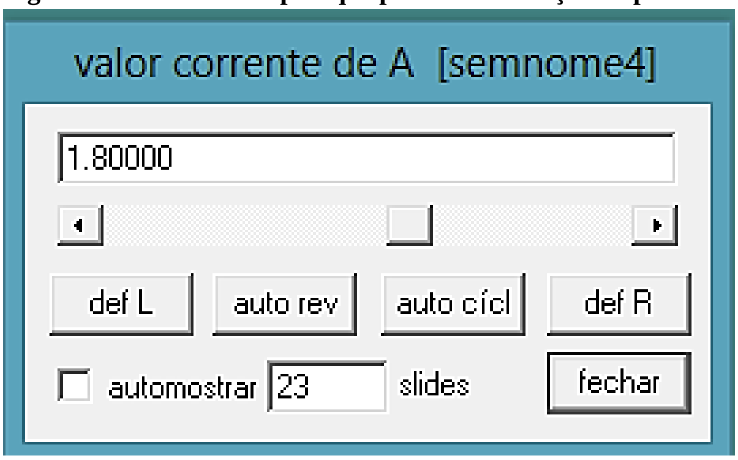
Figura 6: Visualização no winplot da sequência: ¨Anim¨ , “Individuais” e “A ...”



6º) Logo após clicar em *“A ... ”* aparecerá uma janela “ valor corrente de A” que permitirá a variação do parâmetro *a*. Para visualizar a mudança no comportamento do gráfico da função $f(x) = a^x$ a partir da variação do parâmetro *a*, basta mover a barra de rolagem para esquerda ou para direita, diminuindo ou aumentando o valor do parâmetro *a*. Desta forma, esta janela permite, a medida que variamos o parâmetro *a*, acompanhar a variação do comportamento do gráfico (simultaneamente).

A Figura 7 a seguir ilustra a janela citada acima.

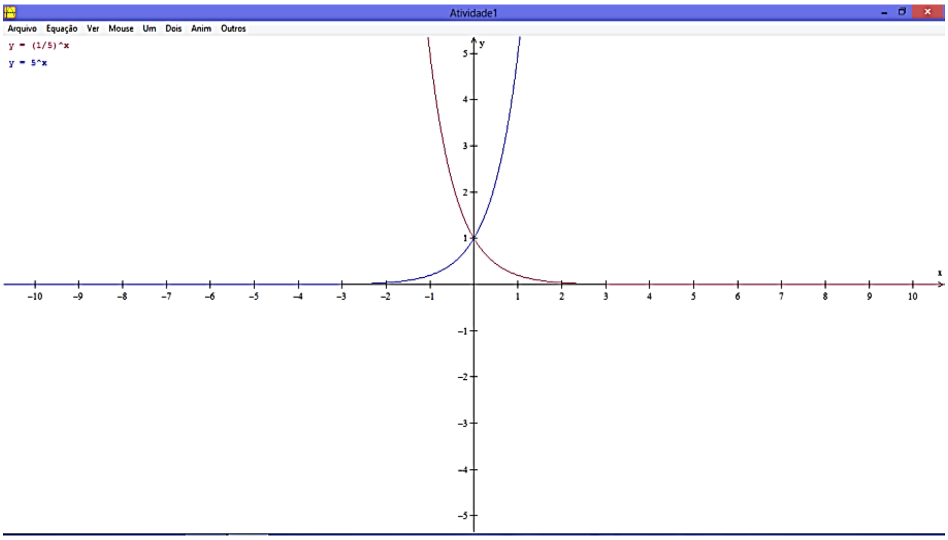
Figura 7: Janela do winplot que permite a variação do parâmetro



7º) E por fim, para visualizar o gráfico da função $f(x) = a^x$ para um determinado valor do parâmetro *a*, basta fixa-lo na janela.

A Figura 8 a seguir, ilustra a função $f(x) = a^x$ para dois valores fixados de *a* $(a = \frac{1}{5}$ e $a = 5)$.

Figura 8: Gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ para os valores do parâmetro $a = \frac{1}{5}$ e $a = 5$



Para verificar, usando o winplot, se a função exponencial admite zeros, deve-se clicar em “Um” e em seguida em “Zeros”.Veja isto na Figura 9. Na janela “zeros” Figura 10, verifica-se a inexistência de zeros na função exponencial. Com isso, constata-se geometricamente que a função exponencial não admite zeros.

Figura 9: Sequência de comandos “Um” e “Zeros”

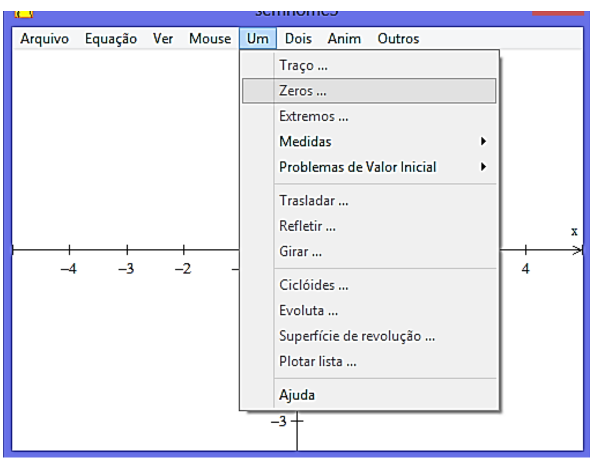
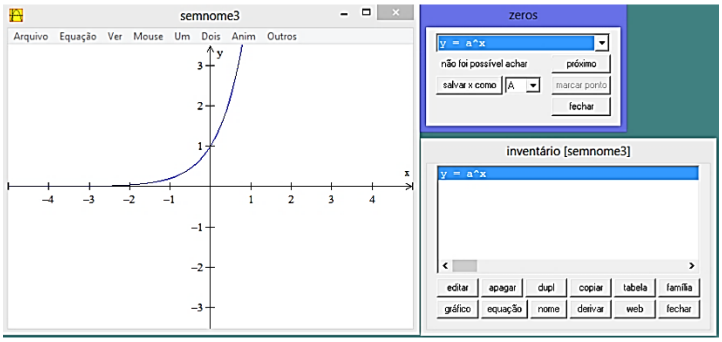


Figura 10: Ilustra a inexistência de zeros na função $f(x) = a^x$



Ainda com o auxílio da janela "valor corrente de A" é possível perceber que quando movemos o cursor para valores de A > 1, os gráficos são crescentes (Figura 11), ao passo que quando movemos o cursor para valores de 0 < A < 1, os gráficos são decrescentes (Figura 12).

Figura 11: Função crescente, $f(x) = a^x$ para *a* = 5

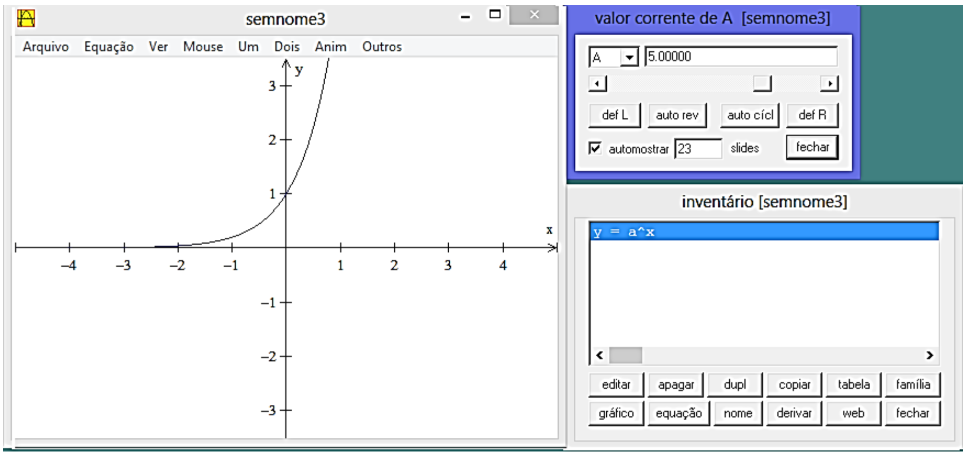
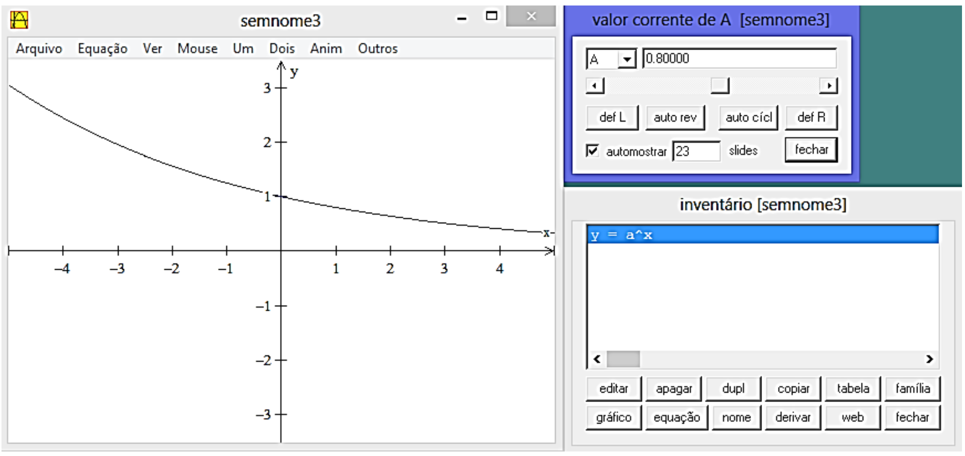


Figura 12: Função decrescente, $f(x) = a^x$ para *a* = 0,8



3.2. FUNÇÃO EXPONENCIAL DE BASE *e*

Segundo Lima

> "Usualmente o número real e é apresentado como limite da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito". (LIMA, 2006, p 200).

Assim, quanto maior for o número n, n natural, melhor será a aproximação desses números racionais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ do número e.

Um valor aproximado dessa importante constante é $e = 2{,}71828182$. Os valores abaixo mostram que quanto maior o valor considerado para n (natural), mais próximo o valor de e se aproxima de 2, 71828182.

$n=1$, $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

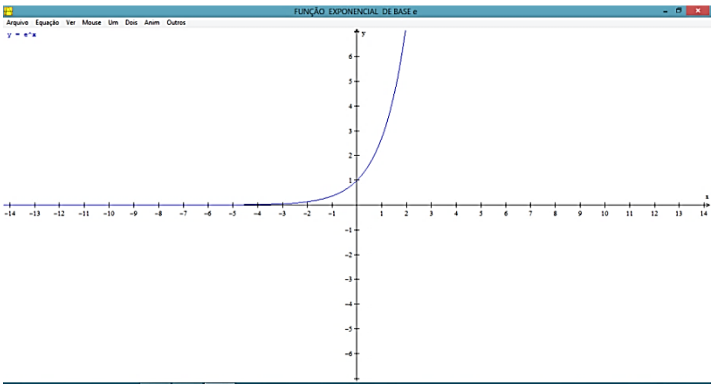
$n=100$, $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}70481382$

$n=100000$, $\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2{,}71826823$

$n=1000000$, $\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2{,}71828046$

Note que a função exponencial de base e, $f(x) = e^x$ é uma função exponencial crescente pois, e = 2, 71828182 > 1. Em seguida, na Figura 13, observe o gráfico da função $f(x) = e^x$.

Figura 13: Gráfico da função exponencial de base e, ou seja, $f(x) = e^x$



3.3. FUNÇÃO TIPO EXPONENCIAL

Segundo Lima:

> "Dizemos que uma função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tipo exponencial quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas". (LIMA, p. 184).

Exemplos de Funções do tipo Exponencial:

$f(x) = 4.5^x$, $g(x) = 2.10^x$, $h(x) = (0,3).\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Gráfico das funções do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$

Atividade 2 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = b.a^x$, $(0 < a \neq 1)$ e $b > 0$. Utilizando o winplot, construa o gráfico da função do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$ com $b \in \mathbb{Z}$, $0 < b < 4$ e $0 < a \neq 1$.

Objetivos da Atividade 2

1) Verificar o comportamento do gráfico da função quando o parâmetro b varia;

2) Identificar o significado de b no gráfico da função $f(x) = b.a^x$;

3) Verificar se o parâmetro b influencia na função $f(x) = b.a^x$ para que seja crescente ou decrescente;

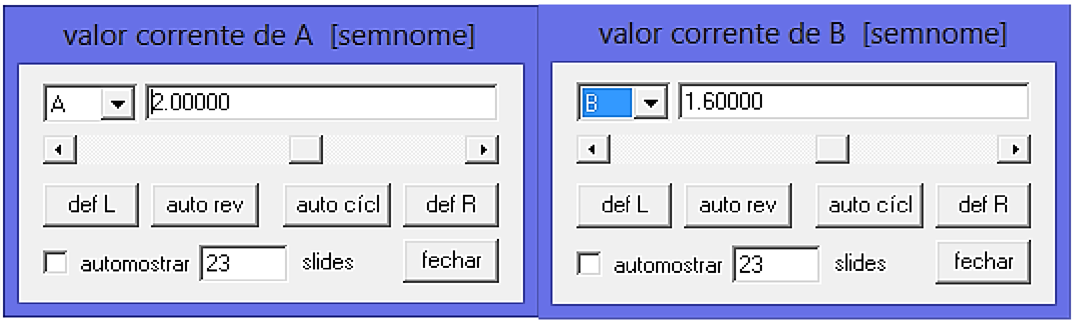
4) Verificar a influência do parâmetro b no sinal da função $f(x) = b.a^x$.

Uso do winplot para construção do gráfico

Para traçar o gráfico da função do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$ com variação do parâmetro a e do parâmetro b utilizando o winplot, utiliza-se os mesmos passos descritos para traçar o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ "Atividade 1" até digitar a função $(f(x) = b * a \wedge x)$. Ou seja, Janela ⟶ 2 – dim ⟶ Equação ⟶ Explícita. Em seguida, clica-se na sequência: "Anim" , "Parâmetros A-W..." onde irá aparecer uma janela que permitirá fixar um dos parâmetros "a" ou "b" da função $f(x) = b.a^x$ e variar o outro. Assim, pode-se visualizar a mudança no comportamento do gráfico da função em consequência dessa variação.

A Figura 14 ilustra essa janela.

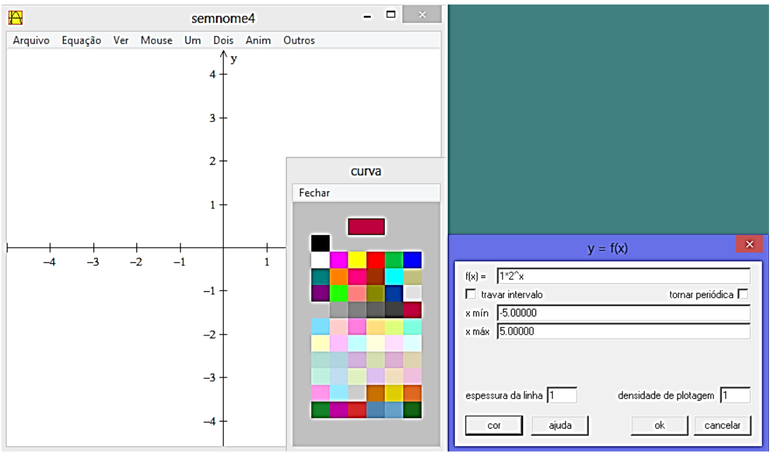
Figura 14: Janela do winplot que permite variar os parâmetros *a* e *b* de $f(x) = b.a^x$



Para construir os gráficos no winplot das funções tipo exponencial $f(x) = b.a^x$, $b \in \mathbb{Z}$, $0 < b < 4$ e $0 < a \neq 1$ no mesmo sistema cartesiano, clica-se na sequência de comandos "Equação" e "Explícita" que irá aparecer a janela "y = f(x)" onde se deve digitar a função $\left(f(x) = b * a \wedge x\right)$ para *b* = *1* e *a* = 2 e fazer uma escolha de uma cor para o gráfico.

A Figura 15 ilustra esses passos.

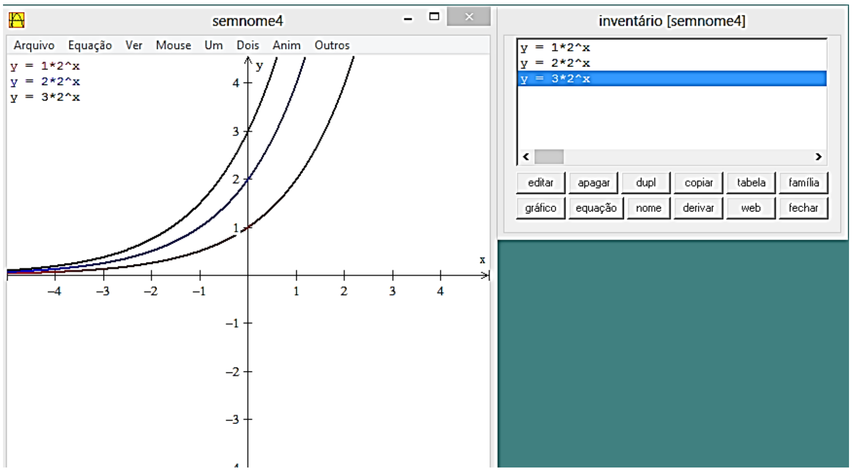
Figura 15: Comandos do winplot



Depois de clicar ok repita a sequência anterior duas vezes para *b* = *2* e *b* = *3* para obter os gráficos simultaneamente no mesmo sistema de eixos. Para visualizar as equações desses gráficos dirija-se ao inventário e ao selecionar cada função clique na opção *equação*.

A figura 16, ilustra as três funções para *b* = *1*, *b* = *2* e *b* = *3*.

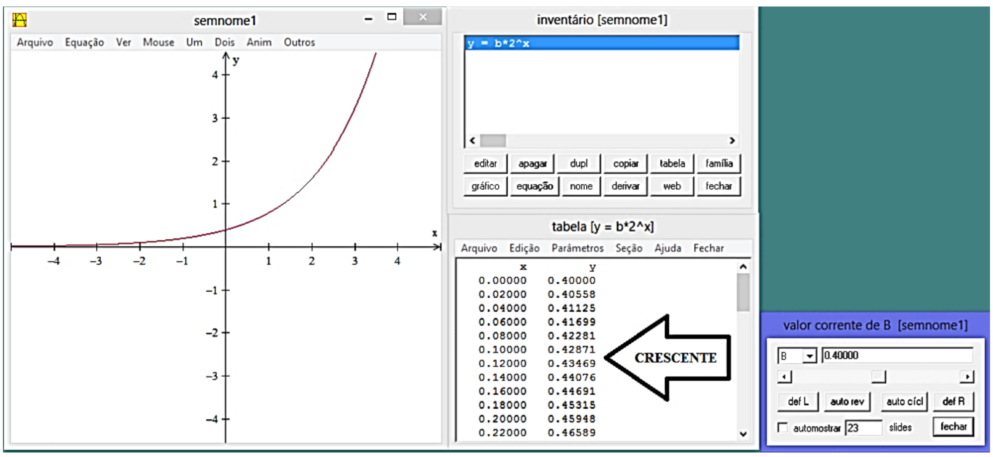
Figura 16: Gráficos de $f(x)=b.a^x$ **para** $a=2$ **e** $b \in \mathbb{Z},\ 0<b<4$



Observando os gráficos da figura 16, percebe-se que o valor de *b* coincide onde a curva da função exponencial intersecta o eixo y. De fato, para *x* = 0 a função $f(x)=b.a^x$ tem como resultado $f(0)=b.a^0=b.1=b$.

Por outro lado, o parâmetro *b* não influencia na função $f(x)=b.a^x$ para ser crescente ou decrescente. Para verificar isso no winplot, consideraremos *a* = *2*. Inicialmente, digita-se a função $\left(f(x)=b*2\wedge x\right)$na janela "*y* = *f(x)*" e fixamos um valor para *b* na janela "valor corrente de B" por exemplo, *b* = 0,4 e, em seguida, por meio da janela do inventário, clica-se na opção *tabela* onde irá aparecer uma janela com os pontos da curva constatando que a função é crescente mesmo com $0<b<1$. Essa *tabela* é vista na Figura 17, a seguir.

Figura 17: Gráfico da função crescente $f(x)=b.2^x$ **para** ***b*** **= 0,4**



De modo análogo, quando $0<a<1$, a função $f(x)=b.a^x$ é decrescente para todo *b*.

3.4. APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Atividade 3 - FUNÇÃO EXPONENCIAL E JUROS COMPOSTOS

Se um capital inicial *C* é aplicado a juros fixos e capitalizados (taxa fixa de $i\%$ ao mês) continuamente após um tempo *t*, o capital existente é dado por $C(t) = C(1+i)^t$.

De fato:

t = 0 capital inicial : C

$t = 1$ capital após 1 mês : $C_1 = C(1+i)$

$t = 2$ capital após 2 meses : $C_2 = C_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$

$t = 3$ capital após 3 meses : $C_3 = C_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$

$t = 4$ capital após 4 meses **:** $C_4 = C_3(1+i) = C(1+i)^3(1+i) = C(1+i)^4$

...

t = t capital após t meses : $C_t = C_{t-1}(1+i) = C(1+i)^{t-1}(1+i) = C(1+i)^t$

Daí, $C_t = C(1+i)^t$.

Considerando um capital de $R\$2000,00$ aplicado a juros fixos e capitalizado continuamente segundo uma taxa fixa de 1% ao mês, então após um tempo t, o capital existente é dado por $C(t) = 2000.(1+0,01)^t = 2000.(1,01)^t$. Ou seja, $C(t) = 2000.(1,01)^t$.

Usando o winplot, determine o tempo necessário para o capital inicial duplicar.

Solução:

Para determinar o tempo necessário para o capital inicial duplicar deve-se determinar um tempo *t* tal que o capital $C(t)$ seja igual a 2.2000. Ou seja, $C(t) = 4000$. Substituindo $C(t) = 4000$ na relação $C(t) = 2000.(1,01)^t$ tem-se a equação, $4000 = 2000.(1,01)^t$.

Para resolver essa equação, o programa winplot possui o recurso *"Interseções"* que permite localizar pontos de intersecção de duas curvas, ou seja, os pontos onde as duas curvas são iguais. Inicialmente use a sequência de comandos "Equação" e "Explícita" duas vezes para digitar as funções $(f(x) = 4000)$ e $(f(x) = 2000*(1.01)\wedge x)$.

Para obter a intersecção das funções, clicamos no *menu* do winplot em "Dois" e em seguida em "Interseções...". A Figura 18, ilustra essa sequência de comandos.

Ao clicar em "Interseções..." aparece uma janela com o nome *interseção* com as coordenadas x e y do ponto de intersecção das funções, caso a interseção dos gráficos esteja visível na tela do winplot. Caso a intersecção não apareça, usa-se a opção "Ver" no menu do winplot onde aparecerá uma janela (Figura 19) que permite ajustar a tela do winplot para localizar a intersecção dos gráficos a partir dos campos “esquerdo”, “direito”, “inferior “ e “superior” obtendo-se o intervalo no eixo x e y respectivamente, permitindo assim, a visualização da intersecção dos gráficos. Para tanto, nos campos “esquerdo”, “direito”, “inferior” e “superior” deve-se incrementar os valores até visualizar a intersecção. Ao se tornar visível o ponto de intersecção das funções na tela do winplot, por meio da janela *interseção*, o valor de x é a solução da equação, ou seja, x = 69,66072 é o tempo *t* em meses necessário para o capital inicial duplicar.

A Figura 20 a seguir mostra essas funções e a intersecção entre elas (o tempo *t* em meses necessário para o capital inicial duplicar).

Figura 18: Sequência de comandos “Dois” e “Interseções”

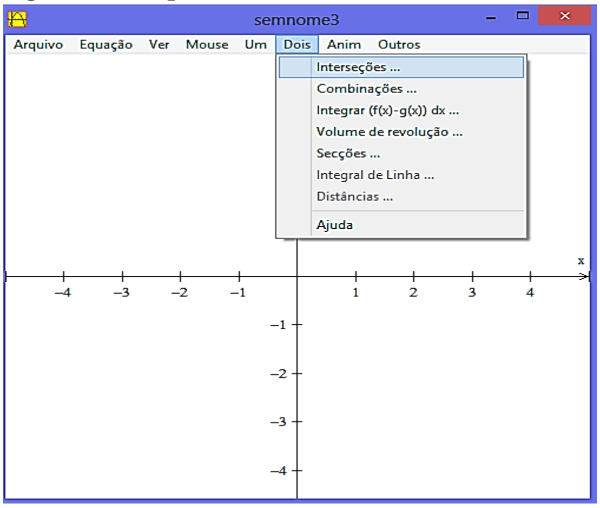


Figura 19: Janela “Ver”

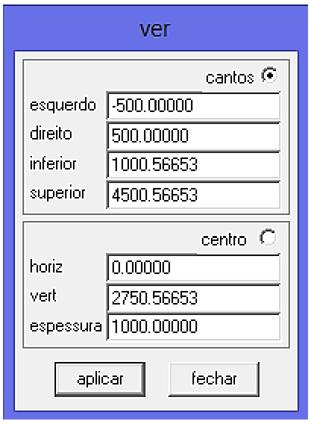
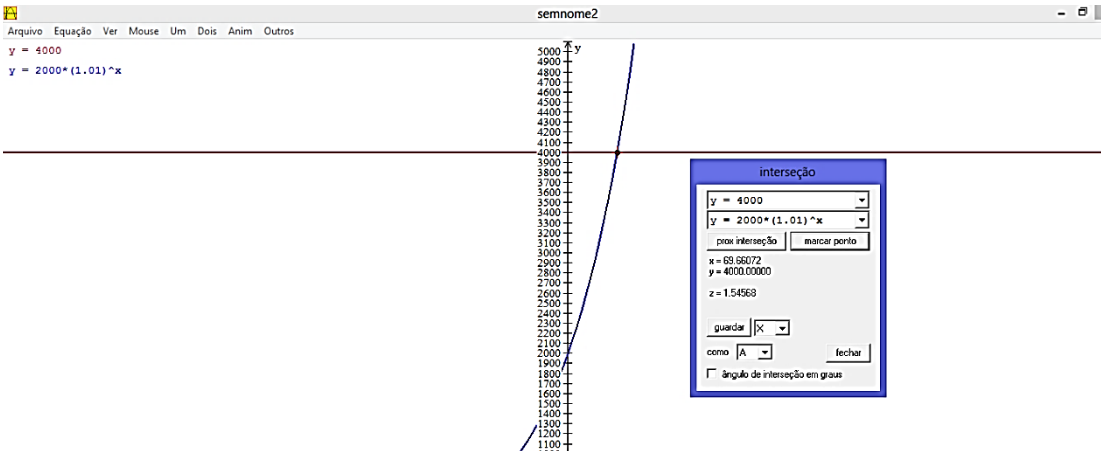


Figura 20: Gráficos das funções $y = 4000$ **e** $y = 2000 .(1{,}01)^x$ **e a localização do ponto de intersecção das duas funções**



Atividade 4 - FUNÇÃO EXPONENCIAL E CRESCIMENTO DE UMA POPULAÇÃO

Para prever a população de uma dada cidade numa data futura, muitas vezes é usado um modelo de crescimento exponencial. Para isso, observa-se o valor da população em intervalos de tempos iguais, por um certo período. Calcula-se, a seguir, a razão entre a população observada em períodos consecutivos. Se a razão for aproximadamente constante, em cada observação, a população é dada pela população anterior multiplicada por esta razão, chamada de fator de crescimento. (FLEMMING, Cálculo A, p. 46).

Considerando uma cidade com população atual de 200000 habitantes que possui uma taxa de crescimento anual de $1{,}5\%$, utilize o winplot para estimar o tempo necessário para que essa população alcance os 300000 habitantes.

Solução:

Inicialmente iremos encontrar uma expressão que represente o crescimento dessa população em função do tempo.

Como a taxa de crescimento anual é de $1{,}5\% = 0{,}015$, então a população $P(t)$ em um instante t é acrescida de $0{,}015$ de $P(t)$, ou seja, a população em um instante $t+1$ é dada por $P(t+1) = P(t) + 0{,}015.P(t) = 1.P(t) + 0{,}015.P(t) = (1+0{,}015).P(t) = 1{,}015.P(t)$.

Daí, o fator de crescimento dessa população é igual a $1{,}015$.

Temos para o instante inicial $t = 0$ a população $P(0) = 200000$;

Para $t = 1$ (1 ano após) a população é igual a $P(1) = 200000.1{,}015$;

Para $t = 2$ (2 anos após) a população é igual a $P(2) = 200000.1{,}015.1{,}015 = 200000.1{,}015^2$;

Para t = 3 (3 anos após) a população é igual a $P(3) = 200000.1{,}015^2.1{,}015 = 200000.1{,}015^3$

...

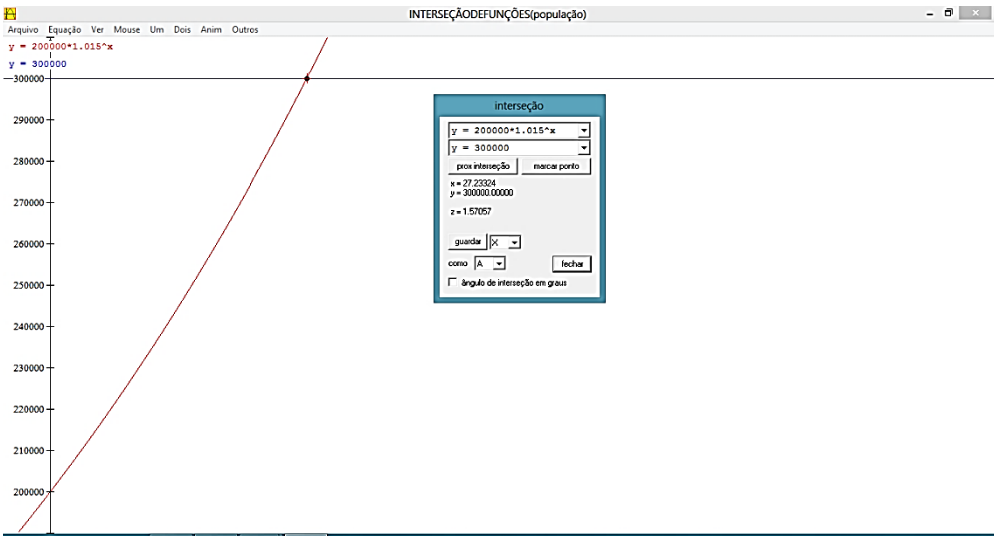
Para $t = t$ (t anos após) a população é igual a $P(t) = 200000.1{,}015^t$.

Fazendo $P(t) = 300000$, temos a seguinte equação: $300000 = 200000.1{,}015^t$.

Como foi feito na Atividade 3, traça-se no winplot os gráficos das funções $\left(f(x) = 300000\right)$ e $\left(f(x) = 200000 * (1.015) \wedge x\right)$ e determina-se a intersecção dessas funções através do recurso "Interseções" do winplot. A coordenada x da intersecção é o tempo t necessário para que a população atinja 300000 habitantes.

A Figura 21 ilustra essas funções e ponto de intersecção.

Figura 21: Gráficos das funções f(x) = 300000 **e** f(x) = 200000. $1{,}015^x$ **e a localização do ponto de intersecção das duas funções**



De acordo com o winplot, o tempo t necessário para que essa população alcance os 300000 habitantes é igual a $t = 27{,}23324$ anos.

Atividade 5 FUNÇÃO EXPONENCIAL E O DECAIMENTO RADIOATIVO

A massa de materiais radioativos se desintegra com o passar do tempo. Pode-se citar como exemplo de materiais radioativos: o urânio, o rádio e o carbono – 14. Para representar a taxa de decaimento da massa desses materiais usa-se o conceito de meia – vida.

Segundo Flemming

> "A meia – vida é definida como o tempo para que a massa do material se reduza à metade". (FLEMMING, Cálculo A, p. 47).

Denotando por M_o a massa inicial (para o instante $t = 0$) e por M a massa presente num instante t qualquer, pode-se determinar M pela função exponencial: $M = M_o.e^{-k.t}$ sendo $k > 0$ uma constante. Essa equação é conhecida como *modelo de decaimento exponencial.* A constante k depende do material radioativo e está relacionada com a meia – vida dele.

A meia – vida do rádio – *226* é de *1620* anos. Utilizando o winplot, determinar:

a) A constante k e o modelo de decaimento exponencial para esta substância;
b) Após *700* anos, o percentual da quantidade inicial de rádio que ainda resta;
c) A idade estimada de um organismo morto, sabendo que a presença do rádio – *226* neste é 60% da quantidade original.

SOLUÇÃO:

a) A meia – vida do rádio – *226* é de *1620* anos.

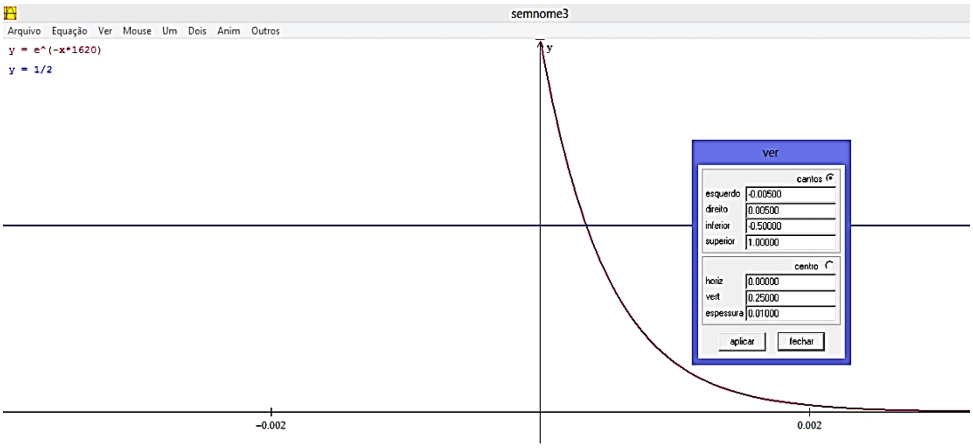
Daí, supondo a massa inicial M_o, devemos determinar o valor de k tal que a massa M do rádio seja após *1620* anos a metade da inicial, ou seja, $\frac{M_o}{2}$. Segundo o *modelo de decaimento exponencial* temos que $M = M_o.e^{-k.1620}$.

Daí, vem a equação: $\frac{M_0}{2} = M_0.e^{-k.1620}$ *q*ue equivale a equação: $\frac{1}{2} = e^{-k.1620}$.

Para resolver essa equação usa-se o mesmo procedimento da Atividade 3 . Ou seja, faz-se $\left(f(x) = 1/2\right)$ e $\left(f(x) = e^\wedge(-x*1620)\right)$ e após construir os seus gráficos com o auxílio do winplot, usa-se o recurso "*interseções"* para determinar a intersecção dessas duas funções e por fim, tem-se o valor da coordenada *x* que é o valor da constante *k*.

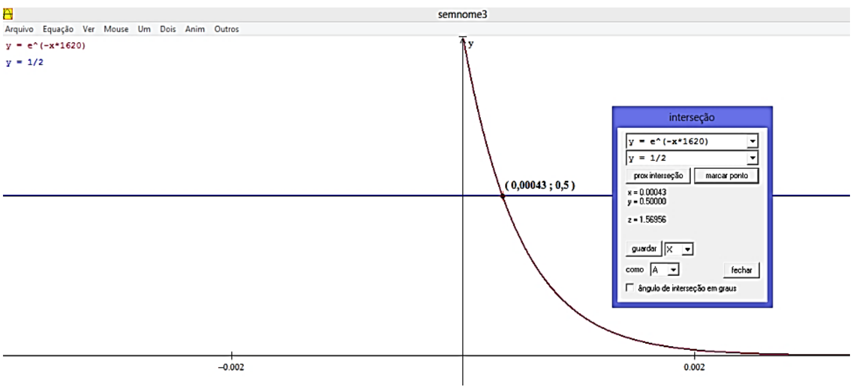
Para visualização da intersecção clica-se no *menu* do winplot em “Ver” fazendo aparecer uma janela onde pode-se ajustar os eixos x e y para uma melhor visualização do gráfico em determinados intervalos nos dois eixos. Para ajustar o eixo x para visualização em determinado intervalo tem-se as opções campos “esquerdo” e “direito” e para o eixo y tem-se as opções campos “inferior” e “superior”. A Figura 22 a seguir ilustra esse ajuste nos dois eixos para a visualização da intersecção dos gráficos e a janela “Ver” onde mostra os valores que foram utilizados para limitar a visualização dos gráficos segundo os dois eixos x e y.

Figura 22: Visualização dos gráficos para o intervalo de -0.005 a 0.005 no eixo x e de - 0,5 a 1 no eixo y com o auxílio da janela Ver



Identificada a intersecção dos gráficos, basta clicar no *menu* do winplot em “Dois” e em seguida em “Interseções...” para aparecer a janela com as coordenadas dessa intersecção e determinar a constante *k* que equivale ao valor da coordenada x. A Figura 23 mostra a janela com o ponto de intersecção das funções e o valor de *k* é igual a 0,00043. Logo, o modelo de decaimento exponencial para o rádio – *226* é dado por $M = 1000.e^{-0,00043t}$.

Figura 23: Visualização do ponto de intersecção das funções $y = \frac{1}{2}$ e $y = e^{-x.1620}$ e determinação da constante *k* do modelo de decaimento exponencial

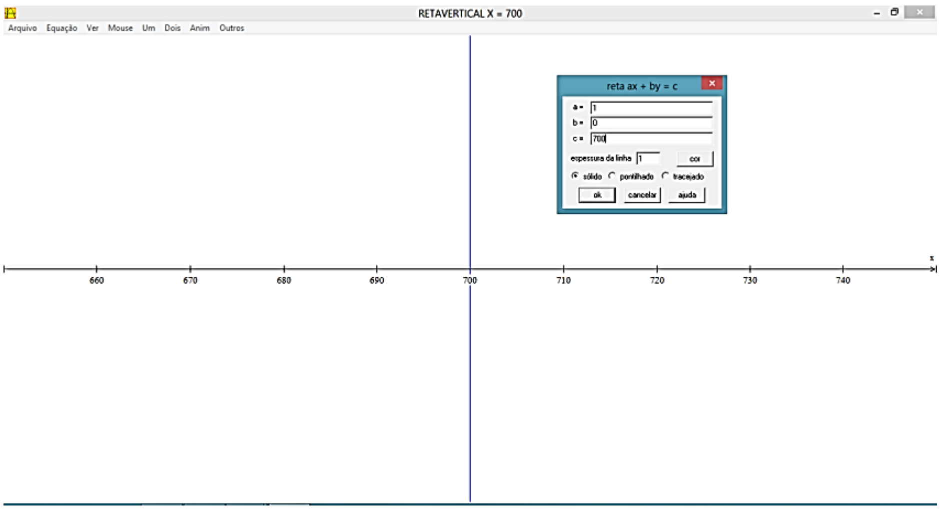


b) Utilizando o winplot, inicialmente, traça-se o gráfico da função $M = 1000.e^{-0,00043t}$. Para determinar o valor da quantidade M de massa de rádio que ainda resta para *t = 700* anos traça-se o gráfico da reta vertical *x = 700*.

Para determinar essa reta vertical no winplot, clica-se no menu em "*Equação"* e em seguida em "*reta"* onde irá aparecer uma janela para a escolha dos valores dos coeficientes "*a*" , "*b*" e "*c*" da equação da reta $ax + by = c$. Para determinar a equação da reta vertical *x = 700* atribui-se aos coeficientes os seguintes valores: *a=1*, *b=0* e *c=700*. Para visualizar a reta vertical basta clicar em ok.

A Figura 24 a seguir ilustra essa janela no winplot e a reta vertical *x = 700*.

Figura 24: Visualização do gráfico da reta vertical $x = 700$ e da janela do winplot para sua determinação



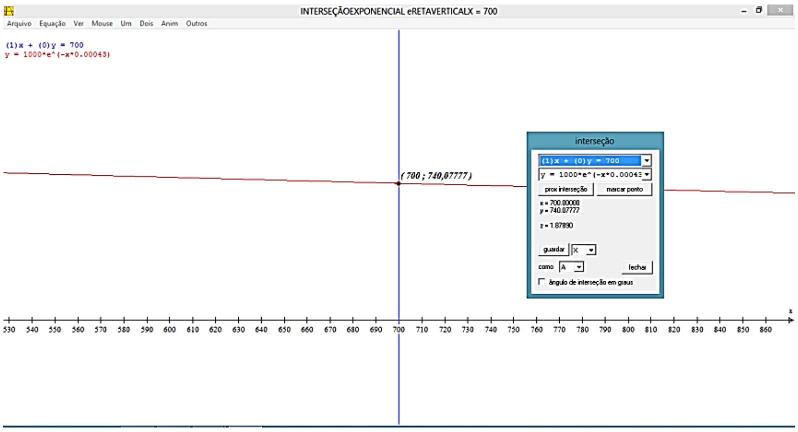
Após traçados os dois gráficos de $M = 1000.e^{-0,00043.t}$ e *x = 700* utiliza-se o mesmo procedimento da Atividade 3.Ou seja, fazendo $\left(f(x) = 1000 * e\verb|^|(-0.00043 * x)\right)e\left(f(x) = 700\right)$, utiliza o winplot para a construção dos dois gráficos e com o recurso *"intersecções",* determina-se o ponto *(700 ; 740, 007777)* da intersecção das duas funções.

O valor *740, 007777* representa o valor da massa em gramas existente após *700 anos* do rádio – 226. O percentual da quantidade inicial de rádio que ainda resta é de (740,007777.100)/1000 = 74,007777% , ou seja, aproximadamente 74%.

A Figura 25 a seguir mostra as funções e esse ponto de intersecção.

Figura 25: Visualização dos gráficos das funções $M = 1000.e^{-0,00043t}$ **e**

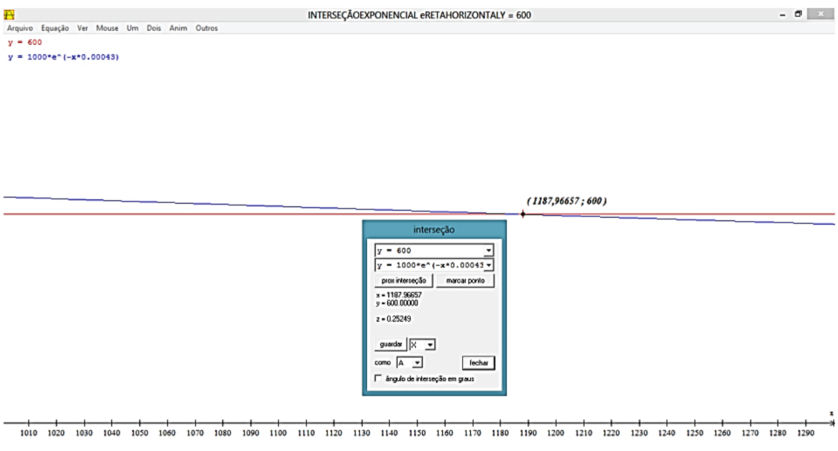
***x* = *700* e o ponto *(700 ; 740, 07777)* de intersecção**



c) Inicialmente tem-se que 60% da quantidade original equivale a 60% de 1000 = 600 *g*. Usando o *modelo de decaimento exponencial* $M = 1000.e^{-0,00043.t}$ tem-se a equação $600 = 1000.e^{-0,00043.t}$. Como no caso anterior, após construir os gráficos das funções $\left(f(x) = 600\right)$ e $\left(f(x) = 1000 * e\wedge(-0.00043 * x)\right)$ com o auxílio do winplot, determina-se a intersecção desses gráficos através do recurso "*interseções*" e com o conhecimento do ponto de intersecção, o tempo necessário para que reste 600 g de massa de rádio – 226 que equivale a idade estimada do organismo morto é igual a primeira coordenada desse ponto. A Figura 26 a seguir, ilustra a intersecção das funções identificando a idade estimada do organismo morto.

Figura 26: Visualização dos gráficos das funções $y = 1000.e^{-0,00043x}$ **e**

y = 600 **e o ponto *(1187,96657 ; 600)* de interseção**



Daí, a idade estimada de um organismo morto, sabendo que a presença do rádio – *226* neste é 60% da quantidade original é igual a *1187,96657 anos* $\cong$ *1188 anos.*

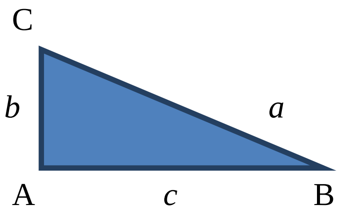
4. DEFINIÇÕES PRELIMINARES RELATIVAS ÀS FUNÇÕES SENO E COSSENO

4.1. DEFINIÇÕES DO SENO E DO COSSENO

Segundo Lima

> "Num triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos B e C, opostos respectivamente aos catetos b e c, têm-se as definições:
>
> $\cos B = \frac{c}{a}$ = (cateto adjacente) ÷ (hipotenusa)
>
> $senB = \frac{b}{a}$ = (cateto oposto) ÷ (hipotenusa)". (LIMA, 2006, p. 72)

Figura 27: Triângulo Retângulo



4.2. MEDIDA DE UM ÂNGULO EM RADIANOS

Segundo Carmo:

> "A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo". (CARMO, 2005, p. 33).

Sendo θ o ângulo, s o comprimento do arco determinado por esse ângulo e r o raio do círculo, então $\theta = \frac{s}{r}$.

Quando s for igual ao comprimento de um círculo de raio r, ou seja, $s = 2\pi r$, o ângulo θ em radianos será igual a: $\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. O que equivale a um ângulo de 360º.

Logo, $\theta = 2\pi = 360^{\circ}$.

Em particular, o ângulo θ será igual a 1rad quando seu arco s tem o mesmo comprimento do raio r.

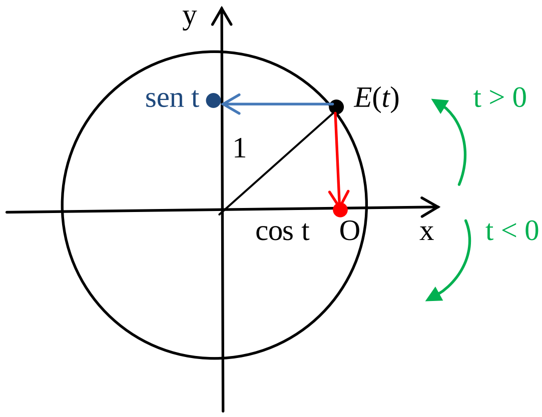
4.3. DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Segundo Lima:

> "As funções $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $sen:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, chamadas função cosseno e seno respectivamente, são definidas pondo-se para cada $t\in\mathbb{R}$: $E(t)=(\cos t, sent)$". (LIMA, 2006, p. 82).

A função E é a função de Euler E: $\mathbb{R}\to$C, que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t)=(x,y)$ da circunferência unitária. A Figura 28 a seguir, ilustra a circunferência unitária e o ponto $E(t)$. Ou seja, $x=\cos t$ e $y=sent$ são, respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária (raio 1) e t o comprimento do arco de extremidades no ponto O e no ponto $E(t)$.

Figura 28: Circunferência Unitária e o Ponto $E(t)=(\cos t, sent)$



4.4. FUNÇÃO PERIÓDICA

Segundo Lima:

> "Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número T $\neq 0$ tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. O menor número T > 0 tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ chama-se período da função f". (LIMA, 2006, p 224).

4.5. PERÍODO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

As funções seno e cosseno são periódicas com período 2π .

De fato,

Considerando k um número inteiro e x real, $E(x+2k\pi)$ e $E(x)$ representam o mesmo ponto na circunferência unitária. Daí,

$$sen(x+2k\pi)=senx \quad \text{e} \quad \cos(x+2k\pi)=\cos x$$

Como o período é o menor número $T>0$ tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$, então o menor $T=2k\pi>0$ é dado quando $k=1$, pois k é inteiro. Tem – se que $T=2\pi$ e que :

$$sen(x+2\pi)=senx$$

e

$$\cos(x+2\pi)=\cos x$$

Conclui-se que as funções seno e cosseno são periódicas e com período 2π . Ou seja, os valores dessas duas funções repetem-se de 2π em 2π .

4.6. IMAGEM DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Sejam t um número real e $E(t)$ o ponto que o representa na circunferência unitária. O ponto $E(t)$ tem como abscissa e ordenada, respectivamente, $x=\cos t$ e $y=sent$.

Como $-1\le x\le 1$ e $-1\le y\le 1$, tem – se que:

$$-1\le \cos t\le 1 \quad \text{e} \quad -1\le sent\le 1$$

Portanto, as imagens das funções seno e cosseno são iguais a $[-1,1]$.

4.7. INTERSECÇÃO COM O EIXO Y

Uma função intersecta o eixo y em um ponto $P(0,y)$.

Fazendo $x = 0$ na função cosseno f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\cos x$, tem–se que $f(0)=\cos(0)=1$ que é a abscissa do ponto $E(0)$ no círculo unitário.

Logo, a função f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\cos x$ intersecta o eixo y em no ponto $P(0,1)$.

Por outro lado, fazendo $x = 0$ na função seno f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=senx$, tem – se que $f(0)=sen(0)=1$ que é a ordenada do ponto $E(0)$.

Logo, a função f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=senx$ intersecta o eixo y no ponto $P(0,0)$.

4.8. SINAIS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Sinal da função cosseno

Como o cosseno de um ângulo x é dado pela *abscissa* do ponto $E(x)$ no círculo unitário, então:

(I quadrante) Quando $0 < x < \pi/2$ tem-se que $0 < \cos x < 1$.

Logo, $\cos x > 0$ (função positiva)

(II quadrante) Quando $\pi/2 < x < \pi$ tem-se que $-1 < \cos x < 0$.

Logo, $\cos x < 0$ (função negativa)

(III quadrante) Quando $\pi < x < 3\pi/2$ tem-se que $-1 < \cos x < 0$.

Logo, $\cos x < 0$ (função negativa)

(IV quadrante) Quando $3\pi/2 < x < 2\pi$ tem-se que $0 < \cos x < 1$.

Logo, $\cos x > 0$ (função positiva)

Sinal da função seno

Como o seno de um ângulo x é dado pela *ordenada* do ponto $E(x)$ no círculo unitário, então:

(I quadrante) Quando $0 < x < \pi/2$ tem-se que $0 < senx < 1$.

Logo, $senx > 0$ (função positiva)

(II quadrante) Quando $\pi/2 < x < \pi$ tem-se que $0 < senx < 1$.

Logo, $senx > 0$ (função positiva)

(III quadrante) Quando $\pi < x < 3\pi/2$ tem-se que $-1 < senx < 0$.

Logo, $senx < 0$ (função negativa)

(IV quadrante) Quando $3\pi/2 < x < 2\pi$ tem-se que $-1 < senx < 0$.

Logo, $senx < 0$ (função negativa)

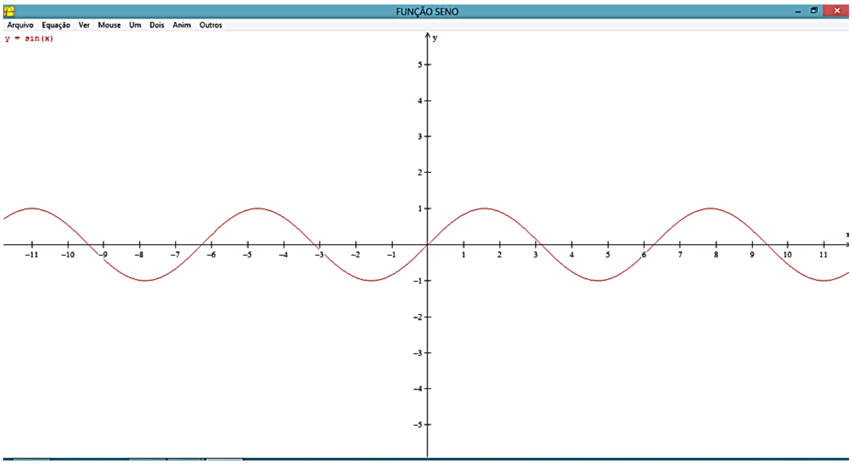
4.9. GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

Com o auxílio do winplot pode-se construir o gráfico da função $f(x) = senx$.

Para construir tal gráfico serão utilizados os procedimentos do Exemplo 1.

A Figura 29 a seguir ilustra esse gráfico:

Figura 29: Gráfico da função $f(x) = senx$



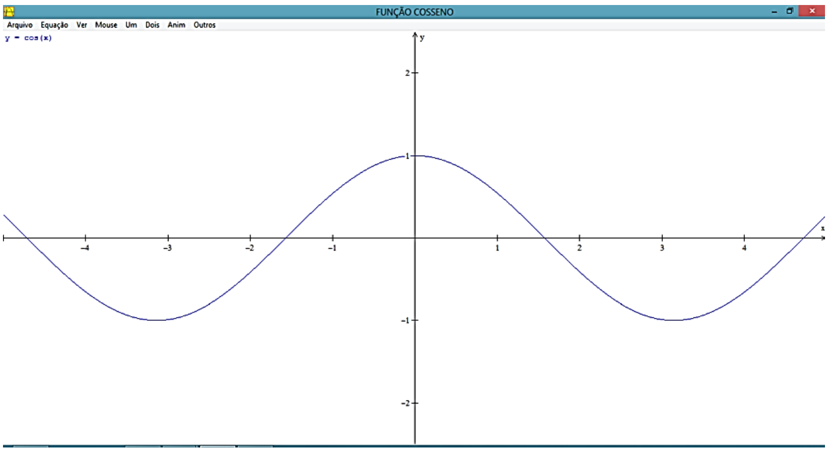
4.10. GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO

Com o auxílio do winplot pode-se traçar o gráfico da função $f(x) = \cos x$.

Para construir tal gráfico serão utilizados os procedimentos do Exemplo 1.

A Figura 30 a seguir, ilustra esse gráfico:

Figura 30: Gráfico da função $f(x) = \cos x$



5. PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

5.1. RELAÇÃO ENTRE A VARIAÇÃO DOS COEFICIENTES E O COMPORTAMENTO DO GRÁFICO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Gráfico de funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ da forma $f(x)=sen(a.x)$, com $a\in\mathbb{R}$.

Atividade 6 Seja a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=sen(a.x)$, $a\in\mathbb{R}$.

Utilizando o winplot construa o gráfico da função f para $a\in\mathbb{Z}, -3<a<3$.

Objetivos da Atividade 6

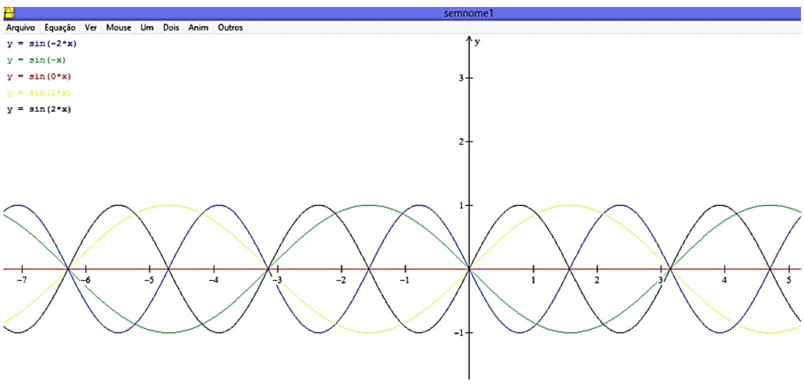
Identificar geometricamente o período, imagem, os zeros e sinais da função verificando a influência do parâmetro *a*.

Procedimento no winplot

Para construir o gráfico da função $f(x)=sen(a.x)$ para $a\in\mathbb{Z}, -3<a<3$ por meio do winplot utiliza-se os mesmos passos descritos para traçar o gráfico da função exponencial $f(x)=b.a^x$ ¨Atividade 2¨. Ou seja, usa-se a sequência de comandos “Equação” e em seguida “Explícita” digitando a função $f(x)=\sin(a*x)$ para *a = -2* e repete-se o procedimento para *a = -1*, *a = 0* , *a = 1* e *a= 2* para obtenção dos gráficos em um mesmo sistema cartesiano.

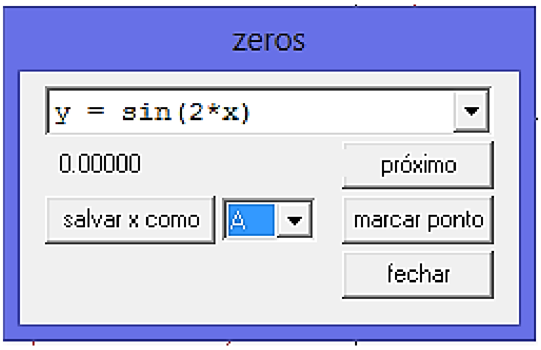
A Figura 31 ilustra essas funções.

Figura 31: Gráficos da função $f(x)=sen(a.x)$ ***para*** $a\in\mathbb{Z}$**,** $-3<a<3$



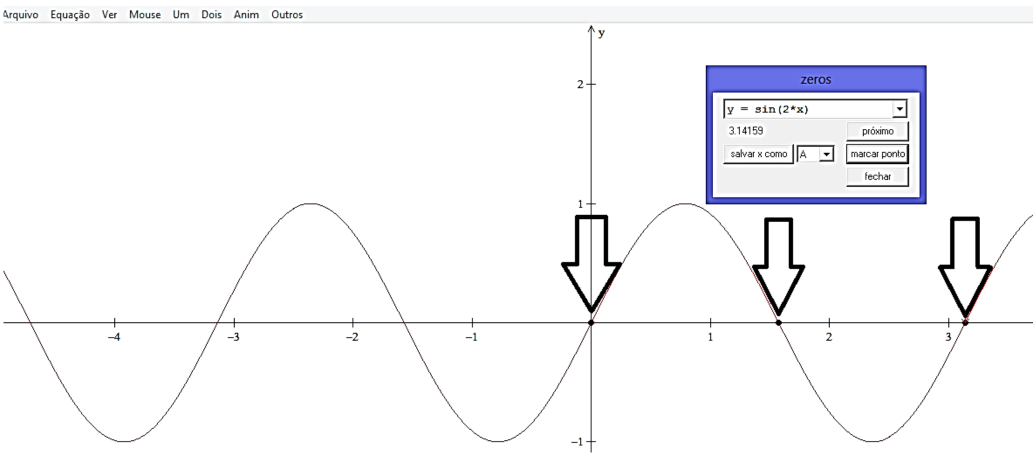
Considerando-se para análise a função $f(x)=sen(2.x)$, os seus zeros serão identificados pelo winplot ao clicar em “Um” e em seguida “Zeros” onde aparecerá uma janela com o nome “zeros” mostrando os zeros da função no intervalo visível na tela do winplot. A Figura 32 mostra essa janela.

Figura 32: Janela “zeros” do winplot



Clicando na opção *próximo* da janela “zeros” irão sendo identificados no gráfico os zeros da função e caso deseje marcar algum desses pontos clique em *marcar ponto*. A Figura 33 a seguir, mostra os três primeiros zeros da função a partir da origem do sistema, ou seja, os valores 0, 1.57080 e 3.14159 que são os valores aproximados de 0, $\pi/2$ e π, respectivamente.

Figura 33: Localização dos zeros 0, $\pi/2$ e π da função $f(x) = sen(2.x)$



De modo geral para a função $f(x) = sen(a.x)$ com $a \neq 0$, os zeros são determinados a partir da igualdade:

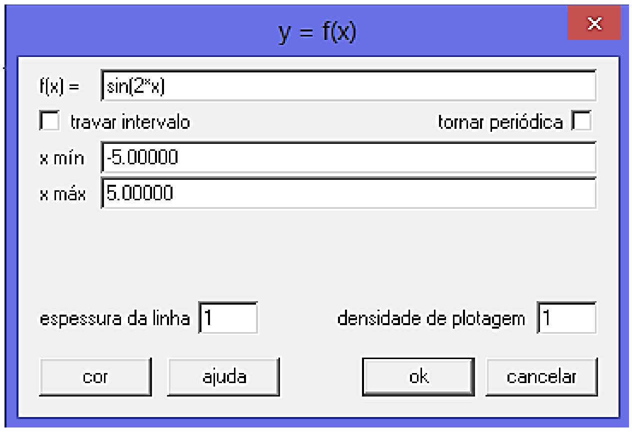
$$sen(a.x) = 0.$$

De onde $a.x$ são números da forma $\ldots -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \ldots$, ou seja, $k\pi$ com k inteiro. Daí, $a.x = k\pi$. Ou seja, $x = \dfrac{k\pi}{a}$ com k inteiro são os zeros da função.

Observando o gráfico, tem-se a sensação que o período é igual ao valor do terceiro zero ilustrado no gráfico, isto é, 3.14159 que é o valor aproximado de π já que, a partir desse valor, o gráfico da função se repete. Para verificar isso no winplot, digita-se mais uma vez a função $f(x) = \sin(2 * x)$ na janela "y=f(x)" depois de clicar nos comandos "Equação" e "Explícita".

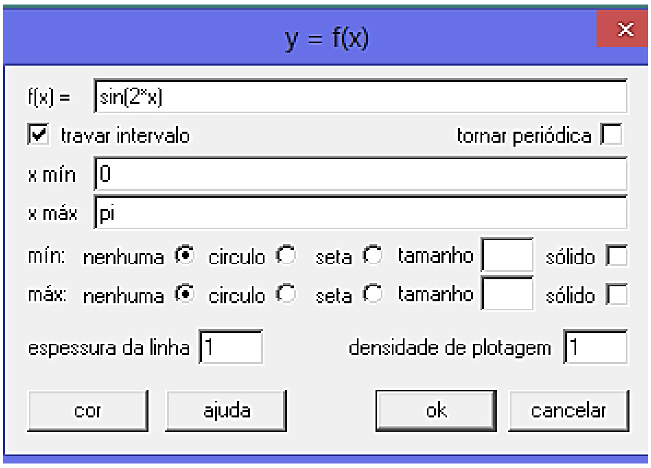
A Figura 34 ilustra essa janela.

Figura 34: Janela para digitação da função no winplot



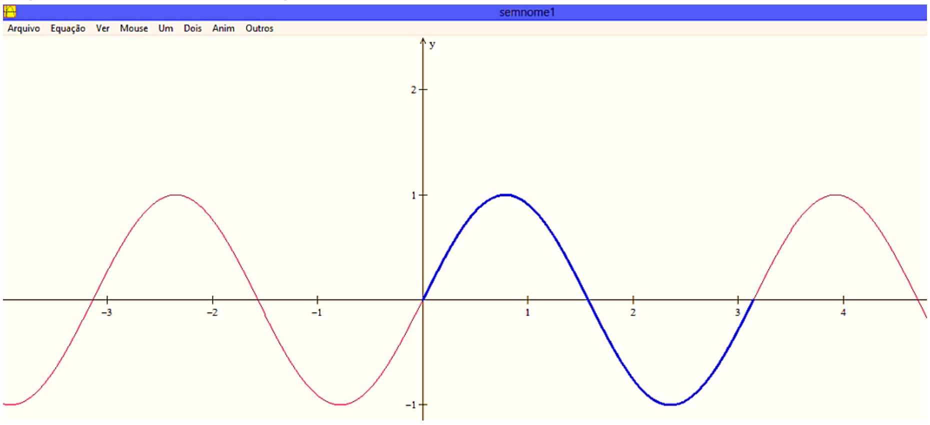
Clicando em " travar intervalo" aparecerá dois campos "x mín" e "x máx" para colocar os limites do intervalo que se quer destacar no gráfico. Nesse caso, vamos considerar x mín = 0 e x máx = pi. Essa janela, com esses campos, é ilustrada na Figura 35 a seguir.

Figura 35: Digitação da função com travamento de intervalo



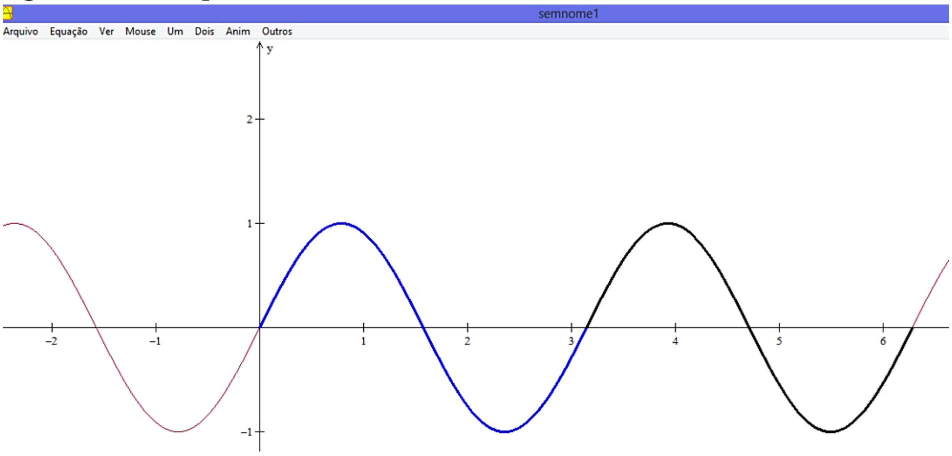
Escolhendo uma cor diferente do gráfico inicial e clicando ok o gráfico inicial fica destacado no intervalo determinado pelos limites "x mín" e "x máx" . A Figura 36 ilustra esse destaque.

Figura 36: Destaque do gráfico em um intervalo



Repita o procedimento de realce do gráfico para o intervalo x mín = *pi* e x máx = 2∗ *pi* escolhendo outra cor para esse intervalo. A Figura 37 ilustra esse segundo realce.

Figura 37: Destaque de dois intervalos do Gráfico



E por fim, compara-se as coordenadas dos pontos dos dois intervalos. Para isso, dirija-se ao inventário e selecione cada uma das funções clicando na opção *tabela* onde irá aparecer as coordenadas dos pontos dos gráficos dessas funções nos respectivos intervalos. E ao clicar nas duas tabelas perceberá que os resultados são praticamente iguais, o que se verifica o período ser igual a π. A Figura 38 ilustra as tabelas dos dois intervalos.

Figura 38: Tabelas da função $f(x) = sen(2.x)$ em dois intervalos de mesmo tamanho

tabela [y = sin(2*x); 0 <= x <= pi]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda Fechar

x	y
0.00000	0.00000
0.31416	0.58778
0.62832	0.95106
0.94248	0.95106
1.25664	0.58779
1.57080	0.00000
1.88495	-0.58778
2.19911	-0.95106
2.51327	-0.95106
2.82743	-0.58779
3.14159	-0.00001

tabela [y = sin(2*x); pi <= x <= 2*pi]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda Fechar

x	y
3.14159	0.00000
3.45575	0.58779
3.76991	0.95106
4.08407	0.95106
4.39823	0.58779
4.71239	0.00000
5.02655	-0.58779
5.34071	-0.95106
5.65487	-0.95106
5.96903	-0.58779
6.28319	0.00000

De modo geral para a função $f(x) = sen(a.x)$ com $a \neq 0$, o período é o menor número real $T > 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo t real.

Tem-se então a equação: $sen(a(t+T)) = sen(at) = sen(at + aT) = sen(at)$.

Daí, $sen(at).\cos(aT) + sen(aT).\cos(at) = sen(at)$.

Para essa igualdade ser satisfeita, tem-se que: $\cos(aT) = 1$ e $sen(aT) = 0$.

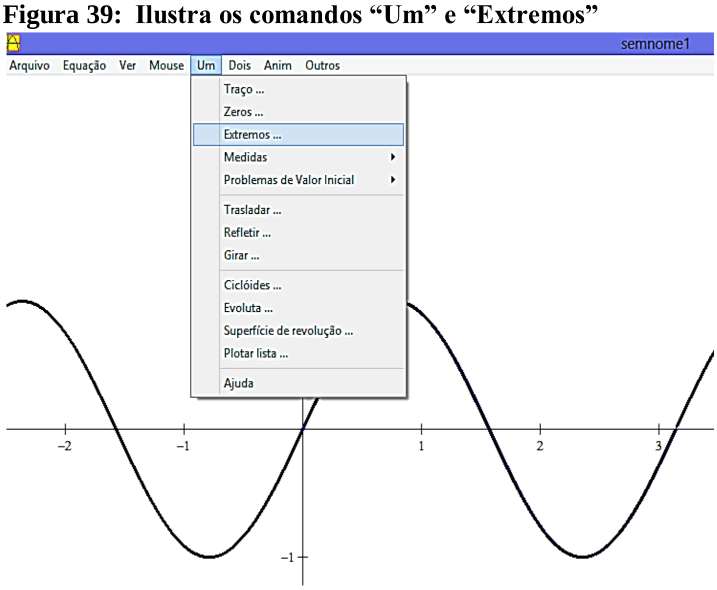
De onde $a.T$ são números da forma $\ldots -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi \ldots$, ou seja, $2k\pi$ com k inteiro.

Logo, $a.T = 2k\pi$.

Como T é o menor número positivo, tomamos $k = 1$ então o período é igual a: $T = \dfrac{2\pi}{a}$.

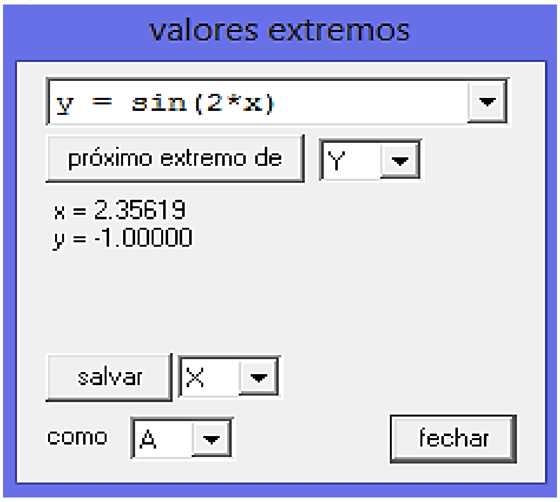
Para identificar a imagem da função $f(x) = sen(2.x)$ no winplot, clica-se na sequência de comandos “Um” e “Extremos” identificando assim o maior e menor valores da função e com isso definindo a sua imagem. A Figura 39 ilustra essa sequência de comandos.

Figura 39: Ilustra os comandos “Um” e “Extremos”



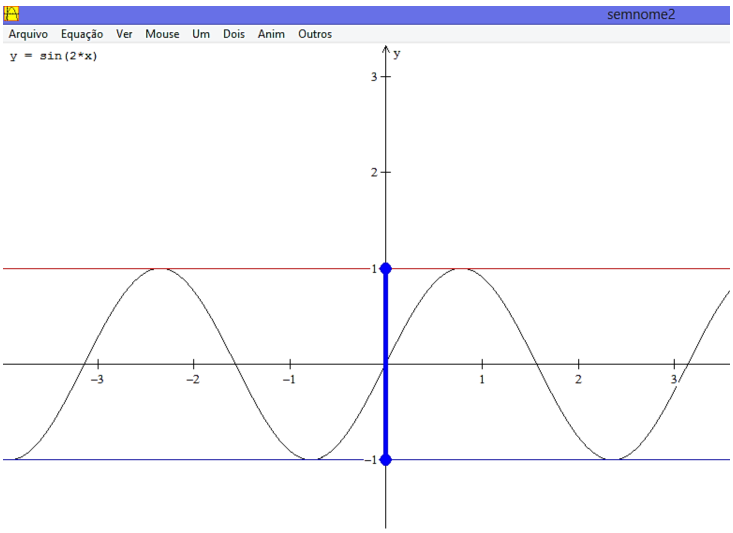
Ao clicar em “Extremos” aparecerá uma janela identificando as coordenadas dos extremos (valor máximo ou valor mínimo) no intervalo que o gráfico está sendo visualizado na tela do winplot. Na Figura 40, observa-se essa janela.

Figura 40: Janela de valores extremos de uma função



Clicando em “próximo extremo de” identifica-se no gráfico os valores mínimo e máximo da função que neste caso são valor mínimo: –1 e valor máximo: 1. Logo, verifica-se que a imagem da função é o intervalo fechado de extremos -1 e 1. Traçando-se duas retas verticais y = -1 e y = 1 por meio do winplot percebe-se que todos os valores da função estão entre – 1 e 1. Para traçar essas retas no winplot usa-se a sequência de comandos “ Equação” e “Explícita” duas vezes digitando na janela “y = f(x)” os valores -1 e 1. A Figura 41, a seguir ilustra essas retas verticais, a função e a imagem.

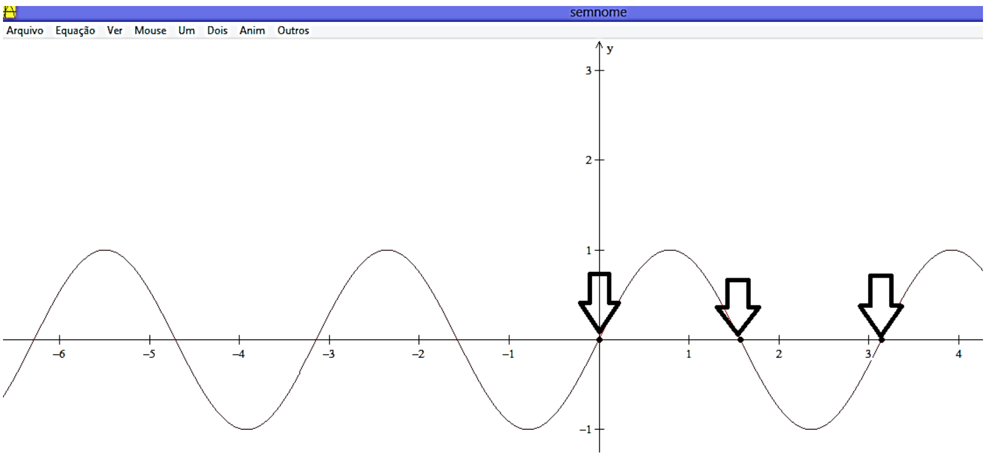
Figura 41: Ilustra a Imagem da função $f(x) = sen(2.x)$



De modo geral, a imagem da função $f(x) = sen(a.x), a \neq 0$ é igual ao intervalo fechado de extremos -1 e 1. Sabe-se, pela definição do círculo trigonométrico, que para todo x real $-1 \leq sen(x) \leq 1$. Mas, sendo a um número real, $a \neq 0$ e x um número real, então $a.x$ é um número real. Portanto, $-1 \leq sen(a.x) \leq 1$. Assim, a imagem da função $f(x) = sen(a.x)$ é igual ao intervalo $[-1,1]$. E daí, conclui-se que a imagem da função $f(x) = sen(a.x)$ independe do valor de $a\,(a \neq 0)$.

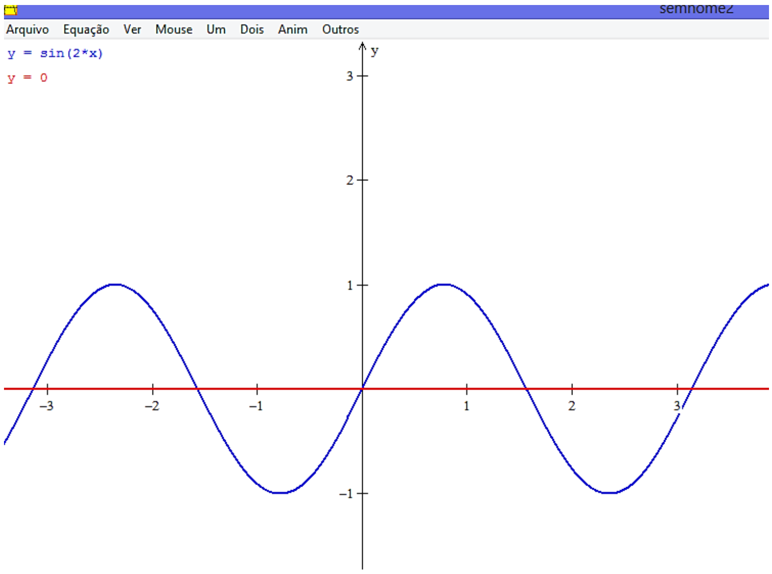
E por fim, para verificar os sinais da função $f(x) = sen(2.x)$ por meio do winplot, consideremos inicialmente os zeros da função em um período que são 0, $\pi/2$ e π que são os pontos do gráfico e se encontram no eixo x. Para identificar os intervalos em que a função é negativa e positiva, constrói-se inicialmente o gráfico da função $f(x) = sen(2.x)$ identificando os seus zeros. A Figura 42, mostra o gráfico dessa função e os seus zeros em um período.

Figura 42: Gráfico da função $f(x) = sen(2.x)$ com os zeros 0,π/2 e π



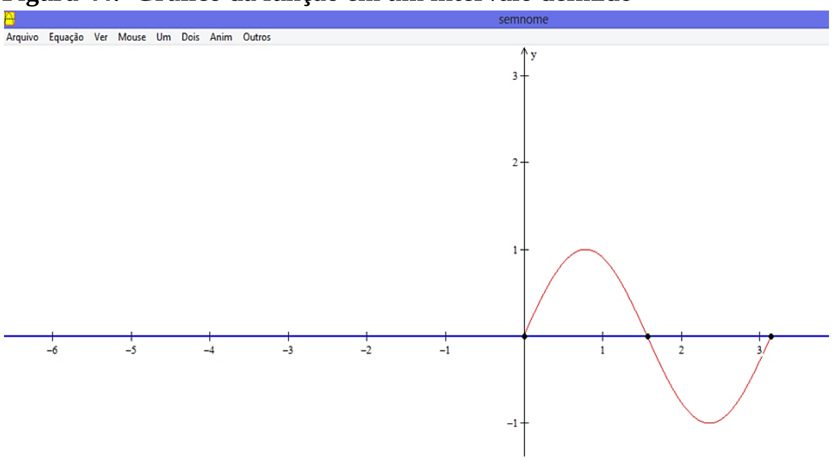
Em seguida, constrói-se a reta horizontal y = 0 pois, a função será positiva (y > 0) no intervalo em que seu gráfico estiver "acima" dessa reta e negativa (y < 0) no intervalo em que seu gráfico estiver "abaixo" dessa reta horizontal. A Figura 43, mostra essa reta com o gráfico da função $f(x) = sen(2.x)$.

Figura 43: Gráficos da reta horizontal (y = 0) e a função $f(x) = sen(2.x)$



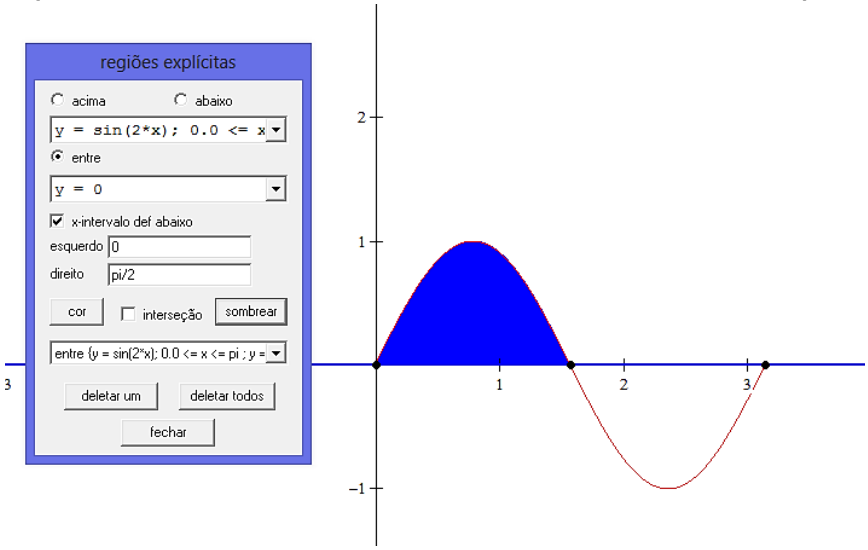
Selecionando a função no inventário e clicando em editar, aparecerá a janela "y = f(x)" onde permitirá travar o intervalo da função. Tomando para x mín = 0 e x máx = *pi* e clicando ok o gráfico ficará reduzido a esse intervalo. A Figura 44, ilustra o gráfico da função nesse intervalo.

Figura 44: Gráfico da função em um intervalo definido



Para destacar o intervalo onde a função é positiva (y > 0) e onde é negativa (y < 0) usa-se a sequência de comandos "Equação" e "Desigualdades explícitas". Ao clicar em "Desigualdades explícitas" irá aparecer uma janela que possui campos para definir o intervalo que se quer identificar a desigualdade e as opções *acima*, *abaixo* ou *entre* para destacar no gráfico os pontos acima, abaixo de uma função ou entre duas funções. Clicando em *entre*, definindo o intervalo usando os campos esquerdo 0 e direito pi/2 e após clicar em *sombrear*, ficará destacado a parte do gráfico que se encontra acima do eixo dos *x*, ou seja, onde a função positiva. A Figura 45 mostra essa janela e o intervalo entre 0 e $\pi/2$ em que o gráfico se encontra acima do eixo do *x*, ou seja, onde a função positiva.

Figura 45: Ilustra o intervalo em que a função é positiva e a janela regiões explícitas



Daí, conclui-se que a função $f(x) = sen(2.x)$ é positiva no intervalo aberto de 0 a $\pi/2$.

De maneira análoga, identifica-se no gráfico o intervalo em que a função é negativa. A Figura 46, mostra o intervalo $\pi/2$ a π em o gráfico se encontra abaixo do eixo do x, ou seja, onde a função é negativa.

Figura 46: Ilustra o intervalo em que a função é negativa e a janela regiões explícitas

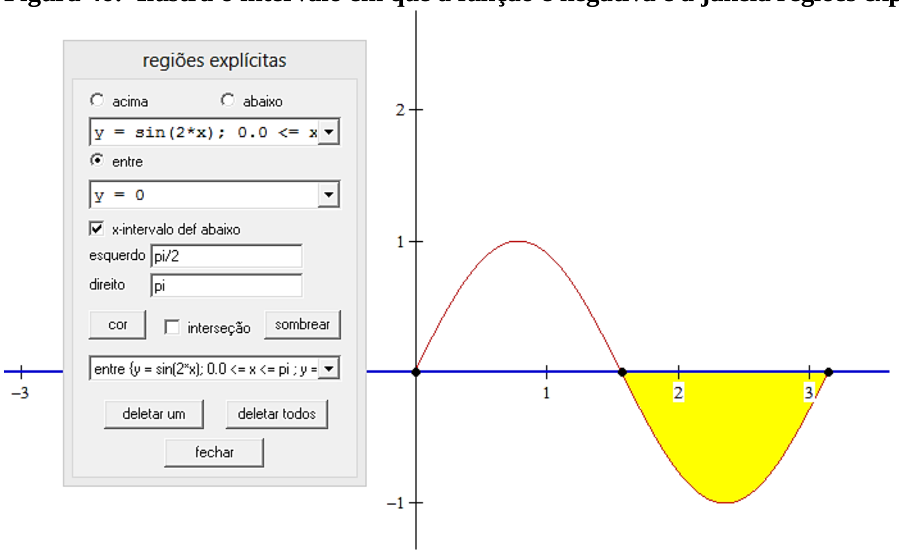


Gráfico de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = \cos(a.x + b)$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Atividade 7 Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x + b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Utilizando o winplot, construa o gráfico da função f para $b \in \mathbb{Z}, -3 < b < 3$.

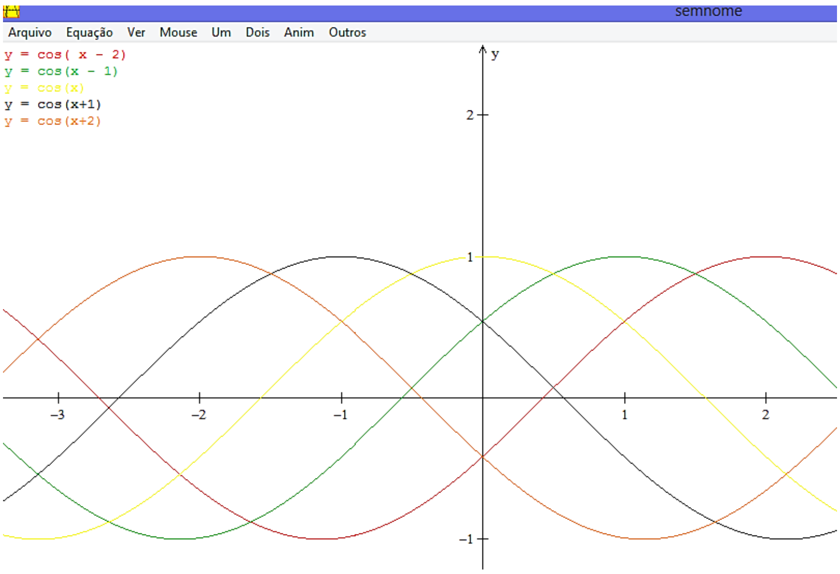
Objetivos da Atividade 7

Identificar geometricamente o período, imagem, os zeros e sinais da função verificando a influência do parâmetro *b*.

Procedimento no winplot

Para construir o gráfico da função $f(x) = \cos(x + b)$ para $b \in \mathbb{Z}, -3 < b < 3$ através do winplot utiliza-se a sequência de comandos " Equação" e em seguida "Explícita" digitando a função $(f(x) = \cos(x + b))$ para $b = -2$ e repete-se o procedimento para $b = -1$, $b = 1$, $b = 0$ e $b = 2$ para obtenção dos gráficos em um mesmo sistema cartesiano. A Figura 47 ilustra essas funções.

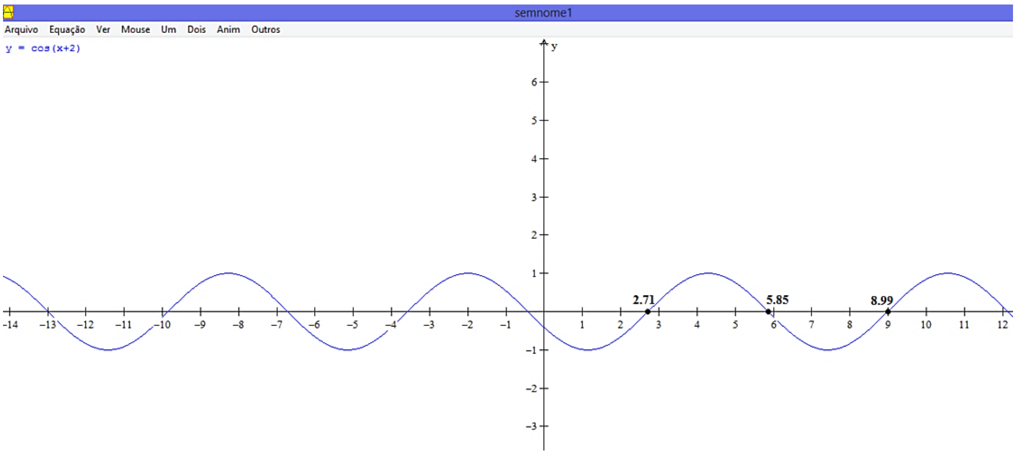
Figura 47: Gráficos da função $f(x) = \cos(x + b)$ ***para*** **b** $\in \mathbb{Z}$, $-3 < b < 3$



Considerando-se para análise a função $f(x) = \cos(x + 2)$, os seus zeros serão identificadas pelo winplot ao clicar em "Um" e em seguida "Zeros" onde aparecerá uma janela com o nome "zeros" mostrando os zeros da função $f(x) = \cos(x + 2)$ no intervalo visível da função, na tela do winplot.

Clicando na opção *próximo* da janela "zeros" irão sendo identificados no gráfico os zeros e caso deseje marcar algum desses pontos clique em *marcar ponto*. A Figura 48 a seguir, mostra os três primeiros zeros da função $f(x)=\cos(x+2)$ a partir da origem do sistema.

Figura 48: Localização de três zeros da função $f(x)=\cos(x+2)$



De modo geral para a função $f(x)=\cos(a.x+b)$, com $a \neq 0$, os zeros são determinados a partir da igualdade:

$$\cos(a.x+b)=0.$$

Assim, $a.x+b$ são números da forma $\ldots -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2 \ldots$

Ou seja, $a.x+b=\dfrac{(2k+1)}{2}\pi$. Isto é, $x=\dfrac{(2k+1)}{2a}\pi-\dfrac{b}{a}$ com k inteiro.

Observando o gráfico (Figura 48), tem-se a sensação que o período é igual a distância do primeiro zero da função positivo até o terceiro zero da função positivo. Ou seja, o período é dado por 8.99 – 2.71 ≅ 6.28 que é o valor aproximado de 2π.

Vejamos:

O período é o menor número real $T>0$ tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo t real.

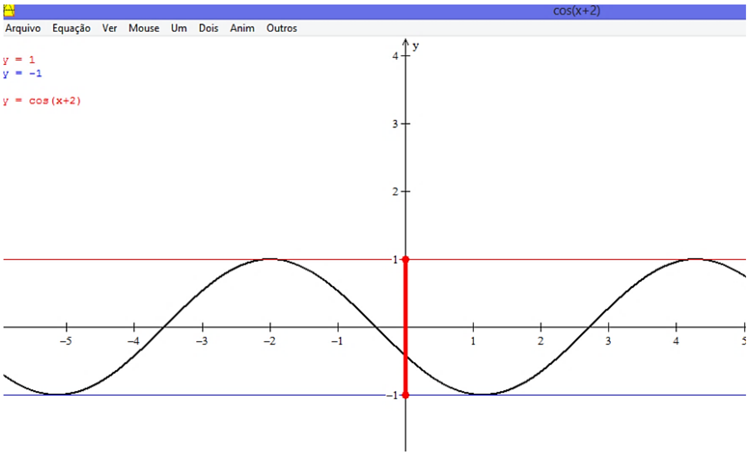
Daí, vem a equação: $\cos(a(t+T)+b)=\cos(at+b)$.

Ou seja, $\cos(at+b).\cos(aT)-sen(at+b).sen(aT)=\cos(at+b)$ que é satisfeita quando $\cos(aT)=1$ e $sen(aT)=0$. De onde $a.T$ são números da forma $\ldots -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi \ldots$, ou seja, $2k\pi$ com k inteiro. Logo, $a.T=2k\pi$. Como T é o menor número positivo, tomamos $k=1$ então o período é igual a: $T=\dfrac{2\pi}{a}$.

Para a função $f(x)=\cos(x+2)$, tem-se que $a=1$, logo o período é igual a 2π.

Para identificar a imagem da função $f(x)=\cos(x+2)$ no winplot clica-se na sequência de comandos “Um” e “Extremos” identificando assim o maior e menor valores da função e com isso definindo a sua imagem. Ao clicar em “Extremos” aparecerá uma janela identificando as coordenadas dos extremos no intervalo que o gráfico está sendo visualizado na tela do winplot. Clicando em “*próximo extremo de*” verifica-se os valores mínimo e máximo da função que neste caso são valor mínimo: -1 e valor máximo: 1. Logo a imagem da função é o intervalo fechado de extremos -1 e 1. Traçando-se duas retas verticais y = -1 e y = 1 através do winplot percebe-se que todos os valores da função estão entre – 1 e 1. Para traçar essa retas no winplot usa-se a sequência de comandos “ Equação” e “Explícita” duas vezes digitando na janela “y = f(x)” os valores -1 e 1. A Figura 49, a seguir ilustra essas retas verticais, a função e a imagem.

Figura 49: Ilustra a imagem da função $f(x)=\cos(x+2)$



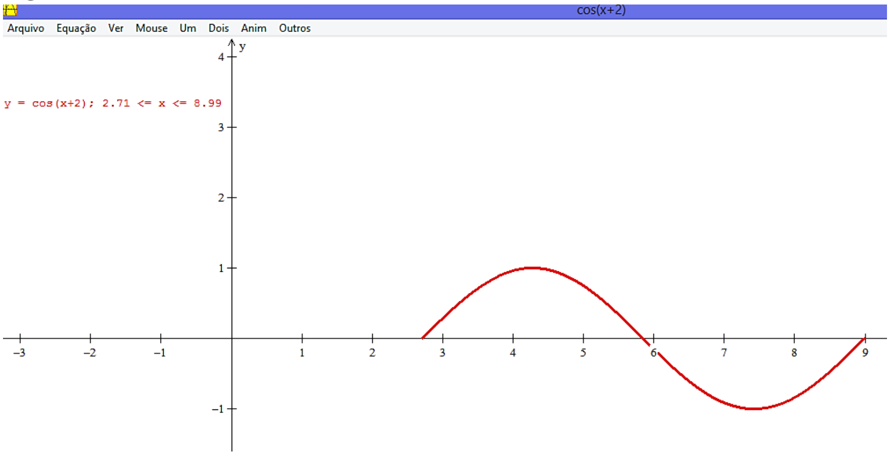
De modo geral, a imagem da função $f(x)=\cos(a.x+b)$ é igual ao intervalo fechado de extremos -1 e 1. De fato, sabe-se que para todo *x* real $-1\leq\cos(x)\leq 1$.

Mas, sendo *a* e *b* números reais $a\neq 0$ e *x* um número real, então $a.x+b$ é um número real. Portanto, $-1\leq\cos(x)\leq 1$. Ou seja, a imagem da função $f(x)=\cos(a.x+b)$ é igual ao intervalo $[-1,1]$. E daí, conclui-se que a imagem da função $f(x)=\cos(a.x+b)$ independe dos valores de *a* e *b*.

Para verificar os sinais da função $f(x)=\cos(x+2)$ por meio do winplot, inicialmente constrói-se o gráfico da função *f* considerando os zeros da função em um período que são aproximadamente 2.71, 5.85 e 8.99. Esses pontos indicam onde o gráfico intersecta o eixo x. Em seguida constrói-se a reta horizontal y = 0. Selecionando a função no inventário e clicando em editar, aparecerá a janela “y = f(x)” onde permitirá travar o intervalo da função.

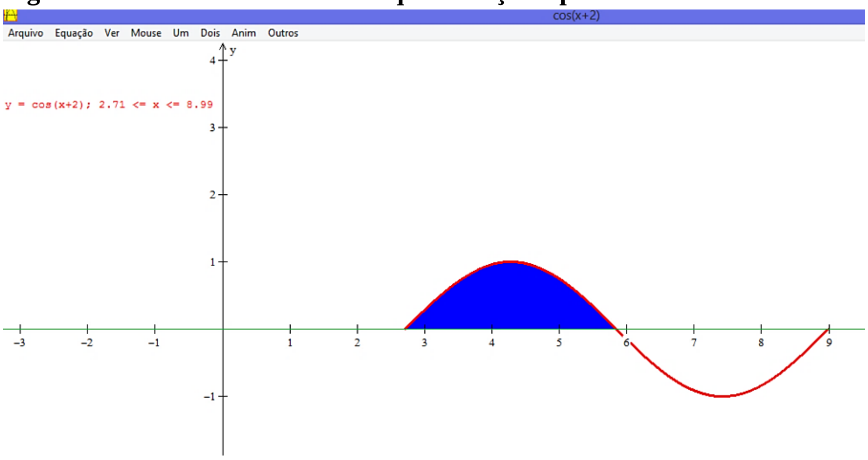
Tomando para x mín = 2.71 e x máx = 8.99 e clicando ok o gráfico ficará reduzido a esse intervalo. A Figura 50, ilustra o gráfico da função nesse intervalo.

Figura 50: Gráfico da função com intervalo definido



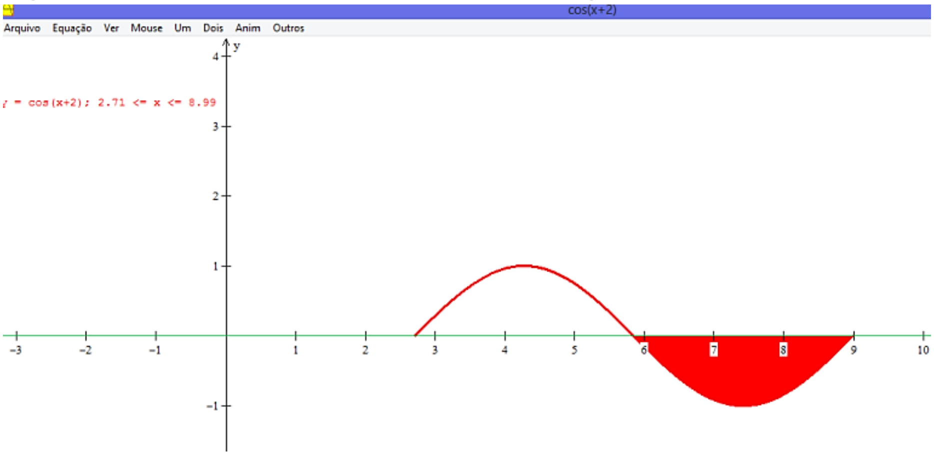
Para destacar o intervalo onde a função é positiva (y > 0) e é negativa (y < 0) usa-se a sequência de comandos “Equação” e “Desigualdades explícitas” como na atividade 6. A Figura 51 mostra o intervalo entre 2.71 e 5.85(valores aproximados dos zeros da função) em que o gráfico se encontra acima do eixo do *x*, ou seja, onde a função é positiva.

Figura 51: Ilustra o intervalo em que a função é positiva



De maneira análoga, identifica-se no gráfico o intervalo em que a função é negativa. A Figura 52, mostra o intervalo 5.85 e 8.99 em que o gráfico se encontra abaixo do eixo do x, ou seja, onde a função é negativa.

Figura 52: Ilustra o intervalo em que a função é negativa



5.2. PROPOSTA DE APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Como proposta de aplicação das funções seno e cosseno, iremos utilizar o Movimento Circular Uniforme (MCU), Movimento Harmônico Simples (MHS) e o Movimento de Projéteis. Esses movimentos serão descritos a seguir:

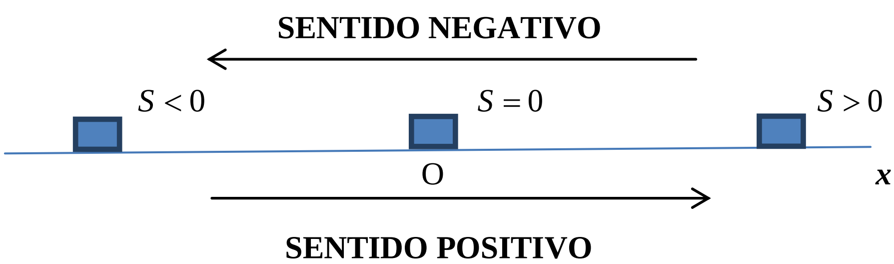
5.2.1. CINEMÁTICA

Segundo Ramalho:

> “*É a parte da Mecânica que descreve os movimentos, procurando determinar a posição, a velocidade e a aceleração de um corpo em cada instante*”. (RAMALHO, p.14).

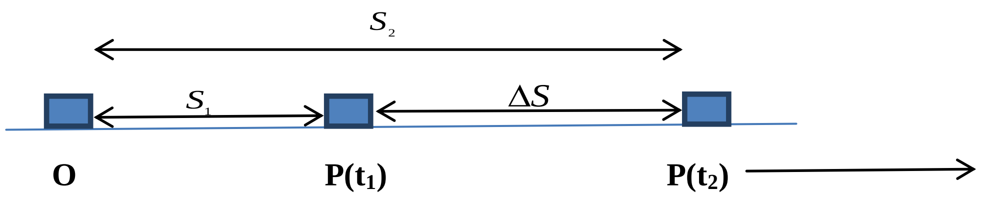
5.2.2. POSIÇÃO

A posição *S* de uma partícula sobre um eixo x localiza a partícula em relação à origem do eixo. Adotando o sentido positivo do eixo x como o lado direito da origem O, a posição *S* da partícula pode ser positiva ou negativa a depender se a partícula está à direita ou a esquerda, respectivamente, em relação à origem do eixo.



5.2.3. DESLOCAMENTO

Uma mudança de uma posição S_1 para uma posição S_2 é chamada de deslocamento ΔS.



$$\Delta S = S_2 - S_1$$

5.2.4. VELOCIDADE MÉDIA ($v_{méd}$)

A velocidade média é a razão entre o deslocamento ΔS e o intervalo de tempo Δt, decorrido nesse deslocamento.

Ou seja,

$$v_{méd} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad \text{Onde: } \Delta t = t_2 - t_1$$

5.2.5. VELOCIDADE INSTANTÂNEA (v)

Segundo Halliday:

> "*A velocidade instantânea ou velocidade* v *em qualquer instante de tempo t é obtida a partir da velocidade média reduzindo-se o intervalo de tempo Δt , fazendo-o tender a zero*". (HALLIDAY, VOL 1, p.19).

Assim, quanto menor o intervalo de tempo Δt considerado, cada vez mais a velocidade média $v_{méd}$ se aproxima da velocidade instantânea v.

5.2.6. ACELERAÇÃO MÉDIA ($a_{méd}$)

A aceleração média é a razão entre a variação da velocidade Δv e intervalo de tempo Δt, decorrido nessa variação.

$$a_{méd} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

5.2.7. ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA (a)

A aceleração instantânea ou aceleração a em qualquer instante de tempo t é obtida a partir da aceleração média reduzindo-se o intervalo de tempo Δt, fazendo-o tender a zero.

5.2.8. MOVIMENTO UNIFORME (MU)

Segundo Ramalho:

> "Movimentos que possuem velocidade escalar instantânea constante (não-nula) são chamados movimentos uniformes". (RAMALHO, 2007, p. 32).

Portanto, se a velocidade escalar instantânea é a mesma em todos os instantes, ela coincide com a velocidade média.

$$v = v_{méd} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Tomando a posição S_1 no tempo $t_1 = 0$ e a posição S_2 em qualquer instante posterior *t*, tem – se que:

$$v = \frac{S_2 - S_1}{t - 0}$$

Daí,

$$S_2 = S_1 + v \cdot t$$

Fazendo $S_2 = S$ (posição final) e $S_2 = S_0$ (posição inicial), podemos escrever:

$$S = S_0 + v \cdot t$$

5.2.9. MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO (MUV)

Segundo Ramalho:

> "Movimentos que possuem aceleração escalar instantânea constante (não-nula) são chamados movimentos uniformemente variados". (RAMALHO, 2007, p. 53).

Portanto, se a aceleração escalar instantânea é a mesma em todos os instantes, ela coincide com a aceleração média.

$$a_{méd} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

Tomando a velocidade v_1 no tempo $t_1 = 0$ e a velocidade v_2 no tempo em qualquer instante posterior *t*, tem – se que:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t - 0}$$

$$v_2 = v_1 + a \cdot t$$

Fazendo $v_2 = v$ (velocidade final) e $v_1 = v_0$ (velocidade inicial), podemos escrever:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Por outro lado, a velocidade média $v_{méd}$ é a média da velocidade v_0 e a velocidade v.

$$v_{méd} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Daí, temos que:

$$v_{méd} = v_0 + \frac{a \cdot t}{2}$$

Mas,

$$v_{méd} = \frac{S_2 - S_1}{t - 0}$$

Conclui-se que : $$S_2 = S_1 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Fazendo $S_2 = S$ e $S_1 = S_0$, podemos escrever:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

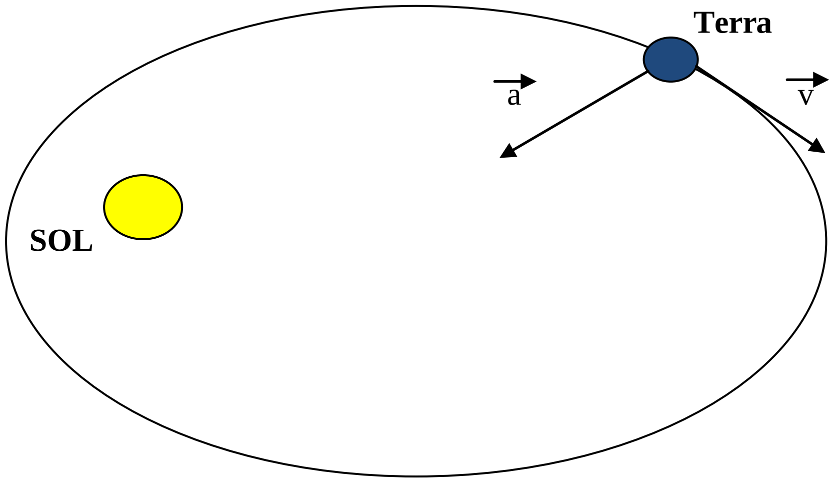
5.2.10. MOVIMENTO PERIÓDICO

Segundo Ramalho:

> "*Um fenômeno é periódico quando se repete identicamente em intervalos de tempos iguais*" . (RAMALHO, 2003, p. 329).

Um exemplo é o movimento elíptico de translação do planeta Terra em relação ao Sol (Figura 53) onde a cada volta que o planeta completa a partir da posição indicada na figura, sua posição, sua velocidade e sua aceleração se repetem.

Figura 53: Movimento de Translação do planeta Terra em torno do SOL



5.2.11. MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

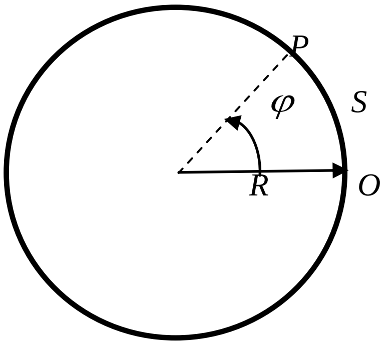
Segundo Bonjorno:

> "*Dizemos que um móvel realiza um movimento circular uniforme quando sua trajetória é circular e o módulo do vetor velocidade permanece constante e diferente de zero*". (BONJORNO, 1993, p. 74).

1. Ângulo horário (φ)

Consideremos um móvel percorrendo no sentido anti-horário a trajetória circular de raio R mostrada na Figura 54 e sejam P a posição do móvel no instante t e S o comprimento do arco OP. Denominamos ângulo horário ou fase, o ângulo φ que corresponde ao arco da trajetória OP.

Figura 54: Representação do Ângulo horário (φ)



1 rad é o ângulo formado quando seu arco S tem o mesmo comprimento do raio R.

Ou seja, quando φ igual a 1rad então, $S = R$.

A relação entre R, S e φ é dada por: $\varphi = \frac{S}{R}$.

2. Deslocamento angular ($\Delta\varphi$)

O deslocamento angular é dado pela diferença entre a posição angular final e a posição angular inicial: $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ Sendo: $\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R}$

$\Delta\varphi > 0$ (positivo) no sentido anti-horário;

$\Delta\varphi < 0$ (negativo) no sentido horário.

3. Velocidade Angular Média (ω_m)

A velocidade angular média é definido como a razão entre o deslocamento angular pelo intervalo de tempo do movimento, decorrido nesse deslocamento : $\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

3.1. Relação entre a velocidade escalar (v) e a velocidade angular (ω)

Sabe-se que: $\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R}$ ou $\Delta S = \Delta\varphi . R$

Dividindo os dois lados da igualdade por Δt, vem:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot R$$

Mas, $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ (velocidade escalar no MU) e $\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (velocidade angular).

Substituindo na equação tem-se: $v = \omega \cdot R$

4. Período: Denominamos período T, o tempo gasto pelo móvel para realizar uma volta completa.

A unidade do período é a unidade de tempo (segundo, minuto, hora...).

O período T é dado por: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

5. Frequência: Denomina-se frequência f do movimento, o número de voltas efetuadas na unidade de tempo.

A unidade no Sistema Internacional é Hertz $(Hz)\left(1Hz = \dfrac{1}{s}\right)$ ou $\left(1Hz = 1s^{-1}\right)$.

Podemos indicar também a frequência em rotações por minuto (rpm), ou seja, 60 rpm $= 1Hz$

Relação entre o Período e a Frequência:

Utilizando as definições de Período e Frequência pode-se montar a seguinte regra de três:

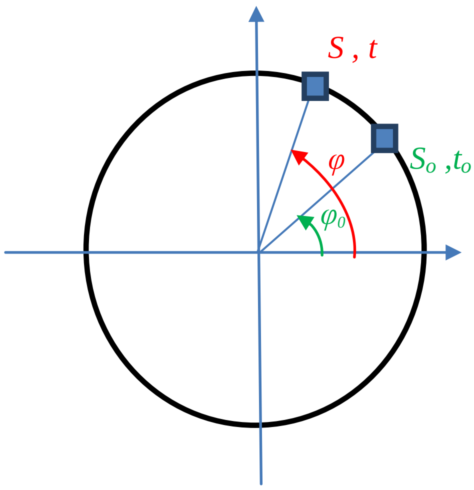
Tempo	nº de voltas
T	1
1	f

Daí, $T.f = 1$ ou $T = \dfrac{1}{f}$

8. Função horária angular

Consideremos um móvel realizando um movimento circular uniforme na trajetória indicada na Figura 55.

Figura 55: Móvel em MCU



Da Função horária das Posições tem-se que: $S = S_0 + v \cdot t$

Sabe-se que: $S = \varphi.R$ e $S_0 = \varphi_0.R$. Logo:

$$\varphi.R = \varphi_0 R + v$$

Dividindo a equação por $R \neq 0$, e como $v = \omega.R$, vem:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega.t$$

onde: φ é a fase ou posição angular;

φ_0 é a fase inicial ou posição angular inicial;

ω é a velocidade angular.

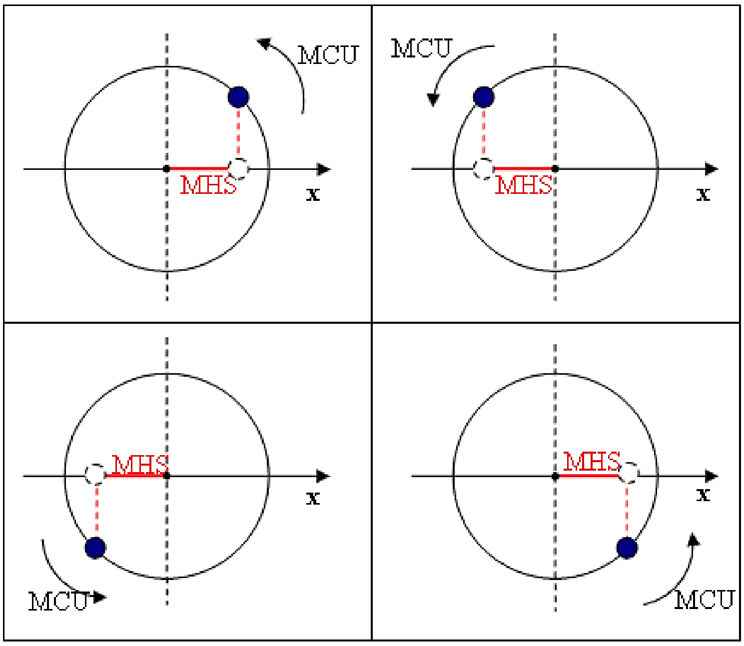
5.2.12. MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS)

São movimentos que se repetem a intervalos regulares (periódico) e repetidamente para um lado e para outro da origem de um eixo x (oscilatório). Esses movimentos são descritos por funções horárias harmônicas (funções seno ou cosseno).

O estudo Movimento Harmônico Simples pode ser analisado como uma projeção de um Movimento Circular Uniforme sobre um eixo. Tomemos uma partícula se deslocando sobre um circunferência de raio A.

Observe este fato na Figura 56.

Figura 56: Movimento da projeção do MCU no eixo x (MHS)



DESLOCAMENTO NO MHS

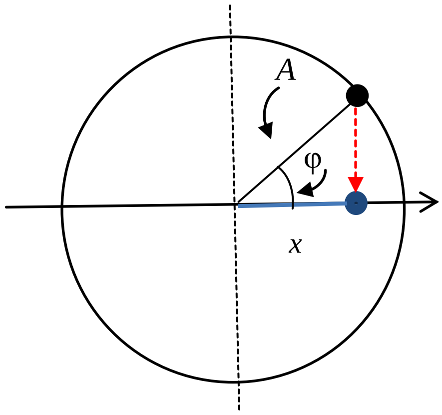
No MHS, a abscissa x é medida a partir do ponto médio da trajetória e denomina-se deslocamento (elongação). O raio A da circunferência denomina-se amplitude do MHS.

No ponto médio da trajetória o deslocamento é nulo (x = 0), e nos pontos extremos da trajetória temos x = - A e x = A.

Considerando uma partícula em MCU e projetando o deslocamento angular no eixo Ox pode-se deduzir a função horária do deslocamento no Movimento Harmônico Simples.

A Figura 57 abaixo, mostra uma partícula em MCU ocupando uma posição num instante *t* com velocidade angular ω e sua projeção sobre o eixo Ox. O ângulo φ indicado nessa figura medido a partir do eixo x no sentido do MCU em cada instante *t*, é denominado fase do movimento nesse instante.

Figura 57: Deslocamento x de uma partícula em MHS num instante t



Usando do cosseno do ângulo para obter o valor de *x*:

$$\cos\varphi = \frac{x}{A}$$

ou $$x = A.\cos\varphi$$

Do MCU, o ângulo φ varia com o tempo *t*, e é dado por:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega.t$$

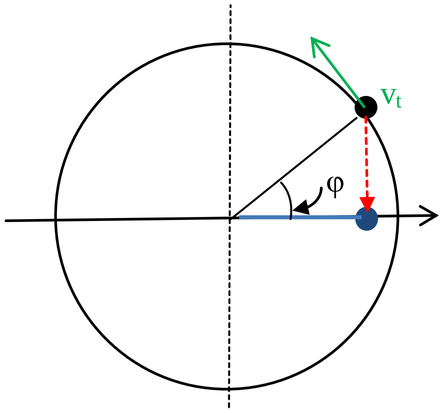
Fazendo a substituição, teremos a posição *x* da partícula em um determinado instante *t*.

$$x = A.\cos(\omega.t + \varphi_0)$$

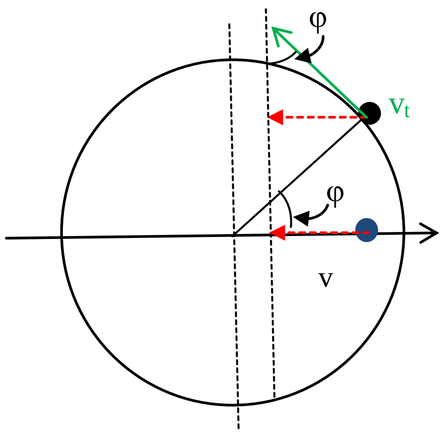
VELOCIDADE NO MHS

A velocidade no MHS é também determinada pela projeção da velocidade no MCU sobre a trajetória em que se dá o MHS. No MCU, a velocidade é descrita como um vetor tangente à trajetória (Figura 58).

Figura 58: Partícula em MCU com velocidade v_t



Decompondo o vetor velocidade tangencial:



Sejam *v* o módulo do vetor *v* e v_t o módulo do vetor v_t

$$sen\varphi = -\frac{v}{v_t}$$

ou

$$v = -v_t.sen\varphi$$

O sinal de *v* é negativo pois, o MHS tem sentido contrário ao do eixo Ox(retrógrado).

Do MCU, tem – se: $v_t = \omega.A$ e $\varphi = \varphi_0 + \omega.t$.

Substituindo, teremos a função horária da velocidade no MHS:

$$v = -\omega.A.sen(\omega.t + \varphi_0)$$

5.2.13. MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

Segundo Halliday:

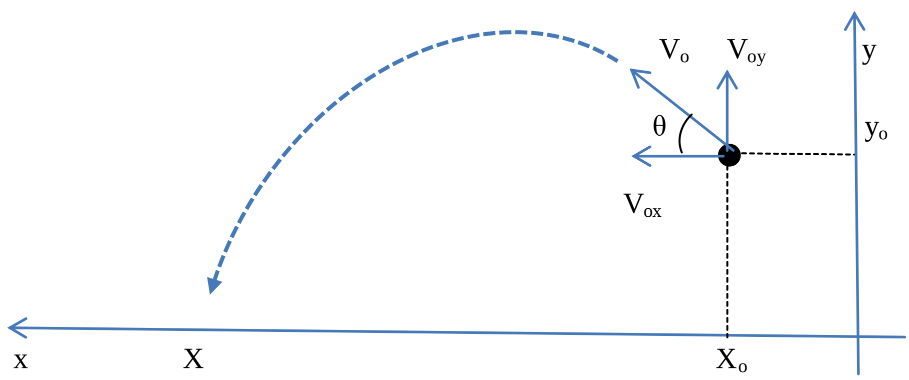
> "Movimento em que uma partícula se move em um plano vertical com alguma velocidade inicial *Vo*, mas a sua aceleração é sempre igual à aceleração de queda livre g, direcionada para baixo". (HALLIDAY, VOL 1, p. 70).

Tal partícula é chamada de projétil pois, pode ser projetada ou lançada.

O Movimento de Projéteis possui movimento horizontal e movimento vertical (Movimento Bidimensional) que são independentes um do outro.

A Figura 59 ilustra a trajetória seguida por um projétil quando o efeito do ar não é considerado.

Figura 59: Trajetória descrita por um projétil quando lançado



Da Figura 59 tem-se que:

$$Vo_x = Vo.\cos\theta$$

$$Vo_y = Vo.sen\theta$$

Horizontalmente, o movimento do projétil não possui aceleração (aceleração nula) obedecendo assim ao "MU".

Assim, a componente horizontal da velocidade V_x é constante e igual a Vo_x.

Sabe-se que no (MU): $$S = S_0 + v \cdot t$$

ou $$S - S_0 = v \cdot t$$

Mudando S por X, S_0 por X_0, V por Vo_x tem-se que o deslocamento horizontal do projétil

$X - X_0$ com relação a posição inicial X_0 é dado por:

$$X - X_0 = Vo_x.t$$

ou ainda, a posição X em um tempo t é igual a:

$$X = X_0 + Vo_x.t$$

Verticalmente, o movimento do projétil está em queda livre, ou seja, o projétil é submetido a força gravitacional. A aceleração da gravidade é “ g “ (aceleração de queda livre). Como essa aceleração é constante e dirigida para baixo sobre o eixo y, podemos substituir a por $-g$ nas equações para o movimento com aceleração constante (MUV).
Sabe-se que no (MUV):

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

ou

$$S - S_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Mudando S por y, S_0 por y_0, v_0 por Vo_y e a por $-g$, tem – se que o deslocamento vertical do projétil $y - y_0$ com relação a posição inicial y_0 é dado por:

$$y - y_0 = Vo_y.t - \frac{gt^2}{2}$$

ou ainda, a posição y em um tempo t é igual a:

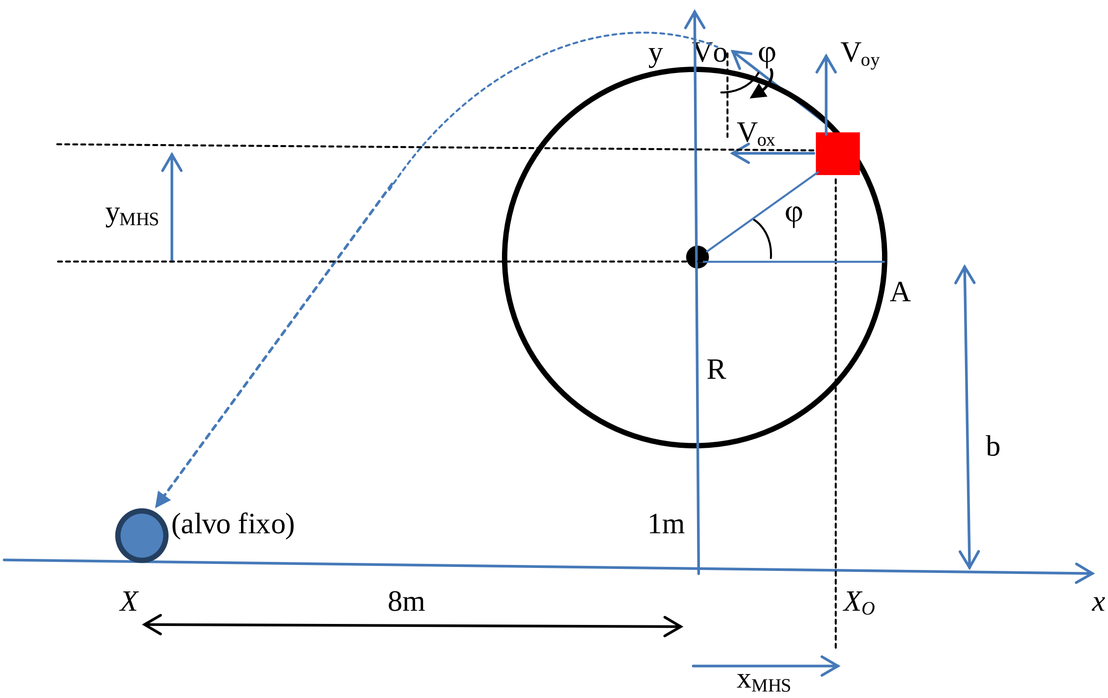
$$y = y_0 + Vo_y.t - \frac{gt^2}{2}$$

Atividade 8 – Funções Seno e Cosseno no MCU, MHS e Lançamento de Projéteis

Considere em um Parque de Diversões uma roda gigante em que uma pessoa para ganhar um brinde, deverá deixar cair uma bola de borracha após, alguns segundos, a roda gigante começar a girar, para acertar um alvo fixo. A roda gigante tem 4m de raio, está suspensa a 1m do solo e quando está em movimento tem velocidade angular 2 rad/s e a cadeira, onde se localiza a pessoa, começa se movimentar a partir do ponto A (Figura 60) no sentido anti horário.

a) De acordo com esses dados e observando a figura 60 a seguir, determinar, com o auxílio do winplot, a posição angular da cadeira no instante em que a bola deve ser solta, na primeira volta da roda gigante, para acertar o alvo fixo, distante 8m à esquerda do eixo vertical dessa roda.

Figura 60: Trajetória de uma bola solta de uma roda gigante



Inicialmente vamos deduzir uma fórmula que calcule a posição X (alcance da bola) em função da posição angular φ da cadeira na roda gigante.

Observando a Figura 60, tem- se que:

MHS HORIZONTAL (Eixo x)

$$x_{MHS} = R\cos\varphi = X_o \qquad (1)$$

$$Vx = Vo_x = -\omega R sen\varphi \qquad (2)$$

MHS VERTICAL (Eixo y)

$$y_{MHS} = R sen\varphi \qquad (3)$$

$$Vy = Vo_y = \omega R\cos\varphi \qquad (4)$$

No LANÇAMENTO OBLÍQUO, tem – se que:

$$X = X_0 + Vo_x.t \qquad (5)$$

$$y = y_o + Vo_y.t - \left(\frac{1}{2}\right)gt^2 \qquad (6)$$

$$y_o = y_{MHS} + b = R sen\varphi + b \qquad (7)$$

Fazendo $y = 0$, tem-se uma equação do 2º grau cuja solução (completando quadrados) é dada por:

$$t = \frac{-Vo_y \pm \sqrt{Vo_y^{\ 2} + 2gy_o}}{-g}$$ (tempo de queda do objeto ao se soltar da roda gigante)

Como $t > 0$, tem-se $t = \dfrac{Vo_y + \sqrt{Vo_y^{\ 2} + 2gy_o}}{g}$

Tomando $g = 10m/s^2$, vem:

$$t = \frac{Vo_y + \sqrt{Vo_y^{\ 2} + 20.y_o}}{10} \qquad (8)$$

Substituindo *(8)* em *(5)*, vem:

$$X = X_0 + Vo_x.\left(\frac{Vo_y + \sqrt{Vo_y^{\ 2} + 20.y_o}}{10}\right) \qquad (9)$$

Substituindo *(1), (2), (4)* e *(7)* em *(9)* vem:

$$X = R\cos\varphi - \omega R sen\varphi.\left(\frac{\omega R\cos\varphi + \sqrt{\omega^2 R^2\cos^2\varphi + 20(R sen\varphi + b)}}{10}\right) \qquad (10)$$

Essa equação *(10),* determina o alcance *X* da bola na horizontal quando é solta no ins tante em que tem posição angular φ na roda gigante.

No caso da Atividade, temos que:

$R = 4m$, $b = R + 1 = 5m$ e $\omega = 2rad/s$

Temos então a equação:

$$X = 4\cos\varphi - 8sen\varphi.\left(\frac{8\cos\varphi + \sqrt{64\cos^2\varphi + 20(4sen\varphi + 5)}}{10}\right)$$

ou

$$X = 4\cos\varphi - 8sen\varphi.\left(\frac{4\cos\varphi + \sqrt{16\cos^2\varphi + 20sen\varphi + 25}}{5}\right)$$

Como o alvo está a esquerda do eixo da roda gigante, tem-se $X = -8$

Teremos a equação:

$$4\cos\varphi - 8sen\varphi.\left(\frac{4\cos\varphi + \sqrt{16\cos^2\varphi + 20sen\varphi + 25}}{5}\right) = -8$$

Procedimento no winplot

Utiliza-se o mesmo procedimento da APLICAÇÃO 1 FUNÇÃO EXPONENCIAL E JUROS COMPOSTOS por meio do comando "Interseções".

Para usar o winplot, façamos $\varphi = x$ e traçamos os gráficos das funções:

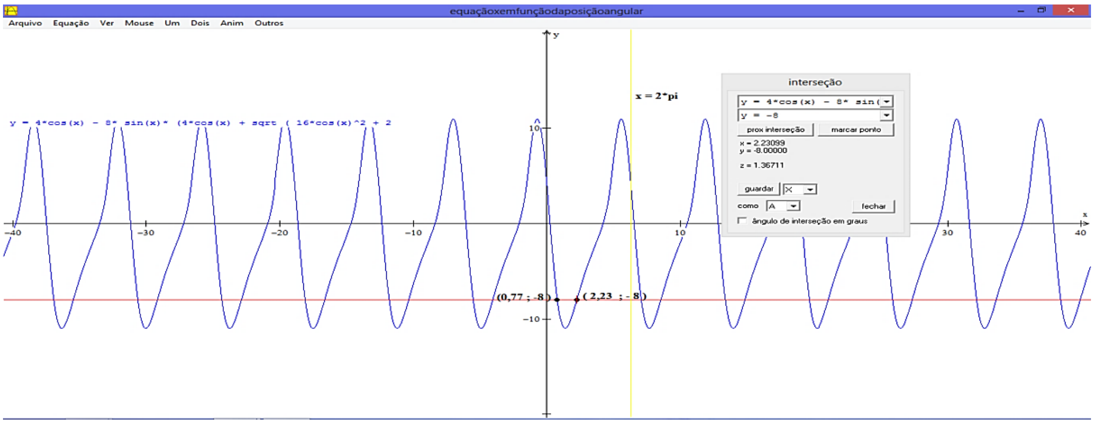
$$\left(f(x) = 4*\cos(x) - 8*\sin(x)*\left(\frac{4*\cos(x) + sqrt(16*\cos(x)\text{^}2 + 20*\sin(x) + 25)}{5}\right)\right)$$

e

$$(f(x) = -8)$$

A Figura 61 a seguir, ilustra no winplot a posição angular φ da cadeira para que a bola deva ser solta, na primeira volta da roda gigante, para atingir o alvo fixo, distante 8m à esquerda do eixo vertical da roda gigante.

Figura 61: Posições angulares φ da cadeira para que a bola deva ser solta para atingir o alvo fixo



Do winplot (figura 61), tem-se as posições angulares:

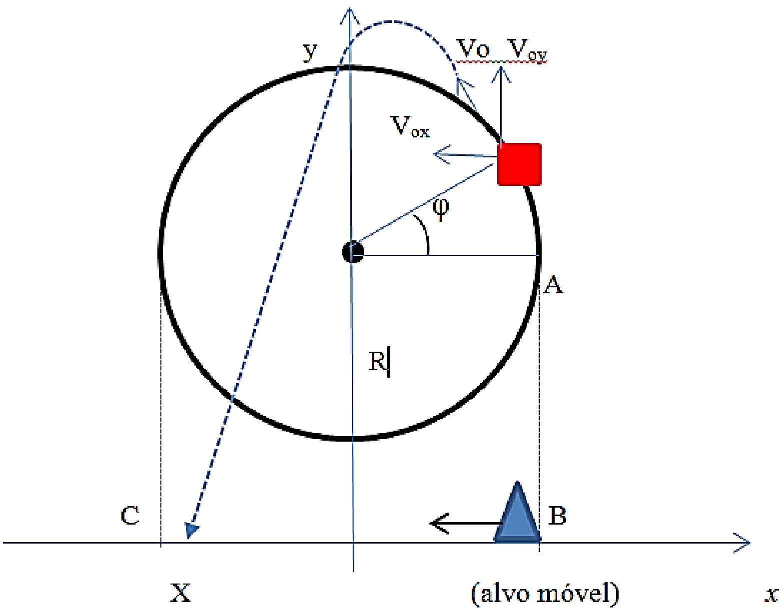
$\varphi \cong 0{,}77rad$ que equivale a $\varphi \cong 44^o$ no instante $t \cong \dfrac{\varphi}{\omega} = \dfrac{0{,}77}{2} = 0{,}385s$.

$\varphi \cong 2{,}23rad$ que equivale a $\varphi \cong 127^o$ no instante $t \cong \dfrac{\varphi}{\omega} = \dfrac{2{,}23}{2} = 1{,}115s$.

Assim, a cadeira deverá ter percorrido aproximadamente 44º no sentido anti-horário a partir do ponto A ($\varphi = 0^o$) ou o equivalente a *0.385* segundos para soltar a bola e atingir o alvo ou, aproximadamente *127º* também a partir do ponto *A* ou o equivalente a *1.115* segundos para ter a segunda chance de acertar o alvo na primeira volta admitindo claro, que a roda gigante já tenha atingido a velocidade constante.

b) Considerando o alvo móvel inicialmente no ponto B, se deslocando do ponto B ao ponto C em MHS (Figura 62), determinar com o auxílio do winplot, a posição angular da cadeira no instante em que a bola deve ser solta, na primeira volta da roda gigante, para acertar esse alvo móvel.

Figura 62: Alvo móvel em MHS



O alcance X da bola na horizontal quando é solta no instante em que tem posição angular φ na roda gigante é dado por:

$$X = R\cos\varphi - \omega R sen\varphi.\left(\frac{\omega R\cos\varphi + \sqrt{\omega^2 R^2 \cos^2\varphi + 20(Rsen\varphi + b)}}{10}\right)$$

Por outro lado, a posição do alvo móvel é dada por:

$x_{ALVOMÓVEL} = R.\cos(\omega.(t_1 + t_2))$, onde t_1 é o tempo decorrido pelo deslocamento da cadeira, a partir do ponto A, até atingir a posição angular φ e t_2 é o tempo de queda da bola ao se soltar da roda gigante. Assim:

$$\omega \cdot t_1 = \varphi \quad \text{e} \quad \omega \cdot t_2 = 2.\left(\frac{Vo_y + \sqrt{Vo_y{}^2 + 20.y_o}}{10}\right) = \frac{\omega R\cos\varphi + \sqrt{\omega^2 R^2 \cos^2\varphi + 20(Rsen\varphi + b)}}{5}.$$

Daí, $x_{ALVOMÓVEL} = R\cos(\varphi + \frac{\omega R\cos\varphi + \sqrt{\omega^2 R^2 \cos^2\varphi + 20(Rsen\varphi + b)}}{5})$

Para a bola atingir o alvo móvel é necessário que: $x_{ALVOMÓVEL} = X$.

Tem-se então, a equação *(11)* a seguir:

$$R\cos(\varphi+\frac{\omega R\cos\varphi+\sqrt{\omega^2R^2\cos^2\varphi+20(Rsen\varphi+b)}}{5})=R\cos\varphi-\omega Rsen\varphi.\left(\frac{\omega R\cos\varphi+\sqrt{\omega^2R^2\cos^2\varphi+20(Rsen\varphi+b)}}{10}\right) \qquad (11)$$

Para essa atividade temos que: $R=4m$, $b=5m$ e $\omega=2rad/s$

Substituindo esses valores na equação (*11*) e simplificando, tem–se a equação:

$$4\cos(\varphi+\frac{8\cos\varphi+2\sqrt{16\cos^2\varphi+20sen\varphi+25}}{5})=4\cos\varphi-8sen\varphi.\left(\frac{4\cos\varphi+\sqrt{16\cos^2\varphi+20sen\varphi+25}}{5}\right)$$

Procedimento no winplot

Para usar o winplot, façamos $\varphi=x$ e traçamos os gráficos das funções:

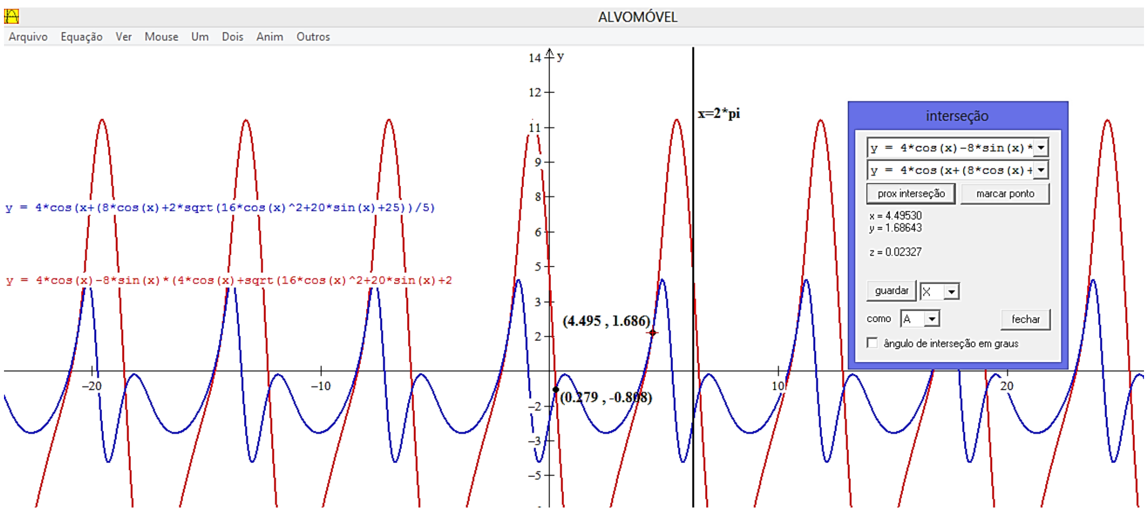
$$\left(f(x)=4*\cos(x+\frac{8*\cos(x)+2*sqrt(16*\cos(x)\wedge 2+20*\sin(x)+25)}{5}\right)$$

e

$$\left(f(x)=4*\cos(x)-8*\sin(x)*\left(\frac{4*\cos(x)+sqrt(16*\cos(x)\wedge 2+20*\sin(x)+25)}{5}\right)\right)$$

A Figura 63 a seguir, ilustra no winplot a posição angular φ para atingir o alvo móvel.

Figura 63: Posições angulares φ da cadeira para que a bola deva ser solta para atingir o alvo móvel



No winplot (Figura 63), tem-se as posições angulares: $\varphi\cong 0.279rad\cong 16^o$ para $t\cong\frac{\varphi}{\omega}=\frac{0.279}{2}=0.14s$ e $\varphi\cong 4.495rad\cong 258^o$ para $t\cong\frac{\varphi}{\omega}=\frac{4.495}{2}=2.25s$.

Assim, para atingir o alvo móvel, a bola deverá ser solta quando a cadeira estiver em uma das duas posições angulares 16^o ou 258^o.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acredita-se que com essa proposta de ensino das funções exponencial, seno e cosseno, com o auxílio do software winplot, possibilite ao professor e ao aluno uma alternativa de visualização de gráficos e propriedades de tais funções, de forma rápida, precisa e dinâmica, como também, na resolução de equações exponenciais e trigonométricas por meio da intersecção dos gráficos de duas funções usando o recurso “Interseções”, disponível nesse software.

O software winplot, por permitir a variação dos parâmetros das funções exponenciais, seno e cosseno e ao mesmo tempo a visualização dos gráficos correspondentes, se torna um recurso didático útil na medida que se quer estudar a influência dessa variação no comportamento de tais gráficos. Além disso, com essa possibilidade de poder variar os parâmetros de uma função, na tela do winplot é possível perceber de forma geométrica, a inexistência do seu gráfico quando esses parâmetros assumem valores que não definem essa função. Um exemplo desse fato, é a função exponencial cujo gráfico inexiste quando o seu parâmetro (base) é um número menor que zero. Por outro lado, esse software permite a construção e visualização de vários gráficos de funções num mesmo sistema de eixo coordenados o que favorece a comparação entre eles, facilitando assim, a análise de várias características dessas funções. Além do mais, o winplot é gratuito e fácil de manusear e possibilita construir gráficos de funções seno e cosseno, como também, é importante na solução de problemas do cotidiano que levam a modelagem de equações complexas que são dificilmente resolvidas de maneira analítica. Assim, esse software garante mais agilidade e precisão na construção e análise de gráficos de funções e na solução desses problemas.

Desta forma, essa proposta de ensino pretende, com a ajuda do software winplot, proporcionar ao professor uma alternativa de ensino ágil, precisa e dinâmica e ao aluno, uma possibilidade de facilitar o entendimento das características das funções exponencial, seno e cosseno por meio da utilização dos recursos disponíveis neste software para construção dos gráficos dessas funções e solução de problemas do cotidiano.

7. REFERÊNCIAS

BONJORNO, Regina Azenha - Física fundamental: 2ºgrau: volume único/ Regina Azenha Bonjorno.../et al./.-São Paulo: FTD, 1993.

CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria / Números Complexos*. SBM Coleção do Professor de Matemática, 2005.

ZICA, César de Oliveira Uma Proposta de Utilização do Winplot no Ensino da Função Seno nas Turmas do PROEJA / César de Oliveira Zica. – Palmas, 2013.

FLEMMING, Diva Marília - Cálculo A: funções, limite, derivação, integração/ Diva Marília Flemming, Mirian Buss Gonçalves – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

HALLIDAY, David, 1916 - Fundamentos de física, v1:mecânica/David, Robert Resnick, Jearl Walker; tradução Flávio Meneses de Aguiar, José Wellington Rocha Tabosa – Rio de Janeiro: LTC, 2006.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, I: conjuntos, funções 8. Ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, II: Logaritmos, 8. Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. SBM Coleção do Professor de Matemática, 2006.

RAMALHO Júnior, Francisco, 1940 - Os fundamentos da física/ Francisco Ramalho Júnior, Nicolau Gilberto Ferrano, Paulo Antônio de Toledo Soares – 9 ed. rev. e ampl.- São Paulo: Moderna, 2007.

SOUZA, Sérgio de Albuquerque. *Usando o Winplot*. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html>. Acesso em Fevereiro de 2014.

VILLAS BÔAS, Newton-Física, 2 / Newton Villas Bôas, Ricardo Helou Doca, Gualter José Biscuola- 1 ed- São Paulo: Saraiva, 2010.