UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JARLES OLIVEIRA SILVA NOLETO

FRAÇÕES E TRIGONOMETRIA: UMA ABORDAGEM DIFERENCIADA NO ENSINO MÉDIO

PALMAS
2014

JARLES OLIVEIRA SILVA NOLETO

FRAÇÕES E TRIGONOMETRIA: UMA ABORDAGEM DIFERENCIADA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Christian José Quintana Pinedo

PALMAS
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

N791f Nolêto, Jarles Oliveira Silva

Frações e Trigonometria: Uma Abordagem Diferenciada no Ensino Médio / Jarles Oliveira Silva Nolêto. – Palmas, 2014.
52f.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2014.
Linha de pesquisa: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Christian José Quintana Pinedo.

1. Congruência de arcos. 2. Gráficos. 3. Equações Trigonométricas. I. Pinedo, Christian José Quintana II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDD 510

Bibliotecária: Emanuele Santos
CRB-2 / 1309

JARLES OLIVEIRA SILVA NOLETO

FRAÇÕES E TRIGONOMETRIA: UMA ABORDAGEM DIFERENCIADA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Dr. Christian José Quintana Pinedo.

Aprovada em 28 / 03 / 2014

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Christian José Quintana Pinedo (Orientador-UFT)

____
Prof. Dra. Carmem Lucia Artioli Rolim (UFT)

____
Prof. Dr. Antonio da Luz Junior (IFTO)

Dedico este trabalho a minha esposa, Orlane Pereira Nolêto Silva, à minha filha, Sofia Nolêto Salviano e aos meus pais, Jair Salviano da Silva e Marliete de Oliveira Gomes Silva.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, e tudo mais a gente corre atrás.

Aos meus pais, Jair e Marliete, por sempre me apoiarem nas minhas decisões, mesmo sabendo que eram tomadas por influência da ótima formação que me deram.

À minha esposa Orlane, companheira que entre trancos e barrancos, entre tapas e beijos, é sempre meu porto seguro, meu colo, meu sustento...

À minha princesinha recém-chegada Sofia. Você ainda não sabe, mas tudo isso aqui é por sua causa.

Aos meus irmãos, não somente àqueles filhos da minha mãe (risos), mas aqueles que escolhi serem meus irmãos: Eduardo (Buda), Marivânia (Beta) e Fernanda, (snif, snif), inclusive os que não foram citados, vocês não imaginam o quão importante é a presença de vocês e o quanto é grande a saudade quando vocês não estão.

Aos meus professores, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Christian, valeu pela paciência, e também pela falta dela. Sei que dei muito trabalho.

Aos colegas de curso e de trabalho que nunca deixaram que minha peteca caísse, cobrando e me incentivando, principalmente nesse finzinho.

A todos, OBRIGADO MESMO!!!! ☺

RESUMO

Os primeiros relatos que comprovam o uso de frações data por volta do ano 3.000 a.C., quando um antigo faraó repartia o solo do Egito às margens do rio Nilo entre seus habitantes. Mas como todos os anos as águas subiam e desciam, fora criada uma forma de representar e quantificar estas partes. Das frações dos dias de hoje, dá-se especial atenção ao seu significa e representação bem como as operações entre frações. Apesar dos egípcios e dos babilônios terem utilizado as relações existentes entre lados e ângulos dos triângulos, para resolver problemas, foi a atração pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria. Daí que, historicamente a Trigonometria apareça muito cedo associada à Astronomia. Conhecida a história, o presente é encarado, e percebe-se que grande parte dos alunos do Ensino Médio veem estes dois conteúdos como gargalos, uma vez que para eles se tornaram assuntos cada vez mais complexos e ardilosos, em outras palavras, é muito mais fácil resolver um problema que envolva apenas números inteiros do que com frações, e ainda, como compreender conceitos e relações tão técnicas expostos pela Trigonometria. Foi pensando nessas indagações que este trabalho foi pensado e confeccionado. Facilitar a compreensão de assuntos até então tidos como complexos, possibilitar um aprendizado mais firme e conciso e manter vivo na mente do aluno ideias, definições, relações e operações que jamais poderiam ser esquecidas. O trabalho aborda conceitos simples, no entanto as propostas aqui apresentadas serão de grande valia, não somente na Matemática, mas também em outras ciências.

Palavras-chave: Congruência de arcos, gráficos, equações trigonométricas

ABSTRACT

Early reports show that using fractions date around the year 3000 BC, when an ancient pharaoh divided the land of Egypt on the Nile River between its inhabitants. But like every year the waters rose and fell outside created a way to represent and quantify these parts. Fractions of days, gives special attention to its meaning and representation as well as transactions between fractions. Although the Egyptians and Babylonians have used the relations between sides and angles of triangles, to solve problems, the attraction was the movement of the stars that drove the evolution of Trigonometry. Hence, historically trigonometry appear very early associated with astronomy. Known history, this is seen, and it is noticed that most high school students see these two contents as bottlenecks, since for them have become increasingly complex and elusive subjects, in other words, is much more easy to solve a problem involving only whole numbers than with fractions, and also how to understand concepts and techniques such relationships exposed by Trigonometry. Was thinking about these questions that this work was designed and made. Facilitate understanding of issues hitherto regarded as complex, enabling a firmer and concise learning and stay alive in the mind of the student ideas, definitions, relationships and operations that could never be forgotten. This paper adresses an simple concepts, however the proposals presented here will be of great value, not only in mathematics but also in other sciences.

Keywords: Congruent arcs, graphs, trigonometric equations

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo da Matemática na educação básica, ou seja, Ensino Fundamental e Médio, tem se tornado um crescente desafio nos dias de hoje. Por um lado é cada vez mais presente necessidade da contextualização e da ludicidade no Ensino Fundamental, e por outro lado a preparação para concursos e avaliações, como vestibulares e ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio. Em outras palavras, o aluno é tirado do "mundo da fantasia" e jogado na realidade nua e crua, sem muitas vezes estar preparado para isso.

Segundo o Referencial Curricular do Ensino Fundamental da Secretaria de Estado da Educação e Cultura, no Tocantins (2009), como na grande maioria dos estados brasileiros, o ensino da Matemática ainda é reflexo de um conjunto de paradigmas historicamente estabelecidos que contribuem para a mistificação desta disciplina e para seu afastamento da realidade social dos alunos[1].

Esse último fato é descrito por IFRAH (1997) do seguinte modo:

> Basta, entretanto, que nos recordemos do duro aprendizado do manejo dos números (em particular as longas e penosas horas passadas durante a infância a aprender de cor a tabuada) para percebermos que se trata de fato de uma aquisição de nossa civilização, de algo inventado e deve ser transmitido como linguagem – esse outro 'instrumento' que exige um aprendizado. Portanto, os números têm também sua história. Uma história muito longa e complexa. (IFHRA, 1997, p. 24)

Embora a Matemática possua problemas próprios, seus fundamentos têm tanta ligação com a vida real como qualquer outra ciência. O surgimento dos números, por exemplo, foi impulsionado por necessidades sociais, que fizeram com que o homem desenvolvesse um sistema de numeração e problemas novos foram aparecendo juntamente com circunstâncias que passaram a exigir que diferentes tipos de números fossem criados.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a

[1] TOCANTINS – *Referencial Curricular do Ensino Fundamental das escolas públicas do Estado do Tocantins: Ensino Fundamental do 1º ao 9º ano*. 2ª Edição. Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Tocantins: 2009.

continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

O ensino de Matemática proposto nas orientações curriculares para o Ensino Médio do Tocantins deve despertar no aluno o desejo pela investigação científica, pois ela constitui uma poderosa ferramenta para a solução de problemas de caráter científico, fundamental para a análise de dados que requer o uso de estratégias de raciocínio quantitativo que estão longe de ser intuitivas.

Pensando nisso e também na crescente dificuldade de aprendizado enfrentada pelos alunos do Ensino Médio, que na maioria das vezes herda dos anos de estudo no Ensino Fundamental, este trabalho surgi com uma proposta simplificada na abordagem de dois dos assuntos mais perturbadores da Educação Básica: Frações e Trigonometria.

É importante ressaltar que este trabalho não tem a intenção de apresentar propostas inovadoras para o ensino da Matemática no Ensino Médio, mas sim uma mudança metodológica na postura do professor, com uma abordagem diferenciada e simplificada acerca de alguns tópicos de Trigonometria, com a ajuda do conceito de Frações e suas operações.

Inicialmente o leitor será levado por um passeio histórico sobre esses dois assuntos, no intuito de ver como foram as primeiras aplicações e as pessoas que deram uma enorme contribuição para que tais conteúdos pudessem chegar até os dias de hoje da forma como estão. Em outras palavras, olha-se o passado para compreender o presente.

Feita a contextualização histórica desses assuntos, o embasamento teórico se faz necessário, uma vez que o principal intuito deste trabalho é a apresentação de mudança nas posturas assumidas pelos principais livros didáticos que abordam os assuntos supracitados, ou seja, tudo o que é trabalhado, e como é trabalhado está correto, mas pode ser apresentado também de maneira diferente.

E, por fim, as aplicações são apresentadas.

O enfoque das aplicações está nos conceitos Trigonométricos, no entanto, as Frações aparecem como suporte para tais tópicos, que são abordados de forma mais simples e não muito tradicional, fazendo assim com que o aluno crie gosto por esta representação e suas operações, vencendo seus medos, traumas e dificuldades.

A primeira aplicação trabalha a “medição” de arcos trigonométricos, por meio de frações e da unidade de medida radiano. Inclusive, a atividade apresentada para este tópico, servirá de pano de fundo para as demais atividades.

Em seguida, será proposta uma forma simples de estabelecer a relação entre arcos côngruos, para auxiliar o cálculo de seno e cosseno de arcos maiores de 90°, usando as frações do π na análise de sinais e aplicação de simetrias.

O ponto auge deste trabalho é a construção dos gráficos senóide e cossenoide. Uma aplicação que visa, especificamente, analisar o comportamento desses gráficos, tem a intenção de auxiliar professores de Matemática e de outras ciências.

Por fim, às equações seno e cosseno será atribuída uma maneira de obter as soluções específicas em um intervalo determinado, utilizando, como base, a primeira e a segunda aplicação.

Com tudo isso, pretende-se dirimir dificuldades e traumas surgidos ao longo da caminhada estudantil desse aluno, na abordagem desses assuntos, um no Ensino Fundamental, as frações, e o outro no Ensino Médio, a trigonometria. E com isso, também ampliar os passos aqui demonstrados em outros tópicos não apresentados, assuntos esses que poderão ser abordados em trabalhos futuros.

2 DESCOBRINDO A FRAÇÃO

Desde muito cedo, a humanidade pressentiu a existência de outros números, além dos números inteiros. Por força das circunstâncias, muitas vezes, um caçador via-se obrigado a repartir um peixe ou outra caça. Sendo assim, dividia a mesma em duas partes iguais, ou em quatro partes, ou ainda em um número maior de frações. Nesse caso, ele já estava usando seus conhecimentos espontâneos sobre partes de um todo.

De acordo, com IFRAH (1985),

> O primeiro método de registro de quantidades, mais universalmente comprovado, o mais antigo, é o do osso ou do pedaço de madeira entalhado. Trata-se de inúmeros ossos, cada um com uma ou várias séries de entalhes regularmente espaçados, encontrados em sua maior parte na Europa. (IFRAH, 1985, p. 104 – 105)

Desses esforços, no sentido de fazer registros permanentes de números, resultaram vários sistemas de numeração escritos e as manifestações da ideia de frações.

2.1 As Complicadas Frações Egípcias

Nas antigas sociedades literárias que são Egito e Mesopotâmia, a representação numérica aconteceu muito antes da descoberta da escrita, quando surgiram nos registros comerciais.

Por volta do ano 3000 a.C., um faraó repartiu o solo do Egito às margens do rio Nilo entre seus agricultores. Foi nas terras férteis do vale deste rio que se desenvolveu a civilização egípcia. Na época das cheias, que são de Junho a Setembro, o rio Nilo subia e derrubava as arcas de pedra que cada agricultor usava para marcar os limites do seu terreno e levava parte de um lote. O faraó mandava funcionários examinarem e determinarem a extensão exata da perda numérica.

Portanto, todo final de Setembro, quando as águas baixavam, era necessário remarcar os terrenos de cada agricultor. Os responsáveis por essa marcação eram os chamados estiradores de corda, pois mediam os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada. Essas cordas eram esticadas e se verificava quantas vezes a tal unidade de medida cabia no terreno, nem sempre cabia a unidade de medida inteira. Por essa necessidade surgiu o uso do número fracionário.

A história que serve de referência para estas afirmações, pode ser vista em alguns livros didáticos, em particular no livro *Matemática, Pensar e Descobrir: Novo*. Na página 149 do livro da 5ª série é encontrado o seguinte texto:

> Disseram que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio Nilo, ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviaria medidores ao local e faria medir a terra, a fim de saber quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. (GIOVANNI & GIOVANNI JR. 1996, p. 149)

Entretanto, pelas necessidades já citadas, surgiram as frações egípcias, isto é, eram frações de numerador 1 e dividido por um número inteiro, denominadas frações unitárias, como por exemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{4}$. As outras frações, isto é, não unitárias, eram representadas através de uma soma de frações de numerador 1. Assim era representado $\frac{2}{5}$ como $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$.

Os conhecimentos matemáticos egípcios foram retirados de manuscritos em papiro, material principal usado pelos egípcios para registrar. Notações representativas de frações foram encontradas no Papiro de Rhind e no Papiro de Moscou.

Segundo PINEDO (2006),

> O papiro Rhind é uma coleção de exemplos matemáticos copiados pelo escriba Ahmes (seu nome às vezes é dado como A’h-mosé ou Ahmose) por volta de 1650 *a.C.*, ele explica que esses escritos são uma cópia de outros mais antigos do tempo de Ne-ma’et-Re (Amenemhet III), o que dataria o trabalho da última metade do século XIX *a.C.* O papiro, contém 84 problemas e revela que a operação fundamental da aritmética egípcia era a adição. A base do sistema de numeração era decimal.
> O papiro de Moscou foi comprado no Egito em 1893 pelo egiptólogo V. S. Golenishchev. Originalmente foi conhecido como papiro de Golenishchev mas, quando e 1917, foi comprado pelo Museu de Belas Artes de Moscou, passou a ser conhecido po papiro de Moscou. O papiro foi escrito em hierático por volta de 1850 a.C. por um escriba desconhecido. Tem cerca de 8 cm de largura e 5 metros de comprimento. (PINEDO, 2006, p. 10 e 11)

As frações egípcias eram representadas por inscrições hieroglíficas, com um sinal oval alongado sobre o denominador. Os cálculos eram complicados, pois o sistema de numeração usado na época, naquela localidade, os símbolos repetiam-se muitas vezes. Como pode ser visto na Figura 01.

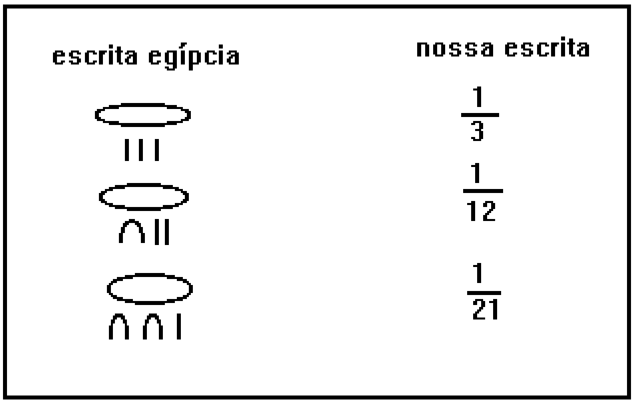


Figura 01 – As frações egípcias
Fonte: http://educar.sc.usp.br/matematica/m5p1t6.htm

Assim como os egípcios, outros povos também criaram o seu próprio sistema de numeração. Porém, na hora de efetuar os cálculos, em qualquer um dos sistemas empregados, as pessoas sempre esbarravam em alguma dificuldade.

Apenas por volta do século III a.C. começou a se formar um sistema de numeração bem mais prático e eficiente do que os outros criados até então: o sistema de numeração romano.

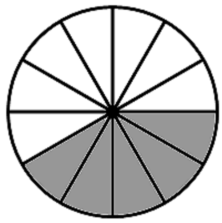
2.2 As Frações de Hoje

Atualmente os números fracionários representam uma importante ferramenta, não somente como número racional e para indicar o resultado de divisões e medidas, mas principalmente na relação entre as quantidades de duas grandezas, também conhecido como razão entre dois números.

De modo geral, são chamados de frações, e representados por $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b não nulo, os números utilizados para representar partes de figuras ou de números. Em outras palavras, pode-se dizer que uma figura ou um número foi divido em b partes (denominador) e dessas foram tomadas ou destacadas a partes (numerador).

Entre todas as utilidades de um número fracionário, destaca-se a representação da parte de um todo ou da quantidade de partes de um todo, em outras palavras, pega-se um objeto, dividi-o em partes e destaca-se algumas dessas partes. Nesse contexto o número fracionário serve para representar cada uma dessas partes ou uma quantidade delas. Como exemplos têm-se as figuras 02 e 03 logo a seguir.

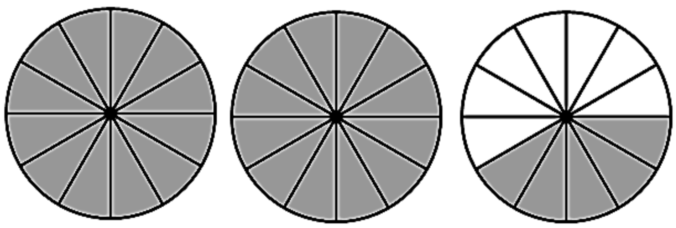
Toda fração menor que um inteiro, ou seja, quando o numerador é menor do que o denominador, é chamada de fração própria (Figura 02).



$$\frac{5}{12}$$

Figura 02 – Fração própria
Fonte: Elaborado pelo autor

E toda fração maior que um inteiro, ou seja, quando o denominador é maior que o numerador, é chamada de fração imprópria (Figura 03).



$$\frac{29}{12}$$

Figura 03 – Fração imprópria
Fonte: Elaborado pelo autor

Frações equivalentes são frações diferentes que representam a mesma quantidade. Uma pode ser obtida por meio de outra multiplicando ou dividindo numerador e denominador ao mesmo tempo pela mesma quantidade.

Exemplos:

$$\frac{2}{5}{}^{\times 3}_{\times 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{12}{16}{}^{\div 4}_{\div 4} = \frac{3}{4}$$

Para somar ou subtrair frações deve-se considerar dois casos: o primeiro caso é quando as frações tiverem denominadores iguais e o segundo, quando os denominadores forem diferentes.

No primeiro caso basta fazer uma soma direta de numeradores, conservando o denominador, enquanto no segundo caso, como diz Marília[2], Se os denominadores são diferentes, não poderemos somar ou subtrair assim, porque teremos partes diferentes da unidade. Por isso, trocamos as frações dadas por outras, equivalentes e de mesmo denominador.

Exemplos:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=\frac{20}{24}-\frac{9}{24}=\frac{11}{24}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}-\frac{6}{12}=\frac{13}{12}$$

Observe que nas duas últimas, os denominadores 24 e 12 são obtidos, respectivamente, calculando o menor múltiplo comum entre os denominadores, ou melhor: mmc (6, 8) = 24 e mmc (2, 4, 6) = 12. No entanto, o denominador comum não precisa ser necessariamente o menor múltiplo comum entre os denominadores, pode ser qualquer múltiplo comum entre eles.

Desse fato pode-se definir um método simplificado para efetuar essa soma ou subtração: basta multiplicar o numerador e o denominador de uma das frações pelo denominador da outra e vice-e-versa, e ao final simplificar o resultado.

Exemplo:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=\frac{5^{\times 8}}{6_{\times 8}}-\frac{3^{\times 6}}{8_{\times 6}}=\frac{40}{48}-\frac{18}{48}=\frac{22^{\div 2}}{48_{\div 2}}=\frac{11}{24}$$

No caso de se ter mais de duas frações, três, por exemplo, são dois modos. O

[2] CENTURIÓN, Marília et al. – *Matemática na medida certa: 5ª série, 6º ano do Ensino Fundamental* – Ed. reform. – São Paulo: Scipione, 2007, p. 157.

primeiro seria aplicar a propriedade associativa, ou melhor, efetuar a operação, conforme descrito acima, entre duas frações e o resultado adicionar ou subtrair à próxima; o segundo modo seria simplesmente multiplicar numerador e denominador de uma das frações pelos denominadores das outra e assim por diante, e ao final efetuar a simplificação da fração obtida.

Exemplo:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{3^{\times 6\times 2}}{4_{\times 6\times 2}}+\frac{5^{\times 4\times 2}}{6_{\times 4\times 2}}-\frac{1^{\times 6\times 4}}{2_{\times 6\times 4}}=\frac{36}{48}+\frac{40}{48}-\frac{24}{48}=\frac{52^{\div 4}}{48_{\div 4}}=\frac{13}{12}$$

No caso da multiplicação, GIOVANNI (2007) diz o seguinte:

> Para multiplicar um número natural por um número representado por uma fração, multiplicamos o número natural pelo numerador da fração e conservamos o denominador. (...) Para multiplicar dois números escritos na forma de fração, multiplica-se o numerador de uma pelo numerador da outra, e o denominador de uma pelo denominador da outra. (GIOVANNI 2007, p. 89)

Exemplos:

$$6\cdot\frac{2}{13}=\frac{6\cdot 2}{13}=\frac{12}{13}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

Para compreender com facilidade a divisão entre dois números fracionários, basta considerar a divisão como uma “pseudo-operação”[3], ou seja, a divisão “não existe”, o que ocorre na realidade é a multiplicação pelo inverso, por isso que se conserva a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda.

Exemplo:

$$\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$$

---

[3] Aqui foi feito um trocadilho com o conceito de operação matemática utilizando-se do prefixo pseudo, que, segundo o Dicionário inFormal (http://www.dicionarioinformal.com.br/pseudo/) é um “termo de composição gramatical com a ideia de ‘falso’, com o qual se pode formar milhares de palavras”. Neste caso, a divisão é colocada como uma operação que não existe, o que se faz é uma multiplicação pelo inverso, que na prática gera uma divisão.

3 “*TRI GONO METRIEN*”

A palavra Trigonometria tem origem grega: TRI (três), GONO (ângulo) e METRIEN (medida). Etimologicamente, significa medida de triângulos. Trata-se, assim, do estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Apesar dos egípcios e dos babilônios terem utilizado as relações existentes entre lados e ângulos dos triângulos, para resolver problemas, foi a atração pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria. Daí que, historicamente a Trigonometria apareça muito cedo associada à Astronomia.

Isso é evidenciado por CHACE (1986)

> No Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que dos 84 problemas, quatro fazem menção ao *seqt* de um ângulo. Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra, mas pelo contexto, pensa-se que o *seqt* de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo formado entre uma face e a base dessa pirâmide.
> Como já foi dito, o Papiro Ahmes é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias. Ele é uma cópia de um antigo papiro do sec XIX a.C. que esteve em poder do escriba Ahmes. Foi adquirido no Egito por H. Rhind e por isso é usualmente conhecido como Papiro Rhind (CHACE, 1986, p. 37).

E também por SMITH (1958),

> Os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C, uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até os nossos dias (SMITH, 1958, p. 42).

EVES (1995) evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta essencial para observação dos fenômenos astronômicos pelos povos antigos, uma vez que a documentação relativa a esse período é praticamente inexistente.

> Segundo o historiador Heródoto (490 – 420 a.C.), foram os gregos que deram o nome *gnômon* ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C..
> O mais antigo *gnômon* de que se tem conhecimento e que chegou até os dias atuais,

> está no museu de Berlim. (EVES, 1995, p. 32)

No séc. III a.C., Arquimedes de Siracusa no seguimento do trabalho que desenvolveu para calcular o perímetro de um círculo dado o respectivo raio, calculou o comprimento de grande número de cordas e estabeleceu algumas fórmulas trigonométricas.

As medições e os resultados dos cálculos feitos pelos astrônomos eram registados em tábuas. As tábuas babilônicas revelam algumas semelhanças com as tábuas trigonométricas.

Segundo COSTA (1997),

> Surgiu então, na segunda metade do século dois a.C., um marco na história da trigonometria: Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.). Influenciado pela matemática da Babilônia, acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isto parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1º em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto. Hiparco baseava-se numa única função, na qual a cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada a respectiva corda.
> Hiparco construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de ângulos de 0º a 180º.
> Assim, Hiparco representou um grande avanço na Astronomia e por isso recebeu o título de "Pai da Trigonometria". (COSTA, 1997, p. 6)

A relação da Astronomia com a Trigonometria fez com que esta se desenvolvesse aplicada a triângulos curvos de lados curvilíneos que se formam sobre a superfície esférica. Assim, a Trigonometria Esférica desenvolveu-se anteriormente à Trigonometria Plana, o que se deveu ao fato de a Trigonometria Esférica ser muito utilizada nos cálculos astronômicos e na navegação, sendo sistematizada por árabes e hindus até meados do séc. XIII. A contribuição destes foi bastante grande, tendo calculado tabelas de senos para intervalos com variação de 15'. A palavra sinus – seno – é a tradução, em latim, da grafia árabe do sânscrito *jiva*. O seno correspondia à metade da corda do arco duplo e os árabes e os hindus usavam, geralmente, círculos de raio unitário.

Contudo, foi Euler (séc. XVIII) que, ao usar invariavelmente o círculo de raio um, introduziu o conceito de seno, de cosseno e de tangente como números, bem como as notações atualmente utilizadas[4].

As funções trigonométricas como o seno, o cosseno e a tangente, relacionam medidas de ângulos, a medidas de segmentos de reta a eles associados.

Atualmente a trigonometria não se limita a estudar os triângulos. Encontramos aplicações na mecânica, electricidade, acústica, música, astronomia, engenharia, medicina,

---

[4] COSTA, Nielce M. Lobo da – *A História da Trigonometria* – PUC-SP, 1997, p. 15

enfim, em muitos outros campos da atividade humana.

A partir deste contexto histórico, considera-se que o estudo da Trigonometria pode ser divida em três etapas, sendo uma a "expansão" da anterior. Elas estão assim definidas:

- A primeira etapa pode ser considerada como a Trigonometria dos Ângulos Agudos. Em outras palavras, é a trigonometria no triângulo retângulo. Neste caso os valores de seno, cosseno e tangente são obtidos pela razão entra as medidas de dois lados do triângulo retângulo, daí o nome Razões Trigonométricas.
- A segunda etapa seria a primeira "expansão" sofrida pela Trigonometria. Nesta etapa são estudados os valores de seno, cosseno e tangente na primeira volta do ciclo trigonométrico. Aqui é inserido, principalmente, o conceito de simetria no ciclo, entre outros assuntos.
- A terceira e última etapa é aquela em que será atribuído a cada ponto do ciclo trigonométrico um número real. Como estes são infinitos, os arcos também serão considerados infinitos, ou seja, para qualquer arco sempre existirá um valor de seno cosseno e tangente. Nesta etapa um dos conceitos mais importantes abordados é a noção de congruência de arcos.

Por uma questão de simplificação e objetividade e com a pretensão de uma melhor compreensão das atividades propostas por este trabalho, serão abordadas somente as duas últimas etapas e dentro delas apenas os conceitos de seno e cosseno bem como suas funções.

3.1 Arcos de Circunferência

Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo central $A\hat{O}B$, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência.

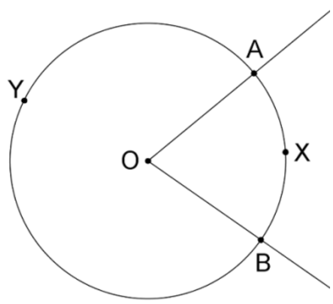


Figura 04 – Arco $A\hat{O}B$
Fonte: Elaborado pelo autor

Arco de circunferência é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por esses dois pontos. Na Figura 04 estão representados os arcos $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$, sendo A e B as extremidades dos arcos.

Uma das unidades de medida de arco é o grau: 1° (um grau) é cada parte de uma circunferência que foi dividida em 360 partes iguais. Diz-se, então, que a circunferência mede 360° (trezentos e sessenta graus).

A medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente, isto é, do ângulo com vértice no centro O e lados que contém A e B.

Para medir arcos e ângulos, também é utilizado o radiano.

> Na Grécia antiga já se sabia que, em qualquer circunferência, a razão entre o perímetro C e o raio r é uma constante. Mais tarde, a metade dessa constante foi nomeada pela letra grega π. Então, $\frac{1}{2}.\frac{C}{r}=\pi$ ou $C=2\cdot\pi\cdot r$ unidades de comprimento. Também para arcos determinados por um mesmo ângulo central, a razão entre o comprimento do arco e raio da circunferência que o contém é constante e representa a medida α do arco, em radianos. (MELLO, 2005, p. 75)

Assim, $1\,rad$ (um radiano) é o arco que tem comprimento igual ao raio da circunferência que o contém.

Portanto, para se determinar a medida de um arco em radiano basta dividir o comprimento do arco pela medida do raio da circunferência que o contém. Logo, a medida da circunferência toda é:

$$\alpha=\frac{C}{r}=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{r}=2\pi\, rad$$

Tendo em vista essas considerações, pode-se estabelecer a seguinte correspondência entre para conversão de unidades:

$$360° \leftrightarrow 2\pi\, rad$$

Ou ainda e de modo mais simplificado:

$$180° \leftrightarrow \pi\, rad$$

Esta última equivalência serve de padrão para a transformação entre as unidades de medida grau e radiano, em outras palavras, para transformar de grau para radiano, por exemplo, monta-se uma regra de três direta e simplifica a fração obtida.

Exemplo: Transformar 120° em radianos

$$\begin{array}{l} 180° \to \pi\, rad \\ 120° \to x\, rad \end{array} \Rightarrow \frac{180}{120} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 120\pi \Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} = \frac{120\pi^{\div 60}}{180_{\div 60}} = \frac{2\pi}{3}\, rad$$

O processo contrário, ou seja, transformar de radiano para grau é feito de modo análogo, ou simplesmente utilizando a equivalência supracitada, em outras palavras, substitui-se $\pi\, rad$ por 180° e efetuam-se as operações indicadas.

Exemplo: Transformar $\frac{5\pi}{6}\, rad$ em grau

$$\frac{5\pi}{6}\, rad \cong \frac{5 \cdot 180°}{6} = 150°$$

3.2 Ciclo Trigonométrico

Pode-se percorrer uma circunferência em dois sentidos: no sentido horário e no sentido anti-horário. Quando um deles é escolhido e denominado positivo, diz-se que o círculo está orientado.

Na Figura 05 temos um arco $\widehat{AB}$ e depois estabelecidos seus sentidos positivo e negativo.

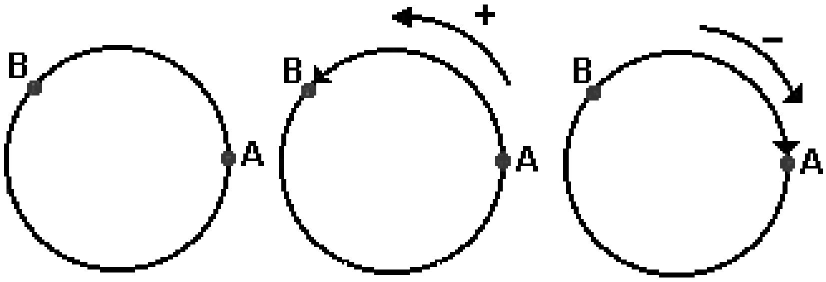


Figura 05 – Arcos orientados

Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/trigo01.htm

Tomando sobre o plano um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $u\hat{O}v$, como mostrado na Figura 06, a circunferência orientada de centro na origem do sistema, de raio unitário e cujo sentido anti-horário, tradicionalmente, na Matemática, é o escolhido para as medidas positivas, logo ficando determinado que o sentido oposto (horário) fornece medidas negativas, é denominada circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico.

Essa escolha de sentido tem como ponto de partida, segundo LIMA (2006),

> "(...) a função de Euler E: $R \rightarrow C$, que faz corresponder a cada número natural t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo: (...) se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, (...) sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum). (...) se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C (...) sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual)." (LIMA, 2006, p. 218)

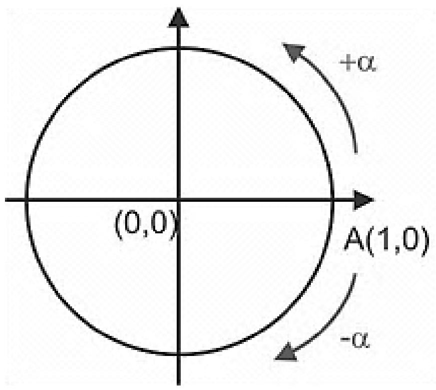


Figura 06 – Ciclo trigonométrico
Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yhvyvczsa7.png

Segundo GIOVANNI (2000),

> Já se sabe que se pode estabelecer uma correspondência um a um (correspondência biunívoca) entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos de uma reta, ou seja, a cada número real corresponde um e um só ponto da reta e vice-e-versa. Essa representação geométrica dos números reais é chamada reta numérica real, ou simplesmente, reta real. (GIOVANNI, 2000, p. 106)

Como exemplo para a definição supracitada é apresentada na Figura 07 alguns números reais com suas respectivas representações geométricas na reta real.

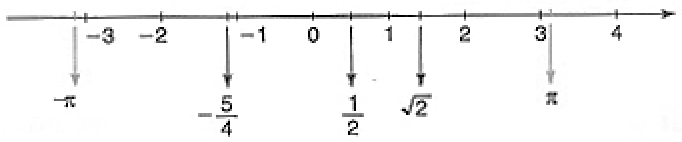


Figura 07 – Reta real
Fonte: GIOVANNI, 2000, p. 106

Agora, a cada ponto sobre essa circunferência será associado um número real x que representará a extremidade de um arco α qualquer, cujo percurso obedece às seguintes características:

- origem no ponto $A(1, 0)$, como mostrado na Figura 06;
- se $x > 0$ o ciclo é percorrido no sentido anti-horário; se $x < 0$ no sentido horário;
- o comprimento do percurso é $|x|$.

O ponto associado ao número x é denominado de imagem de x no ciclo.

Vale observar que

> "(...) essas marcações podem ser feitas dando-se mais de uma volta na circunferência, e mesmo assim, ainda serão chamados de arcos. E ainda, como a circunferência tem raio 1, o seu comprimento é $\ell = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Nesta circunferência, o comprimento de qualquer arco é numericamente igual à sua medida em radianos. Isto significa que fazer um percurso de comprimento x é percorrer um arco de $x\ rad$". (MACHADO, 1986, p. 41)

Os eixos do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes iguais, que são chamadas quadrantes. Para determinar em que quadrante se encontra determinado arco, basta saber em que quadrante está a sua primeira determinação[5].

Tais quadrantes apresentam as seguintes extremidades:

- 1º quadrante: $0° < \alpha < 90°$ ou $0\ rad < \alpha < \frac{\pi}{2}\ rad$
- 2º quadrante: $90° < \alpha < 180°$ ou $\frac{\pi}{2}\ rad < \alpha < \pi\ rad$
- 3º quadrante: $180° < \alpha < 270°$ ou $\pi\ rad < \alpha < \frac{3\pi}{2}\ rad$

[5] A primeira determinação positiva α de um arco é o arco cuja extremidade obedece ao seguinte critério: $0° \le \alpha < 360°$ ou $0\ rad \le \alpha < 2\pi\ rad$.

- 4º quadrante: $270° < \alpha < 360°$ ou $\frac{3\pi}{2}\, rad < \alpha < 2\pi\, rad$

Os arcos que têm a mesma extremidade e diferem apenas pelo número de voltas inteiras são chamados de arcos côngruos.

Exemplos:

$1340° \equiv 260°$, pois $1340° = 360° \cdot 3 + 260°$, ou seja, dá três voltas ao redor do ciclo trigonométrico e tem a mesma extremidade que o arco $260°$.

$\frac{25\pi}{3}\, rad \equiv \frac{\pi}{3}\, rad$, pois $\frac{25\pi}{3} = 2\pi \cdot 4 + \frac{\pi}{3}$, ou seja, dá quatro voltas ao redor do ciclo trigonométrico e tem a mesma extremidade que o arco $\frac{\pi}{3}\, rad$.

3.3 Seno e Cosseno de um Arco

Durante todo o Ensino Fundamental e boa parte do Ensino Médio, os números *sem x* e *cos x* são obtidos no triângulo retângulo, onde *x* representa a medida de um ângulo agudo. Mas o que ocorre se *x* for a medida de um ângulo maior que 90°?

Para responder a esta pergunta, as noções de seno e cosseno são ampliadas para os casos em que *x* representa a medida de um ângulo maior que 90°.

Considere no ciclo trigonométrico o ponto M, que é a imagem do número real x, conforme Figura 08. Considere também o arco $\overset{\frown}{AM}$, que correspondo ao ângulo central de medida x. Seja $\overline{OM}$ o raio do ciclo, e M'' e M' as projeções do ponto M nos eixo *u* e *v*, respectivamente.

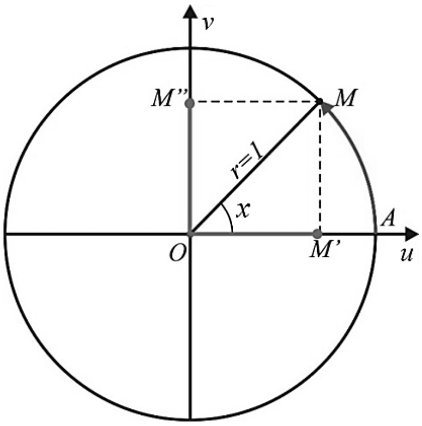


Figura 08 – Seno e cosseno de um arco
Fonte: http://ensinodematemtica.blogspot.com.br/2010/12/funcoes-senocosseno-e-tangente.html

Do triângulo retângulo $OM'M$, tem-se:

$$sen\ x = \frac{M'M}{OM} = \frac{OM''}{1} = OM'' \quad \therefore \quad sen\ x = OM''$$

$$cos\ x = \frac{OM'}{OM} = \frac{OM'}{1} = OM' \quad \therefore \quad cos\ x = OM'$$

Daí se define:

- Seno de x é a ordenada do ponto M .
- Cosseno de x é a abscissa do ponto M .

E ainda, o eixo *v* agora é chamado de eixo dos senos e o eixo *u*, eixo dos cossenos. Os sinais de seno e cosseno podem ser definidos segundo Tabela 01 abaixo.

Tabela 01 – Sinais de seno e cosseno

Quadrante	$sen\ \alpha$	$cos\ \alpha$
1º	+	+
2º	+	–
3º	–	–
4º	–	+

Fonte: Elaborado pelo autor

Essa definição tem a vantagem de não ficar restrita aos ângulos agudos. Agora se pode falar em seno e cosseno de arcos de qualquer medida.

Alguns arcos se destacam dentre os demais por apresentarem valores de seno e cosseno em forma de frações mais simples. Esses arcos são chamados de arcos notáveis.

São eles, relacionados na Tabela 02 abaixo.

Tabela 02 – Arcos notáveis

α		*sen* α	*cos* α
30°	$\frac{\pi}{6}\ rad$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}\ rad$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}\ rad$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Além destes, também são bastante utilizados os senos e cossenos das extremidades dos quadrantes. Daí, a Tabela 02 pode ser complementada com a Tabela 03 abaixo.

Tabela 03 – Extremidades dos quadrantes

α		*sen* α	*cos* α
0°	$0\ rad$	0	1
90°	$\frac{\pi}{2}\ rad$	1	0
180°	$\pi\ rad$	0	–1
270°	$\frac{3\pi}{2}\ rad$	–1	0
360°	$2\pi\ rad$	0	1

Fonte: Elaborado pelo autor

Usando a simetria entre arcos do ciclo trigonométrico, pode-se relacionar o seno e o cosseno de um arco de qualquer quadrante com os valores do primeiro quadrante. Esse procedimento é conhecido como redução ao primeiro quadrante.

Considere os arcos α, no primeiro quadrante, β_2, no segundo quadrante, β_3, no terceiro quadrante, e β_4, no quarto quadrante. Para fazer a redução ao primeiro quadrante, se faz uso das seguintes relações de simetria:

- Redução do segundo para o primeiro quadrante: $\alpha = \pi - \beta_2$.
- Redução do terceiro para o primeiro quadrante: $\alpha = \beta_3 - \pi$.
- Redução do quarto para o primeiro quadrante: $\alpha = 2\pi - \beta_4$

As relações de redução são para arcos cuja medida está em radiano. No caso de sua medida estar em grau, é só substituir π por 180° e 2π por 360°.

3.4 Função Seno e Função Cosseno

Função seno é a função $f : R \to R$ que associa a cada real x o real $OM'' = sen\, x$ (Figura 08), isto é $f(x) = sen\, x$.

Para estudar a função seno, basta fazer variar o valor de x no intervalo $[0, 2\pi]$, a partir de uma tabela de valores de seno já conhecidos.

Tabela 04 – Tabela para desenhar gráfico da função seno

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sen\, x$	0	1	0	-1	0
Pontos	A	B	C	D	E

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir dos valores obtidos na Tabela 04, é possível traçar o gráfico representado na Figura 09.

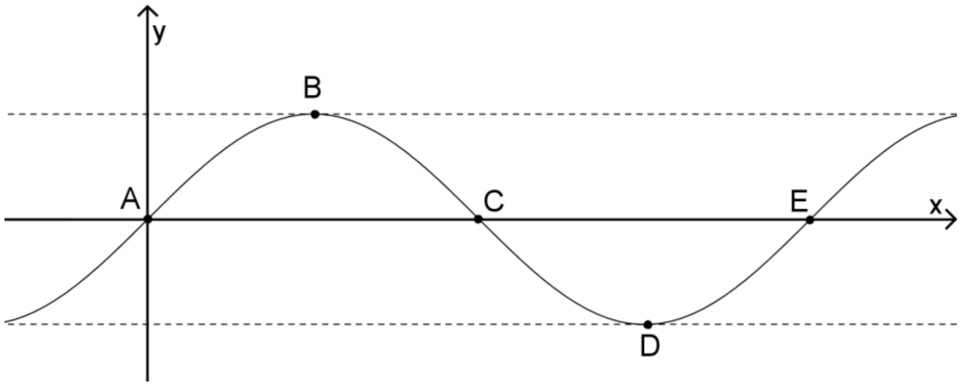


Figura 09 – Gráfico senóide
Fonte: Elaborado pelo autor

A partir do gráfico da função $y = sen\, x$, pode-se concluir que: o domínio é o conjunto dos números reais; a imagem é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq sen\, x \leq 1$; toda vez que é somado 2π a um determinado valor de x, a função seno assume o mesmo valor e como 2π é o menor número positivo para o qual isso acontece, este valor é chamado de período da função seno, $p = 2\pi$.

Observe que o senóide, no intervalo determinado, apresenta sempre o mesmo comportamento, ou seja, parte do valor médio com concavidade para baixo e decrescente até o ponto mínimo; mantendo a concavidade, muda de sentido até o ponto médio; muda a concavidade, mantendo o sentido até o ponto máximo; mantendo a concavidade, muda o sentido até o ponto médio, e assim sucessivamente.

Função cosseno é a função $f : R \to R$ que associa a cada real x o real $OM' = cos\, x$ (Figura 08), isto é $f(x) = cos\, x$.

Para estudar a função cosseno, basta fazer variar o valor de x no intervalo $[0, 2\pi]$, a partir de uma tabela de valores de cosseno já conhecidos.

Tabela 05 – Tabela para desenhar gráfico da função cosseno

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cos\, x$	1	0	-1	0	1
Pontos	A	B	C	D	E

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir dos valores obtidos na Tabela 05, é possível traçar o gráfico representado na

Figura 10.

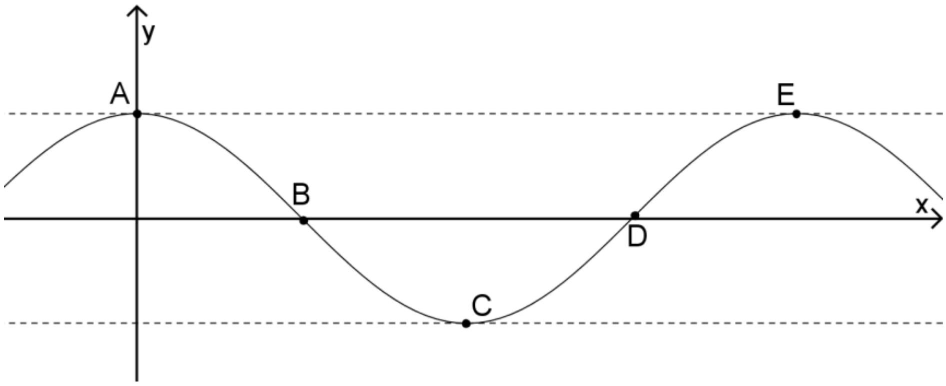


Figura 10 – Gráfico cossenoide
Fonte: Elaborado pelo autor

A partir do gráfico da função *y = cos x*, pode-se concluir que: o domínio é o conjunto dos números reais; a imagem é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$; toda vez que é somado 2π a um determinado valor de x, a função cosseno assume o mesmo valor e como 2π é o menor número positivo para o qual isso acontece, este valor é chamado de período da função cosseno, $p = 2\pi$.

Observe que o cossenóide, no intervalo determinado, também apresenta sempre o mesmo comportamento, neste caso, parte do valor máximo com concavidade para baixo e decrescente até o ponto médio; muda a concavidade, mantendo o sentido até o ponto mínimo; mantendo a concavidade, muda o sentido até o ponto médio; muda a concavidade, mantendo o sentido até o ponto máximo, e assim sucessivamente.

Observa-se ainda que o gráfico da função cosseno forma uma "onda" semelhante à do gráfico da função seno, com deslocamento de $\frac{\pi}{2}\, rad$ para a esquerda.

3.5 Equações Trigonométricas Fundamentais

Segundo IEZZI (2010),

> Sejam *f*(*x*) e *g*(*x*) duas funções trigonométricas da variável real *x*. E sejam D_1 e D_2 seus respectivos domínios. Resolver a equação trigonométrica *f*(*x*) = *g*(*x*) significa determinar o conjunto *S*, denominado de conjunto solução ou conjunto verdade, dos números *r* para os quais *f*(*r*) = *g*(*r*) é uma sentença verdadeira. Observemos que uma condição necessária para que um certo *r* seja uma solução da equação dada é que $r \in D_1$ e $r \in D_2$. (IEZZI, 2010, p. 159)

Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das equações seguintes

- $sen\ x = a$
- $cos\ x = a$
- $tg\ x = a$

denominadas equações fundamentais.

A título de simplificação, neste trabalho será dada atenção apenas às duas primeiras, no entanto, quase todas as aplicações e procedimentos também valem para a terceira.

3.5.1 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $sen\ x = a$

Se $sen\ x = a$, então as imagens de x estão sobre a reta perpendicular ao eixo dos senos nos pontos A e A'.

Neste caso o conjunto solução é dado por: $sen\ x = \begin{cases} a + k \cdot 2\pi \\ \pi - a + k \cdot 2\pi \end{cases}$, sendo k um número inteiro.

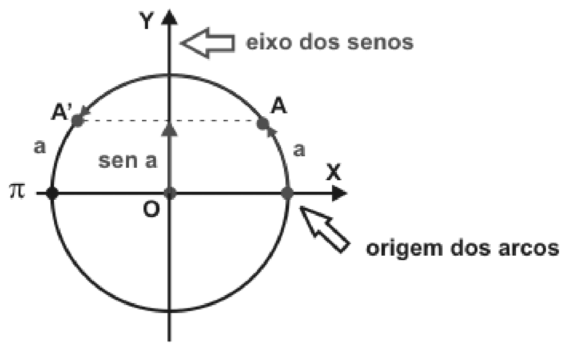


Figura 11 – Solução da equação *sen x = a*
Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsm/trg0406.htm

3.5.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $cos\ x = a$

Se $cos\ x = a$, então as imagens de x estão sobre a reta perpendicular ao eixo dos cossenos nos pontos A e A'.

Neste caso o conjunto solução é dado por: $cos\ x = \begin{cases} a + k \cdot 2\pi \\ -a + k \cdot 2\pi \end{cases}$, sendo k um número inteiro.

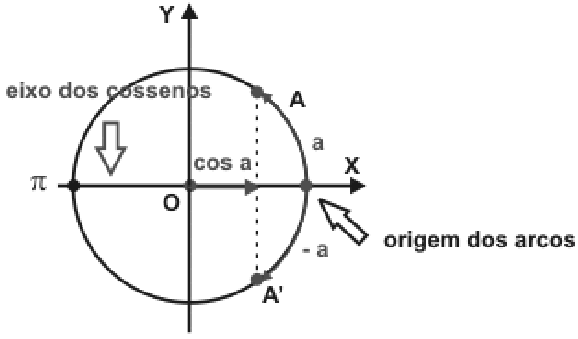


Figura 12 – Solução da equação *cos x = a*
Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsm/trg0406.htm

4 PROBLEMAS E APLICAÇÕES

A partir de agora, o que se propõe neste trabalho não é desconstruir o que já foi visto e conceituado até então, mas propor novas abordagens, complementar outras, mudar a postura e a forma como são trabalhados, no intuito de facilitar o entendimento e a aplicabilidade por parte dos alunos, uma vez que tais conceitos são colocados, na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio, de forma técnica e extremamente teórica.

A unidade de medida de arco utilizada nas aplicações será o radiano. Isso se deve pelo fato de que é essa a unidade de media padrão utilizada na Trigonometria no Ciclo, pois, como já foi definido nesse trabalho, "a cada ponto do Ciclo Trigonométrico será associado um número real que é a medida desse arco em radiano"[6]. E, também, por ser a unidade que mais se utiliza de números fracionários para sua representação.

4.1 Aplicação 1: Frações e Arcos Trigonométricos

Como primeira aplicação para demonstrar a integração entre frações e trigonometria, deseja-se marcar, sobre uma circunferência de centro O raio r qualquer, um arco com media em radiano.

O que ocorre na maioria dos livros didáticos, principalmente naqueles analisados para este trabalho, é que a marcação sobre o ciclo trigonométrico de arcos, leva em consideração apenas comparação com as extremidades dos quadrantes do ciclo trigonométrico, ou, com relação à unidade de medida radiano, a abordagem é feita por meio de sua definição, ou seja, 1 rad é medida do arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

A vantagem da atividade aqui proposta, é que se pode fazer a marcação de um arco sobre a circunferência, com medida exata, somente utilizando uma fração do π. E, caso seja necessário sua medição em graus, basta fazer a conversão, substituindo $\pi\, rad$ pelo seu

[6] Vide último parágrafo da p. 24.

equivalente, ou seja, 180°.

Considere um arco de circunferência com medida $\frac{7\pi}{6}\,rad$. Localizar a imagem desse arco sobre o Ciclo Trigonométrico.

1º passo – A fração $\frac{\pi}{6}$ indica que metade do Ciclo Trigonométrico deverá ser dividida em seis partes (arcos) iguais. Logo, o Ciclo Trigonométrico completo estará dividido em doze partes (arcos) iguais, cada uma deles medindo $\frac{\pi}{6}\,rad$.

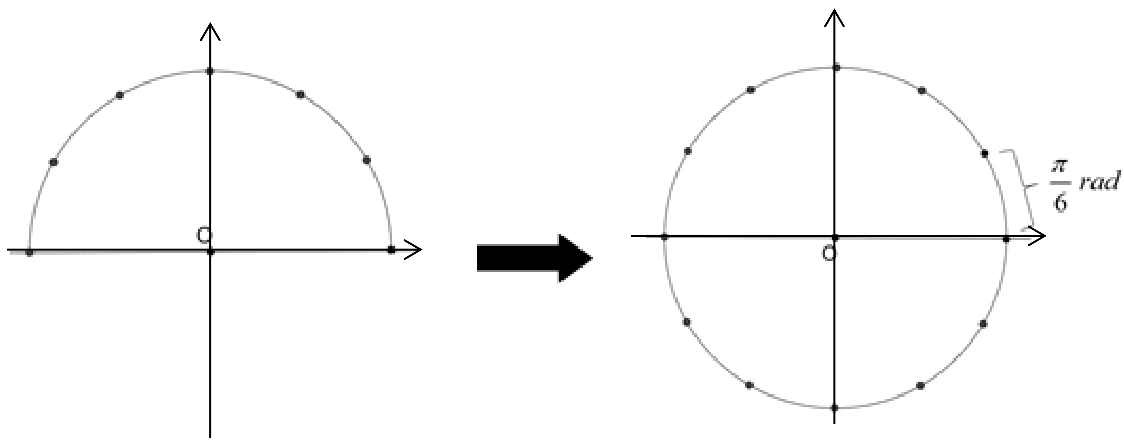


Figura 13 – Circunferência divida em doze partes (arcos)
Fonte: Elaborado pelo autor

2º passo – Agora basta contar a partir do ponto de origem dos arcos, que é o ponto de intersecção da circunferência com o eixo vertical no sentido positivo, sete partes (arcos) no sentido anti-horário, que é o sentido positivo do Ciclo Trigonométrico, e destacar o arco pretendido.

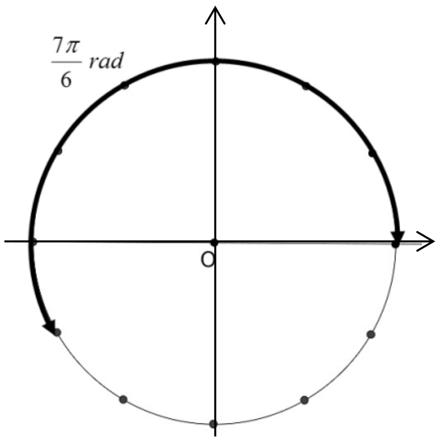


Figura 14 – Arco com medida $\frac{7\pi}{6}\,rad$
Fonte: Elaborado pelo autor

4.2 Aplicação 2: Frações e Senos e Cossenos

Nesta aplicação, o objetivo principal é ressaltar a importância de duas operações entre frações e fornecer um procedimento que possa facilitar o cálculo de seno e cosseno no ciclo trigonométrico.

Calcular $sen\,\frac{13\pi}{4}$

1º passo – Inicialmente, o arco dado deve ser dividido pelo arco da volta, isto é, por $2\pi\,rad$, para descobrir seu arco côngruo e quantas voltas foram dadas ao redor do ciclo trigonométrico.

No entanto, para facilitar essa divisão, utiliza-se uma fração equivalente a $2\pi\,rad$, com denominador 4:

$$2\pi = \frac{2\pi^{\times 4}}{1_{\times 4}} = \frac{8\pi}{4}$$

Agora, basta dividir o número de partes (arcos) iguais a $\frac{\pi}{4}$ do arco dado pelo número de partes (arcos) iguais a $\frac{\pi}{4}$ do arco da volta, ou seja, dividir 13 por 8.

Nessa divisão, obtém-se como quociente 1, que indica o número de voltas completas ao redor do ciclo trigonométrico, e resto 5, que serve para determinar a congruência, ou seja:

$$\frac{13\pi}{4} \equiv \frac{5\pi}{4}$$

2º passo – Utilizando a APLICAÇÃO 1, a extremidade o arco côngruo a $\frac{13\pi}{4}\,rad$, ou seja, $\frac{5\pi}{4}$, é localizada no intuito de estabelecer qual será o sinal do seno e qual redução será aplicada.

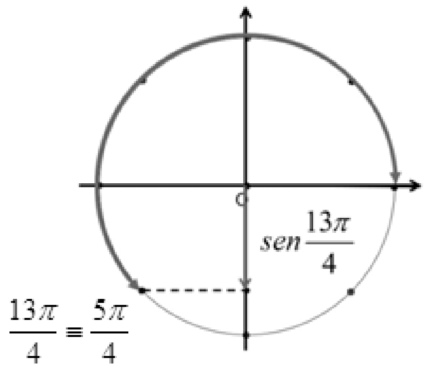


Figura 15 – Seno do arco $\frac{13\pi}{4}$ *rad*
Fonte: Elaborado pelo autor

3º passo – Aplicando a redução a primeiro quadrante adequada, e observando o gráfico na Figura 14, pode-se concluir que:

$$\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi^{\times 4}}{1_{\times 4}} = \frac{5\pi}{4} - \frac{4\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$sen\,\frac{13\pi}{4} = sen\,\frac{5\pi}{4} = -sen\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lembrando, que este último valor, ou seja, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, é obtido consultando a Tabela 02 dos arcos notáveis.

Vale ressaltar que o procedimento aqui adotado para calcular o seno de um arco pode ser aplicado de modo análogo no cálculo do cosseno de um arco. A única coisa que difere é o sinal do cosseno nos quadrantes pares, onde o seno é positivo e o cosseno é negativo.

4.3 Aplicação 3: Frações e o Esboço de Gráficos

Antes de ser apresentada a 3ª aplicação deste trabalho, será mostrado como o esboço do gráfico das funções trigonométricas é feito na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio. Isso se faz necessário para que possa ser feita uma comparação entre o modo padrão e a aplicação aqui apresentada.

Desenhar o gráfico da função $f(x) = 1 + 3cos\ (2x)$.

Inicialmente, como é feito no traçado de qualquer gráfico de função, incialmente é construída uma tabela, a partir da lei de formação da função dada, para obter os pares ordenados e, logo depois, localizar sobre o plano cartesiano, os pontos com os quais será traçado o gráfico.

Tabela 06 – Pares ordenados para traçado do cossenoide

$2x$	x	$cos\ (2x)$	$1 + 3cos\ (2x)$	(x, y)
0	0	1	$1+3\cdot 1=4$	$A(0, 4)$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$1+3\cdot 0=1$	$B\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
π	$\frac{\pi}{2}$	-1	$1+3\cdot(-1)=-2$	$C\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	0	$1+3\cdot 0=1$	$D\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$
2π	π	1	$1+3\cdot 1=4$	$E(\pi, 4)$

Fonte: Elaborado pelo autor

De posse desses dados o cossenoide pode ser traçado.

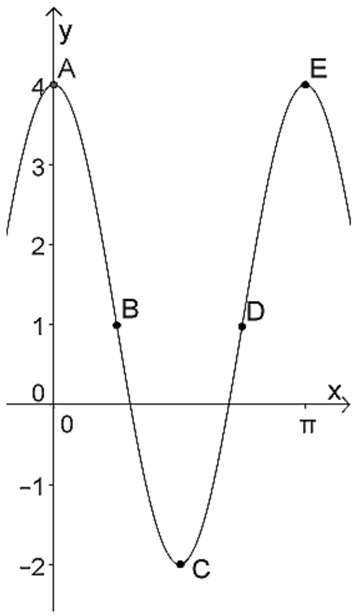


Figura 16 – Traçado do cossenoide
Fonte: Elaborado pelo autor

Com relação às leis de formação das funções seno e cosseno, as seguintes generalizações podem ser consideradas:

$$f(x) = a + b \cdot sen\,(mx + n)\text{, com } b \cdot m \neq 0$$
$$f(x) = a + b \cdot cos\,(mx + n)\text{, com } b \cdot m \neq 0$$

Os parâmetros acima são assim classificados:

- a : é o valor médio da função;
- b : indica a amplitude;
- m : controla o período $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$
- n : produz translação do gráfico no sentido do eixo das abscissas.

Dizer que as funções seno e cosseno têm imagens no intervalo $[-1, 1]$, significa dizer que os valores mínimos e máximos de seno e cosseno são -1 e 1, respectivamente. Em outras palavras:

$$\begin{aligned} & y \in [-1, 1] \\ & \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \\ & \Rightarrow a + b \cdot (-1) \leq y \leq a + b \cdot 1 \\ & \Rightarrow a - b \leq y \leq a + b \\ & \Rightarrow \text{Im}_f = [a - b,\, a + b] \end{aligned}$$

A única variação que pode ocorrer no método acima é quando o valor do parâmetro b for negativo. Neste caso, é necessário fazer um ajuste na ordem das extremidades do intervalo imagem dessas funções.

Nessas condições, abordando as leis das funções seno e cosseno como descrito acima e levando em consideração os parâmetros destacados, a construção dos gráficos dessas funções pode ser visto de uma maneira não muito convencional, não substituindo a construção de tabelas, que por vezes aparece como um complicador na vida do aluno do ensino médio, mas servindo de atalho, quando o objetivo é apenas compreender o comportamento dessas funções por meio de seus gráficos, uma atividade muito presente na Física.

Como o domínio das funções seno e cosseno é o conjunto dos números reais, para obter um esboço do gráfico basta levar em consideração apenas o período e a imagem destas.

Para exemplificar esta terceira aplicação, será feito um esboço do gráfico de uma função cosseno (cossenoide), mas de modo análogo pode ser aplicado no esboço do gráfico de uma função seno (senóide).

Desenhar o gráfico da função $f(x) = 1 + 3cos\ (2x)$.

1º passo – Estabelecer o período e a imagem dessa função, por meio dos parâmetros $a = 1$, $b = 3$ e $m = 2$.

$$p = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{Im}_f = [a - b,\ a + b] = [1 - 3, 1 + 3] = [-2,\ 4]$$

2º passo – Este passo é divido em 5 etapas:

1 – Sobre o eixo x, marca-se o período dessa função: π;

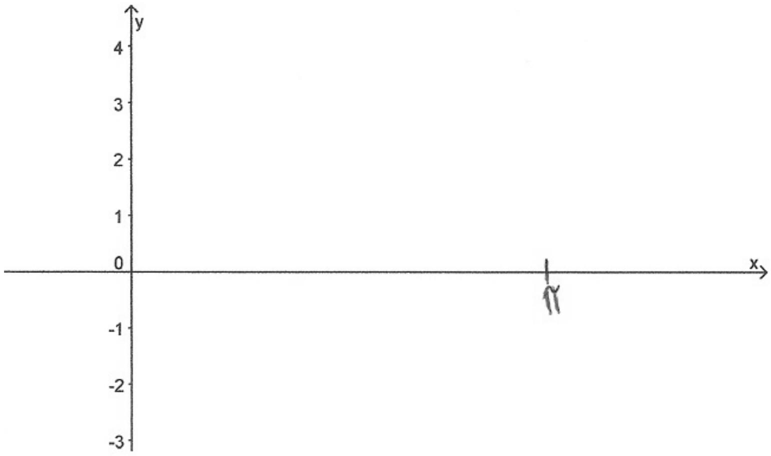


Figura 17 – Aplicação 3, 2º passo, etapa 1
Fonte: Elaborado pelo autor

2 – Divide-se esse período ao meio, marcando a abscissa $\frac{\pi}{2}$;

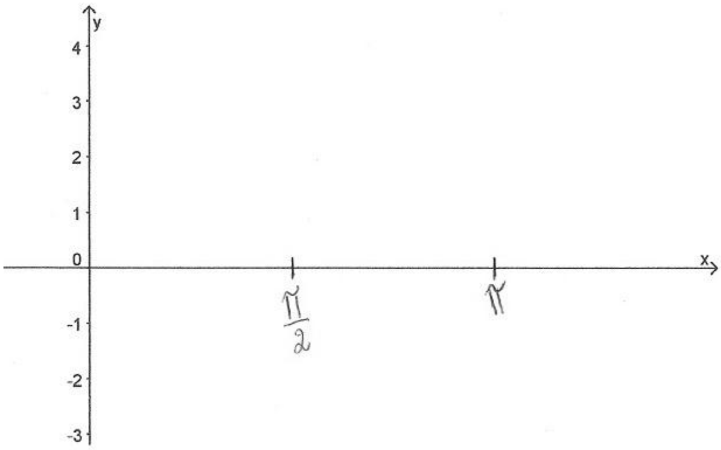


Figura 18 – Aplicação 3, 2º passo, etapa 2
Fonte: Elaborado pelo autor

3 – Dividindo novamente ao meio, marcando a abscissa $\frac{\pi}{4}$;

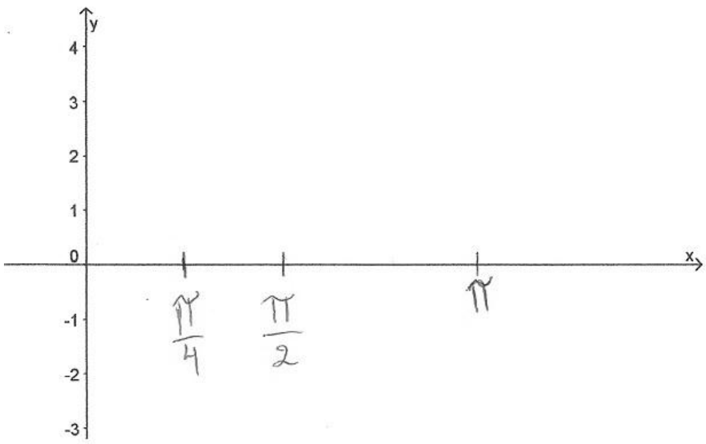


Figura 19 – Aplicação 3, 2º passo, etapa 3
Fonte: Elaborado pelo autor

4 – Conte três partes iguais a $\frac{\pi}{4}$, marcando a abscissa $\frac{3\pi}{4}$;

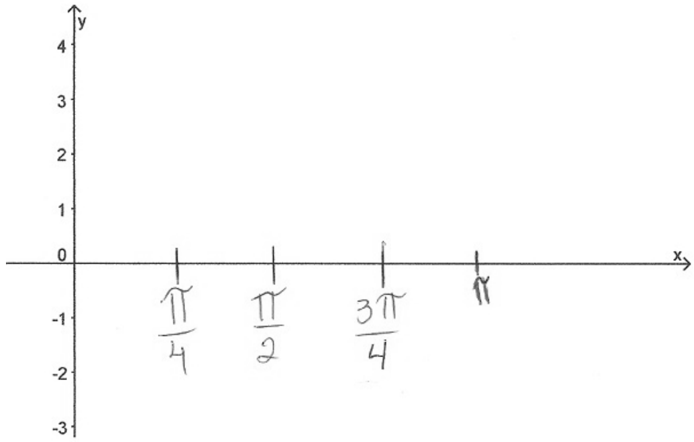


Figura 20 – Aplicação 3, 2º passo, etapa 4
Fonte: Elaborado pelo autor

5 – Por ultimo, no eixo y, são marcadas as ordenadas -2, valor mínimo da função, 4, valor máximo da função, e 1, valor médio da função.

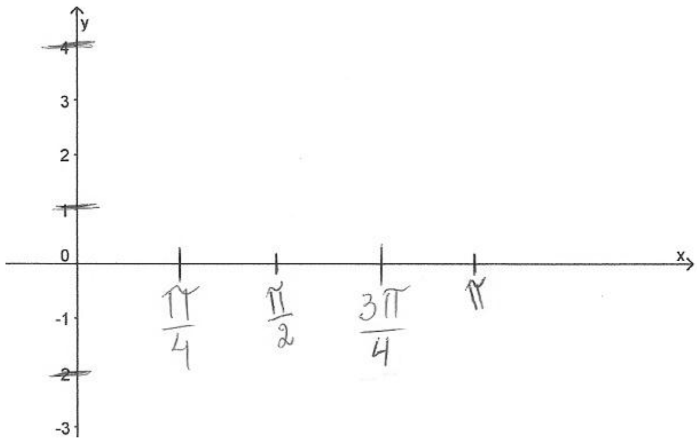


Figura 21 – Aplicação 3, 2º passo, etapa 5
Fonte: Elaborado pelo autor

3º passo – Levando em consideração as observações feitas anteriormente sobre o comportamento do gráfico cossenoide, são marcados os pontos que servirão para traçar o esboço do gráfico.

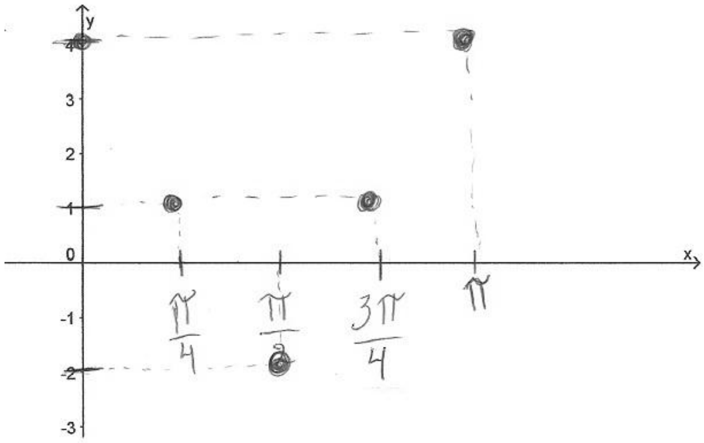


Figura 22 – Aplicação 3, 3º passo, pontos
Fonte: Elaborado pelo autor

4º passo – E, o gráfico é finalmente desenhado.

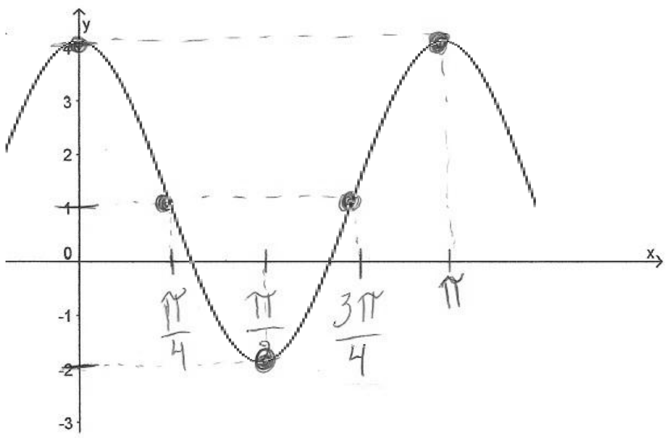


Figura 23 – Aplicação 3, 3º passo, gráfico
Fonte: Elaborado pelo autor

4.4 Aplicação 4: Frações e o Conjunto Solução das Equações Trigonométricas

Mais uma vez, antes da aplicação ser apresentada, será mostrado um exemplo de resolução de uma Equação Trigonométrica, baseada nos mesmos moldes como são abordados nos livros didáticos do Ensino Médio.

Em outras palavras, como diz IEZZI (2004)

> Quando desejamos obter as soluções de uma equação pertencentes a um certo intervalo *I*, seguimos a sequência de operações abaixo:
> 1º) resolvemos normalmente a equação, não tomando conhecimento do intervalo *I*, até obtermos a solução geral;
> 2º) obtida a solução geral, quando necessariamente aparece a variável *k* inteira, atribuímos a *k* todos os valores inteiros que acarretem $x \in I$.

> O conjunto solução será formado pelos valores de x calculados com os valores escolhidos para k. (IEZZI, 2004, p. 214)

Determine $x \in [0,\ 2\pi]$ tal que $2 \cdot sen\ x = 1$.

Solução:

A solução geral da equação $sen\ x = \frac{1}{2}$ é

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Se o objetivo é obter $0 \le x \le 2\pi$, deve-se atribuir a k o valor 0. Então:

$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

Agora, o intuito desta quarta aplicação é utilizar o que foi feito na APLICAÇÃO 1 para facilitar a obtenção da solução de uma equação fundamental em um intervalo específico.

Mais uma vez, cabe ressaltar, que o que é feito na maioria dos livros didáticos e que foi mostrado anteriormente, é que tal solução específica geralmente é obtida apenas pela solução geral, ou expressão geral de arcos côngruos, e aqui será proposta uma forma de se chegar a tal solução, utilizando os procedimentos já mostrados neste trabalho.

Determinar a solução da equação $sen\ x = \frac{1}{2}$, com $x \in [0,\ 2\pi]$.

1º passo – Inicialmente, é marcada sobre o eixo das ordenadas (eixo dos senos) a medida $\frac{1}{2}$;

2º passo – Por essa marcação é traçada uma reta sobre essa ordenada, paralela ao eixo das abscissas;

3º passo – A reta corta o ciclo trigonométrico em dois pontos, x_1 e x_2, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, que são as soluções da equação.

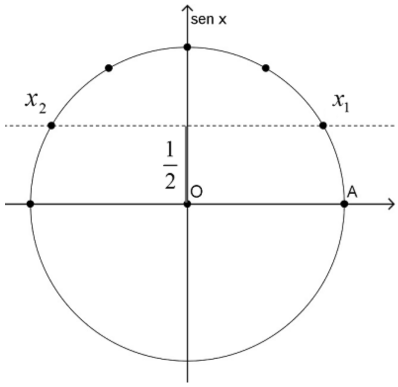


Figura 24 – Projeção sobre o eixo dos senos
Fonte: Elaborado pelo autor

4º passo – x_1 é obtido consultando a Tabela 1 dos arcos notáveis, logo: $x_1 = \frac{\pi}{6}\,rad$.

5º passo – Como foi visto na Aplicação 1, a fração acima indica que metade da circunferência deve ser dividida em seis partes iguais. Logo, o valor de x_2 é obtido contando a quantidade de partes iguais a $\frac{\pi}{6}$. Portanto, $x_2 = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\,rad$.

Daí tem-se $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.

Determinar a solução da equação $cos\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, com $x \in [0, 2\pi]$.

São repetidos os três primeiros passos da resolução da equação anterior. No entanto, não se tem nenhuma das soluções no primeiro quadrante.

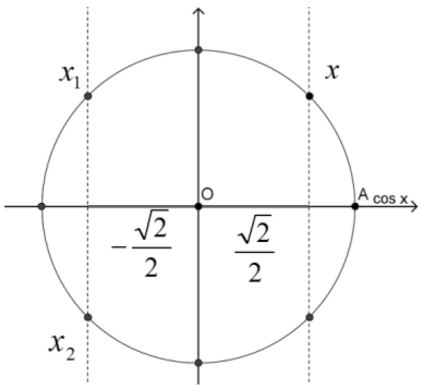


Figura 25 – Projeções sobre o eixo dos cossenos
Fonte: Elaborado pelo autor

Neste caso, é feita uma segunda marcação sobre esse eixo, agora no sentido positivo, mais precisamente sobre a ordenada $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e traçada por este ponto uma nova projeção. Essa segunda projeção corta o primeiro quadrante do ciclo trigonométrico no ponto x.

Agora, são dados os passos 4 e 5 da resolução anterior para obter a solução da equação dada. Logo: $x_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ rad$ e $x_2 = 7 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}\ rad$

Daí tem-se $S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi idealizado e produzido, com todo respeito, não pensando nos Mestres e Doutores da Matemática, mas sim no aluno do Ensino Médio, com todos os seus paradigmas, dúvidas, questionamentos e dificuldades pertinentes não somente à idade, mas principalmente em relação a esta etapa de sua escolaridade.

É um trabalho que aborda conceitos simples, sim, mas repleto de detalhamentos acerca de assuntos que perturbam o imaginário do aluno na educação básica e que acarreta uma enorme deficiência desde a educação fundamental, indo até ao ensino superior: as Frações e a Trigonometria.

Esta última é uma área da Matemática que aparentemente tem perdido muito espaço no rol dos assuntos mais importantes – não que exista um assunto mais importante que outro – na vida acadêmica de muitos alunos, uma vez que o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM prioriza outros assuntos considerados mais presentes no cotidiano das pessoas. Mas continua sempre presente em outras ciências, como, por exemplo, a Física, no estudo da Cinemática e da Ondulatória.

Cabe ressaltar que as propostas aqui apresentadas não têm o intuito de substituir nada do que já é ensinado ou da forma como os conteúdos são trabalhados, muito pelo contrário, a intenção é de agregar ao tradicional alguns métodos mais simplificados, ajudando o aluno a entender o conteúdo mais rapidamente e também com maior eficácia.

Vale lembrar aqui que um dos grandes objetivos implícitos do Ensino Médio é a preparação para o Vestibular. Uma prova que exige mais do que conhecimento, demanda também de agilidade e paciência. E é aqui que este trabalho encontra seu triunfo, quando aborda assuntos morosos e complexos de uma forma mais simples e ágil.

Foram apresentas apenas quatro atividades de alguns tópicos, porém as ideias apresentadas podem ser aplicadas de uma forma mais ampla, abrangendo outras partes, não somente da Trigonometria, mas também de outras áreas da Matemática.

Não menos importante, os números fracionários são abordados de forma indireta, não somente para enfatizar e auxiliar os conceitos trigonométricos, mas também para propiciar uma oportunidade de aproximar o aluno desta representação numérica, muitas vezes incompreendida e evitada desde as séries finais do Ensino Fundamental.

Esse momento de revisão a aprofundamento traz para o aluno a chance de revisar e aprofundar seus conhecimentos acerca da representação e das operações entre números fracionários, facilitando sua aplicabilidade em outros conteúdos.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro & ZAMPIROLO, Maria José C. de V. – *Novo Praticando Matemática* – São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

Anglo: ensino médio: apostila caderno – São Paulo: Anglo, 2008.

BRASIL – *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2)

CENTURIÓN, Marília et al. – *Matemática na medida certa: 5ª série, 6º ano do Ensino Fundamental* – Ed. reform. – São Paulo: Scipione, 2007.

CHACE, A. B. – *The Rhind Mathematical Papyrus* – volume 8 - Colection Classics in Mathematics Education of The National Council of Teachers of Mathematics – NC Classics TM 2ª Edição, U.S.A., 1986.

DANTE, Luiz Roberto – *Matemática: contexto e aplicações* – 4. ed. – São Paulo: Ática, 2007.

EVES, H. – *Introdução à História da Matemática* – trad de Hygino H. Domingues, Editora da UNICAMP, 1995.

GIOVANNI, José Ruy & BONJORNO, José Roberto – *Matemática: uma nova abordagem, vol. 2: versão trigonometria* – São Paulo: FTD, 2000. – (Coleção matemática uma nova abordagem)

__________ & GIOVANNI JR., José Ruy – *Matemática – Pensar e descobrir: Novo* – São Paulo: FTD, 1996, 4 v.

__________, et al. – *A conquista da matemática* – Ed. renov. – São Paulo: FTD, 2007.

IEZZI, Gelson – *Fundamentos da matemática elementar, 3: trigonometria* – 8. ed. – São Paulo: Atual, 2004.

__________, et al – *Matemática: ciências e aplicações – volume 2* - 6ª ed. - São Paulo: Saraiva, 2010.

IFHRA, Georges – *História Universal dos Algarismos* – 2 volumes. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

_________ – *Os números: História de uma grande invenção* – 10ª ed. São Paulo: Globo, 1985.

LIMA, Elon Lages, et. al. – *A matemática do ensino médio – volume 1* – 9. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO, Antonio dos Santos – *Matemática: trigonometria e progressões* – São Paulo: Atual, 1986.

MELLO, José Luiz Pastore: coordenador técnico; BARROSO, Juliane Matsubara: editora responsável – *Matemática, volume único: construção e significado* – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2005.

MENDES, Iran. A. *Números: o simbólico e o racional na História* – São Paulo: Livraria da Física, 2006

MOREIRA, Silva Mendes – *Origem da Necessidade de Números Fracionários* – versão eletrônica: http://www.jornalolince.com.br/2009/jan/pages/historia-origem-necessidade-numeros-fracionarios-jornalolince.com.br_edicao025.pdf último acesso em 22/02/2014.

PINEDO, Christian José Quintana – *História da Matemática I* – Universidade Federal do Tocantins. Campus de Araguaína, Curso de Ciências com Habilitação em Matemática, 2006.

SMITH, D.E. – *History of Mathematics* – vol. I, Dover Publications, INC. New York, 1958.

TOCANTINS– *Proposta Curricular Ensino Médio* – versão preliminar – Secretaria da Educação e Cultura do Tocantins: 2007.

__________ – *Referencial Curricular do Ensino Fundamental das escolas públicas do Estado do Tocantins: Ensino Fundamental do 1º ao 9º ano*. 2ª Edição. Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Tocantins: 2009.

INTERNET

COSTA, Nielce M. Lobo da – *A História da Trigonometria* – PUC-SP, 1997. Versão eletrônica: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf último acesso em 22/04/2014.

http://alfaconnection.net/pag_avsm/trg0406.htm

http://anamixa.tripod.com/id9.html último acesso em 22/02/214.

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yhvyvczsa7.png

http://educar.sc.usp.br/matematica/m5p1t6.htm

http://ensinodematemtica.blogspot.com.br/2010/12/funcoes-senocosseno-e-tangente.html

http://historia-mat.blogspot.com.br/2006/09/descobrindo-frao.html último acesso em

22/02/214.

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/trigo01.htm

http://www.dicionarioinformal.com.br/pseudo/ último acesso em 22/02/2014.