



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

IGO DA COSTA ANDRADE

**UTILIZAÇÃO DE TÉCNICAS DE ANÁLISE DE VÍDEOS DE  
MOVIMENTOS CLÁSSICOS COMO FERRAMENTA DE  
APOIO DIDÁTICO AO ENSINO DE FUNÇÕES AFIM E  
QUADRÁTICA**

PALMAS - TO  
2014

IGO DA COSTA ANDRADE

**UTILIZAÇÃO DE TÉCNICAS DE ANÁLISE DE VÍDEOS DE  
MOVIMENTOS CLÁSSICOS COMO FERRAMENTA DE  
APOIO DIDÁTICO AO ENSINO DE FUNÇÕES AFIM E  
QUADRÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática. Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

PALMAS - TO  
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins**  
**Campus Universitário de Palmas**

---

A553u      Andrade, Igo da Costa  
              Utilização de técnicas de análise de vídeos de movimentos clássicos  
              como ferramenta de apoio didático ao ensino de funções afim e quadrática  
              / Igo da Costa Andrade. - Palmas, 2014.  
              83f.

              Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins,  
              Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em  
              Rede Nacional – PROFMAT, 2014.

              Linha de pesquisa: Matemática.

              Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

              1. Função Afim. 2. Função Quadrática. 3. Tracker. 4. Scilab. 5. Ajuste  
              de curvas. I. De La Cruz, Andrés Lázaro Barraza. II. Universidade Federal  
              do Tocantins. III. Título.

**CDD 510**

---

**Bibliotecária: Emanuele Santos**  
**CRB-2 / 1309**

**TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.**

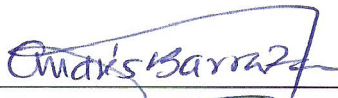
IGO DA COSTA ANDRADE

UTILIZAÇÃO DE TÉCNICAS DE ANÁLISE DE VÍDEOS DE MOVIMENTOS  
CLÁSSICOS COMO FERRAMENTA DE APOIO DIDÁTICO AO ENSINO DE  
FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

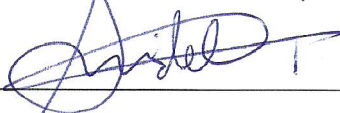
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT  
da Universidade Federal do Tocantins como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Mestre – Área de Concentração: Matemática.  
Orientador: Dr. Andrés Lázaro Barraza De  
La Cruz.

Aprovada em 27/02/2014

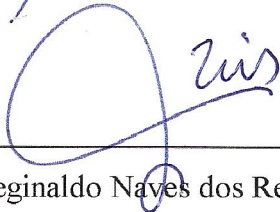
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz (Orientador-UFT)



Prof. Dr. Salmo Moreira Sidel (UFT)



Prof. Dr. Reginaldo Naves dos Reis (IFTO)

*À minha sobrinha Maria Luiza.*  
*Aos meus pais.*  
*À minha namorada e companheira Tatiane.*

# Agradecimentos

Aos familiares e amigos por todo o apoio e incentivo oferecidos nos bons e maus momentos. À minha namorada e companheira Tatiane, pelo carinho e paciência nesta etapa de nossa vida.

À SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À UFT (Universidade Federal do Tocantins) nas pessoas do professor coordenador Andrés Lázaro Barraza De La Cruz e dos professores Christian José Quintana Pinedo, Edson Luiz Kraemer, Pedro Alexandre da Cruz, Gilmar Pires Novaes e Betty Clara Barraza La Cruz pela significativa contribuição acadêmica.

Ao meu orientador, Prof<sup>o</sup> Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz pela confiança depositada e conhecimentos transmitidos para a conclusão deste trabalho.

Aos colegas de mestrado pelo convívio e amizade.

Aos colegas de trabalho pelo incentivo.

A todos os professores, sem os quais este momento não seria possível.

De forma especial, à minha sobrinha Maria Luiza por todo o afeto passado, presente e futuro.

*O objetivo da Ciência não são as próprias coisas,  
como os dogmáticos imaginaram em sua simplicidade,  
mas as relações entre elas.  
(Poincaré)*

# Resumo

A matemática é parte fundamental no processo de ensino permitindo ao estudante o desenvolvimento das capacidades de observação, raciocínio crítico e resolução de problemas em diversas atividades humanas. Entretanto, propor atividades que permitam ao estudante no nível básico o desenvolvimento das competências citadas acima é um grande desafio ao professor. O uso de ferramentas tecnológicas e computacionais tem sido visto como uma alternativa para confrontar este problema. Neste trabalho, é apresentada uma proposta de atividade complementar ao ensino de Funções Afim e Quadrática no ensino básico por meio da análise matemática e computacional de lançamentos oblíquos filmados pelos próprios estudantes. Foram utilizados dois *softwares* livres: o *software Tracker*, utilizado para a obtenção de dados relativos às coordenadas horizontal e vertical em função do tempo a partir da filmagem de um experimento de lançamento oblíquo de uma esfera e o *software Scilab*, usado para determinar equações de posição horizontal em função do tempo e posição vertical em função do tempo e para a construção dos respectivos gráficos. As atividades desenvolvidas permitem ao professor de matemática discutir as propriedades da Função Afim e da Função Quadrática e possibilitam ao estudante compreender a definição e significado das funções envolvidas, desenvolva o senso de investigação científica, a capacidade de se expressar corretamente em linguagem matemática e propor modelos matemáticos para explicar fenômenos.

**Palavras-chaves:** função afim, função quadrática, tracker, scilab, ajuste de curvas.



# Abstract

Mathematics is fundamental part in the teaching process allowing the student to develop the skills of observation, critical thinking and problem solving in various human activities. However, proposing activities that allow the high school student developing the skills mentioned above is a great challenge to the teacher. The use of technological and computational tools has been seen as an alternative to confront this problem. In this work, a proposal for a complementary activity to teaching of Affine and Quadratic Functions in basic education through mathematical and computational analysis of oblique launches filmed by the students is presented. Two free softwares were used: Tracker, used to obtain data on the horizontal and vertical coordinates as a function of time from the filming of an experiment oblique launch of a sphere and Scilab, used to determine equations for horizontal position in relation to time and vertical position in relation to time and to construct the respective graphs. The activities allow the teacher to discuss the mathematical properties of Affine Function and Quadratic Functions and enable the student to understand the definition and meaning of the functions involved, develop a sense of scientific research, the ability to express themselves properly in mathematical language and propose models mathematicians to explain phenomena.

**Key-words:** affine function, quadratic function, tracker, scilab, curve fitting.

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Função Afim. . . . .	17
Figura 2 – Coeficientes da Função Afim. . . . .	18
Figura 3 – Função Quadrática. . . . .	19
Figura 4 – Função Quadrática. . . . .	21
Figura 5 – Vetor posição e coordenadas cartesianas. . . . .	22
Figura 6 – Lançamento oblíquo. . . . .	25
Figura 7 – Tela inicial do <i>Tracker</i> . . . . .	33
Figura 8 – <i>Clip Settings</i> . . . . .	33
Figura 9 – Fita Métrica. . . . .	34
Figura 10 – Translação e Rotação do sistema de referência. . . . .	34
Figura 11 – Tela inicial do Scilab. . . . .	37
Figura 12 – Operações básicas. . . . .	37
Figura 13 – Comandos para plotagem de gráfico em duas dimensões. . . . .	38
Figura 14 – Gráfico em duas dimensões. . . . .	38
Figura 15 – Acessando SciNotes. . . . .	39
Figura 16 – Janela do SciNotes. . . . .	40
Figura 17 – <i>Tracker</i> : Janela inicial. . . . .	45
Figura 18 – <i>Tracker</i> : <i>Clip Settings</i> . . . . .	46
Figura 19 – <i>Tracker</i> : fita métrica. . . . .	46
Figura 20 – <i>Tracker</i> : Ajuste dos eixos coordenados. . . . .	46
Figura 21 – <i>Tracker</i> : Tabela de Colunas Visíveis. . . . .	47
Figura 22 – Scilab: Janela inicial. . . . .	48
Figura 23 – Janela do SciNotes. . . . .	49
Figura 24 – Execução do mini-aplicativo “ajuste-local.sce” para Função Afim. . . . .	49
Figura 25 – Resultado analítico do mini-aplicativo “ajuste-local.sce”. . . . .	50
Figura 26 – Resultado gráfico do mini-aplicativo “ajuste-local.sce”. . . . .	50
Figura 27 – Ajuste-global.sce: resultado analítico para Função Afim. . . . .	53
Figura 28 – Ajuste-global.sce: resultado gráfico para Função Afim. . . . .	53
Figura 29 – Execução do mini-aplicativo ajuste-local.sce para Função Quadrática. . . . .	54
Figura 30 – Ajuste-local.sce: resultado analítico para Função Quadrática. . . . .	55
Figura 31 – Ajuste-local.sce: resultado gráfico para Função Quadrática. . . . .	55
Figura 32 – Ajuste-global.sce: resultado analítico para Função Quadrática. . . . .	57
Figura 33 – Ajuste-global.sce: resultado gráfico para Função Quadrática. . . . .	58

Figura 34 – Configurações iniciais do <i>Tracker</i> . . . . .	62
Figura 35 – Trajetória parabólica. . . . .	63
Figura 36 – Dados: mov-horizontal.txt. . . . .	64
Figura 37 – Dados: mov-vertical.txt. . . . .	64
Figura 38 – Mini-aplicativo “ajuste-local.sce” e Função Afim. . . . .	65
Figura 39 – Mini-aplicativo “ajuste-global.sce” e Função Afim. . . . .	66
Figura 40 – Mini-aplicativo “ajuste-local.sce” e Função Quadrática. . . . .	67
Figura 41 – Mini-aplicativo “ajuste-global.sce” e Função Quadrática. . . . .	68
Figura 42 – Trajetória da bola usando “ajuste-global.sce”. . . . .	69

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Duas funções elementares</b> . . . . .	<b>16</b>
2.1	A Função Afim . . . . .	16
2.2	A Função Quadrática . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Modelagem físico-matemática do movimento bidimensional</b> . . .	<b>22</b>
3.1	Posição, velocidade e aceleração . . . . .	22
3.2	Leis de Newton . . . . .	23
3.3	Movimento de projéteis . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Ajuste de curvas polinomiais: Uma metodologia para o ensino médio</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1	Ajuste a uma Função Afim . . . . .	27
4.2	Ajuste a uma Função Quadrática . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Softwares utilizados</b> . . . . .	<b>32</b>
5.1	<i>Tracker</i> : Vídeo-análise de experimentos de física . . . . .	32
5.1.1	Introdução ao uso do <i>Software Tracker</i> . . . . .	32
5.2	Scilab: Cálculo Numérico . . . . .	35
5.2.1	Operações simples . . . . .	36
5.2.2	Gráficos em duas dimensões com <i>Scilab</i> . . . . .	38
5.2.3	Editor de texto SciNotes . . . . .	39
5.3	Os mini-aplicativos “ajuste-local.sce” e “ajuste-global.sce” . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Atividade proposta</b> . . . . .	<b>42</b>
6.1	Motivação prática . . . . .	42
6.1.1	Problema motivador 1: Tiro livre direto com barreira . . . . .	42
6.1.2	Problema motivador 2: Saque em uma partida de volei . . . . .	43
6.2	Descrição da Atividade . . . . .	45
6.3	Parte 1: Aquisição de dados experimentais . . . . .	45
6.4	Parte 2: Tratamento dos dados . . . . .	48
6.4.1	Caso 1: Movimento Horizontal . . . . .	48
6.4.2	Caso 2: Movimento Vertical . . . . .	54
6.5	Discussão dos resultados junto aos alunos . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Exemplo de aplicação da atividade proposta</b> . . . . .	<b>62</b>

7.1	Aplicação do <i>software Tracker</i> ao Lançamento Oblíquo . . . . .	62
7.2	Aplicação dos mini-aplicativos “ajuste-local.sce” e “ajuste-global.sce” . . .	65
7.2.1	Movimento Horizontal e Função Afim . . . . .	65
7.2.2	Movimento Vertical e Função Quadrática . . . . .	67
7.2.3	Uma função matemática para a trajetória da bola . . . . .	69
<b>8</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>70</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>71</b>
	<b>APÊNDICE A – Matrizes e Sistemas Lineares . . . . .</b>	<b>73</b>
	<b>APÊNDICE B – <i>Script</i> do aplicativo “ajuste-local.sce” . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>APÊNDICE C – <i>Script</i> do aplicativo “ajuste-global.sce” . . . . .</b>	<b>81</b>

# 1 Introdução

As transformações econômicas, sociais e culturais pelas quais o Brasil e o mundo vêm passando sugerem novas formas de se encarar o processo educativo, em particular no Ensino Básico. No Brasil, percebe-se uma tentativa de reformular as práticas de ensino por meio, por exemplo, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996 e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). A LDB define, em sua **Seção IV, Art. 35º**, o ensino médio como etapa final da educação básica (BRASIL, 1996). Pretende-se com isso alterar antigas concepções segundo as quais o ensino médio seria apenas “uma preparação para outra etapa escolar ou para o exercício profissional” (BRASIL, 2007).

A fim de atingir tal objetivo, o ensino médio é estruturado em três áreas: **Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas, Linguagens e Códigos** as quais organizam e interligam as disciplinas, sem eliminá-las ou diluí-las. O objetivo é, portanto, promover ações que permitam ao aluno o desenvolvimento de competências gerais<sup>1</sup> numa perspectiva solidária e interdisciplinar (BRASIL, 2007). Em especial, a área das Ciências da Natureza e Matemática tem por objetivo contribuir para a compreensão do **significado** da ciência e da tecnologia para a vida humana e social, bem como permitir que o aluno, em seu papel de cidadão, participe ativa e solidariamente de questões políticas e sociais relacionados a esta área (BRASIL, 2000).

Uma das principais dificuldades enfrentadas por professores de matemática da educação básica, em especial do ensino médio, é propor atividades que proporcionem as competências gerais citadas acima e que permitam refletir e questionar o vínculo entre a teoria e a experiência, bem como a realidade física na qual o aluno está inserido. Avaliações nacionais de rendimento escolar (BRASIL, 2012) mostram que os estudantes não estão desenvolvendo adequadamente as competências e habilidades esperadas para o seu nível escolar (BRASIL, 2011).

Dentre as diversas ferramentas educacionais utilizadas pelos professores para superar tal dificuldade destaca-se o uso de vídeos, mais geralmente filmes de cinema, documentários e vídeo-aulas (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011).

Atualmente, o vídeo pode ser considerado um recurso didático básico dada sua ampla utilização nos diversos ambientes educacionais, desde o ensino básico ao universitário, passando pelo ensino profissionalizante, nas modalidades presencial e à distância.

<sup>1</sup> Os PCN apresentam três conjuntos de competências: **comunicar e representar; investigar e compreender; contextualizar social ou historicamente** os conhecimentos enquanto o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) cita cinco competências gerais: **dominar diferentes linguagens; compreender processos; diagnosticar e enfrentar problemas reais; construir argumentações; e elaborar proposições solidárias**(BRASIL, 2007)

Entretanto, seu uso ainda pode ser considerado *passivo* no sentido de que caracteriza-se principalmente por “ensinar, ilustrar, informar, divertir, treinar, etc.” sem a possibilidade de interação ou manipulação pelo aluno (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011).

Com a popularização de câmeras de vídeo e o surgimento de *softwares* de edição de vídeos de fácil aquisição<sup>2</sup> e uso, abre-se a possibilidade de mudança do papel do aluno em relação ao vídeo. De mero espectador, o aluno passa a ser um pesquisador já que pode interagir de forma dinâmica e criativa com o evento apresentado no vídeo. Assim, ainda segundo Leitão, Teixeira e Rocha (2011), o uso pedagógico do vídeo passa a ser *ativo* e participativo já que fornece ao aluno um poder de investigação daquela parcela de realidade que lhe interessa.

Diante desse novo contexto pedagógico, sócio-cultural e tecnológico, o presente trabalho põe em debate a possibilidade de desenvolvimento de um projeto interdisciplinar (descrito resumidamente nos parágrafos abaixo), entre as disciplinas **Física** e **Matemática**, de ensino de funções elementares a partir da análise matemática e computacional de dados adquiridos através da filmagem de um experimento físico clássico: o lançamento oblíquo.

Supondo um lançamento oblíquo ocorrendo nas proximidades da superfície da Terra e sem influência da resistência do ar atmosférico, a modelagem matemática deste problema físico conduz a duas importantes funções elementares: a Função Afim e a Função Quadrática que caracterizam as componentes horizontal e vertical do movimento, respectivamente (ALONSO; FINN, 2000; NUSSENZVEIG, 2002).

O estudo deste movimento clássico, bem como das funções que o caracterizam, foi dividido em duas etapas: Aquisição de dados experimentais com o auxílio de uma câmera digital e do *software* livre **Tracker**. Este *software* é uma ferramenta gráfica destinada à análise de vídeos e modelagem matemática e computacional de fenômenos físicos. **Tracker** pode ser descarregado gratuitamente pelo site <http://www.cabrillo.edu/dbrown/tracker/>, onde é possível encontrar também exemplos de aplicação do programa e manuais de uso. Em seguida, realizou-se a análise matemática e computacional dos dados por meio de mini-aplicativos desenvolvidos com o uso do *software* livre Scilab. Este *software* é destinado a computação numérica em aplicações matemáticas e científicas. Scilab pode ser descarregado gratuitamente bastando para isso acessar o site <http://www.scilab.org>.

Para a primeira etapa, utilizou-se uma câmera digital de baixo custo para a filmagem do experimento a ser analisado. O vídeo obtido foi editado e importado para o *software* livre *Tracker* para a aquisição dos dados experimentais relativos às coordenadas horizontal e vertical do movimento da partícula como função do tempo. Estes dados foram exportados para arquivo de texto.

---

<sup>2</sup> Alguns desses *softwares* podem ser adquiridos gratuitamente

Os dados obtidos na etapa inicial foram analisados em dois mini-aplicativos desenvolvidos pelo autor utilizando para isso um editor de pequenos programas chamado SciNotes presente no software livre Scilab.

Os mini-aplicativos citados acima são baseados em conceitos matemáticos fundamentais, a saber: caracterização das Funções Afim e Quadrática de acordo com as definições encontradas em Lima *et al.* (2006a), matrizes e resolução de sistemas lineares utilizando conceitos de Álgebra Linear tal como encontrados em Lang (1986), somatórios e média aritmética fundamentados em Lima *et al.* (2006b).

O primeiro mini-aplicativo tem como função a visualização dos dados experimentais em forma de gráficos, permitindo ao professor e ao aluno discussão acerca de que função, afim ou quadrática, melhor descreve o conjunto de pontos obtidos. Conforme o tipo de função escolhida na etapa anterior, o aluno fará uso do segundo mini-aplicativo, que fornecerá os coeficientes de uma reta média ou parábola média de acordo com um modelo alternativo de ajuste de dados.

As duas etapas acima foram condensadas em uma proposta de atividade interdisciplinar a ser desenvolvida pelo professor de matemática no ensino médio para ensino das funções afim e quadrática.

Em Brasil (2007), o educador é orientado a perceber que a aprendizagem não ocorre com o indivíduo isolado mas sim em um contexto no qual o aluno possa interagir com seus colegas e com o professor. Refletindo sobre essa afirmação, pode-se acrescentar que a aprendizagem não ocorre sem interação com o objeto de estudo. Nesse sentido, pretende-se, com as atividades propostas acima, fornecer ao estudante de ensino médio uma visão da importância da matemática para a construção de modelos científicos, neste caso em física. Pretende-se ainda desenvolver nos estudantes o senso de investigação, questionamento e a capacidade de se expressar em linguagem matemática de forma autônoma, encarando estes como um pré-requisitos para uma postura crítica diante da sociedade e da política.

A apresentação dos capítulos desta dissertação é como segue. O capítulo 2 é dedicado ao estudo da Função Afim e da Função Quadrática. O capítulo 3 destina-se à modelagem física e matemática do lançamento oblíquo. Estes capítulos constituem o referencial teórico necessário para o entendimento dos capítulos subsequentes. Os capítulos 4 a 7 apresentam os métodos utilizados e os materiais necessários ao desenvolvimento da proposta de ensino. O capítulo 4 apresenta um método de ajuste de curvas polinomiais de primeiro e segundo graus baseada nos conceitos de sistemas lineares e média aritmética. No capítulo 5 são apresentados os softwares (*Tracker* e *Scilab*). O capítulo 6 descreve as etapas da atividade proposta utilizando análise de vídeo e os softwares acima citados. O capítulo 7 relata um exemplo de uso da atividade proposta no capítulo anterior. Finalmente, o capítulo 8 é destinado às considerações finais.



## 2 Duas funções elementares

### 2.1 A Função Afim

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma *Função Afim* quando existem parâmetros  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$  tais que  $f$  pode ser escrita na forma  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (LIMA *et al.*, 2006a).

A seguir, mostra-se que o gráfico  $G$  de uma *Função Afim* é uma reta e utiliza-se o fato (BARBOSA, 2004) de que dois pontos determinam uma reta para demonstrar que basta conhecer os valores  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ , que a Função Afim assume em dois números  $x_1 \neq x_2$  (escolhidos arbitrariamente) para que os parâmetros  $a$  e  $b$  (bem como a própria função  $f$ ) fiquem inteiramente determinados.

Considere-se três pontos pertencentes ao gráfico de uma Função Afim  $f(x) = ax + b$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, f(x_1)) = (x_1, ax_1 + b), \\ P_2 &= (x_2, f(x_2)) = (x_2, ax_2 + b) \quad \text{e} \\ P_3 &= (x_3, f(x_3)) = (x_3, ax_3 + b). \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, supõe-se que  $x_1 < x_2 < x_3$ . Para verificar que  $G$  é uma linha reta, ou seja, que os pontos pertencentes a uma Função Afim são colineares, é necessário e suficiente (LIMA *et al.*, 2006a) mostrar que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) \tag{2.1}$$

onde  $d(P_i, P_j)$  é a distância entre os pontos  $P_i$  e  $P_j$ .

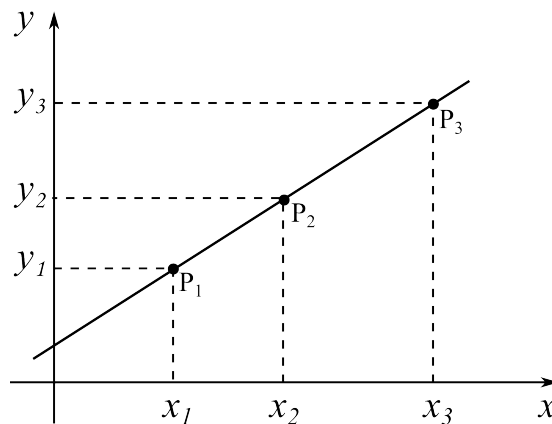
Aplicando a fórmula de distância entre dois pontos (LIMA, 2002), tem-se:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [f(x_2) - f(x_1)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\ d(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [f(x_3) - f(x_2)]^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} \\ &= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [f(x_3) - f(x_2)]^2} \\
&= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} \\
&= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \\
&= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \\
&= d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).
\end{aligned}$$

A última igualdade satisfaz a equação (2.1), mostrando que três quaisquer pontos de uma Função Afim são sempre colineares e que o gráfico  $G$  desta função é uma reta, ou seja, todos os pontos do gráfico  $G$  da Função Afim pertencem a uma única reta. Em um contexto mais geral, a equação (2.1) pode ser entendida como um teste de colinearidade. Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  no plano, sabe-se da geometria euclidiana no plano que existe uma e somente uma reta que passa por  $P_1$  e  $P_2$ . Tomando um terceiro ponto  $P_3$ , verificar a igualdade em (2.1) significa dizer que o ponto  $P_3$  pertence a reta definida pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

Figura 1 – Função Afim.



Portanto, sabendo que  $f$  é afim e dados  $x_1 \neq x_2$ , tais que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ , os parâmetros  $a$  e  $b$  podem ser determinados a partir da solução do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases}
ax_1 + b = y_1 \\
ax_2 + b = y_2
\end{cases}$$

Isolando o parâmetro  $b = y_1 - ax_1$  na primeira equação e substituindo-o na segunda, tem-se:

$$ax_2 + y_1 - ax_1 = y_2$$

que permite obter o parâmetro  $a$  a partir da relação:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.2)$$

Substituindo este valor em  $b = y_1 - ax_1$ , obtém-se:

$$b = y_1 - \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x_1$$

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \quad (2.3)$$

Em complemento, o sistema de equações acima pode ser escrito em forma de uma única equação matricial:

$$Au = B$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando à direita pela inversa da matriz  $A$ , obtém-se:

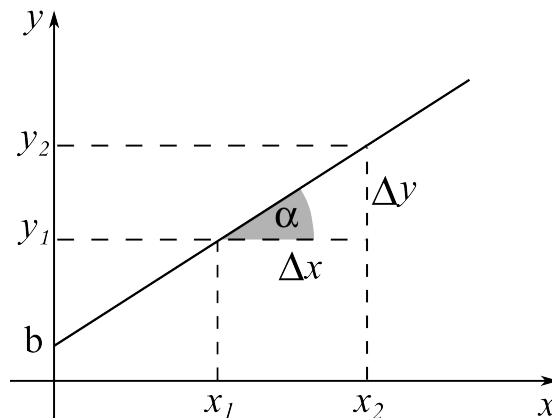
$$u = A^{-1}B \quad (2.4)$$

que permite obter os mesmos valores de  $a$  e de  $b$  encontrados em (2.2) e (2.3), respectivamente.

Dada a Função Afim  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax + b$  onde  $a$  e  $b$  são números reais, destacam-se algumas propriedades que a caracterizam.

O coeficiente  $b$  corresponde à ordenada onde o gráfico da função  $t$  intersecta o eixo vertical. Por sua vez, o coeficiente  $a$  é denominado *coeficiente angular* e caracteriza a *inclinação* da reta em relação ao eixo horizontal (LIMA *et al.*, 2006a). Conforme é possível visualizar na figura abaixo, o coeficiente angular  $a$  é *numericamente* igual à tangente do ângulo  $\alpha$  que o gráfico da função  $f$  faz com o eixo horizontal, sendo este ângulo medido no sentido anti-horário, ou seja, contrário ao sentido de movimento dos ponteiros do relógio.

Figura 2 – Coeficientes da Função Afim.



Definindo  $\Delta y = y_2 - y_1$  e  $\Delta x = x_2 - x_1$ , tem-se:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

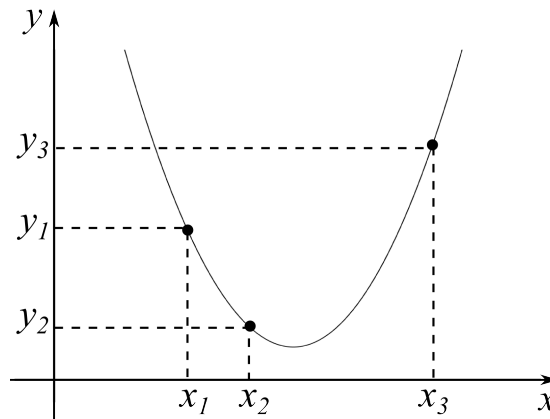
ou ainda

$$a = \operatorname{tg} \alpha \quad (2.5)$$

## 2.2 A Função Quadrática

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma *Função Quadrática* quando existem parâmetros  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$  tais que  $f$  pode ser escrita na forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (LIMA *et al.*, 2006a).

Figura 3 – Função Quadrática.



Considere-se três números reais distintos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  e três números reais quaisquer  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ . Então, existe um, e somente um, terno de números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que a função

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

satisfaz às condições  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$  e  $f(x_3) = y_3$  (LIMA *et al.*, 2006a). A Figura 3 ilustra a Função Quadrática que satisfaz as condições dadas.

A afirmação acima sugere um algoritmo capaz de determinar os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  de uma Função Quadrática quando é conhecido que o gráfico desta função passa pelos pontos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$ .

De fato, basta resolver o sistema linear de três incógnitas

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3. \end{cases}$$

Um forma simples de resolver o sistema acima é “transformá-lo” em um sistema de duas equações. Para isso, basta isolar a incógnita  $c$  na primeira equação:

$$c = y_1 - ax_1^2 - bx_1$$

e substituí-la na segunda e terceira equação, obtendo:

$$\begin{cases} ax_2^2 + bx_2 + y_1 - ax_1^2 - bx_1 = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + y_1 - ax_1^2 - bx_1 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \\ a(x_3 + x_1)(x_3 - x_1) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1 \end{cases}$$

Tomando  $x_1, x_2$  e  $x_3$  distintos dois a dois, é possível reescrever o sistema acima da seguinte forma:

$$\begin{cases} a(x_2 + x_1) + b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a(x_3 + x_1) + b = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \end{cases}$$

cuja estrutura é semelhante ao sistema de suas equações obtido na seção anterior sobre Função Afim. Utilizando o procedimento descrito naquela ocasião, tem-se:

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2} \left( \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$b = \frac{1}{x_3 - x_2} \left[ \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x_3 + x_1) - \left( \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right) (x_2 + x_1) \right]$$

substituindo estes resultados em  $c = y_1 - ax_1^2 - bx_1$ , tem-se:

$$c = y_1 + \frac{x_1}{x_3 - x_2} \left[ \left( \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right) x_2 - \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x_3 \right]$$

Utilizando notação de matrizes, o sistema

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3. \end{cases}$$

pode ser escrito como uma única equação matricial

$$Ev = F$$

onde

$$E = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando à esquerda pela inversa da matriz  $E$ , tem-se;

$$v = E^{-1}F, \tag{2.6}$$

confirmando as relações apresentadas acima para os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

O gráfico de uma Função Quadrática é denominado *parábola*.

Do ponto de vista geométrico, dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , o coeficiente  $c$  é a ordenada onde a parábola intersecta o eixo vertical. Os pontos, caso existam, onde a parábola intersecta o eixo horizontal são denominados *raízes* ou *zeros* da Função Quadrática (LIMA *et al.*, 2006a). Estes pontos são obtidos fazendo  $f(x) = 0$ , ou seja, resolvendo a equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuja solução da equação acima é dada pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

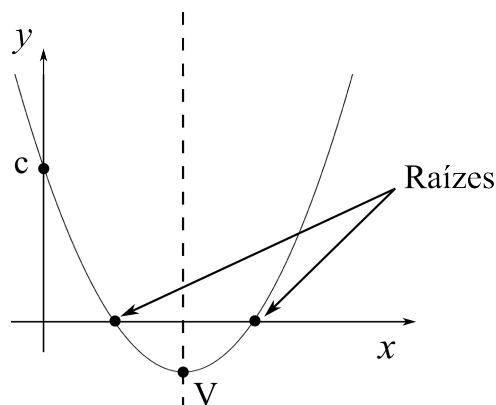
A parábola possui um ponto extremo denominado *vértice* (LIMA *et al.*, 2006a), cujas coordenadas são dadas pelas seguintes relações:

$$x_{\text{vértice}} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_{\text{vértice}} = f(x_{\text{vértice}}) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Como se pode ver pela figura abaixo, a parábola é uma curva simétrica em relação à reta vertical que passa pelo vértice (V).

Figura 4 – Função Quadrática.



### 3 Modelagem físico-matemática do movimento bidimensional

Grande parte dos movimentos de interesse às ciências naturais ocorre num plano<sup>1</sup>. O movimento de projéteis lançados nas proximidades da superfície terrestre e mesmo o movimento de translação da Terra em redor do Sol são importantes exemplos de movimentos *confinados* a um plano (NUSSENZVEIG, 2002).

#### 3.1 Posição, velocidade e aceleração

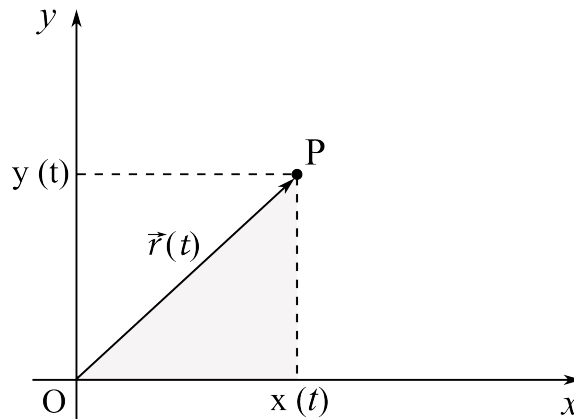
Considere-se uma partícula  $P$  que se move em um plano  $\Pi$  no qual foi fixado um sistema de eixos coordenados  $OXY$ , doravante denominado *referencial*.

A posição de  $P$  em um instante de tempo  $t$  é dada pelo par de funções

$$x(t), \quad y(t)$$

como é possível perceber através da Figura 5.

Figura 5 – Vetor posição e coordenadas cartesianas.



<sup>1</sup> Ou pode ser aproximado por um movimento plano. A trajetória de um carro viajando entre duas cidades pode ser tratada como contida num plano ao invés de considerá-la sobre a superfície *esférica* da Terra.

Outra forma de representar a posição da partícula  $P$  no referencial  $OXY$  é através do **vetor<sup>2</sup> posição**  $\vec{r}(t)$  partindo da origem  $O$  até o ponto onde  $P$  está situada.

Ainda conforme a Figura 5, as coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  estão relacionadas. De fato, a abscissa  $x(t)$  corresponde à projeção ortogonal do vetor  $\vec{r}(t)$  sobre o eixo  $Ox$  e a ordenada  $y(t)$  corresponde à projeção ortogonal do vetor  $\vec{r}(t)$  sobre o eixo  $Oy$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo em destaque da Figura 5, tem-se:

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}. \quad (3.1)$$

Define-se o **vetor velocidade instantânea** ( $\vec{v}(t)$ ) da partícula  $P$  num instante  $t$  como o vetor cujas componentes são as velocidades instantâneas dos movimentos unidimensionais descritos pelas projeções de  $P$  sobre os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente.

De forma semelhante, define-se o **vetor aceleração instantânea**  $\vec{a}(t)$  no instante de tempo  $t$  é aquele cujas componentes são as acelerações escalares nas direções  $Ox$  e  $Oy$ .

Nesse sentido, o estudo da maioria dos movimentos pode ser dividido no estudo individual de cada uma de suas componentes (ALONSO; FINN, 2000).

## 3.2 Leis de Newton

Na seção anterior, foram apresentadas as três principais grandezas de interesse quando se estuda a evolução (temporal) de um sistema mecânico: posição, velocidade e aceleração. Entretanto, o estudo do movimento fica dificultado sem o conhecimento das leis fundamentais da dinâmica que relacionam aquelas grandezas entre si bem como com outras *informações* do problema que se queira resolver.

As *Leis de Newton*<sup>3</sup> são, portanto, os princípios fundamentais a partir dos quais é

<sup>2</sup> Para uma compreensão matemática e objetiva do conceito de vetor, sugerimos a leitura de Lima (2002) segundo a qual dados dois pontos  $A$  e  $B$  do plano, o vetor  $v = \overrightarrow{AB}$  é determinado pelo segmento de reta orientado  $AB$  ou por qualquer segmento orientado que seja *equipolente* a  $AB$ , ou seja que tenha o mesmo comprimento de  $AB$ , seja paralelo ou colinear a este e tenha o mesmo sentido de  $AB$ . Por outro lado, para uma compreensão do sentido físico dos vetores, recomenda-se a leitura de Nussenzveig (2002), em especial em seu capítulo 3, onde encontramos a seguinte passagem:

Para dar uma caracterização intrínseca do deslocamento de uma partícula em sua trajetória em relação a uma origem dada, não basta conhecermos a *magnitude* do deslocamento (distância à origem): é preciso também especificarmos a *direção* e o *sentido* do deslocamento. Por exemplo, não basta para determinar a posição de um carro dizer que ele se deslocou de  $100km$  em relação ao ponto de partida. Definiríamos completamente o deslocamento, por outro lado, dizendo que ele se deu segundo a direção Norte-Sul, e no sentido de Sul para o Norte. (NUSSENZVEIG, 2002, p. 41,42)

<sup>3</sup> **Isaac Newton** (1642 - 1727), físico e matemático inglês. Além das famosas três leis da dinâmica, Newton é reconhecido pela formulação da *Lei da Gravitação Universal* e por suas contribuições ao desenvolvimento do *Cálculo Infinitesimal* (MERZBACH; BOYER, 2011).



possível deduzir as equações de movimento de um corpo ou sistema de corpos. A seguir, são enunciadas (em notação moderna) as três leis de Newton para a dinâmica:

1ª Lei: **Lei da Inércia:** Todo corpo persiste em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja compelido a modificar este estado pela ação de forças impressas sobre ele;

2ª Lei: **Princípio Fundamental da Dinâmica**<sup>4</sup>: Um corpo de massa  $m$  sobre o qual atua uma força resultante  $\vec{F}_R$  tende a entrar em movimento com aceleração  $\vec{a}$  de mesma direção e sentido que  $\vec{F}_R$  e tal que:

$$\vec{F}_R = m \vec{a};$$

3ª Lei: **Lei da ação de reação:** A toda “ação” corresponde uma “reação” de mesmo módulo e direção mas sentidos contrários<sup>5</sup>.

É de fundamental interesse a segunda lei de Newton, visto que a partir dela são derivadas as equações de movimento de uma partícula ou sistema de partículas.

Para o caso de uma única partícula de massa  $m$  sujeita a uma força resultante  $\vec{F}_R$ , tem-se:

$$\vec{F}_R = m \vec{a}.$$

Sendo conhecida a decomposição do vetor  $\vec{F}_R$  nas direções  $Ox$  e  $Oy$ , representadas por  $F_x$  e  $F_y$ , respectivamente, é possível aplicar as leis de Newton, tal como definidas acima para caracterizar a evolução temporal das coordenadas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$  da partícula  $P$ .

Na próxima seção, os resultados obtidos acima são aplicados ao caso do movimento de projéteis lançados nas proximidades da superfície da Terra. Além disso, são desconsiderados efeitos de atrito entre o projétil e o ar atmosférico.

<sup>4</sup> Esta “forma” é apenas um caso especial da formulação proposta por Newton: A variação do momento linear (definido como o produto da massa de um corpo por sua velocidade  $\vec{p} = m \vec{v}$ ) é proporcional à força aplicada  $\vec{F}_R$ , e tem mesma direção e sentido desta força (ALONSO; FINN, 2000; NUSSENZVEIG, 2002). Em notação moderna, esta lei é definida pela derivada primeira do momento linear ( $\vec{p}$ ) em relação ao tempo ( $t$ )

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R.$$

<sup>5</sup> Os termos “ação” e “reação” devem ser entendidos como forças aplicadas. Além disso, deve-se notar que a “ação” e a “reação” são sempre aplicadas em corpos diferentes (ALONSO; FINN, 2000; NUSSENZVEIG, 2002).

### 3.3 Movimento de projéteis

Considere-se uma partícula  $P$  de massa  $m$  lançada de tal forma que o vetor velocidade inicial  $\vec{v}_0$  forme um ângulo  $\theta$  com o solo, medido em sentido anti-horário, conforme figura abaixo.



Para a descrição do movimento da partícula, algumas *aproximações* serão consideradas:

- As dimensões do objeto são desprezíveis, no sentido de que não serão considerados movimentos de rotação em torno de algum de seus eixos mas apenas movimento de translação;
- O lançamento ocorrerá nas proximidades da superfície da Terra, considerada fixa. Isso permite desconsiderar efeitos *não-inerciais* devidos ao movimento de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo, bem como permite considerar a aceleração da gravidade  $g$  como uma constante;
- Não serão considerados os efeitos da resistência do ar atmosférico.

Das restrições acima, pode-se concluir que, *após lançado*, não existirão outras forças atuando sobre a partícula  $P$  além da força de atração gravitacional, com direção vertical, sentido para baixo<sup>6</sup> e cujo módulo vale  $F_G = mg$ . Além disso não existem forças aplicadas na direção horizontal.

Portanto, considerando o sistema de eixos adotados na Figura 6 e de acordo com as leis de Newton, o movimento da partícula  $P$  será dado pela composição de dois movimentos independentes entre si, a saber:

- Na direção horizontal, o movimento será do tipo **uniforme**, isto é, a componente horizontal da velocidade será constante e igual a velocidade inicial nesta direção

<sup>6</sup> Mais correto seria dizer que tal força aponta para o centro da Terra

$(v_{x0})$ . A coordenada  $x(t)$  será dada pela seguinte relação:

$$x(t) = v_{x0}t + x_0 \quad (3.2)$$

onde  $x_0$  é a posição horizontal inicial (NUSSENZVEIG, 2002).

- Na direção vertical, tem-se a ação de uma força constante (força de atração gravitacional) tendo consequência a produção de um movimento do tipo **uniformemente acelerado**, isto é, com aceleração constante e cujo módulo é igual a aceleração ( $g$ ) da gravidade local. Assim, a coordenada vertical  $y(t)$  será dada pela seguinte relação:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0 \quad (3.3)$$

onde  $v_{y0}$  é a componente vertical da velocidade inicial da partícula  $P$  e  $y_0$  é a posição vertical inicial (NUSSENZVEIG, 2002).

O ângulo de lançamento ( $\theta$ ) pode ser obtido a partir das velocidades iniciais nas direções horizontal e vertical utilizando a seguinte relação:

$$\text{tg}\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \quad (3.4)$$

Observe que na equação (3.2) a coordenada  $x(t)$  varia linearmente com o tempo, ou seja, a função  $x = f(t)$  é uma **Função Afim** tal como definida no capítulo 1. Por outro lado, a coordenada  $y(t)$  é uma **Função Quadrática** da variável tempo ( $t$ ). Isto significa que todas as propriedades das funções afim e quadrática podem ser utilizadas para a compreensão do movimento de uma partícula, ou um corpo de pequenas dimensões, lançado obliquamente em relação ao solo.

Reciprocamente, o lançamento oblíquo é um importante exemplo de aplicação das funções afim e quadrática no mundo real, justificando assim o estudo destas funções matemáticas.

## 4 Ajuste de curvas polinomiais: Uma metodologia para o ensino médio

Considere-se um conjunto de  $n$  pontos  $(t_r, x_r)$  com  $r = 1, 2, \dots, n$ . Nas duas seções seguintes, será apresentado um algoritmo para ajustar os pontos dados a uma Função Afim ou a uma Função Quadrática,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  utilizando-se conceitos matemáticos conhecidos para o aluno do ensino médio, a saber: solução de sistemas de equações lineares a duas ou três incógnitas, determinantes e matrizes e média aritmética.

### 4.1 Ajuste a uma Função Afim

Neste primeiro caso, tem-se:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(t) = at + b. \end{cases} \quad \text{onde } a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

O problema básico é determinar valores para os parâmetros  $a$  e  $b$  tais que  $f$  “passe” próximo aos pontos dados.

Considere-se inicialmente dois pontos **distintos**  $(t_i, x_i)$  e  $(t_j, x_j)$ , escolhidos arbitrariamente entre os  $n$  pontos dados. Substituindo-os em (4.1), obtém-se:

$$\begin{cases} at_i + b = x_i \\ at_j + b = x_j \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_i & 1 \\ t_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

onde  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{ij}$  é a matriz dos coeficientes da Função Afim que passa **exatamente** pelos pontos  $(t_i, x_i)$  e  $(t_j, x_j)$ .

Lembrando que os pontos tomados são distintos, tem-se  $t_i \neq t_j$ , de modo que

$$\det \begin{pmatrix} t_i & 1 \\ t_j & 1 \end{pmatrix} = t_i - t_j \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} t_i & 1 \\ t_j & 1 \end{pmatrix} \text{ é invertível.}$$

Multiplicando (4.2) à esquerda pela matriz inversa de  $\begin{pmatrix} t_i & 1 \\ t_j & 1 \end{pmatrix}$ , tem-se:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} t_i & 1 \\ t_j & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Como afirmado acima, a matriz  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{ij}$  fornece os coeficientes angular e linear da reta que passa pelos pontos  $(t_i, x_i)$  e  $(t_j, x_j)$ . Entretanto, nada se sabe sobre o quão próximo esta reta estará dos demais pontos dados. Uma forma de contornar esta dificuldade é obter uma reta cujos coeficientes sejam a **média aritmética** dos coeficientes dados pelas matrizes  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{ij}$  tomando  $i = 1, 2, \dots, r$  e  $j = 1, 2, \dots, r$ , com  $i \neq j$ .

Sabe-se que uma reta é determinada por dois pontos distintos pertencentes a ela. Assim, o número  $N$  de retas que podem ser obtidas ao escolher dois pontos distintos em um conjunto de  $n$  pontos do plano é igual ao número de combinações de  $n$  tomados dois a dois (MORGADO *et al.*, 2006), ou seja, existem

$$N = \frac{n!}{2!(n-2)!} \quad (4.4)$$

modos de escolher os dois pontos distintos  $(t_i, x_i)$  e  $(t_j, x_j)$  dentre  $n \geq 2$  pontos<sup>1</sup>.

Portanto, definindo a **Função Afim Média** entre  $n$  pontos dados como aquela cujos coeficientes angular e linear são dados pela média aritmética dos respectivos coeficientes das retas obtidas tomando-se os  $n$  pontos dois a dois, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} t_i & 1 \\ t_j & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

onde  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  define os coeficientes da **Função Afim Média** desejada.

A faixa de variação dos índices  $i$  e  $j$  explicitada na equação (4.5) garante que os pontos  $(t_i, x_i)$  e  $(t_j, x_j)$  são distintos. Por exemplo, dada uma distribuição de quatro pontos no plano:  $Q_1, Q_2, Q_3$  e  $Q_4$ , tem-se  $n = 4$ . Substituindo este valor na equação (4.4), o número  $N$  de retas que passam por dois pontos arbitrários  $Q_i$  e  $Q_j$  é igual ao número de combinações de  $n = 4$  pontos tomados dois a dois

$$N = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Sendo cada reta determinada por dois pontos  $Q_i$  e  $Q_j$ , a organização tabular acima mostra que o índice  $i$  do primeiro ponto pode assumir os valores 1, 2 ou 3 (este último equivale a  $n - 1$ , para  $n = 4$ ) enquanto o índice  $j$  é pelo menos uma unidade superior ao índice  $i$ .

A tabela abaixo mostra o resultado destas combinações:

<sup>1</sup> Note-se que não tem sentido o caso  $n = 1$ , visto que por um ponto “passam” infinitas retas.

Tabela 1 – Listagem das combinações de quatro pontos tomados dois a dois.

1º Ponto	2º Ponto
$Q_1$	$Q_2$
$Q_1$	$Q_3$
$Q_1$	$Q_4$
$Q_2$	$Q_3$
$Q_2$	$Q_4$
$Q_3$	$Q_4$

## 4.2 Ajuste a uma Função Quadrática

Seja

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(t) = at^2 + bt + c. \end{cases} \quad \text{onde } a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

a Função Quadrática que se pretende ajustar a  $n$  pontos  $(t_r, x_r)$  com  $r = 1, 2, \dots, n$ . Escolhendo arbitrariamente três pontos **distintos**  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_j, x_j)$  e  $(t_k, x_k)$  e substituindo-os em (4.6), obtém-se:

$$\begin{cases} at_i^2 + bt_i + c = x_i \\ at_j^2 + bt_j + c = x_j \\ at_k^2 + bt_k + c = x_k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_i^2 & t_i & 1 \\ t_j^2 & t_j & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \end{pmatrix}_{ijk} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

onde  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{ijk}$  é a matriz dos coeficientes da parábola que “passa” **exatamente** pelos pontos  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_j, x_j)$  e  $(t_k, x_k)$ . Seja o determinante

$$\det \begin{pmatrix} t_i^2 & t_i & 1 \\ t_j^2 & t_j & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \end{pmatrix} = t_i^2(t_j - t_k) + t_j^2(t_k - t_i) + t_k^2(t_i - t_j).$$

Lembrando que os três pontos foram tomados distintos, então  $t_i \neq t_j$ ,  $t_j \neq t_k$  e  $t_k \neq t_i$  e é possível garantir que *pelo menos um dos valores*  $t_i$  ou  $t_j$  ou  $t_k$  *é não nulo*. Disso conclui-se que

$$\det \begin{pmatrix} t_i^2 & t_i & 1 \\ t_j^2 & t_j & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} t_i^2 & t_i & 1 \\ t_j^2 & t_j & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \end{pmatrix} \text{ é invertível.}$$

Portanto, multiplicando (4.7) à esquerda pela inversa de  $\begin{pmatrix} t_i^2 & t_i & 1 \\ t_j^2 & t_j & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \end{pmatrix}$ , encontra-se

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{ijk} = \begin{pmatrix} t_i^2 & t_i & 1 \\ t_j^2 & t_j & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

que fornece os parâmetros da parábola que passa pelos pontos  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_j, x_j)$  e  $(t_k, x_k)$ . Entretanto, nada se sabe sobre o quão próximo esta parábola estará dos demais pontos dados. Assim como na seção anterior, esta dificuldade pode ser contornada tomando-se a média aritmética dos coeficientes de todas as possíveis parábolas obtidas quando se escolhe três pontos distintos dos  $n$  pontos dados.

Neste caso, cada parábola é determinada escolhendo três pontos distintos de um conjunto de  $n$  pontos. Utilizando princípios de Análise Combinatória, o número  $N$  de parábolas possíveis é dado pela combinação de  $n$  pontos tomados três a três, cujo valor é

$$N = \frac{n!}{3!(n-3)!} \quad (4.9)$$

e corresponde ao número de modos de escolher os três pontos (distintos dois a dois)  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_j, x_j)$  e  $(t_k, x_k)$  dentre  $n \geq 3$  pontos (MORGADO *et al.*, 2006).

Definindo a **Função Quadrática Média** entre  $n$  pontos dados como aquela cujos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dados pela média aritmética dos respectivos coeficientes das  $N$  parábolas obtidas tomando os  $n$  pontos três a três, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{k=j+1}^n \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{ijk} = \frac{1}{N} \sum_{k=j+1}^n \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-2} \begin{pmatrix} t_i^2 & t_i & 1 \\ t_j^2 & t_j & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

A faixa de variação dos índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  explicitada na equação (4.10) garante que os pontos  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_j, x_j)$  e  $(t_k, x_k)$  são distintos. Por exemplo, dada uma distribuição de cinco pontos no plano:  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$  e  $Q_5$ , tem-se  $n = 5$ . Substituindo este valor na equação (4.9), o número  $N$  de parábolas que passam por três pontos distintos  $Q_i$ ,  $Q_j$  e  $Q_k$  é igual ao número de combinações de  $n = 5$  pontos tomados três a três

$$N = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 2} = 6.$$

Sendo cada parábola determinada por três pontos distintos  $Q_i$ ,  $Q_j$  e  $Q_k$ , a organização tabular abaixo mostra que o índice  $i$  do primeiro ponto pode assumir os valores 1,

2 ou 3 (este último equivale a  $n - 2$ , para  $n = 5$ ) enquanto o índice  $j$  é pelo menos uma unidade superior ao índice  $i$  e pelo menos uma unidade inferior a  $n$ . O índice  $k$  é pelo menos uma unidade superior ao índice  $j$ .

Tabela 2 – Listagem das combinações de cinco pontos tomados três a três.

1º Ponto	2º Ponto	3º Ponto
$Q_i$	$Q_j$	$Q_k$
$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
$Q_1$	$Q_2$	$Q_4$
$Q_1$	$Q_2$	$Q_5$
$Q_1$	$Q_3$	$Q_4$
$Q_1$	$Q_3$	$Q_5$
$Q_1$	$Q_4$	$Q_5$
$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
$Q_2$	$Q_3$	$Q_5$
$Q_2$	$Q_4$	$Q_5$
$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$



## 5 Softwares utilizados

### 5.1 Tracker: Vídeo-análise de experimentos de física

*Tracker* é uma ferramenta gráfica para a análise de vídeo e modelagem construída sobre o ambiente Java e pertencente ao projeto *Open Source Physics*<sup>1</sup> (OSP, 2013). *Tracker* é um *software* livre. Isto significa que o usuário tem liberdade para executar, copiar, distribuir, estudar, mudar e melhorar o *software* mediante os termos da licença GNU General Public License<sup>2</sup> (GNU, 2013).

A instalação do *Tracker* requer instalação prévia do software *Java*, versão 1.6 ou superior. A versão atual de *Tracker* é 4.80 e pode ser descarregada gratuitamente para os sistemas Windows, Mac OS X e Linux pelo site <http://www.cabrillo.edu/dbrown/tracker/>.

O *software* permite, dentre outras possibilidades (CABRILLO, 2013):

- marcação manual e automática de objetos com aquisição de dados referentes à posição, velocidade e aceleração;
- possibilidade de criação de modelos dinâmicos e cinemáticos de partículas ou sistemas de dois corpos;
- geração e análise de dados com múltiplas opções de calibração e possibilidade de exportação imagens e dados em arquivo de texto.

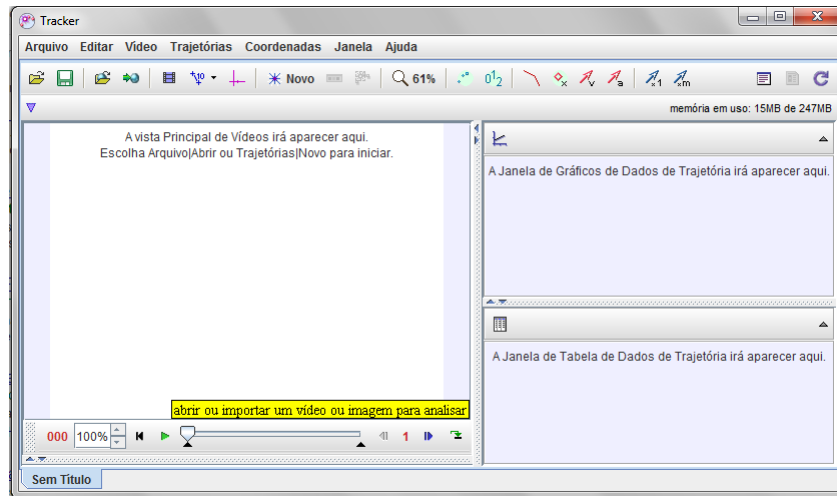
Além disso, o instalador do *Tracker* inclui alguns vídeos que podem ser utilizados para o treinamento do usuário iniciante.

#### 5.1.1 Introdução ao uso do Software Tracker

Após instalar o *software Tracker* e executá-lo pela primeira vez, o usuário se deparará com uma tela semelhante a figura abaixo:


<sup>1</sup> A OSP fornece gratuitamente recursos computacionais que envolvam o ensino de física, computação e modelagem computacional que permitam ao aluno novas formas de compreender, descrever, explicar e prever fenômenos físicos. Para mais informações acesse: <http://www.compadre.org/osp>

<sup>2</sup> Para mais informações, acesse: <http://www.gnu.org>

Figura 7 – Tela inicial do *Tracker*.

A seguir são descritos os passos básicos para a utilização do programa.

### Abrir um vídeo ou arquivo com extensão “.tkr”

Clique no botão **Abrir**  ou no menu **Arquivo** ⇒ **Abrir** e selecione um vídeo (.mp4, .avi, ...) ou arquivo tracker (.tkr) que deseje analisar<sup>3</sup>.

### Configurar a execução do vídeo a ser analisado


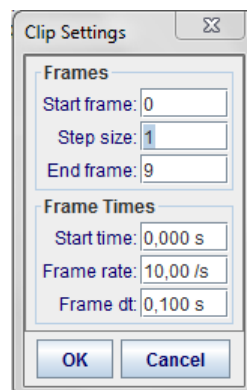



Na barra de ferramentas, clique no botão **clip settings** . Uma nova janela se abrirá, na qual o usuário será capaz de configurar os quadros (*frames*) inicial (*Start frame*) e final (*End frame*) do experimento. Além disso, em (*Step size*) o usuário define o intervalo de tempo entre duas tomadas de posição do movimento executado, tal como mostrado na Figura 8.

Figura 8 – *Clip Settings*.

<sup>3</sup> Também é possível abrir imagens (.jpg, .gif, .png, ...).

Para facilitar a escolha dos quadros de interesse, o usuário pode localizá-los rapidamente através do cursor deslizante  ou dos botões *Step back*  e *Step forward*  na parte inferior do player.

### Calibrar a escala do vídeo


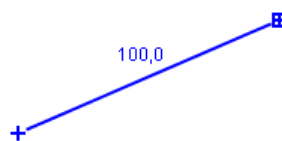
Clique no botão **Fita métrica com transferidor**  ⇒ **Novo** ⇒ **Bastão de Calibração**. Aparecerá uma “fita métrica” conforme figura abaixo:

Figura 9 – Fita Métrica.



Arraste as pontas da fita até as extremidades de um objeto situado no plano do movimento analisado e cujo comprimento seja previamente conhecido. Clique sobre a fita para inserir a medida (em metro, centímetro, ...) conhecida.

### Definir um sistema de referência


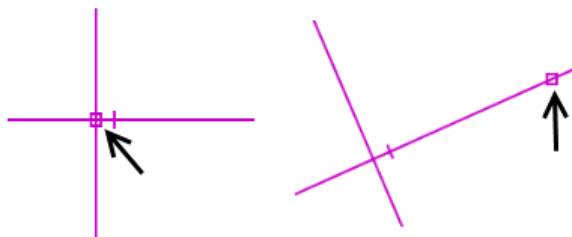

Clique no botão **Mostrar ou ocultar eixos de coordenadas**  para exibir um sistema de eixos  $x$  e  $y$ . Arraste a origem para a posição desejada e/ou arraste a coordenada  $x$  para rotacionar o sistema de referência.

Figura 10 – Translação e Rotação do sistema de referência.



### Marcação da trajetória de interesse

Clique no botão **Criar Nova Trajetória**  **Novo**, escolha o tipo de marcação mais conveniente ao que se deseje. Em geral, a opção escolhida é **Ponto de massa**. O programa


também permite modelar o movimento filmado usando a opção **Modelo de Partícula Dinâmica**.

Para marcar uma posição, mantenha a tecla **SHIFT** pressionada e clique sobre o objeto. Automaticamente, o vídeo passará ao *frame* seguinte. Repita o procedimento até o último quadro do intervalo definido.

Para uma maior precisão, caso a qualidade do vídeo assim permita, é possível aumentar o zoom através do botão na barra de ferramentas ou usando a tecla de atalho *Z*.

A cada marcação de uma posição em um *frame*, um novo ponto gráfico é plotado na janela de gráficos no canto superior esquerdo. Simultaneamente, são salvas numa tabela no canto inferior esquerdo as coordenadas espaciais e temporal da trajetória obtida.

### Salvar a atividade como um arquivo tracker (.tkr)

Clique no botão **Salvar** , no menu **Arquivo**  $\Rightarrow$  **Salvar** ou use o atalho *Ctrl+S* para salvar a atividade como um arquivo tracker, extensão “.tkr”. Este arquivo deve ser salvo preferencialmente na mesma pasta em que se encontra o arquivo de vídeo original. Nesse caso, quando o arquivo tracker for novamente aberto, o vídeo será também carregado, os quadros, as coordenadas do sistema, as variáveis definidas e todas as marcações serão reconstruídas.

### Exportando os dados obtidos no Tracker

Como dito antes, no canto inferior direito da tela do *Tracker*, pode-se visualizar uma tabela com os dados do experimento realizado. Clique no botão **Dados**, selecione as variáveis de interesse que serão visualizadas em tabela. Para exportar os dados desta tabela, basta copiá-los e colá-los em uma planilha ou outro aplicativo.

Neste trabalho, os dados foram exportados para dois arquivos de texto com extensão “.txt”. O primeiro contendo apenas os dados de tempo ( $t$ ) e posição horizontal ( $x$ ) denominado **mov-horizontal.txt** e o segundo contendo os dados de tempo ( $t$ ) posição vertical ( $y$ ) denominado **mov-vertical.txt**.

## 5.2 Scilab: Cálculo Numérico

Scilab é um *software* livre para computação numérica destinado a aplicações em engenharia, matemática e ciências. O *software* é liberado como código aberto sob a licença CeCILL e está disponível para *download* gratuito compatível com diversos sistemas

operacionais<sup>4</sup> (SCILAB, 2013).

Scilab inclui centenas de funções matemáticas e apresenta uma linguagem de programação de alto nível (SCILAB, 2013), permitindo, dentre outras funcionalidades:

- matemática e simulação, incluindo operações matemáticas e análise de dados;
- visualização, edição e exportação de tabelas e gráficos 2-D e 3-D;
- Resolução de problemas de otimização contínuos e discretos;
- Análise e modelagem de dados estatísticos;
- Sistema de controle de projeto de análise;
- Ferramentas de visualização e análise aplicadas ao Processamento de Sinais;
- **X-cos** - Ferramenta para modelagem e simulação de sistemas dinâmicos mecânicos, elétricos, etc.;
- Possibilidade de aumento de suas funcionalidades nativas e capacidade de construção de funções e pequenos programas (*scripts*) através do editor SciNotes.

Atualmente, o Scilab encontra-se em sua versão 5.4.1, que pode ser descarregada para instalação pelo site <http://www.scilab.org/>.

### 5.2.1 Operações simples

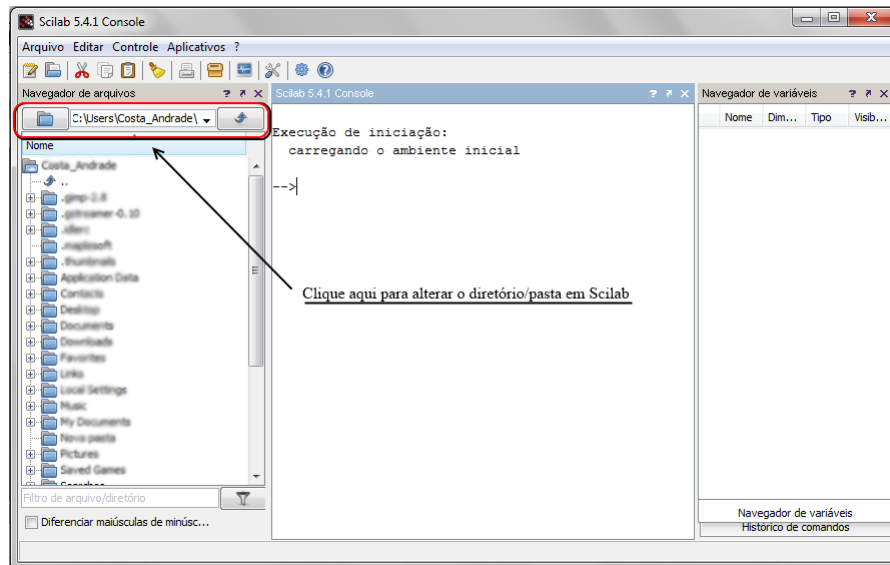
Scilab é uma linguagem computacional de alto nível para cálculo numérico que possui uma sintaxe, em muitos aspectos, semelhante à do Matlab®. As variáveis no Scilab são basicamente matrizes. Assim, um escalar é uma matriz  $1 \times 1$ , um vetor linha (coluna) de  $n$  componentes é uma matriz  $1 \times n$  ( $n \times 1$ ) e as operações são naturalmente interpretadas como “operações matriciais” (SCHERER, 2010).

Ao executar o Scilab pela primeira vez, uma tela semelhante à figura abaixo aparecerá. Esta é dividida em três áreas: um **navegador de arquivos** à esquerda, um **Navegador de variáveis** à direita e o **console**, no centro, onde as principais atividades serão realizadas.

---

<sup>4</sup> Para mais informações sobre os requisitos de instalação do Scilab, acesse <http://www.scilab.org/download/requirements>

Figura 11 – Tela inicial do Scilab.



Na janela do console, o símbolo de *prompt* `-->` indica que o sistema está pronto para receber comandos. Inicialmente, observe-se que o Scilab pode ser usado como uma poderosa calculadora científica através de operações numéricas envolvendo variáveis (cujo valor pode ser atribuído pelo sinal `=`) e funções.

Figura 12 – Operações básicas.

```

-->2+3
ans =

    5.

-->a = 2
a =

    2.

-->b=5
b =

    5.

-->c=%pi
c =

    3.1415927

-->5*a - sin(c/b)
ans =

    9.4122147

```

Operação envolvendo valores numéricos

Atribuição de variáveis

Operação envolvendo variáveis e funções

### 5.2.2 Gráficos em duas dimensões com Scilab

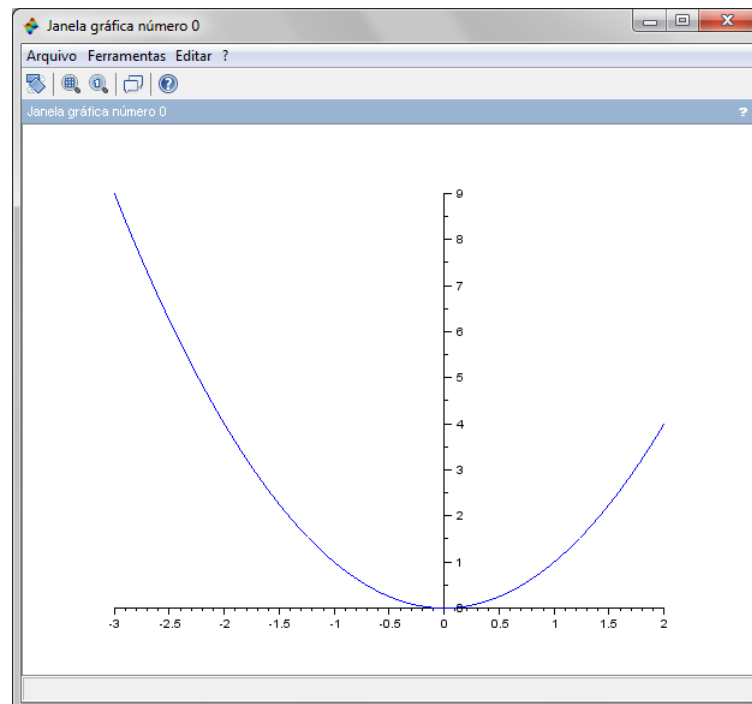
Para construir em Scilab o gráfico da função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $a, b \in \mathbb{R}$ , basta escrever um vetor com os valores da variável independente  $x$  dentro do intervalo  $[a, b]$  e outro vetor com os valores da função  $f$  calculada em cada elemento do primeiro vetor. Por exemplo, os comandos abaixo permitem a construção do gráfico de uma função  $y = x^2$  no intervalo fechado  $[-3, 2]$ .

Figura 13 – Comandos para plotagem de gráfico em duas dimensões.

```
-->a=-3; b=2;  ← Atribuição dos limites do intervalo
-->x=a:0.01:b; ← Vetor com elementos igualmente espaçados
-->y=x^2;
-->plot2d(x,y) ← Comando para plotagem do gráfico
```

Observe que o vetor  $x$  possui elementos distribuídos entre os limites  $a = -3$  e  $b = 2$  com espaçamento igual a 0,01. O resultado será apresentado em uma nova janela gráfica conforme mostra a figura abaixo:

Figura 14 – Gráfico em duas dimensões.



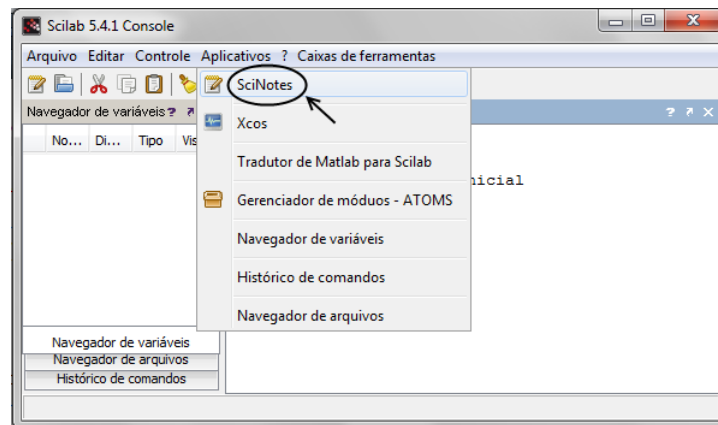
### 5.2.3 Editor de texto SciNotes

Scilab possibilita ao usuário criar pequenos aplicativos, denominados *scripts*, para finalidades específicas. Um *script* é simplesmente uma sequência de ordens do scilab apresentando comandos de entrada e saída que podem ser editados, salvos (geralmente com a extensão “.sce”) e executados como programas, por meio de um editor de texto integrado ao programa denominado SciNotes.

Neste trabalho, não será aprofundado a temática de programação em Scilab. Para o leitor interessado neste tema, recomenda-se a leitura de (LACERDA, 2011) e de (SCHE-RER, 2010). Este último dedicado aos métodos computacionais em física.

O editor SciNotes pode ser acessado pela barra de ferramentas do Scilab e clicando em “Aplicativos” e depois em “SciNotes”, como ilustrado abaixo.

Figura 15 – Acessando SciNotes.





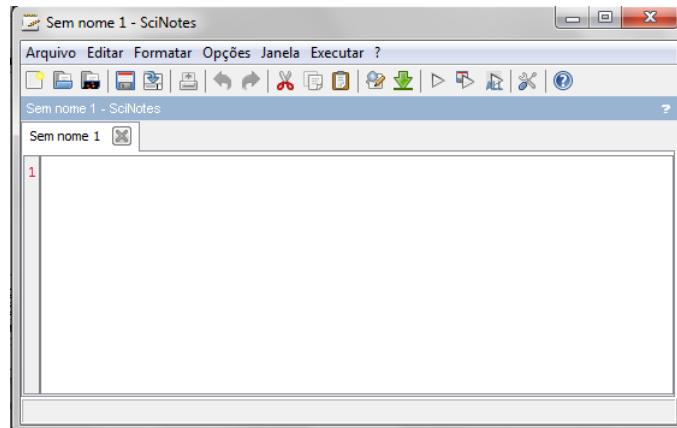
Depois de escrito o *script* no editor SciNotes e salvo o arquivo em alguma pasta do computador do usuário, basta executar o mini-aplicativo clicando no botão Executar  ou em Salvar e executar  da janela do SciNotes.



Figura 16 – Janela do SciNotes.



### 5.3 Os mini-aplicativos “ajuste-local.sce” e “ajuste-global.sce”

A seguir é feita uma sucinta descrição dos dois mini-aplicativos escritos do editor SciNotes e que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Dado um conjunto de  $n$  pontos  $P \in \mathbb{R}^2$ , o mini-aplicativo “ajuste-local.sce” inicia questionando o usuário se deseja ajustar estes pontos a uma Função Afim (cujo gráfico é uma reta) ou a uma Função Quadrática (cujo gráfico é uma parábola). Se o usuário decide-se pelo primeiro tipo de ajuste, o aplicativo utiliza a equação (4.3) para construir o gráfico de uma reta que “passa” exatamente por dois pontos previamente escolhidos pelo usuário e fornece os coeficientes  $a$  e  $b$  que caracterizam esta função.

Por outro lado, se o usuário decide-se pelo ajuste a uma Função Quadrática, o aplicativo plota o gráfico de uma parábola que “passa” exatamente por três pontos previamente escolhidos pelo usuário e fornece os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  desta função. Para isso, o aplicativo utilizará a equação (4.8). Em ambos os casos, o aplicativo também plotará os  $n$  pontos originais. Assim, o usuário pode avaliar (qualitativamente) se o tipo de função escolhida adequa-se aos  $n$  pontos dados.

Para complementar a análise feita acima, o usuário pode fazer uso do mini-aplicativo “ajuste-global.sce”. Semelhante ao primeiro aplicativo, este inicia questionando o usuário se deseja ajustar o conjunto de  $n$  pontos a uma reta ou a uma parábola.

Caso o usuário opte por um ajuste a uma Função Afim, “ajuste-global.sce” utiliza a equação (4.5) para determinar uma reta cujos coeficientes são dados pela média aritmética de todos os possíveis coeficientes que seriam obtidos escolhendo dois dentre os  $n$  pontos. Esta reta é esboçada em gráfico e os coeficientes que a definem são impressos em tela.

Caso o usuário opte pelo ajuste a uma parábola, “ajuste-global.sce” utiliza a equa-

ção (4.10) para determinar cujos coeficientes são dados pela média dos coeficientes de todas as possíveis parábolas que seriam obtidas ao escolher três dentre os  $n$  pontos dados.

Os códigos-fonte destes mini-aplicativos para Scilab encontram-se nos anexos **B** e **C**, respectivamente; os arquivos originais em Scilab estão disponíveis para *download* gratuito através do link <http://www.4shared.com/rar/OjoKojXrba/Mini-aplicativos.html>.

## 6 Atividade proposta

Este capítulo é dedicado à descrição de uma atividade a ser realizada pelo professor de matemática do ensino médio de acordo com o modelo de ajuste de curvas afim e quadrática mostrado no capítulo anterior e utilizando os *software Tracker* e Scilab.

A atividade foi dividida em duas partes: Aquisição de dados experimentais a partir da filmagem de um experimento de lançamento oblíquo e com o uso do *software Tracker*, seguida de um tratamento dos dados experimentais utilizando os mini-aplicativos “ajuste-local.sce” e “ajuste-global.sce”.

Cada parte contém as etapas a serem seguidas pelo aluno de ensino médio para o desenvolvimento da atividade proposta.

### 6.1 Motivação prática

Como motivação adicional, o professor pode sugerir que o aluno realize as atividades a seguir a partir de situações do cotidiano do estudante. Podem ser utilizadas filmagens de uma partida de futebol na escola tais como a cobrança de um tiro livre direto, ou mesmo o momento em que o goleiro coloca a bola novamente em jogo com um forte chute. Neste exemplo, sugere-se que o professor questione o aluno sobre com que velocidade o goleiro chuta a bola para que esta chegue a um jogador específico do outro lado do campo de futebol.

Para aqueles que não se interessam por futebol, o professor pode recorrer ao voleibol ou mesmo ao basquete como temática para a filmagem de lançamentos oblíquos.

#### 6.1.1 Problema motivador 1: Tiro livre direto com barreira

Sugere-se que o professor questione e discuta junto ao aluno qual o valor da velocidade, em metros por segundo, e com que ângulo de chute para que a bola ultrapasse a barreira (por exemplo, uma barreira com altura 1,80 metros) e chegue ao gol em um de seus cantos superiores.

As questões a seguir podem ser feitas pelo professor no decorrer desta discussão preliminar:

**Q.1** *A curva descrita pela bola durante o tiro livre direto é de um “tipo” conhecido? Que curva é essa?*

**Q.2** *Esta curva apresenta algum tipo de simetria?*

**Q.3** Muitas vezes, para facilitar a descrição e estudo de um movimento que ocorre em duas dimensões, recorre-se ao estudo independente de cada coordenada. Por exemplo, se o movimento se dá tanto na vertical quanto na horizontal, é possível estudar como a coordenada vertical varia com o tempo ( $y = y(t)$ ) independentemente do estudo de como a coordenada horizontal varia com o tempo ( $x = x(t)$ ). Que funções matemática você (aluno) esperaria que estivessem envolvidas neste fenômeno?

Que função você acha que descreve o movimento vertical ( $y = y(t)$ ) da bola?

Que função você acha que descreve o movimento horizontal ( $x = x(t)$ ) da bola?

Qual a interpretação física dada a estas funções?

**Q.4** Sabendo que a bola descreve uma parábola, quando a bola deve atingir a altura máxima: antes, depois da barreira ou exatamente sobre ela?

**Q.5** Uma condição para que se tenha um tiro livre direto com barreira bem sucedido é que a bola ultrapasse a barreira. Para isso, a bola deve atingir uma altura pelo menos superior ao salto dos jogadores que estiverem na barreira. No entanto, se a bola atinge grande altitude, isto pode facilitar a defesa pelo goleiro que necessitaria apenas “prever” onde a bola cairá. Baseado nisso, é possível determinar uma altura máxima ideal para a bola lançada?

### 6.1.2 Problema motivador 2: Saque em uma partida de volei

Inspirado no saque *jornada nas estrelas* (ALMANAQUEBRASIL, 2014), famoso durante os anos 80, debata com seus alunos de que forma um saque de volei pode ser lançado de modo a dificultar sua defesa pelo time adversário.

As questões a seguir podem ser feitas pelo professor no decorrer desta discussão preliminar:

**Q.1** A curva descrita pela bola durante o saque é de um “tipo” conhecido? Que curva é essa?

**Q.2** Esta curva apresenta algum tipo de simetria?

**Q.3** Muitas vezes, para facilitar a descrição e estudo de um movimento que ocorre em duas dimensões, recorre-se ao estudo independente de cada coordenada. Por exemplo, se o movimento se dá tanto na vertical quanto na horizontal, é possível estudar como a coordenada vertical varia com o tempo ( $y = y(t)$ ) independentemente do estudo de como a coordenada horizontal varia com o tempo ( $x = x(t)$ ). Que funções matemática você (aluno) esperaria que estivessem envolvidas neste fenômeno?

Que função você acha que descreve o movimento vertical ( $y = y(t)$ ) da bola?

Que função você acha que descreve o movimento horizontal ( $x = x(t)$ ) da bola?

Qual a interpretação física dada a estas funções?

**Q.4** Sabendo que esta curva é uma parábola, quando a bola deve atingir a altura máxima: antes, depois da barreira ou exatamente sobre a rede?

**Q.5** O saque jornada nas estrelas era conhecido por atingir grandes alturas, da ordem de 25 metros. Um saque de difícil defesa precisa atingir grandes alturas ou pode ser realizado com alturas menores?

Para responder às questões propostas acima, o professor irá sugerir estudar as curvas descritas tanto pela bola de futebol ou de vôlei através da filmagem destes fenômenos.

## 6.2 Descrição da Atividade

### 6.3 Parte 1: Aquisição de dados experimentais

#### 1º passo

Utilizando uma câmera digital, filme o lançamento oblíquo de uma pequena esfera.

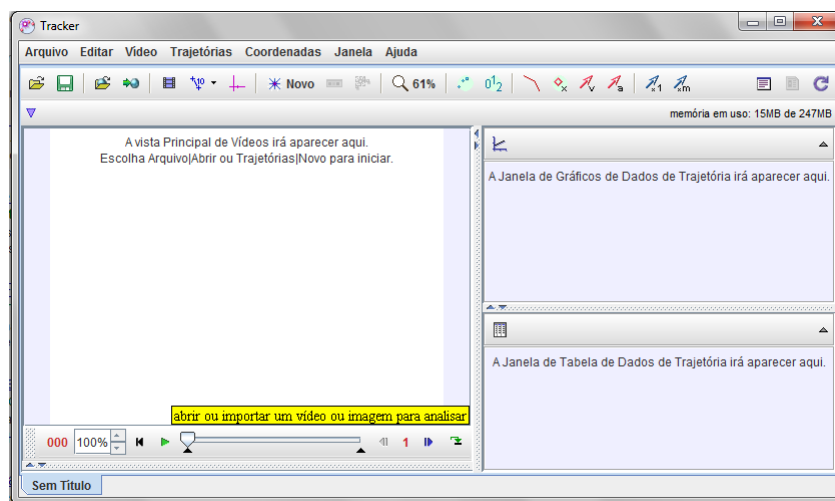
Adicione à “cena” filmada um objeto de comprimento conhecido. Este objeto pode ser uma régua, por exemplo, e deve estar situado no mesmo plano do movimento analisado. A câmera, por sua vez, deve estar num plano paralelo ao plano do movimento para evitar distorções na escala de medida.


Salve o filme obtido em um computador onde estejam previamente instalados os *software Tracker* e Scilab.

#### 2º passo

Execute o *software Tracker*. Surgirá a seguinte tela inicial:

Figura 17 – *Tracker*: Janela inicial.



Clique no botão **Abrir**  ou no menu **Arquivo** ⇒ **Abrir** e selecione o vídeo (.mp4, .avi, ...) filmado.

#### 3º passo


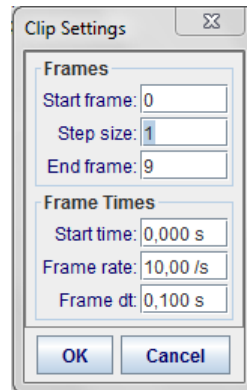
Na barra de ferramentas, clique no botão **clip settings** . Uma nova janela se abrirá, na qual o usuário será capaz de configurar os quadros (*frames*) inicial (*Start frame*) e final (*End frame*) do experimento, bem como o passo (*Step size*) da execução, tal como mostrado na figura abaixo.

Figura 18 – *Tracker: Clip Settings*.

#### 4º passo


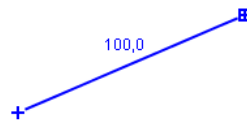
Clique no botão **Fita métrica com transferidor**  ⇒ **Novo** ⇒ **Bastão de Calibração**. Aparecerá uma “fita métrica” conforme figura abaixo:

Figura 19 – *Tracker: fita métrica*.

Arraste as pontas da fita até as extremidades de um objeto situado no plano do movimento analisado e cujo comprimento seja previamente conhecido. Clique sobre a fita para inserir a medida (em metro, centímetro, ...) conhecida.

#### 5º passo



Clique no botão **Mostrar ou ocultar eixos de coordenadas**  para exibir um sistema de eixos  $x$  e  $y$ . Arraste a origem para a posição desejada e/ou arraste a coordenada  $x$  para rotacionar o sistema de referência.

Figura 20 – *Tracker: Ajuste dos eixos coordenados*.

### 6º passo

Clique no botão **Criar Nova Trajetória** , escolha o tipo de marcação mais conveniente ao que se deseje. Em geral, a opção escolhida é **Ponto de massa**.


### 7º passo

Para marcar uma posição *frame*, mantenha a tecla **SHIFT** pressionada e clique sobre o objeto. Automaticamente, o vídeo passará ao *frame* seguinte. Repita o procedimento até o último quadro do intervalo definido.

OBS. 1: Para uma maior precisão, caso a qualidade do vídeo assim permita, é possível aumentar o zoom através do botão na barra de ferramentas ou usando a tecla de atalho *Z*.

OBS. 2: A cada marcação de uma posição em um *frame*, um novo ponto gráfico é plotado na janela de gráficos no canto superior esquerdo. Simultaneamente, são salvas numa tabela no canto inferior esquerdo as coordenadas espaciais e o tempo da trajetória obtida.

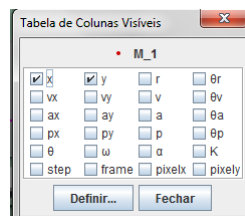
### 8º passo

Clique no botão **Salvar** , no menu **Arquivo** ⇒ **Salvar** ou use o atalho *Ctrl+S* para salvar a atividade como um arquivo tracker, extensão “.tkr”. Este arquivo deve ser salvo na mesma pasta em que se encontra o arquivo de vídeo original.

### 9º passo

Como dito antes, no canto inferior direito da tela do *Tracker*, pode-se visualizar uma tabela com os dados do experimento realizado. Clique no botão **Dados**. Aparecerá uma janela intitulada **Tabela de Colunas Visíveis**. Selecione as variáveis **x** e **y**.

Figura 21 – *Tracker*: Tabela de Colunas Visíveis.



Selecione as colunas de tempo (*t*) e posição horizontal (*x*). Com o botão direito, clique em **Copie os dados selecionados** ⇒ **Precisão total** (ou **Como formatado**).



Salve os dados em um arquivo de texto (mov-horizontal.txt)<sup>1</sup>.

Selecione as colunas de tempo (t) e posição horizontal (y). Com o botão direito, clique em **Copie os dados selecionados** ⇒ **Precisão total** (ou **Como formatado**). Salve os dados em um arquivo de texto (mov-vertical.txt).

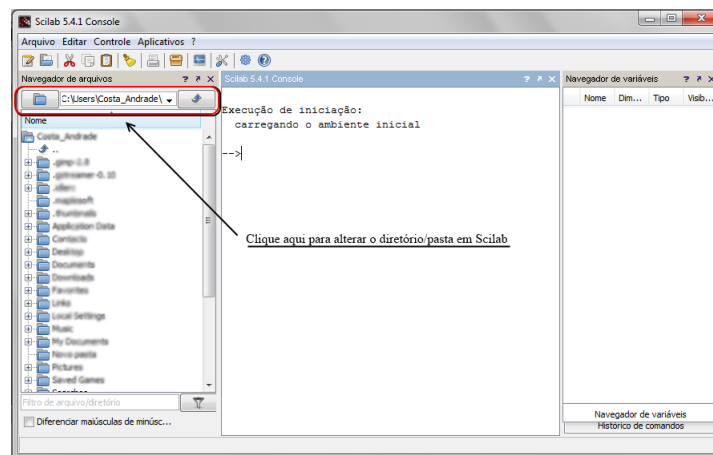
## 6.4 Parte 2: Tratamento dos dados

### 6.4.1 Caso 1: Movimento Horizontal

#### 1º passo

Execute o *software* Scilab. Surgirá a tela inicial:

Figura 22 – Scilab: Janela inicial.



Inicie a análise da componente horizontal do movimento filmado na etapa anterior. Carregue a matriz com os dados de posição e tempo deste movimento. Para isso, altere o diretório do Scilab para a pasta que contenha o arquivo **mov-horizontal.txt** e execute o comando:

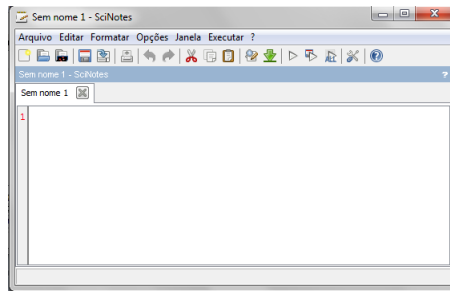
$$M = \text{fscanfMat}(\text{"mov-horizontal.txt"}).$$

#### 2º passo


Clique em **Aplicativos** ⇒ **SciNotes**. Uma nova janela, semelhante à mostrada abaixo, será exibida.

<sup>1</sup> Por exemplo o **Bloco de notas**.

Figura 23 – Janela do SciNotes.



### 3º passo

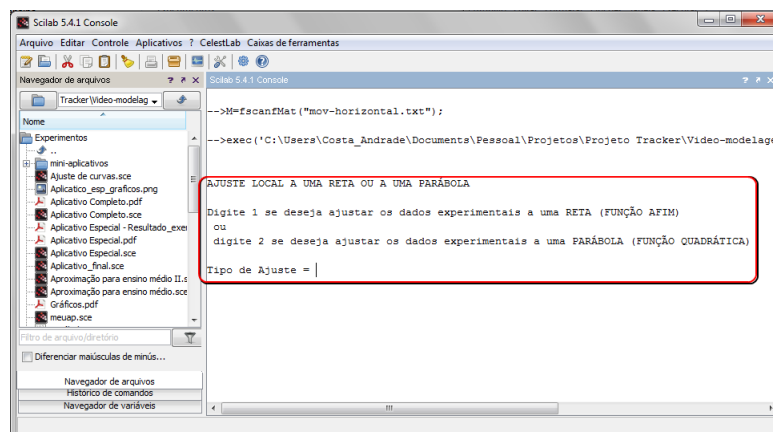
Clique em **Arquivo** ⇒ **Abrir** para abrir o mini-aplicativo **ajuste-local.sce**. Clique no botão executar .

Retorne à janela do Scilab e siga as orientações do programa.

### 4º passo

O usuário é solicitado a escolher se deseja que os dados experimentais (“mov-horizontal.txt”) sejam ajustados por uma **Função Afim** ou por uma **Função Quadrática**, conforme mostrado na figura abaixo:

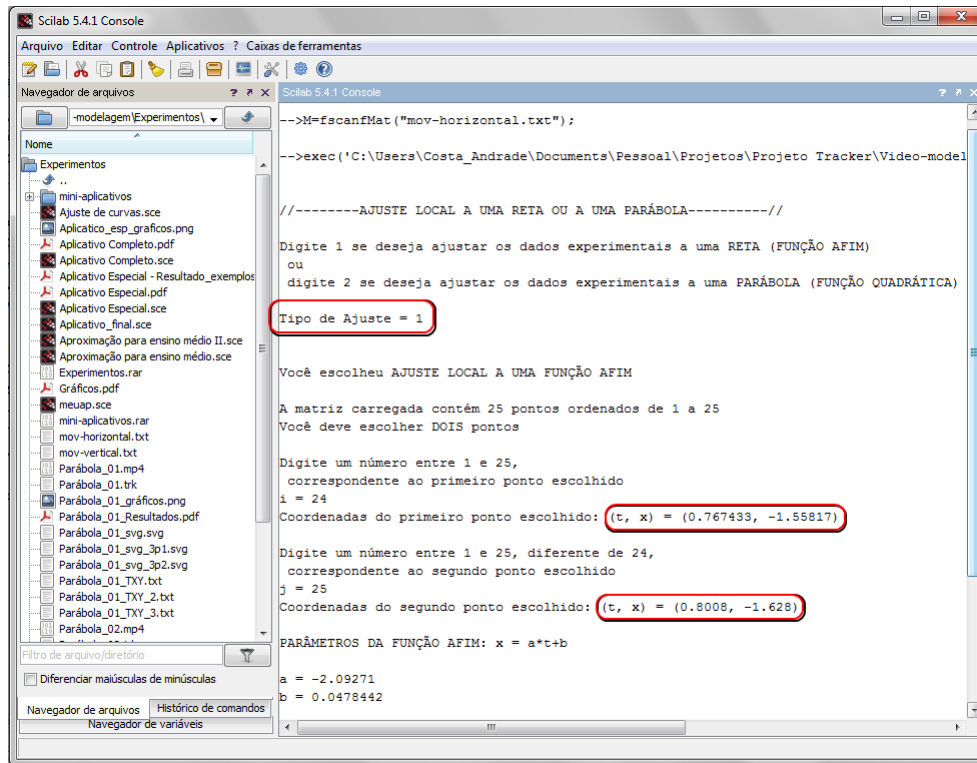
Figura 24 – Execução do mini-aplicativo “ajuste-local.sce” para Função Afim.



Entretanto, para esta atividade, escolha o modelo de **Função Afim**. O usuário será solicitado a escolher **dois pontos** dentre a lista de pontos no arquivo “mov-horizontal.txt”.

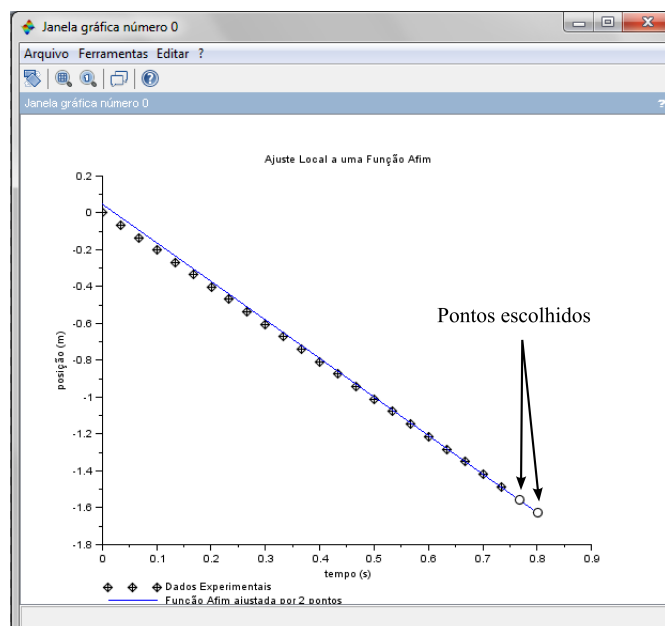
Feito isso, na janela principal do Scilab, serão mostradas as coordenadas (t, x) de cada ponto escolhido.

Figura 25 – Resultado analítico do mini-aplicativo “ajuste-local.sce”.



Uma nova janela do Scilab é aberta. Nela, os dados experimentais contidos no arquivo “mov-horizontal.txt” são mostrados em forma de um gráfico discreto de posição em função do tempo.

Figura 26 – Resultado gráfico do mini-aplicativo “ajuste-local.sce”.



Além disso, é possível visualizar a reta que passa pelos dois pontos escolhidos, os quais estão destacados dos demais pontos experimentais.

### 5º passo

Utilizando estas coordenadas e seus conhecimentos matemáticos, determine a **equação da reta** que passa pelos pontos escolhidos e compare o resultado encontrado com os coeficientes angular (a) e linear (b) mostrados na tela do Scilab.

Por exemplo, seja  $x = at + b$  a equação da reta que passa pelos pontos  $P_1 = (t_1, x_1)$  e  $P_2 = (t_2, x_2)$  fornecidos pelo Scilab no passo 4. Deseja-se conhecer o valor dos coeficientes  $a$  e  $b$ . Substituindo as coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$  na equação da reta, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x_1 = at_1 + b \\ x_2 = at_2 + b \end{cases}$$

Sugere-se ao aluno demonstrar a solução do sistema, tal que:

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{t_2 x_1 - t_1 x_2}{t_2 - t_1}.$$

### 6º passo

Repita os passos 3 a 5 pelo menos mais duas vezes. Observe que os coeficientes encontrados para a reta mudam para cada escolha de dois pontos.

Observe também que, para algumas escolhas dos dois pontos no passo 4, a reta obtida “foge” dos demais pontos experimentais.

Uma alternativa para a obtenção de uma reta que represente mais adequadamente a distribuição dos pontos experimentais é determinar uma “Função Afim Média” cujos coeficientes sejam iguais a média aritmética dos coeficientes de todas as possíveis retas obtidas ao escolher dois entre o total de pontos da distribuição. Por exemplo, caso houvessem apenas três pontos experimentais,  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , seriam obtidas três retas  $y = a_{12}x + b_{12}$  que “passa” pelos pontos  $Q_1$  e  $Q_2$ ,  $y = a_{13}x + b_{13}$  que “passa” pelos pontos  $Q_1$  e  $Q_3$  e  $y = a_{23}x + b_{23}$  que “passa” pelos pontos  $Q_2$  e  $Q_3$ .

Para os pontos  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  a “Função Afim Média” é dada pela equação:

$$y = ax + b \tag{6.1}$$

onde

$$a = \frac{a_{12} + a_{13} + a_{23}}{3} \tag{6.2}$$

e

$$b = \frac{b_{12} + b_{13} + b_{23}}{3} \quad (6.3)$$


Entretanto, quando a quantidade de pontos experimentais é grande, o cálculo manual de todos os coeficientes torna-se trabalhoso. De fato, para  $n$  pontos, a dificuldade exposta acima é descrita, em linguagem matemática, da seguinte forma: *Dados  $n$  pontos, de quantas maneiras é possível escolher 2 pontos distintos?* A solução deste problema requer um conhecimento básico de Análise Combinatória (MORGADO *et al.*, 2006) mas não deixa de ser surpreendente. Por exemplo, para  $n = 20$  pontos experimentais, então existe 20 modos de escolher um primeiro ponto  $Q_1$ . Feita esta escolha, existe 19 modos de escolher um segundo ponto  $Q_2$ . Utilizando o **princípio multiplicativo** (MORGADO *et al.*, 2006) da Análise Combinatória, um aluno apressado poderia dizer que existem  $20 \times 19 = 380$  modos de escolher dois dentre 20 pontos. Entretanto, escolher um ponto  $Q_1$  e “depois” escolher um ponto  $Q_2$  é equivalente a escolher um ponto  $Q_2$  e “depois” escolher um ponto  $Q_1$ . Isto significa que ao efetuar o produto  $20 \times 19$ , cada par de pontos foi contado duas vezes. Para corrigir esta contagem, basta dividir o resultado por 2, obtendo  $N = \frac{20 \times 19}{2}$ . Em outras palavras, no cálculo acima, foi determinado o número de combinações de 20 pontos tomados dois a dois, obtendo o resultado:

$$N = \frac{20!}{2!(20-2)!} = 190$$

modos de escolher 2 dentre os  $n = 10$  pontos. Logo, neste caso, o passo 4 seria repetido  $N = 190$  vezes para a obtenção da média de todos os coeficientes (MORGADO *et al.*, 2006).

Nos passos seguintes, será utilizado um segundo mini-aplicativo de Scilab, denominado **ajuste-global.sce**, que permitirá o cálculo direto de uma “reta média” que passa por todos os dados experimentais.

### 7º passo

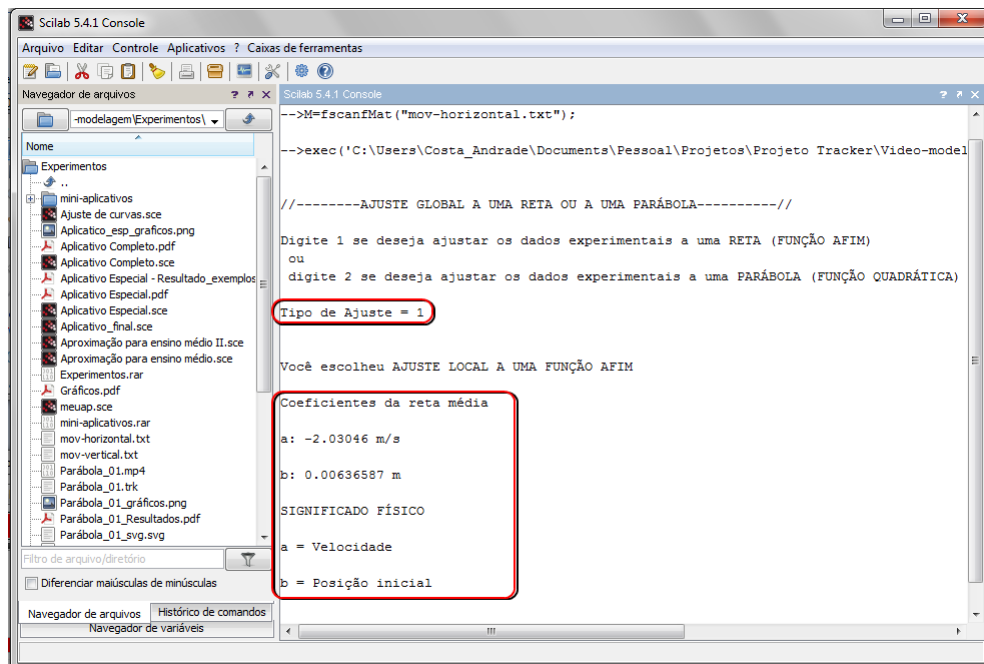
Clique em **Arquivo**  $\Rightarrow$  **Abrir** para abrir o mini-aplicativo **ajuste-global.sce** e clique no botão executar .

Retorne à janela do Scilab e siga as orientações do programa.

### 8º passo

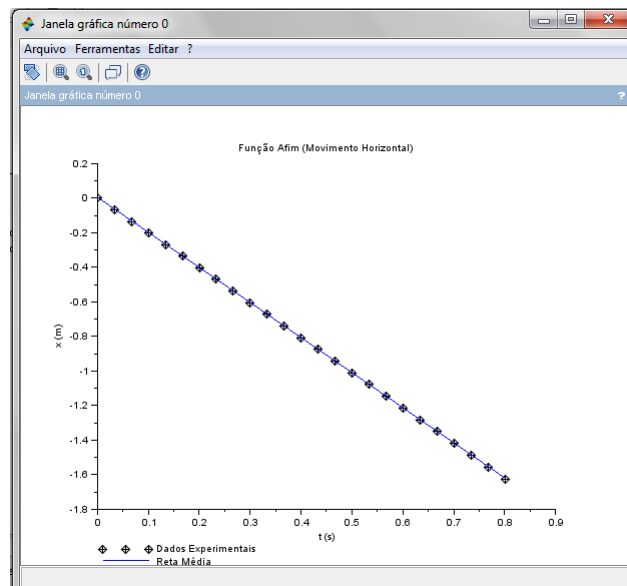
Assim como no mini-aplicativo anterior, o usuário é solicitado a escolher se deseja ajustar os dados experimentais (“mov-horizontal.txt”) a uma **Função Afim** ou a uma **Função Quadrática**. Escolha: **tipo de ajuste = 1** para o modelo de Função Afim.

Figura 27 – Ajuste-global.sce: resultado analítico para Função Afim.



Uma janela gráfica contendo os dados experimentais e a “reta média” será exibida.

Figura 28 – Ajuste-global.sce: resultado gráfico para Função Afim.



## 6.4.2 Caso 2: Movimento Vertical

### 1º passo


Execute o *software* Scilab novamente. Carregue o arquivo com os dados da componente vertical do movimento filmado. Para isso, altere o diretório do Scilab para a pasta que contenha o arquivo de texto **mov-vertical.txt**. Então, execute o comando:

$$M = \text{fscanfMat}(\text{"mov-vertical.txt"}).$$

### 2º passo

Clique em **Aplicativos**  $\Rightarrow$  **SciNotes** para abrir uma nova janela do SciNotes.

### 3º passo

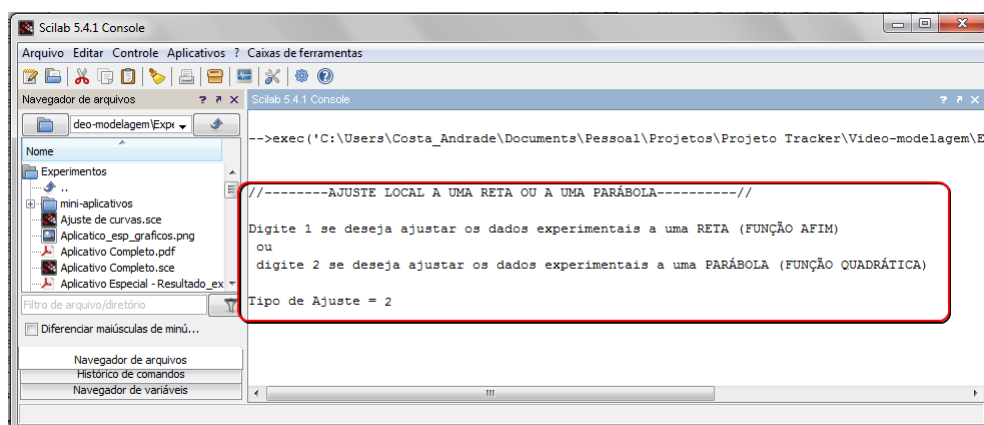
Clique em **Arquivo**  $\Rightarrow$  **Abrir** para abrir o mini-aplicativo **ajuste-local.sce**. Clique no botão executar .

Retorne à janela do Scilab e siga as orientações do programa.

### 4º passo

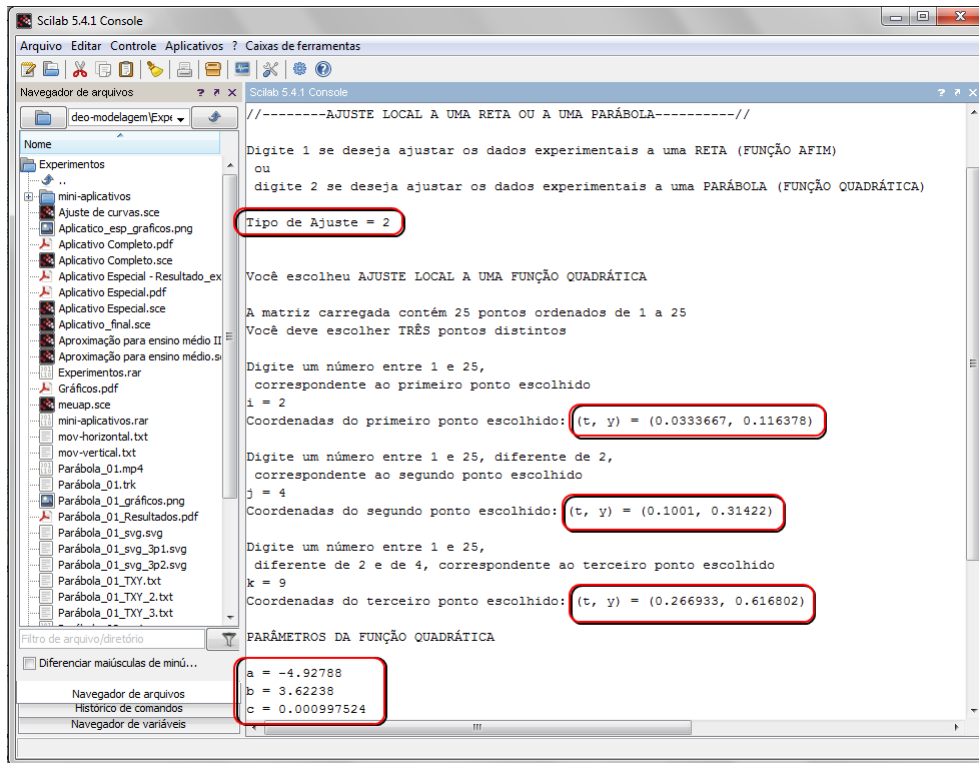
Assim como no caso 1 (Movimento Horizontal), usuário é solicitado escolher o tipo de ajuste desejado. Desta vez, digite “2” para o modelo de ajuste por uma **Função Quadrática**.

Figura 29 – Execução do mini-aplicativo ajuste-local.sce para Função Quadrática.



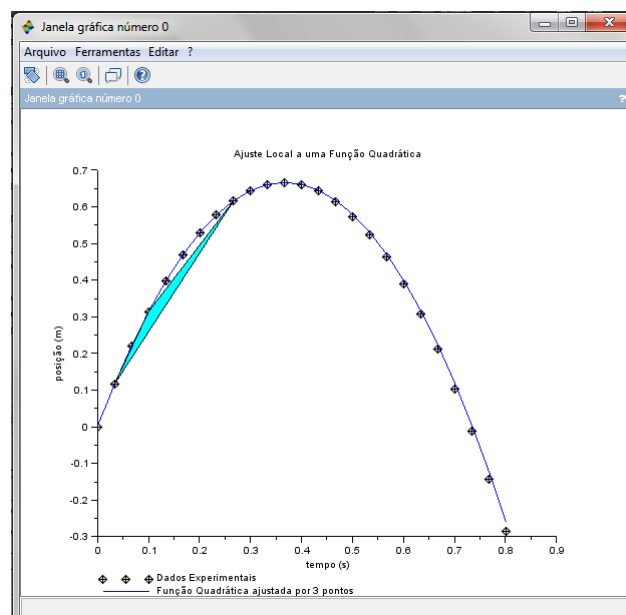
O usuário é solicitado a escolher **três pontos** dentre a lista de pontos no arquivo “mov-vertical.txt”. Feito isso, na janela principal do Scilab, serão mostradas as coordenadas  $(t, y)$  de cada ponto escolhido.

Figura 30 – Ajuste-local.sce: resultado analítico para Função Quadrática.



Uma nova janela do Scilab é aberta. Nela, os dados experimentais contidos no arquivo “mov-vertical.txt” são visualizados em forma de um gráfico discreto da posição em função do tempo.

Figura 31 – Ajuste-local.sce: resultado gráfico para Função Quadrática.





Além disso, é possível visualizar a parábola que passa pelos três pontos escolhidos, que são destacados como vértices de um triângulo.

### 5º passo

Utilizando seus conhecimentos matemáticos e as coordenadas dos pontos fornecidas pelo programa, determine a **equação da parábola** que passa pelos três pontos escolhidos. Compare o resultado com os coeficientes mostrados na tela do Scilab.

Por exemplo, seja  $y = at^2 + bt + c$  a equação da parábola que passa pelos três pontos  $P_1 = (t_1, y_1)$ ,  $P_2 = (t_2, y_2)$  e  $P_3 = (t_3, y_3)$  escolhidos no passo 4. Deseja-se determinar o valor dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Substituindo as coordenadas de  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  na equação da parábola, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} y_1 = at_1^2 + bt_1 + c \\ y_2 = at_2^2 + bt_2 + c \\ y_3 = at_3^2 + bt_3 + c \end{cases}$$

cuja solução pode ser obtida por diversos métodos trabalhados no ensino médio. Uma forma de apresentar esta solução é:

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2} \left( \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$b = \frac{1}{x_3 - x_2} \left[ \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x_3 + x_1) - \left( \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right) (x_2 + x_1) \right]$$

$$c = y_1 + \frac{x_1}{x_3 - x_2} \left[ \left( \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right) x_2 - \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x_3 \right]$$

### 6º passo


Repita os passos 3 a 5 pelo menos mais duas vezes. Observe que os coeficientes da parábola obtida mudam de acordo com os três pontos escolhidos.

Observe ainda que, para algumas escolhas dos três pontos no passo 4, a parábola “foge” dos demais pontos experimentais.

Assim como no caso 1 (movimento horizontal), uma alternativa para que a parábola adeque-se aos pontos experimentais, “passando mais próximo deles” seria repetir o passo 4 para todas as escolhas de três pontos dentre os  $n$  pontos experimentais e tomar a média aritmética dos coeficientes obtidos.

Entretanto, caso existam muitos pontos experimentais, o cálculo manual de todos os coeficientes torna-se trabalhoso<sup>2</sup>. Nos passos seguintes, será utilizado o mini-aplicativo **ajuste-global.sce**, que permitirá o cálculo direto da “parábola média” que passa por todos os dados experimentais.

### 7º passo

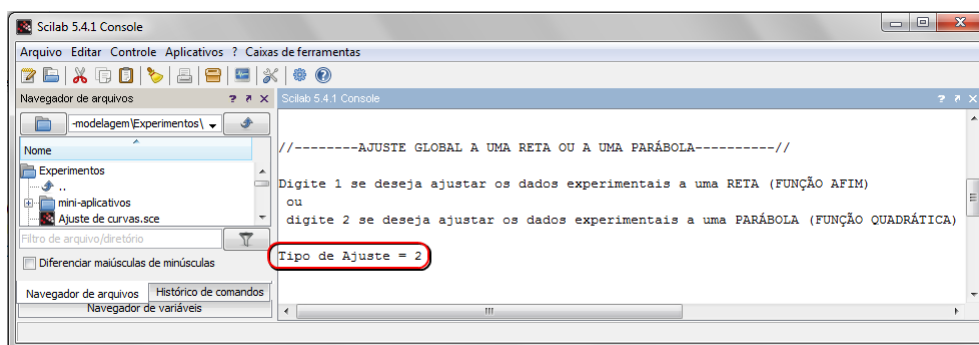
Clique em **Arquivo** ⇒ **Abrir** para abrir o mini-aplicativo **ajuste-global.sce**. Clique no botão executar .

Retorne à janela do Scilab e siga as orientações do programa.

### 8º passo

Assim como no mini-aplicativo anterior, o usuário é solicitado a escolher se deseja ajustar os dados experimentais (“mov-horizontal.txt”) a uma **Função Afim** ou a uma **Função Quadrática**. Escolha: **tipo de ajuste = 2** para o modelo de Função Quadrática.

Figura 32 – Ajuste-global.sce: resultado analítico para Função Quadrática.



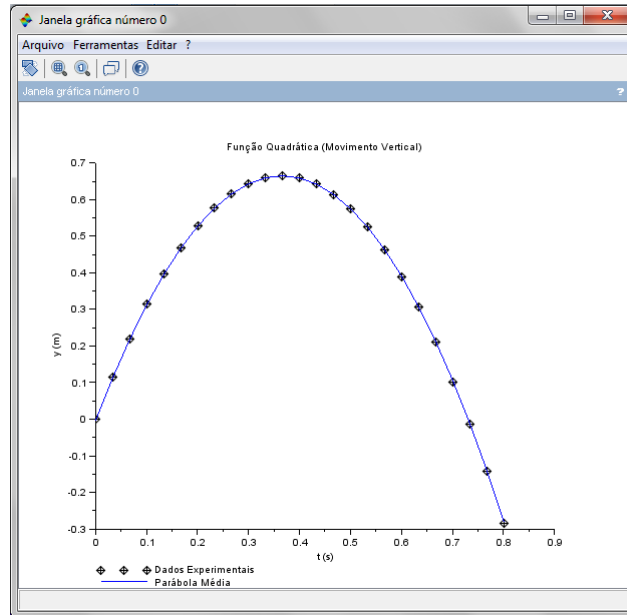
Uma janela gráfica contendo os dados experimentais e a “parábola média” será exibida.

<sup>2</sup> A dificuldade exposta acima é descrita, em linguagem matemática, da seguinte forma: *Dados  $n$  pontos, de quantas maneiras é possível escolher 3 pontos distintos?* A solução deste problema requer um conhecimento básico de Análise Combinatória (MORGADO *et al.*, 2006) mas não deixa de ser surpreendente. Por exemplo, considere  $n = 10$  pontos experimentais. Então existem

$$N = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

modos de escolher 3 dentre os  $n = 10$  pontos. Logo, neste caso, o passo 4 seria repetido  $N = 120$  vezes para a obtenção da média de todos os coeficientes.

Figura 33 – Ajuste-global.sce: resultado gráfico para Função Quadrática.



## 6.5 Discussão dos resultados junto aos alunos

Finalizada a etapa de tomada dos dados experimentais, o aluno poderá utilizar os resultados gráficos obtidos bem como a equação da Função Afim para a coordenada horizontal do movimento e a equação da Função Quadrática para a coordenada vertical do movimento para responder às perguntas surgidas durante as discussões preliminares. Neste momento, o professor pode acrescentar novos questionamentos e desafios ao aluno.

### **Atividade 1: Função Afim**

*Analizando a coordenada horizontal do lançamento de tiro livre direto ou do saque de volei, você deve ter encontrado uma reta, ou seja, uma Função Afim do tipo:*

$$x = at + b$$

*Utilizando os aplicativos computacionais, você determinou o valor dos coeficientes  $a$  e  $b$  e obteve um gráfico. Qual o significado de cada um desses coeficientes?*

*Observe o gráfico  $x$  versus  $t$ . Em que ponto este gráfico “toca” o eixo- $x$ ? Compare este valor com o coeficiente  $b$ ?*

*Ainda no gráfico  $x$  versus  $t$ , note que a reta forma um certo ângulo com o eixo- $t$ . Qual a tangente desse ângulo? Compare este valor com a coeficiente  $a$ .*

### **Atividade 2: Função Quadrática**

*Analizando a coordenada vertical do lançamento de tiro livre direto ou do saque de volei, você deve ter encontrado uma parábola, ou seja, uma Função Quadrática do tipo:*

$$y = at^2 + bt + c$$

*Utilizando os aplicativos computacionais, você determinou o valor dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  e obteve um gráfico. Qual o significado de cada um desses coeficientes?*

*Observe o gráfico  $y$  versus  $t$ . Em que ponto este gráfico “toca” o eixo- $y$ ? Compare este valor com o coeficiente  $c$ ?*

*Utilizando a fórmula  $y = at^2 + bt + c$ , calcule as raízes da Função Quadrática. Compare este valor com os pontos onde o gráfico  $y$  versus  $t$  “toca” o eixo- $t$ .*

*Use a fórmula  $y = at^2 + bt + c$  para calcular as coordenadas do vértice da parábola. Compare este valor com as coordenadas do ponto máximo ou extremo do gráfico  $y$  versus  $t$ .*

*Para cada um dos problemas acima, verifique se o resultado encontrado é consistente com os dados experimentais.*

### **Atividade 3: Equação da trajetória**

Durante as discussões preliminares, em especial na questão **Q. 4**, sugeriu-se uma curva descrita pela bola, ou seja, uma trajetória parabólica. Entretanto, esta conclusão pode não ser tão óbvia, já que as atividades descritas acima contemplam como as coordenadas horizontal ( $x$ ) e vertical ( $y$ ) variam com o tempo ( $t$ ).

O aluno poderia questionar (e espera-se que ele questione) que as questões **Q. 4** e **Q. 5** ficam sem resposta.

É sugerido ao professor que oriente os alunos para o desenvolvimento de maneiras de solução para esta dificuldade. Abaixo, são apresentadas duas alternativas.

**Alternativa 1:** Utilizar as equações horárias  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  para chegar a uma equação  $y = y(x)$  da trajetória da bola. A partir desta equação, responder as perguntas formuladas acima e outras que vierem a surgir.

**Alternativa 2:** Utilizar os dados experimentais e os aplicativos computacionais para construir o gráfico da trajetória e determinar a equação  $y = y(x)$  da trajetória da bola.

#### **Atividade 4: Interpretação física**

*De acordo com a teoria física que explica o fenômeno de lançamento oblíquo, as equações que descrevem como as coordenadas horizontal ( $x$ ) e vertical  $y$  variam em função do tempo ( $t$ ) são, respectivamente:*

$$x(t) = v_{0x}t + x_0 \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0,$$

onde

- $v_{0x}$  é a velocidade inicial na direção  $x$ ,
- $x_0$  é a posição inicial na direção  $x$ ,
- $v_{0y}$  é a velocidade inicial na direção  $y$ ,
- $y_0$  é a posição inicial na direção  $y$ ,
- $g$  é a aceleração da gravidade. Se a distância é medida em metros ( $m$ ) e o tempo é medido em segundos ( $s$ ), vale a aproximação:  $g = 10m/s^2$ .

*Além disso, o ângulo de lançamento  $\theta$  é dado pela relação:*

$$\text{tg}\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

*Compare as equações que você obteve com o parâmetros físicos citados acima. Em especial, avalie se o valor da aceleração da gravidade  $g$  está de acordo com a previsão teórica.*

### Atividade 5: Ângulo de chute para ultrapassar uma barreira durante um tiro livre direto

Em um campo de futebol, filme o lançamento de uma bola de futebol durante um tiro livre direto sem barreira a uma distância de, por exemplo, 20 metros do gol.

Utilizando as técnicas computacionais, determine as equações da trajetória:

$$x(t) = v_{0x}t + x_0 \quad e \quad y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0,$$

Agora, suponha que exista uma barreira de altura  $h_B = 1,80\text{m}$  no ponto médio entre o ponto de lançamento da bola e o gol, ou seja, na posição  $x_B = 9,15\text{m}$ . A bola é capaz de passar pela barreira?

Para responder a essa pergunta, utilize a equação  $x(t) = v_{0x}t + x_0$  para determinar o instante de tempo no qual a bola chega até a barreira, ou seja, determine  $t_B$  que satisfaz a equação:  $x_B = v_{0x}t_B + x_0$ .

Sabendo o valor de  $t_B$ , utilize a equação  $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$  para verificar se a bola é capaz de passar pela barreira. Existem dois casos a considerar:

- Se  $y(t_B) > h_B = 1,80\text{m}$ , a bola é capaz de ultrapassar a barreira. Nesse caso, calcule o ângulo de lançamento necessário:

$$tg\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}.$$

- Se  $y(t_B) \leq h_B = 1,80\text{m}$ , a bola não é capaz de ultrapassar a barreira. Uma forma de resolver este problema é alterar apenas velocidade inicial vertical  $v_{0y}$ . Para isso encontre um **novo** valor de  $v_{0y}$  que satisfaz a relação:

$$h_B = \frac{1}{2}gt_B^2 + v_{0y}t_B + y_0$$

onde os demais valores na equação acima são aqueles encontrados durante a filmagem do chute.

Com o **novo** valor de  $v_{0y}$  e mantendo inalterado o valor de  $v_{0x}$ , determine o ângulo de lançamento para o qual a bola ultrapasse a barreira

$$tg\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}.$$

Existem outras formas de resolver este problema?

## 7 Exemplo de aplicação da atividade proposta

Este capítulo é dedicado à aplicação da proposta de atividade apresentada no capítulo anterior. A fim de evitar um posicionamento tendencioso, não serão discutidas as questões **Q.4** e **Q.5** sugeridas para debate com os estudantes. Apenas as propriedades matemáticas envolvidas no experimento de lançamento oblíquo de um objeto esférico foram consideradas.

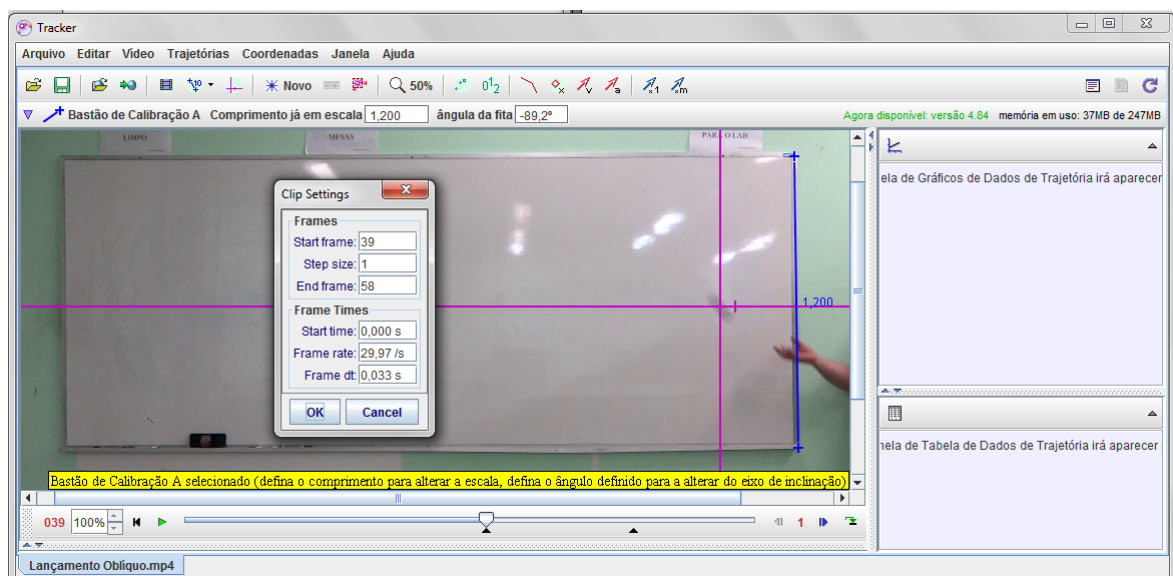
O vídeo utilizado neste exemplo está disponível para *download* gratuito através do link: [http://www.4shared.com/rar/y\\_0MA3X0ce/Amostra\\_de\\_vdeo.html](http://www.4shared.com/rar/y_0MA3X0ce/Amostra_de_vdeo.html).

Neste exemplo de aplicação são comentados detalhes de uso dos *software* e são apresentadas algumas dificuldades que não foram contemplados durante o tutorial da atividade bem como a forma de contorná-las.

### 7.1 Aplicação do software Tracker ao Lançamento Oblíquo

Esta etapa foi baseada na **Parte 1: Aquisição dos dados experimentais** da atividade. Como afirmado naquela ocasião, após executar o *software Tracker* e carregar o vídeo a ser analisado (Lançamento Oblíquo.mp4), deve-se configurar o programa para a tomada dos dados.

Figura 34 – Configurações iniciais do *Tracker*.



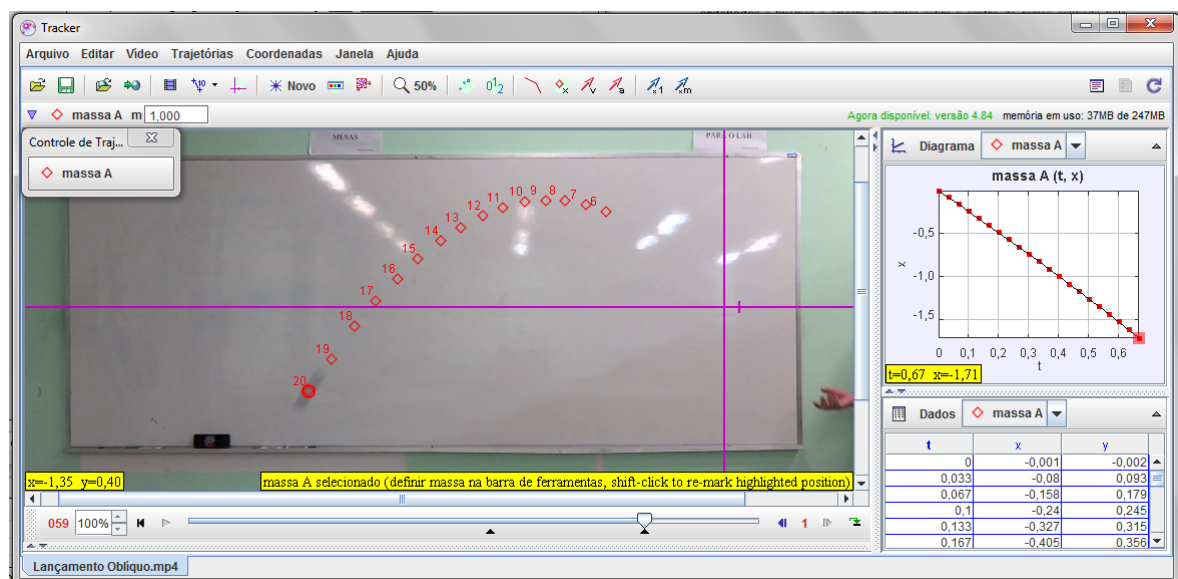
- Em *clip settings* foi definida a faixa de *frames* para o experimento. Neste caso, foi

fixada  $Start\ frame = 38$ ,  $Step\ size = 1$  e  $End\ frame = 59$ , totalizando 21 pontos experimentais.

- Em **Fita Métrica**, a escala dos objetos em cena foi determinada por meio da medição da altura do quadro branco (1,20m). O objeto utilizado para determinar a escala do experimento deve encontrava-se próximo ao plano do movimento analisado.
- Com a tela no *frame* inicial (39), foi utilizado o botão **Mostrar ocultar os eixos coordenados** para fixar a origem dos eixos sobre o centro da região ocupada pela esfera.

As configurações descritas acima podem ser visualizadas na Figura 34. Após estas configurações iniciais, criou-se um *novo ponto de massa*. Feito isso, obtêm-se os dados da trajetória da esfera: mantendo a tecla **SHIFT** pressionada e clicando sobre a esfera enquanto os *frames* sucedem-se um a um. O resultado é mostrado na figura abaixo.

Figura 35 – Trajetória parabólica.



No canto inferior direito da Figura 35, é possível perceber alguns valores das coordenadas horizontal ( $x$ ), vertical ( $y$ ) e do tempo ( $t$ ).

Para exportar os dados do movimento, é necessário selecionar as colunas da tabela de dados que se deseja exportar. Por exemplo, para os dados da coordenada horizontal, deve-se selecionar as colunas de tempo ( $t$ ) e posição horizontal ( $x$ ), clicar com o botão direito do *mouse* sobre a tabela, escolher a opção **copiar os dados selecionados com precisão total** e colar em um arquivo de texto (por exemplo o **Bloco de Notas**) como o nome “mov-horizontal.txt”. Não se deve esquecer de que este arquivo deve conter apenas os dados da trajetória e que quaisquer outras informações devem ser apagadas.



Nesse momento, o usuário pode observar que o *software Tracker* usa a **vírgula** para separar a parte inteira da parte decimal dos números. Por outro lado, Scilab usa o **ponto** como separador decimal. Portanto, no arquivo de texto “**mov-horizontal.txt**” é preciso substituir todas as vírgulas por pontos. O resultado é a figura abaixo.

Figura 36 – Dados: mov-horizontal.txt.

```

Arquivo  Editar  Formatar  Exibir  Ajuda
0.00000000E0 -1.435258846E-3
3.336666667E-2 -7.972264867E-2
6.673333333E-2 -1.580100385E-1
1.001000000E-1 -2.404178173E-1
1.334666667E-1 -3.269459850E-1
1.668333333E-1 -4.052333748E-1
2.002000000E-1 -4.876411535E-1
2.335666667E-1 -5.700489323E-1
2.669333333E-1 -6.565771000E-1
3.003000000E-1 -7.348644898E-1
3.336666667E-1 -8.213926575E-1
3.670333333E-1 -9.120412142E-1
4.004000000E-1 -9.944489929E-1
4.337666667E-1 -1.085097550E0
4.671333333E-1 -1.167505328E0
5.005000000E-1 -1.262274274E0
5.338666667E-1 -1.344682053E0
5.672333333E-1 -1.435330609E0
6.006000000E-1 -1.521858777E0
6.339666667E-1 -1.616627723E0
6.673333333E-1 -1.711396668E0

```

Selecionando as colunas de tempo ( $t$ ) e posição vertical ( $y$ ) e repetindo o procedimento descrito acima, tem-se o arquivo “**mov-vertical.txt**”.

Figura 37 – Dados: mov-vertical.txt.

```

Arquivo  Editar  Formatar  Exibir  Ajuda
0.00000000E0 -2.182789496E-3
3.336666667E-2 9.258615608E-2
6.673333333E-2 1.791143238E-1
1.001000000E-1 2.450405468E-1
1.334666667E-1 3.150871587E-1
1.668333333E-1 3.562910481E-1
2.002000000E-1 3.933745486E-1
2.335666667E-1 4.222172711E-1
2.669333333E-1 4.386988269E-1
3.003000000E-1 4.386988269E-1
3.336666667E-1 4.345784379E-1
3.670333333E-1 4.098561043E-1
4.004000000E-1 3.768929928E-1
4.337666667E-1 3.274483256E-1
4.671333333E-1 2.738832694E-1
5.005000000E-1 1.997162685E-1
5.338666667E-1 1.173084897E-1
5.672333333E-1 2.665993307E-2
6.006000000E-1 -7.634979038E-2
6.339666667E-1 -2.123226253E-1
6.673333333E-1 -3.441750714E-1

```

De posse destes arquivos salvos no computador do usuário, foi iniciada a **Parte 2: Tratamento dos dados** com uso dos mini-aplicativos “ajuste-local.sce” e “ajuste-global.sce”.

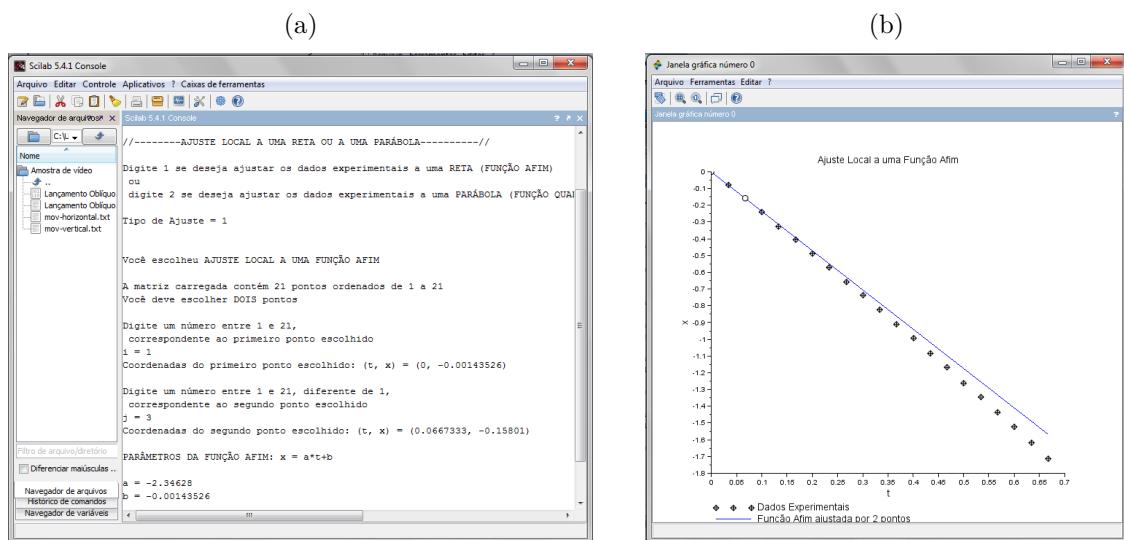
## 7.2 Aplicação dos mini-aplicativos “ajuste-local.sce” e “ajuste-global.sce”

### 7.2.1 Movimento Horizontal e Função Afim

Após executar o programa Scilab, procedeu-se à alteração do diretório do Scilab para a pasta onde o arquivo **mov-horizontal.txt** havia sido salvo. O passo seguinte é executar o comando:  $M = \text{fscanfMat}(\text{“mov-horizontal.txt”})$ . Com isso, o programa Scilab está pronto para interpretar os dados do arquivo de texto.

Ao abrir e executar o mini-aplicativo “ajuste-local.sce”, deve-se escolher, nesta etapa, o tipo de ajuste para uma Função Afim, designada no aplicativo pelo número **1**. Neste caso, o aplicativo construirá uma reta passando por dois pontos escolhidos pelo usuário. A título de exemplo, escolheu-se o primeiro e o terceiro pontos da lista de 21 pontos da trajetória da esfera, conforme ilustrado na figura abaixo.

Figura 38 – Mini-aplicativo “ajuste-local.sce” e Função Afim.



Na Figura 38 (a), são mostradas as coordenadas dos pontos escolhidos:  $(t_1, x_1) = (0, -0.00143526)$  e  $(t_2, x_2) = (0.0667333, -0.15801)$  bem como os coeficientes  $a$  e  $b$  da reta  $x = at + b$  que passa exatamente por aqueles pontos. É instrutivo comparar os coeficientes mostrados com a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 = at_1 + b \\ x_2 = at_2 + b \end{cases}$$

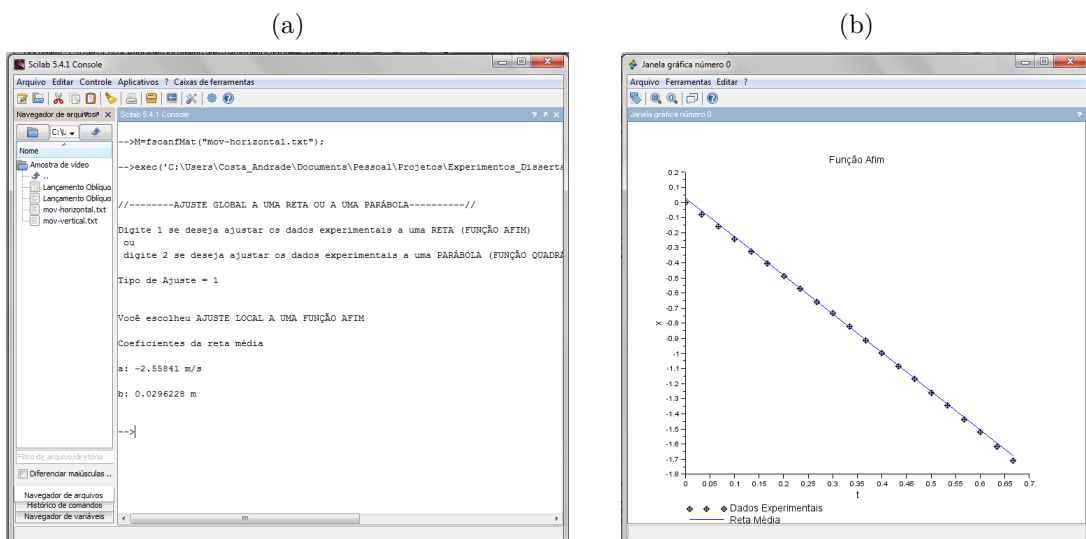
Observando a Figura 38 (b), percebe-se que a reta obtida não representa adequadamente a distribuição dos pontos da coordenada horizontal da esfera, apesar de que essa distribuição sugere um comportamento linear.

Executando o mini-aplicativo “ajuste-local.sce” mais algumas vezes, o usuário pode perceber que a qualidade do resultado depende da escolha dos pontos  $(t_1, x_1)$  e  $(t_2, x_2)$ .

A fim de obter um resultado mais representativo, utilizou-se o mini-aplicativo “ajuste-global.sce” que calcula a **média aritmética** de todos os resultados possíveis dos coeficientes  $a$  e  $b$  quando são escolhidos dois dentre o total de pontos experimentais.

Executando o mini-aplicativo “ajuste-global.sce” e escolhendo o modelo **tipo de ajuste = 1** para Função Afim, obtém-se:

Figura 39 – Mini-aplicativo “ajuste-global.sce” e Função Afim.



Na Figura 39 (a), encontram-se os coeficientes da reta fornecida pelo aplicativo e que pode ser observada na Figura 39 (b). Utilizando duas casas decimais após a vírgula, a coordenada  $x$  da trajetória da bola é dada em função do tempo  $t$  como

$$x = -2,56t + 0,03.$$

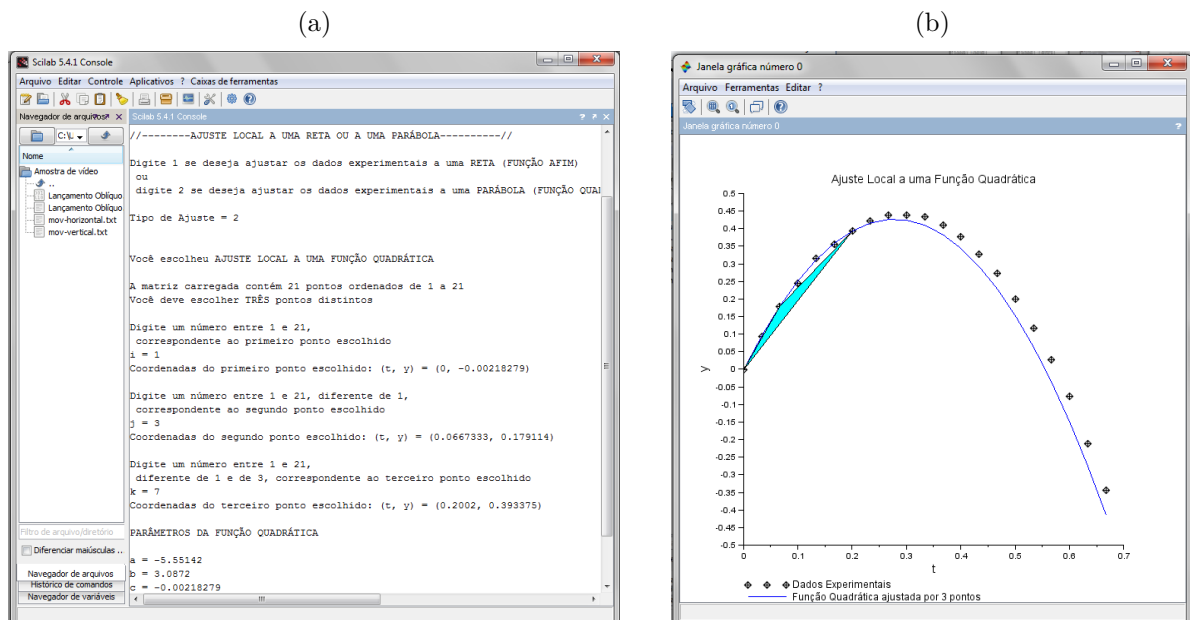
De posse desta equação, professor e alunos podem discutir as questões apresentadas nesta proposta bem como outras que vierem a surgir.

## 7.2.2 Movimento Vertical e Função Quadrática

Nesta etapa, após executar o programa Scilab, deve-se alterar o diretório para a pasta onde o arquivo **mov-vertical.txt** havia sido salvo. O passo seguinte é executar o comando:  $M = \text{fscanfMat}(\text{"mov-vertical.txt"})$ . Com isso, o programa Scilab está pronto para interpretar os dados do arquivo de texto.

Ao abrir e executar o mini-aplicativo “ajuste-local.sce”, deve-se escolher, nesta etapa, o tipo de ajuste para uma Função Quadrática, designada no aplicativo pelo número **2**. Neste caso, o aplicativo construirá uma parábola passando por três pontos escolhidos pelo usuário. A título de exemplo, escolheu-se o primeiro, o terceiro e o sétimo pontos da lista de 21 pontos da trajetória da esfera. Na figura abaixo, podem ser visualizados

Figura 40 – Mini-aplicativo “ajuste-local.sce” e Função Quadrática.



Na Figura 40 (a), são mostradas as coordenadas dos pontos escolhidos:  $(t_1, y_1) = (0, -0.00218279)$ ,  $(t_2, y_2) = (0.0667333, 0.179114)$  e  $(t_3, y_3) = (0.2002, 0.393375)$  bem como os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da parábola  $y = at^2 + bt + c$  que passa exatamente por aqueles pontos. É instrutivo comparar os coeficientes mostrados com a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} y_1 = at_1^2 + bt_1 + c \\ y_2 = at_2^2 + bt_2 + c \\ y_3 = at_3^2 + bt_3 + c \end{cases}$$

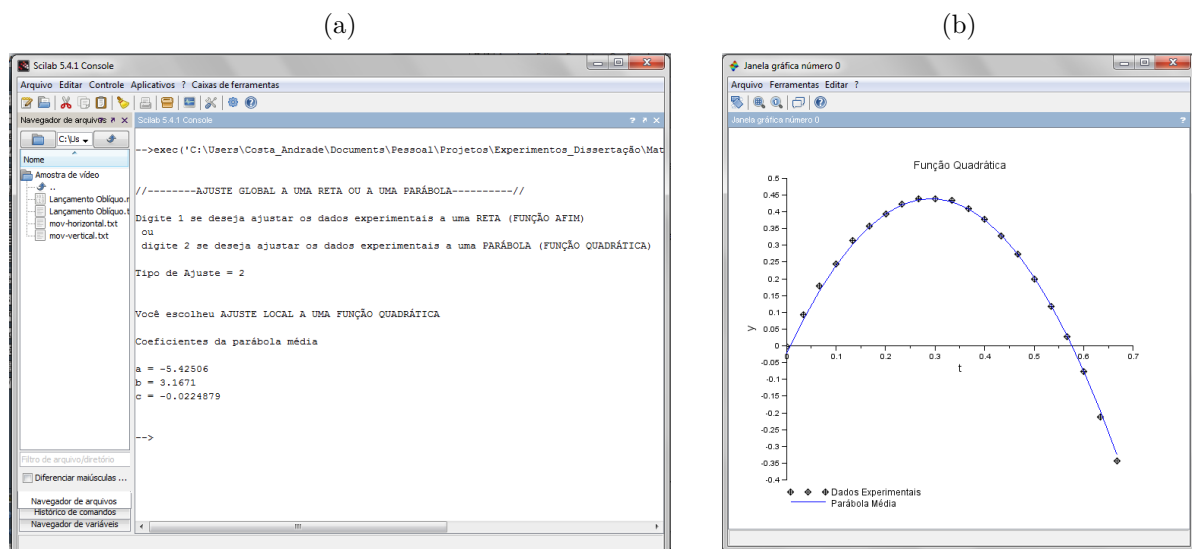
Por outro lado, observando a Figura 40 (b), percebe-se que a parábola obtida não representa adequadamente a distribuição dos pontos da coordenada vertical da esfera, apesar de que essa distribuição sugere uma Função Quadrática.

Executando o mini-aplicativo “ajuste-local.sce” mais algumas vezes, o usuário pode perceber que a qualidade do resultado depende da escolha dos pontos  $(t_1, y_1)$ ,  $(t_2, y_2)$  e  $(t_3, y_3)$ .

A fim de obter um resultado mais representativo, utilizou-se o mini-aplicativo “ajuste-global.sce” o qual calcula a **média aritmética** de todos os resultados possíveis dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  quando são escolhidos três dentre o total de pontos experimentais.

Executando o mini-aplicativo “ajuste-global.sce” e escolhendo o modelo **tipo de ajuste = 2** para Função Quadrática, obtém-se:

Figura 41 – Mini-aplicativo “ajuste-global.sce” e Função Quadrática.



Na Figura 41 (a), encontram-se os coeficientes da parábola fornecida pelo aplicativo e que pode ser observada na Figura 41 (b). Utilizando duas casas decimais após o ponto, a coordenada  $y$  da trajetória da bola é dada em função do tempo  $t$  como:

$$y = -5,42t^2 + 3,17t - 0,02.$$

De posse desta equação, professor e alunos podem discutir as questões apresentadas nesta proposta bem como outras que vierem a surgir.

### 7.2.3 Uma função matemática para a trajetória da bola

Por fim, a comparação das duas equações obtidas fornece a equação da trajetória da bola, ou seja, uma relação analítica para a maneira como a coordenada vertical  $y$  varia em função da coordenada horizontal  $x$ .

Isolando  $t$  na função da coordenada horizontal e substituindo na função da coordenada vertical, demonstra-se a função matemática para a trajetória da bola. Esta trajetória pode ser aproximada por uma parábola:

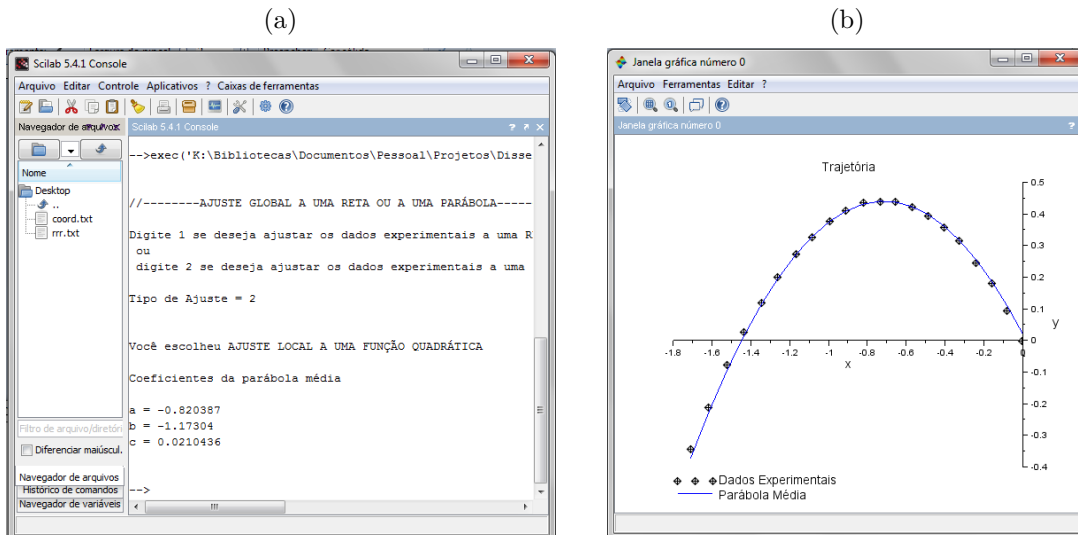
$$y = -0,83x^2 - 1,19x + 0,02.$$

A equação acima está em conformidade com o resultado apresentado na figura abaixo, que foi obtido usando o mini-aplicativo “ajuste-global.sce” e as coordenadas horizontal  $x$  e vertical  $y$ .

O programa ajusta a trajetória da bola de acordo com uma parábola cuja equação é dada por:

$$y = -0,82x^2 - 1,17x + 0,02.$$

Figura 42 – Trajetória da bola usando “ajuste-global.sce”.



## 8 Considerações Finais

Espera-se que o presente trabalho seja útil aos professores de matemática do ciclo básico complementando o ensino das funções Afim e Quadrática por meio da análise de lançamentos oblíquos, um tipo de movimento tão comum no cotidiano dos estudantes.

Diante de um fenômeno natural tão simples quanto lançar uma bola de futebol ou voleibol, espera-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de formular hipóteses e modelos que descrevam com certa fidelidade o movimento observado.

Ao aplicar as leis e regras matemáticas aliadas a recursos computacionais de análise de vídeos (*software Tracker*) e computação numérica (*software SciLab*), o aluno é instigado a resolver problemas propostos com criatividade e iniciativa além de usar o pensamento crítico para confrontar os modelos matemáticos desenvolvidos com a realidade física de onde se origina o fenômeno estudado.

Confirmada a veracidade dos modelos matemáticos aplicados ao fenômeno do lançamento oblíquo, o estudante é direcionado a reconhecer as funções matemáticas envolvidas: a Função Afim e a Função Quadrática. Nesse sentido, a definição, o significado e propriedades destas funções são trabalhados de modo a levar o estudante a enxergar que estes entes matemáticos têm grande importância em outros ramos científicos.

A utilização quase que total de softwares livres possibilita um debate único sobre utilização racional dos recursos tecnológicos.

Finalmente, vale ressaltar que a aplicação dos recursos utilizados nesta proposta de atividade não ficam limitados apenas às funções afim e quadrática. O *software Tracker* pode ser utilizado para analisar diversos movimentos que conduziram ao estudo de outras funções matemáticas. O *software SciLab* pode ser usado como uma poderosa calculadora científica e para a construção de gráficos, facilitando o entendimento da matemática em inúmeros contextos. Por sua vez, os mini-aplicativos “ajuste-local.sce” e “ajuste-global.sce” foram escritos com base em conceitos matemáticos (sistemas lineares, matrizes e operações aritméticas) que podem ser discutidos independentemente.

## Referências

- ALMANAQUEBRASIL. **Saque de Bernard ia às estrelas e voltava a 70 km/h**. 2014. Disponível em: <<http://www.almanaquebrasil.com.br/curiosidades-esporte-10329-saque-de-bernard-ia-as-estrelas-e-voltava-a-70-kmh.html>>. Acesso em: 02 Fev. 2014.
- ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física Um curso Universitário V. 1**. 12. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2000.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 20 dez. 1996. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>>. Acesso em: 24 set. 2013.
- \_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Ministério da Educação e Cultura, Brasília, DF, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 10 ago. 2013.
- \_\_\_\_\_. **PCN+ Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Ministério da Educação e Cultura, Brasília, DF, 2007. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 10 ago. 2013.
- \_\_\_\_\_. **Descrição dos níveis de Escala de Desempenho em Matemática - SAEB: 3ª Série do Ensino Médio**. 2011. Disponível em: <[http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/prova\\_brasil\\_saeb/escala/2011/escala\\_desempenho\\_matematica\\_medio.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/2011/escala_desempenho_matematica_medio.pdf)>. Acesso em: 02 Fev. 2014.
- \_\_\_\_\_. **Resultados SAEB/Prova Brasil 2011**. 2012. Disponível em: <<http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/>>. Acesso em: 02 Fev. 2014.
- CABRILLO. **Tracker Video Analysis and Modelling Tool**. 2013. Disponível em: <<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>>. Acesso em: 22 Ago. 2013.
- GNU. **GNU General Public License**. 2013. Disponível em: <<http://www.gnu.org/>>. Acesso em: 22 Ago. 2013.
- HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. de S. **Introdução à Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profimat).
- HOWARD, A.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. Tradução: Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.
- LACERDA, E. G. M. de. **Programando com Scilab**. [s.n.], 2011. Disponível em: <<http://www.dca.ufrn.br/~estefane/academica/progsci.pdf>>. Acesso em: 07 ago. 2013.
- LANG, S. **Introduction to Linear Algebra**. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1986. (Undergraduate Texts in Mathematics).



LEITÃO, L. I.; TEIXEIRA, P. F. D.; ROCHA, F. A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica. **Revista Electrônica de Investigación en Educación en Ciencias, Buenos Aires, SciELO Argentina**, v. 6, n. 1, p. 18–21, 2011.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio V.1**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

\_\_\_\_\_. **A Matemática do Ensino Médio V.2**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MERZBACH, U. C.; BOYER, C. B. **A History of Mathematics**. 3. ed. New Jersey: Wiley, 2011.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica V. 1: Mecânica**. 4. ed. Rio de Janeiro: Edgard Blücher, 2002.

OSP. **Open Source Physics**. 2013. Disponível em: <<http://www.compadre.org/osp/index.cfm>>. Acesso em: 22 Ago. 2013.

SCHERER, C. **Métodos Computacionais da Física**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

SCILAB. **Scilab Open source software for numerical computation**. 2013. Disponível em: <<http://www.scilab.org/>>. Acesso em: 25 Set. 2013.

# APÊNDICE A – Matrizes e Sistemas Lineares

## Matrizes

Dados os números  $m$  e  $n$  naturais não nulos, define-se uma *matriz real de ordem  $m$  por  $n$*  ( $m \times n$ ) como uma tabela onde números reais estão distribuídos em  $m$  linhas e  $n$  colunas. Usualmente, os elementos de uma matriz arbitrária  $\mathbf{A}$  são representados pelos símbolos  $a_{ij}$  onde os índices  $i$  e  $j$  indicam, respectivamente, a linha e a coluna onde o elemento está localizado (LANG, 1986; HEFEZ; FERNANDEZ, 2013). A matriz arbitrária  $\mathbf{A}$  pode ser escrita como segue

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ou ainda  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ . O símbolo  $\mathcal{M}m \times n$  denota o conjunto das matrizes  $m \times n$ . Para alguns valores especiais de  $m$  e  $n$ , a matriz recebe um nome específico. Por exemplo, uma matriz do tipo  $1 \times n$  são denominadas *matriz linha* enquanto uma matriz do tipo  $m \times 1$  é dita uma *matriz coluna*. Por sua vez, uma matriz  $n \times n$ , ou seja, uma matriz para a qual o número de linhas é igual ao número de colunas, são denominadas *matriz quadrada de ordem  $n$*  (HEFEZ; FERNANDEZ, 2013).

Dentre as matrizes quadradas destacam-se as *matrizes diagonais*. Uma matriz quadrada de ordem  $n$  é dita uma matriz diagonal se todos os seus elementos são iguais a zero com exceção possivelmente dos componentes de sua **diagonal principal** (a matriz principal de uma matriz quadrada  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  é formada pelos elementos  $a_{ij}$  para os quais  $i = j$ ), ou seja, os elementos de uma matriz diagonal são tais que  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  (LANG, 1986).

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Particularmente, toda matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 é denominada **matriz unitária** de ordem  $n$  e geralmente denotada por

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

## Operações com matrizes

### Igualdade entre matrizes

Duas matrizes  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ , de mesma ordem, são ditas *iguais* quando  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $1 \leq i \leq m$  e para todo  $1 \leq j \leq n$ . Nesse caso, escrevemos  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

### Adição e Subtração

Se  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$  são matrizes de mesma ordem, a *soma de A e B*, denotada por  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  é a matriz  $\mathbf{C} = c_{ij}$  de ordem  $m \times n$  tal que  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  para todo  $1 \leq i \leq m$  e para todo  $1 \leq j \leq n$ .

A adição de matrizes tem muitas propriedades semelhantes à adição de números reais: *associatividade da adição, comutatividade da adição, elemento neutro e elemento oposto* (HEFEZ; FERNANDEZ, 2013).

### Multiplicação por escalar

Seja a matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  e o escalar  $a \in \mathbb{R}$ . Define-se o *produto da matriz A pelo número real a* como  $a\mathbf{A} = (aa_{ij})_{m \times n}$ , ou seja, basta multiplicar o escalar  $a$  por cada elemento da matriz  $\mathbf{A}$ .

Hefez e Fernandez (2013) aponta as seguintes propriedades para quaisquer matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}(m, n)$  e escalares  $a, a' \in \mathbb{R}$ :

- $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$ ;
- $(a + a')\mathbf{A} = a\mathbf{A} + a'\mathbf{A}$ ;
- $a(a'\mathbf{A}) = (aa')\mathbf{A}$ ;
- $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ .

## Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times p}$ . O produto  $\mathbf{AB}$  de  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{B}$  é definido como a matriz  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p}$  tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

para todo  $1 \leq i \leq m$  e para todo  $1 \leq j \leq n$  (HEFEZ; FERNANDEZ, 2013).

## Matriz Inversa

Seja uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  de ordem  $n$ , definimos a *matriz inversa* de  $\mathbf{A}$  como a matriz quadrada  $\mathbf{B}$  também de ordem  $n$  e tal que:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

A matriz quadrada  $\mathbf{A}$  será dita *invertível* se  $\mathbf{A}$  admite uma matriz inversa. Nesse caso, é possível demonstrar que a inversa é única (HEFEZ; FERNANDEZ, 2013).

## Sistemas Lineares

Define-se **equação linear** de  $n$  variáveis (ou incógnitas)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  são constantes reais.

Um **sistema linear**, por sua vez, é um conjunto de equações lineares nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Uma sequência de números  $s_1, s_2, \dots, s_n$  é dita uma **solução** do sistema linear se  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$  é uma solução para cada equação do sistema. Muitas vezes, é conveniente escrever um sistema linear em forma matricial, visto que a resolução do sistema ficará reduzida a operações com matrizes. Por exemplo, considere-se o sistema linear arbitrário com  $m$  equações lineares e  $n$  incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em notação matricial, pode-se escrever

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, em muitos problemas científicos e matemáticos, surgem sistemas lineares onde o número de equações é igual ao número de incógnitas. Nestes casos, é possível definir condições sob as quais o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$  possui uma única solução.

Howard e Rorres (2005) apresentam um método para resolução de sistemas de equações lineares por inversão de matrizes: “Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz invertível  $n \times n$ , então para cada matriz  $\mathbf{B}$  de tamanho  $n \times 1$ , o sistema de equações  $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$  tem exatamente uma solução, a saber  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ”.

Portanto, resolver um sistema linear do tipo apresentado acima reduz-se a determinação de uma matriz inversa o que pode ser feito utilizando-se o método de eliminação de Gauss-Jordan (HEFEZ; FERNANDEZ, 2013).

# APÊNDICE B – Script do aplicativo “ajuste-local.sce”

```
//-----AJUSTE LOCAL A UMA RETA OU A UMA PARÁBOLA-----//
```

```
//Antes de executar o programa, o usuário deve carregar a matriz com os dados de posição e tempo a serem analisados.
```

```
//Para isso, altere o diretório atual para a pasta que contenha o arquivo: "nome_do_arquivo.txt" com os dados necessários. O arquivo deve conter DUAS COLUNAS. a primeira com os dados de tempo, a segunda com os dados da posição horizontal OU posição vertical do movimento em estudo.
```

```
//Para carregar a matriz dos dados, execute o comando (NÃO ESQUEÇA DE COLOCAR O NOME DO ARQUIVO ENTRE ASPAS): M = fscanfMat("nome_do_arquivo.txt");
```

```
//Feito isto, o usuário pode executar este programa clicando no botão "executar" ou em "salvar e executar".
```

```
//DADOS
```

```
tempo=M(:,1);  
posicao=M(:,2);  
n=length(tempo);
```

```
printf("\n\n")
```

```
printf('//-----AJUSTE LOCAL A UMA RETA OU A UMA PARÁBOLA-----  
/>\n\n')
```

```
printf("Digite 1 se deseja ajustar os dados experimentais a uma RETA (FUNÇÃO AFIM)\n ou\n digite 2 se deseja ajustar os dados experimentais a uma PARÁBOLA (FUNÇÃO QUADRÁTICA)\n\n")
```

```
tipo=input('Tipo de Ajuste = ');
```

```
printf("\n\n")
```

```
if tipo == 1 then
```

```
    printf("Você escolheu AJUSTE LOCAL A UMA FUNÇÃO AFIM\n\n")
```

```
    printf("A matriz carregada contém %g pontos ordenados de 1 a %g\n",n,n)
```

```
    printf("Você deve escolher DOIS pontos\n\n")
```

```
    printf("Digite um número entre 1 e %g,\n correspondente ao primeiro ponto escolhido\n",n)
```

```
    i=input('i = ');
```

```
    printf("Coordenadas do primeiro ponto escolhido: (t, x) = (%g, %g)", M(i,1), M(i,2))
```

```
    printf("\n\n")
```

```
    printf("Digite um número entre 1 e %g, diferente de %g,\n correspondente ao segundo ponto escolhido\n",n,i)
```

```

j=input('j = ');

if j == i then
    printf("ERRO: Execute novamente o aplicativo e escolha pontos distintos")
else
    printf("Coordenadas do segundo ponto escolhido: (t, x) = (%g, %g)", M(j,1),
M(j,2))
    printf("\n\n")

t1=M(i,1);
t2=M(j,1);
p1=M(i,2);
p2=M(j,2);

A=[t1 1;t2 1];

B=[p1;p2];

r=inv(A)*B;
a = r(1,1);
b = r(2,1);

T = [t1; t2];
P = [p1; p2];

printf("PARÂMETROS DA FUNÇÃO AFIM: x = a*t+b\n\n")
printf("a = %g\n", a)
printf("b = %g\n\n\n", b)

plot2d(tempo,[posicao,a*tempo+b],[-8,2],leg="Dados      Experimentais@Função
Afim ajustada por 2 pontos")
plot2d(T,P,-9)
xtitle("Ajuste Local a uma Função Afim","t","x")
end

else
    if tipo == 2 then
        printf("Você escolheu AJUSTE LOCAL A UMA FUNÇÃO
QUADRÁTICA\n\n")
        printf("A matriz carregada contém %g pontos ordenados de 1 a %g\n",n,n)
        printf("Você deve escolher TRÊS pontos distintos\n\n")

        printf("Digite um número entre 1 e %g,\n correspondente ao primeiro ponto
escolhido\n",n)
        i=input('i = ');
        printf("Coordenadas do primeiro ponto escolhido: (t, y) = (%g, %g)", M(i,1),
M(i,2))
        printf("\n\n")

```



```
printf("Digite um número entre 1 e %g, diferente de %g,\n correspondente ao segundo ponto escolhido\n",n,i)
```

```
j=input('j = ');
```

```
printf("Coordenadas do segundo ponto escolhido: (t, y) = (%g, %g)", M(j,1), M(j,2))
```

```
printf("\n\n")
```

```
printf("Digite um número entre 1 e %g,\n diferente de %g e de %g, correspondente ao terceiro ponto escolhido\n",n,i,j)
```

```
k=input('k = ');
```

```
printf("Coordenadas do terceiro ponto escolhido: (t, y) = (%g, %g)", M(k,1), M(k,2))
```

```
printf("\n\n")
```

```
if j == i | k==i | k == j then
```

```
    printf("ERRO: Execute novamente o aplicativo e escolha pontos distintos")
```

```
else
```

```
t1=M(i,1);
```

```
t2=M(j,1);
```

```
t3=M(k,1);
```

```
p1=M(i,2);
```

```
p2=M(j,2);
```

```
p3=M(k,2);
```

```
A=[t1^2 t1 1;t2^2 t2 1;t3^2 t3 1];
```

```
B=[p1;p2;p3];
```

```
r=inv(A)*B;
```

```
a = r(1,1);
```

```
b = r(2,1);
```

```
c = r(3,1);
```

```
T = [t1 t2 t3];
```

```
P = [p1 p2 p3];
```

```
printf("PARÂMETROS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA \n\n")
```

```
printf("a = %g\n", a)
```

```
printf("b = %g\n", b)
```

```
printf("c = %g\n\n", c)
```

```
plot2d(tempo,[posicao,a*tempo^2+b*tempo+c],[-8,2],leg="Dados Experimentais@Função Quadrática ajustada por 3 pontos")
```

```
xfpoly(T,P,4)
```

```
xtitle("Ajuste Local a uma Função Quadrática","t","y")
```

```
end
```

```
else
```

```
    printf("ERRO: Execute novamente o aplicativo e escolha o tipo de ajuste")
```

```
    end
```

```
end
```

# APÊNDICE C – Script do aplicativo “ajuste-global.sce”

```

//-----AJUSTE GLOBAL A UMA RETA OU A UMA PARÁBOLA-----//

//Antes de executar o programa, o usuário deve carregar a matriz com os dados de
posição e tempo a serem analisados.

//Para isso, altere o diretório atual para a pasta que contenha o arquivo:
"nome_do_arquivo.txt" com os dados necessários. O arquivo deve conter DUAS
colunas: a primeira com os dados de tempo, a segunda com os dados da posição.

//Para carregar a matriz dos dados, execute o comando:"M =
fscanfMat('nome_do_arquivo.txt');".

//Feito isto, o usuário pode executar este programa através do botão "executar" ou
"salvar e executar".

//DADOS
t=M(:,1);
x=M(:,2);
n=length(t);

printf("\n\n")

printf('//-----AJUSTE GLOBAL A UMA RETA OU A UMA PARÁBOLA-----
--//\n\n')

printf("Digite 1 se deseja ajustar os dados experimentais a uma RETA (FUNÇÃO
AFIM)\n ou\n digite 2 se deseja ajustar os dados experimentais a uma
PARÁBOLA (FUNÇÃO QUADRÁTICA)\n\n")

tipo=input('Tipo de Ajuste = ');

printf("\n\n")

if tipo == 1 then
    printf("Você escolheu AJUSTE LOCAL A UMA FUNÇÃO AFIM\n\n")

//Ajuste de Retas passando por 2 pontos dados

Nx=factorial(n)/(factorial(2)*factorial(n-2));
sx=0;
for i=1:n-1
    for j=i+1:n
        sx=sx+inv([t(i) 1; t(j) 1])*[x(i); x(j)]
    end
end
Sx=sx/Nx;

a = Sx(1,1)
b = Sx(2,1)

```

```

printf('Coeficientes da reta média\n\n')
printf('a: %g m/s \n\n', a)
printf('b: %g m\n\n', b)

plot2d(t,[x,a*t+b],[-8,2],leg='Dados Experimentais@Reta Média')
xtitle('Função Afim','t','x')

else
  if tipo == 2 then
    printf('Você escolheu AJUSTE LOCAL A UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA\n\n')

//Ajuste de Parábolas passando por 3 pontos dados

Ny=factorial(n)/(factorial(3)*factorial(n-3));
sy=0;
for i=1:n-2
  for j=i+1:n-1
    for k=j+1:n
      sy=sy+inv([t(i)^2 t(i) 1;t(j)^2 t(j) 1; t(k)^2 t(k) 1])*[x(i); x(j);x(k)]
    end
  end
end
end
Sy=sy/Ny;

a = Sy(1,1);
b = Sy(2,1);
c = Sy(3,1);

printf('Coeficientes da parábola média\n\n')
printf('a = %g \n', a)
printf('b = %g \n', b)
printf('c = %g \n\n', c)

plot2d(t,[x,a*t^2+b*t+c],[-8, 2],leg='Dados Experimentais@Parábola Média')
xtitle('Função Quadrática','t','y')
else
  printf('ERRO: Execute novamente o aplicativo e escolha o tipo de ajuste')
end
end

```