Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas
Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática - PROFMAT

Frações Contínuas com Aplicações

Delfim Dias Bonfim

Palmas - TO
2014

Delfim Dias Bonfim

Frações Contínuas com Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins, *Campus* de Palmas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes

Palmas - TO
2014

.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
***Campus* Universitário de Palmas**

B713f Bonfim, Delfim Dias

Frações Contínuas com Aplicações / Delfim Dias Bonfim. - Palmas, 2014.

75f.

Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2014.

Linha de pesquisa: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes.

1.Frações contínuas. 2.Números racionais. 3.Números irracionais. 4.Equação de Pell. 5.Equação diofantinas lineares. I. Novaes, Gilmar Pires. II.Universidade Federal do Tocantins. III.Título.

CDD 510.7

Bibliotecária: Emanuele Santos
CRB-2 / 1309

Delfim Dias Bonfim

Frações Contínuas com Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins, *Campus* de Palmas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes.

Aprovada em 22/02/2014

BANCA EXAMINADORA

Satuf

____

Prof. Dr. Francisco Satuf Rezende (UFT)

Igor dos Santos Lima

____

Prof. Dr. Igor dos Santos Lima (UFG)

____

Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz (UFT)

Dedico este trabalho a minha mãe Albertina Dias Bonfim, pela dupla função exercida, pelas vitórias nas batalhas vivenciadas e, apesar de não ter prosseguido em seus estudos, trabalhou arduamente para a educação de seus filhos.

Agradecimentos

À Deus, que me concedeu a vida e me ajudou a superar os desafios.

À minha mãe (Albertina Dias Bonfim) e aos meus irmãos (Félix Neto, Jucelino, Lucrécia e Reginaldo Dias Bonfim), que sempre me incentivaram aos estudos, e que me deram forças para continuar lutando.

À Coordenação do PROFMAT, pela iniciativa que originou este mestrado, bem como pela manutenção deste grandioso projeto.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela manutenção da bolsa de estudos, que tanto me ajudou e me motivou para prosseguir nesta caminhada.

Aos Professores, de um modo geral, que muito contribuíram nesse processo de construção do conhecimento.

Aos colegas do mestrado, pelas alegrias, cooperação, companheirismo, pelo aprendizado durante essa importante etapa.

Aos amigos Idelvan, Leiliane e Neilton (todos Rodrigues Magalhães), pela acolhida e pelos bons momentos proporcionados.

Aos amigos Fábio Nunes da Silva, Raidoney de Lima Goes, Roney Feliciano da Silva, Weder Alves Cerqueira e Willian Macedo de Oliveira, por tudo que têm feito.

À Ana Paula Dias Gusmão, pelas ideias/sugestões e pelos inesquecíveis momentos vivenciados.

Ao meu orientador, Professor Gilmar Pires Novaes, pela orientação durante a elaboração deste trabalho, conselhos/sugestões, enfim pela imensa contribuição durante essa caminhada acadêmica.

.

"O homem pode tanto quanto sabe."
(Francis Bacon)

Resumo

A teoria das frações contínuas é um dos mais belos temas da Matemática, tendo despertado o interesse de grandes matemáticos, mas que atualmente não é muito difundido pelos professores do ensino básico. Nosso objetivo consiste, pois, em realizar um estudo da teoria das frações contínuas, apresentando as definições básicas, suas propriedades essenciais e principalmente apresentando seu vasto campo de aplicações. Inicialmente, relatamos os fatos históricos relevantes para o seu desenvolvimento. Posteriormente, apresentamos a expansão dos números racionais em frações contínuas simples e finitas, bem como suas propriedades mais importantes. Em seguida, apresentamos a expansão dos números irracionais em frações contínuas simples infinitas, suas propriedades fundamentais, alguns resultados sobre convergência, e as frações contínuas periódicas. Finalmente, apresentamos algumas das aplicações de frações contínuas aos logaritmos, determinantes, raiz quadrada de um número natural (que não é quadrado perfeito) e à resolução de equações com números inteiros, mais especificamente, resolução da equação de Pell e das equações diofantinas lineares.

Palavras-chave: Frações Contínuas. Números Racionais. Números Irracionais. Equação de Pell. Equações Diofantinas Lineares.

Abstract

The theory of continued fractions is one of the most beautiful themes of mathematics, having arisen the interest of great mathematicians, but that is not currently widespread by elementary school teachers. Our goal is therefore to conduct a study of the theory of continued fractions, presenting the basic definitions, essential properties and mainly presenting its broad range of applications. Initially, we report the relevant historical facts for their development. Subsequently, we present the expansion of rational numbers in simple and finite continued fractions, as well as its most important properties. Then we present the expansion of irrational numbers in simple infinite continued fractions, its fundamental properties, some results on convergence and periodic continued fractions. Finally, we present some of the applications of continued fractions to the logarithms, determinants, square root of a natural number (which is not perfect square) and solving equations with integers, more specifically, resolution of Pell's equation and linear Diophantine equations.

Keywords: Continued Fractions. Rational Numbers. Irrational Numbers. Pell equation. Linear Diophantine Equations.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, trataremos de um tema muito interessante e abrangente - Frações Contínuas (conforme Definição 1.1, na página 15), que possui diversas aplicações que permeiam tanto o ensino básico quanto os subsequentes.

Em se tratando do ensino básico, que é o foco do PROFMAT, podemos relacionar as frações contínuas com os números racionais e irracionais (a aproximação de números irracionais usando números racionais), o calendário gregoriano, os circuitos elétricos, a resolução de equações com números inteiros, o desenvolvimento binomial (ou binômio de Newton), a sequência de Fibonacci, a representação de sequências infinitas usando apenas um número finito de números naturais, os logaritmos, os determinantes, além de se inserirem em um contexto histórico constituído por grandes matemáticos, tais como Euler, Lambert, Lagrange, dentro outros, que se dedicaram ao desenvolvimento das frações contínuas e, consequentemente, de maneira geral, ao desenvolvimento da rainha das ciências.

Este tema ainda pode ser relacionado, em um nível mais avançado, com os polinômios ortogonais, Sistemas Dinâmicos, expansão de funções, Probabilidade e Estatística, e como ferramenta para demonstrar a existência de números transcendentes.

Nosso propósito consiste em realizar um estudo da teoria das frações contínuas, enfatizando suas aplicações a (e relações com) outros campos da Matemática, procurando divulgar, principalmente aos professores do ensino básico da rede pública, a grande importância deste fundamental conceito matemático, tendo em vista que se trata de um tema senão ainda pouco difundido nos currículos da Educação Básica, ausente nas aulas ministradas pelos professores de Matemática do ensino básico. Por possuir uma estética agradável, igualmente amplo em aplicações, pode ser trabalhado sem muitas dificuldades pelos docentes do ensino básico.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos, os quais descreveremos a seguir.

No primeiro capítulo, abordaremos o contexto histórico, para que possamos identificar as origens, bem como o processo evolutivo das frações contínuas. Destacaremos algumas contribuições de alguns matemáticos que se dedicaram a este tema. Ainda nesta parte inicial, consideraremos as definições básicas e as notações utilizadas.

No segundo capítulo, mostraremos a relação existente entre as frações contínuas e os números racionais. Apresentaremos a expansão de números racionais sob forma de fração contínua simples e finita, enfatizando a importância do algoritmo de Euclides, definição de convergentes, algumas proposições e a fórmula do determinante.

No terceiro capítulo, abordaremos a relação entre as frações contínuas e os números irracionais. Apresentaremos a expansão de números irracionais em frações contínua simples infinitas, convergentes, resultados sobre convergência e as frações contínuas periódicas.

No quarto capítulo, dedicaremos a nossa atenção a algumas das aplicações de frações contínuas. Mais precisamente, abordaremos a relação das frações contínuas com os seguintes tópicos: logaritmo, determinante, raiz quadrada de um número natural (que não é quadrado perfeito), resolução da equação de Pell e das equações diofantinas lineares.

Capítulo 1

Um pouco de História, Definições e Notações

1.1 Um pouco de História

A Matemática é constituída por um processo contínuo de descobertas. A fim de entender tal processo, faz-se necessário o conhecimento histórico, visando conhecer as origens, o processo evolutivo dos conceitos estudados e os matemáticos envolvidos.

Iniciaremos contando um pouco da história da teoria das frações contínuas. Descreveremos os passos iniciais para o seu desenvolvimento, algumas ideias e contribuições que possibilitaram avanços significativos do tema abordado.

Os primeiros traços das frações contínuas são obscuros, de modo que a identificação precisa de suas origens não é tão simples. Isso se deve ao fato de que podemos encontrar exemplos dessas frações em toda a Matemática nos últimos 2.000 anos. Mas seus verdadeiros fundamentos não foram definidos até o final de 1600 e início de 1700.

Em que pese o ora exposto, citaremos alguns acontecimentos históricos relevantes para o desenvolvimento e sistematização da teoria das frações contínuas. O leitor interessado em se aprofundar nesse tópico pode consultar [1], [2], [3], [4], [8] e [10].

- Iniciamos na Grécia: os gregos conheciam o *algoritmo de Euclides* (306 a.C - 283 a.C) para o cálculo do máximo divisor comum (mdc) de dois (ou mais) números inteiros, apesar de não terem conhecimento sobre frações contínuas. Isso se justifica pela estreita relação entre aquele algoritmo e as frações contínuas simples (conforme Definição 1.2, na página 16), pois, por meio da manipulação algébrica do algoritmo de Euclides, podemos obter a fração contínua simples finita de um número racional $\dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

- O matemático indiano *Aryabhata* (476 - 550 d.C) utilizou frações contínuas para a resolução de equações lineares diofantinas, mas não fez uso delas em casos gerais. Outros traços das frações contínuas podem ser encontrados nos escritos árabes e gregos.

- A maioria dos especialistas concordam que a teoria das frações contínuas teve início com o matemático e engenheiro italiano *Rafael Bombelli* (1526 - 1572), nascido em Bolonha. Bombelli foi autor do livro *L' Álgebra Parte Maggiore dell' Arithmética*, publicado em 1572. Foi naquele ano em que realizou sua contribuição, já que aproximou $\sqrt{13}$ da seguinte forma:

$$\sqrt{13} \simeq 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = \frac{18}{5}.$$

Na verdade, no século XVI, já era conhecida a seguinte aproximação:

$$\sqrt{a^2 + b} \simeq a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}.$$

Observe que, em particular, $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4}$.

- Outro personagem importante foi o matemático italiano *Pietro Antonio Cataldi* (1548 - 1626). Nascido em Bolonha em 1548, Cataldi deixou muitos trabalhos na área da Matemática, dentre os quais um em Aritmética, um tratado sobre números perfeitos, uma edição dos seis primeiros livros dos Elementos e um breve tratado de Álgebra. Credita-se a ele o mérito de ter fornecido os primeiros passos para a sistematização da teoria das frações contínuas. Em 1613, obteve a seguinte aproximação:

$$\sqrt{18} \simeq 4\& \cfrac{2}{8\& \cfrac{2}{8\& \cfrac{2}{8\& \ddots}}} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}},$$

que, conforme [10], ele abreviou como

$$4\& \frac{2}{8\cdot} 4\& \frac{2}{8\cdot} 4\& \frac{2}{8\cdot} \ldots$$

- Em 1658, foi apresentada, sem demonstração, a primeira expansão em frações contínuas infinitas, do número π. Essa foi apresentada pelo matemático britânico *Lord Brouncker* (1620 - 1684), o primeiro presidente da Royal Society of London. Lord Brouncker foi o primeiro a investigar e a usar as propriedades das frações contínuas. Ele obteve

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}.$$

Tal representação foi demonstrada pelo matemático suiço Leonhard Euler (1707 - 1783), em 1775.

O resultado acima, obtido por Lord Brouncker, foi consequência da seguinte identidade:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots},$$

devida ao matemático inglês *Jonhn Wallis* (1616 - 1703), publicada em seu livro “*Arithmetica Infinitorum*”, em 1655. Atribui-se a Jonhn Wallis o uso, pela primeira vez, do termo “*frações contínuas*”.

- O matemático, mecânico, astronômo e físico holândes *Christiaan Huygens* (1629 - 1695) usou frações contínuas com a finalidade de obter o número correto de dentes de engrenagens, para a construção de um planetário mecânico, tendo sido o primeiro a utilizar as frações contínuas em uma aplicação prática. Esse fato consta de seu tratado "*Descriptio Automati Planetarii*", publicado postumamente em 1698.

- A partir daí, grandes matemáticos, como *Leonhard Euler* (1707 - 1783), *Johann Heinrich Lambert* (1728 - 1777) e *Joseph Louis Lagrange* (1736 - 1813), dentre outros, se interessaram pelo tema e estabeleceram as bases para a teoria moderna das frações contínuas.

- O matemático suíço *Leonhard Euler* nasceu na Basiléia, em 1707. Considerado o mais importante matemático daquele país, desempenhou grandes contribuições para a Matemática. Conforme Howard Eves afirma em [5], é considerado um dos primeiros matemáticos a desenvolver a teoria das frações contínuas. Em 1737, obteve a seguinte expansão para o número e:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \ddots}}}}}}}}}}},$$

ou, alternativamente,

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Ainda naquele mesmo ano, Euler obteve as seguintes expressões:

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ddots}}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \cdots,$$

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ddots}}}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \cdots$$

- O matemático italiano *Joseph Louis Lagrange* (1736 - 1813) incluiu, em sua obra, *Traité de Résolution dês Équations Numériques de Tous Degrés*, publicada em (1767), o método de aproximação das raízes reais de uma equação por meio de frações contínuas. Em 1770, Lagrange caracterizou todos os números irracionais que possuem representação periódica quando expressos sob forma de frações contínuas. Ele mostrou que a fração contínua infinita que representa um número irracional é periódica se e somente se esse número irracional é raiz de um polinômio da forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a $(a \neq 0)$, b e c números inteiros. Esse resultado nos diz, em particular, que somente número irracional algébrico pode ter representação periódica. Em 1776, Lagrange constatou o seguinte resultado:

$$(1+x)^k = \cfrac{1}{1 - \cfrac{kx}{1 + \cfrac{\frac{1\cdot(1+k)}{1\cdot 2}x}{1 + \cfrac{\frac{1\cdot(1-k)}{2\cdot 3}x}{1 + \cfrac{\frac{2\cdot(2+k)}{3\cdot 4}x}{1 + \cfrac{\frac{2\cdot(2-k)}{4\cdot 5}x}{1 + \cfrac{\frac{3\cdot(3+k)}{5\cdot 6}x}{1 + \ddots}}}}}}, \qquad |x| < 1.$$

Em 1813, Lagrange verificou a seguinte identidade:

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \cfrac{2x}{1 - \cfrac{1x^2}{3 - \cfrac{4x^2}{5 - \cfrac{9x^2}{7 - \cfrac{16x^2}{9 - \ddots}}}}}, \qquad |x| < 1.$$

- O matemático suíço *Johann Heinrich Lambert* (1728 - 1777), famoso por ter sido o primeiro matemático a demonstrar a irracionalidade (mas não a transcendência) do número π, em 1770, obteve as seguintes expressões envolvendo $tg(x)$, e o famoso número π:

$$tg(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

e

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}}}}},$$

ou

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 +}\,\frac{1}{15 +}\,\frac{1}{1 +}\,\frac{1}{292 +}\,\frac{1}{1 +}\,\frac{1}{1 +}\,\frac{1}{1 +}\,\frac{1}{2 +}\,\frac{1}{1 +}\,\frac{1}{3 +}\,\frac{1}{1 +}\,\cdots$$

Em 1776, Lambert mostrou que

$$tg(x) = \cfrac{1}{\frac{1}{x} - \cfrac{1}{\frac{3}{x} - \cfrac{1}{\frac{5}{x} - \cfrac{1}{\frac{7}{x} - \ddots}}}}$$

e

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{\frac{2}{x} + \cfrac{1}{\frac{6}{x} + \cfrac{1}{\frac{10}{x} + \cfrac{1}{\frac{14}{x} + \ddots}}}}.$$

1.2 Definições e Notações

Nesta seção, apresentaremos a definição de fração contínua, as definições de alguns tipos particulares de frações contínuas e as notações pertinentes utilizadas. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [1], [8] e [10].

Definição 1.1 *Uma* fração contínua *é uma expressão da forma*

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cfrac{b_4}{a_5 + \ddots}}}}, \tag{1.1}$$

sendo $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ e $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ números reais ou complexos, ou funções de variáveis reais ou complexas. A quantidade de termos pode ser finita ou infinita.

Alternativamente, podemos escrever (1.1) como

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 +} \frac{b_2}{a_3 +} \frac{b_3}{a_4 +} \frac{b_4}{a_5 +} \cdots .$$

Os termos $\dfrac{b_i}{a_{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots$, são denominados *quocientes parciais*: b_i e a_{i+1} são o numerador e o denominador, respectivamente, do quociente parcial $\dfrac{b_i}{a_{i+1}}$.

Exemplo 1.1 Podemos escrever

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{2}{4 + \ddots}}} = 2 + \frac{2}{4 +} \frac{2}{4 +} \frac{2}{4 +} \cdots$$

Observe que $\sqrt{6} = \sqrt{2^2 + 2}$.

Neste trabalho, trataremos apenas dos casos em que a_i e b_i são números reais.

Definição 1.2 *Uma* fração contínua simples *ou* regular *é uma expressão da forma*

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots}}}}, \tag{1.2}$$

sendo $a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ números inteiros positivos e a_1 um número inteiro qualquer. Os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são denominados quocientes parciais.

Podemos, ainda, denotar (1.2) por $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots]$ ou

$$a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 +} \frac{1}{a_5 +} \cdots$$

No caso particular em que a_1 é um número inteiro positivo, podemos fornecer uma interpretação geométrica da Definição 1.2, para a representação de um número por meio de frações contínuas. Para tal finalidade, consideremos

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots}}}}.$$

Construamos um retângulo $1 \times x$ e, posteriormente, construamos sequencialmente quadrados "gulosos" dentro desse retângulo, isto é, sempre colocando o maior quadrado dentro do espaço ainda livre. Os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots$ representam a quantidade de quadrados de cada tamanho.

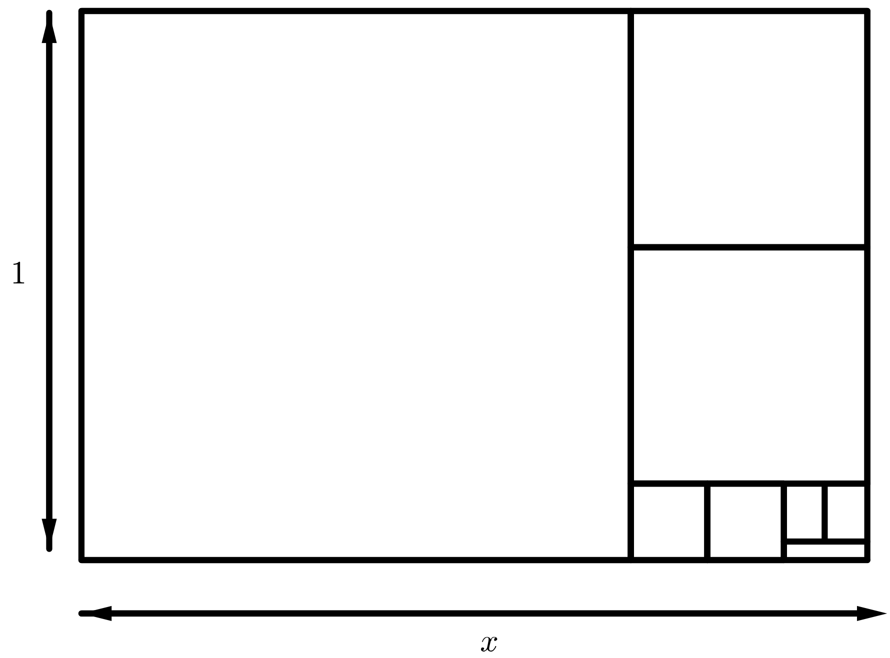

Figura 1.1: Interpretação geométrica de frações contínuas.

Por exemplo, na Figura 1.1, temos $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, \ldots$, ou seja,

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}.$$

Caso a fração contínua simples seja finita, podemos escrever a expressão (1.2) como

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

a qual denotaremos por $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n]$ ou $a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 +} \frac{1}{a_5 +} \cdots \frac{1}{+ a_n}$.

Geometricamente, temos um retângulo com dimensões $q \times p$ (com $q < p$), e construímos sequencialmente quadrados "gulosos" dentro desse retângulo, isto é, sempre colocando o maior quadrado dentro do espaço ainda livre. Os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ representam a quantidade de quadrados de cada tamanho.

Capítulo 2

Frações Contínuas e os Números Racionais

Neste capítulo, trataremos da relação das frações contínuas com os números racionais. Estudaremos a importância do algoritmo de Euclides para obter uma representação finita, a definição dos convergentes, algumas propriedades e exemplos, visando facilitar o entendimento daquela relação. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [1], [6], [8], [9], [10] e [11].

A seguir, apresentaremos os conceitos de divisor, divisão Euclidiana (ou algoritmo da Divisão), máximo divisor comum e o algoritmo de Euclides. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [6], [8] e [11].

Definição 2.1 (Divisor) *Dados dois números inteiros d e a, dizemos que d* divide *a ou que d* é um divisor de *a ou, ainda, que a* é um múltiplo de *d, (notação $d|a$), se existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot d$. Caso contrário, escrevemos $d \nmid a$.*

Teorema 2.1 (Divisão Euclidiana) *Dados dois números inteiros a e b, com $b \neq 0$, existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = q \cdot b + r, \qquad com \qquad 0 \leq r < |b|,$$

sendo a, b, q e r, denominados, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto da divisão de a por b.

Demonstração: Consideremos o conjunto

$$S = \{x = a - b \cdot y; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Existência: Pela propriedade *Arquimediana* de $\mathbb{Z}$ (se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot a > b$), existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot (-b) > -a$. Logo, $a - n \cdot b > 0$, o que mostra que S não é vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0. Logo, pelo princípio da boa ordenação, temos que S possui um menor elemento r. Suponhamos, então, que $r = a - q \cdot b$. Temos que $r \geq 0$ e vamos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos, por absurdo, que $r \geq |b|$. Assim, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$. Logo, $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = a - (q \pm 1) \cdot b \in S$, com $s < r$.

Unicidade: Suponhamos que $a = q \cdot b + r = q' \cdot b + r'$, sendo q, q', r, $r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim, temos que $-|b| < -r' \leq r' - r < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $a \cdot (q - q') = r' - r$, o que implica que

$$|b| \cdot |q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

o que só é possível se $q = q'$ e, consequentemente, $r = r'$. $\square$

Definição 2.2 (Máximo Divisor Comum) *Dizemos que um número natural d é o* máximo divisor comum (mdc) de *a e b, não simultaneamente nulos (notação $d = mdc(a, b)$), se d possui as seguintes propriedades:*

i) *d é um divisor comum de a e de b;*

ii) *d é divisível por todo divisor comum de a e b, isto é, se c é um divisor comum de a e b, então c divide d.*

O próximo resultado é de fundamental importância para calcularmos o máximo divisor comum de dois números inteiros a e b.

Teorema 2.2 (Lema de Euclides) *Se $a = q \cdot b + r$, então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.*

Demonstração: Consideremos D_a e D_b os conjuntos de divisores associados aos números inteiros a e b, respectivamente. A interseção $D_a \cap D_b$ de tais conjuntos é finita (pelas finitudes de D_a e D_b) e não vazia (já que 1 pertence à interseção). Por ser finita, $D_a \cap D_b$ possui elemento máximo, que, por definição, é o mdc(a, b). Sendo assim, resta mostrar que $D_a \cap D_b = D_b \cap D_r$, já que, se esses conjuntos forem iguais em particular os seus máximos divisores comuns também serão iguais. Se $d \in D_a \cap D_b$, temos $d|a$ e $d|b$. Logo, $d|(a - b \cdot q) \iff d|r$ e, portanto, $d \in D_b \cap D_r$. Isso mostra que $D_a \cap D_b \subset D_b \cap D_r$. Analogamente, se $d \in D_b \cap D_r$, temos $d|b$ e $d|r$. Logo, $d|(b \cdot q + r) \iff d|a$ e, assim, $d \in D_a \cap D_b$. Isso mostra que $D_b \cap D_r \subset D_a \cap D_b$. Portanto, $D_a \cap D_b = D_b \cap D_r$. $\square$

O algoritmo de Euclides consiste na aplicação reiterada do lema acima, para o cálculo do mdc(a, b).

Teorema 2.3 (Algoritmo de Euclides) *Sejam $a = r_0$ e $b = r_1$ números inteiros não negativos, com $b \neq 0$. Se a divisão euclidiana for aplicada sucessivamente para obter*

$$r_i = q_{i+1} \cdot r_{i+1} + r_{i+2}, \qquad 0 \leq r_{i+2} < r_{i+1},$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e $r_{n+1} = 0$, então $mdc(a, b) = r_n$, sendo r_n o último resto não nulo.

Demonstração: Inicialmente, vamos aplicar o Teorema 2.1 para dividir $a = r_0$ por $b = r_1$, obtendo $r_0 = q_1 \cdot r_1 + r_2$. Em seguida, dividimos r_1 por r_2, obtendo $r_1 = q_2 \cdot r_2 + r_3$, e assim sucessivamente, até a obtenção do resto $r_{n+1} = 0$. Como, a cada passo, o resto é sempre menor do que o anterior, e estamos trabalhando com números inteiros não negativos, é claro que após um número finito de aplicações do Teorema 2.1, obteremos resto nulo.

Temos a seguinte sequência de equações:

$$\begin{array}{rcll}
r_0 & = & q_1 \cdot r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 & = & q_2 \cdot r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 & = & q_3 \cdot r_3 + r_4, & 0 < r_4 < r_3 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
r_{n-2} & = & q_{n-1} \cdot r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} & = & q_n \cdot r_n + 0, & \text{com } \ r_{n+1} = 0.
\end{array}$$

A última dessas equações nos diz, pelo Teorema 2.2, que mdc$(r_n, r_{n-1}) = r_n$. Prosseguindo com sucessivas aplicações do Teorema 2.2, obteremos a sequência:

$$r_n = mdc(r_{n-1}, r_n) = mdc(r_{n-2}, r_{n-1}) = \ldots = mdc(r_1, r_2) = mdc(r_0, r_1) = mdc(a, b).$$

Portanto, o mdc(a, b) é o último resto não nulo da sequência de divisões descrita acima. □

2.1 Expansão de números racionais em frações contínuas simples finitas

Intuitivamente, se tivermos uma fração contínua simples e finita, é bem natural pensarmos que esta representa um número racional (para verificarmos a veracidade de tal afirmação, basta realizarmos as operações elementares com frações). Mas será que o procedimento contrário também é verdadeiro? Caso a resposta seja afirmativa, será que é única e finita essa expressão? Será que existe um método prático?

Mostraremos, nesta seção, que as respostas àquelas perguntas são afirmativas. Mostraremos, ainda, que o método prático para obtenção da frações contínuas simples e finitas a partir de um número racional dado se reduz à utilização do algoritmo de Euclides. Este, por sua vez, é de suma importância para a motivação geométrica, isto é, usando esse algoritmo, segue naturalmente a interpretação geométrica de tais frações contínuas. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [1], [9], [10] e [11].

Iniciaremos investigando o caso mais natural.

Exemplo 2.1 Utilizando as operações elementares com determinadas frações, obtemos os seguintes números racionais:

i) $$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{21}{5}}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{5}{21}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{68}{21}}} = 1+\cfrac{1}{2+\frac{21}{68}}$$
$$= 1+\cfrac{1}{\frac{157}{68}} = 1+\frac{68}{157} = \frac{225}{157}.$$

ii) $$-2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{16}}} = -2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{129}{16}}} = -2+\cfrac{1}{4+\frac{16}{129}} = -2+\cfrac{1}{\frac{532}{129}} = -2+\frac{129}{532} = -\frac{935}{532}.$$

Visto que as operações resultam em números racionais, investigaremos, agora, a situação contrária, isto é, dado um número racional, vamos procurar obter uma fração contínua simples finita que o represente.

Exemplo 2.2 Expressaremos os seguintes números racionais $\frac{49}{38}$, $-\frac{120}{47}$ e $\frac{38}{49}$ sob forma de frações contínuas simples finitas.

Com simples manipulações resulta que

i) $\dfrac{49}{38} = \dfrac{38}{38} + \dfrac{11}{38} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{38}{11}} = 1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{\dfrac{11}{5}}} = 1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{5}}} = [1, 3, 2, 5].$

ii) $-\dfrac{120}{47} = -\dfrac{94}{47} - \dfrac{26}{47} = -2 - \dfrac{26}{47} + \dfrac{47}{47} - 1 = -3 + \dfrac{1}{\dfrac{47}{21}} = -3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{5}{21}} = -3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{21}{5}}}$

$= -3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{1}{5}}} = [-3, 2, 4, 5].$

iii) $\dfrac{38}{49} = 0 + \dfrac{1}{\dfrac{49}{38}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{11}{38}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{38}{11}}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{\dfrac{11}{5}}}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{5}}}}$

$= [0, 1, 3, 2, 5].$

Nos exemplos que seguem, forneceremos a interpretação geométrica de alguns números racionais quando escritos sob forma de fração contínua simples finita.

Exemplo 2.3 Dado o número racional $\dfrac{25}{11}$, obteremos sua expressão correspondente em frações contínuas simples, bem como sua representação geométrica.

Sem dificuldades, verificamos que

$$
\begin{aligned}
\frac{25}{11} &= \frac{22}{11} + \frac{3}{11} = 2 + \frac{1}{\frac{11}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{3} + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}} \\
&= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [2, 3, 1, 2].
\end{aligned}
$$

A interpretação geométrica dessa fração contínua simples finita consiste em construir inicialmente um retângulo com dimensões 25×11. Em seguida, iniciamos a construção dos quadrados "gulosos" com lados 11, 3, 2 e 1, conforme Figura 2.1.

Observe que os *lados* desses quadrados são os *divisores*, e os *quocientes parciais* são os *quocientes* obtidos pelo algoritmo de Euclides:

$$
\begin{aligned}
25 &= 2 \cdot \mathbf{11} + 3 \\
11 &= 3 \cdot \mathbf{3} \ + 2 \\
3 &= 1 \cdot \mathbf{2} \ + 1 \\
2 &= 2 \cdot \mathbf{1} \ + 0.
\end{aligned}
$$

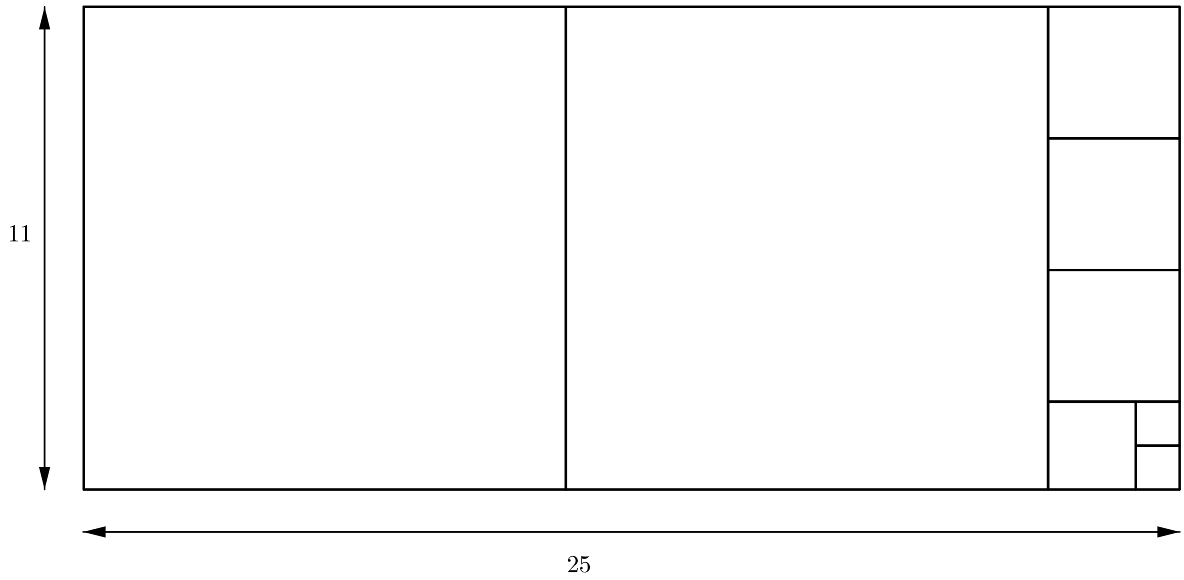

Figura 2.1: Interpretação geométrica do número racional $\frac{25}{11}$ por frações contínuas.

Exemplo 2.4 Usando a Figura 2.2 abaixo, vamos expressar a fração contínua correspondente.

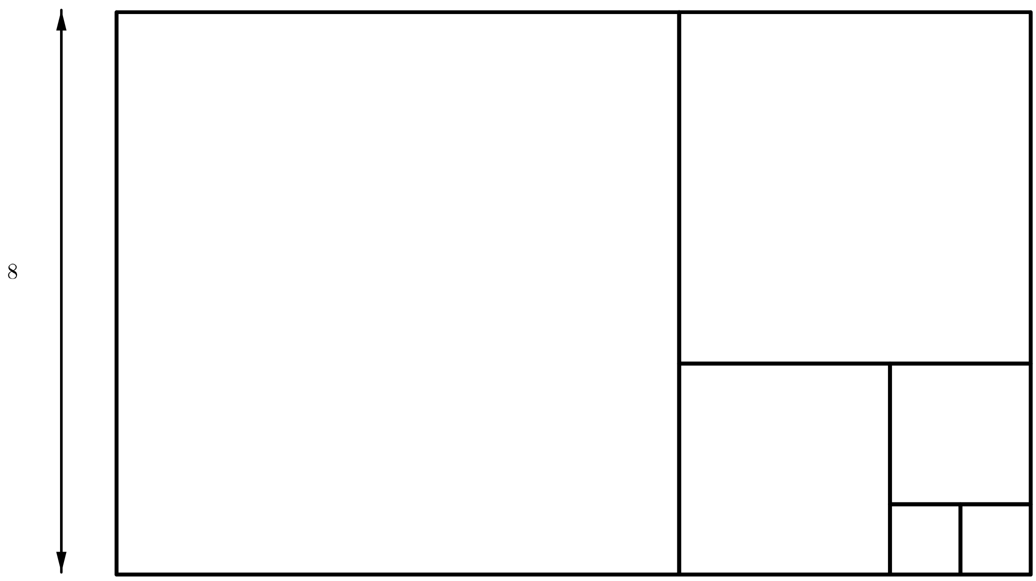

Figura 2.2: Interpretação geométrica do número racional $\frac{13}{8}$ por frações contínuas.

De acordo com a Figura 2.2, temos um retângulo com lados 13 e 8. Consequentemente, temos um quadrado de lado 8, outro de lado 5, outro de lado 3, outro de lado 2 e dois quadrados unitários. Segue que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$ e $a_5 = 2$. Portanto,

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{13}{8}.$$

Usando o algoritmo de Euclides, obtemos

$$\begin{array}{rcl} 13 &=& 1 \cdot \mathbf{8} + 5 \\ 8 &=& 1 \cdot \mathbf{5} + 3 \\ 5 &=& 1 \cdot \mathbf{3} + 2 \\ 3 &=& 1 \cdot \mathbf{2} + 1 \\ 2 &=& 2 \cdot \mathbf{1} + 0. \end{array}$$

Observe que os *lados dos quadrados* da Figura 2.2 correspondem aos *divisores*, e os *quocientes parciais* são os *quocientes* obtidos pelo algoritmo de Euclides.

Com o intuito de responder às indagações feitas no ínico do capítulo, demonstraremos a seguinte caracterização de números racionais por frações contínuas simples finitas.

Teorema 2.4 *Qualquer fração contínua simples e finita* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

Demonstração: A demonstração é dividida em duas partes. A primeira parte é imediata, já que, dada a fração contínua $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ simples e finita, usando as operações elementares, facilmente obtemos um número racional. Para a segunda parte, consideremos um número racional $\frac{p}{q}$ qualquer, com $q > 0$. Pela divisão Euclidiana, obtemos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q},$$

com $0 \leq r_1 < q$ e a_1 é o maior inteiro menor que $\frac{p}{q}$, que denotaremos por $a_1 = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$.
Se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro, e nada mais temos a fazer. Se $r_1 \neq 0$, escrevemos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \qquad 0 < r_1 < q.$$

Repetimos o procedimento para a fração $\frac{q}{r_1}$ e obtemos

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \qquad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, finalizamos processo, e temos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2} = [a_1, a_2].$$

Se $r_2 \neq 0$, repetimos o procedimento acima com a fração $\dfrac{r_1}{r_2}$. Observe que o processo acima termina quando $r_n = 0$, para algum n, pois $q > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$ é uma sequência decrescente de números inteiros positivos. Com esse procedimento teremos

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{p}{q} & = & a_1 + \dfrac{r_1}{q}, & 0 < r_1 < q, \\
\dfrac{q}{r_1} & = & a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}, & 0 < r_2 < r_1, \\
\dfrac{r_1}{r_2} & = & a_3 + \dfrac{r_3}{r_2}, & 0 < r_3 < r_2, \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\dfrac{r_{n-3}}{r_{n-2}} & = & a_{n-1} + \dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\
\dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} & = & a_n + 0, & \text{com} \quad r_n = 0.
\end{array}$$

Portanto,

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} = [a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

o que completa a demonstração. $\square$

A *unicidade* da expansão de um número racional em fração contínua (excluindo a possibilidade de alteração do último termo a_n) é garantida pela divisão Euclidiana, pois podemos alterar o último termo a_n, isto é, substituir a_n da seguinte maneira

$$\left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{1}{a_n} & \text{por} & \dfrac{1}{a_n - 1 + \dfrac{1}{1}}, & \text{se} \quad a_n > 1 \\
\dfrac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}} & \text{por} & \dfrac{1}{a_{n-1} + 1}, & \text{se} \quad a_n = 1
\end{array}\right. .$$

Sendo assim, a expansão $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ pode resultar em uma quantidade ímpar ou par de termos, dependendo da alteração de a_n, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{ll}
[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1] & \text{se} \quad a_n > 1 \\
[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1] & \text{se} \quad a_n = 1
\end{array}\right. .$$

Supunhamos que $r_n = 0$, para algum n. Procedendo como na demonstração anterior, é possível construir um método para obter a representação de $\dfrac{p}{q}$ sob forma de fração contínua simples. Observemos que

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} \quad \Rightarrow \quad p = a_1 \cdot q + r_1, \quad 0 < r_1 < q.$$

Mas podemos escrever

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}.$$

Com mesmo raciocínio e considerando $\dfrac{q}{r_1}$, temos

$$\begin{array}{rclcrcl}
\dfrac{q}{r_1} & = & a_2 + \dfrac{r_2}{r_1} & \Rightarrow & q = a_2 \cdot r_1 + r_2, & & 0 < r_2 < r_1, \\
\dfrac{r_1}{r_2} & = & a_3 + \dfrac{r_3}{r_2} & \Rightarrow & r_1 = a_3 \cdot r_2 + r_3, & & 0 < r_3 < r_2, \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{r_{n-3}}{r_{n-2}} & = & a_{n-1} + \dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}} & \Rightarrow & r_{n-3} = a_{n-1} \cdot r_{n-2} + r_{n-1}, & & 0 < r_n < r_{n-1}, \\
\dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} & = & a_n + \dfrac{r_n}{r_{n-1}} & \Rightarrow & r_{n-2} = a_n \cdot r_{n-1} + 0, & & r_n = 0.
\end{array}$$

Observamos que esse procedimento é o algoritmo de Euclides, utilizado para obter o $\mathrm{mdc}(p, q)$. Significa que para obtermos a representação de um número racional $\dfrac{p}{q}$ sob forma de fração contínua, basta utilizarmos o algoritmo de Euclides para p e q e observarmos os *quocientes* obtidos.

Exemplo 2.5 Obteremos a fração contínua que representa o número racional $\dfrac{68}{47}$ usando o algoritmo de Euclides.

Pelo algoritmo de Euclides, temos que

$$\begin{array}{rcl}
68 & = & \mathbf{1} \cdot 47 + 21 \\
47 & = & \mathbf{2} \cdot 21 + 5 \\
21 & = & \mathbf{4} \cdot 5 + 1 \\
5 & = & \mathbf{5} \cdot 1 + 0,
\end{array}$$

e, assim,

$$\frac{68}{47} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}} = [1, 2, 4, 5] = [1, 2, 4, 4, 1].$$

Dada a representação de um número racional em fração contínua simples finita, o resultado seguinte mostra como obter a representação do inverso daquele número racional em fração contínua simples finita.

Proposição 2.1 *Se $p > q$ e $\dfrac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$, então $\dfrac{q}{p} = [0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$. Reciprocamente, se $\dfrac{q}{p} = [0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$, então $\dfrac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$.*

Demonstração: A demonstração é dividida em duas partes. Na primeira parte, temos, por hipótese, que $p > q$. Então $\dfrac{q}{p} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{p}{q}}$. Mas $\dfrac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$ e, assim,

$$\frac{q}{p} = 0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} = [0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n].$$

Reciprocamente, temos, por hipótese, que

$$\frac{q}{p} = [0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n] = 0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

Então

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x,$$

sendo

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n],$$

o que completa o a demonstração. □

Exemplo 2.6 Sabendo que $\frac{68}{47} = [1, 2, 4, 5]$ obteremos a fração contínua que representa o número $\frac{47}{68}$.

Do Exemplo 2.5, sabemos que

$$\frac{68}{47} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}} = [1, 2, 4, 5].$$

Assim, usando a Propriedade 2.1, temos que

$$\frac{47}{68} = [0, 1, 2, 4, 5] = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}.$$

2.2 Convergentes de frações contínuas simples finitas

Consideremos $\dfrac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ uma fração racional, cuja expansão em frações contínuas simples finita é dada por

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]. \tag{2.1}$$

Consideremos as frações

$$c_1 = \frac{a_1}{1}, \quad c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}, \cdots, c_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

obtidas de (2.1), cujos termos são sucessivos, até o n-ésimo termo.

Definição 2.3 *Denominamos* convergente de ordem i *da fração contínua de (2.1) o número*

$$c_i = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_i}}} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Observamos que (c_n), o n-ésimo convergente, é a própria fração contínua.

Definição 2.4 *Os números p_i e q_i, tais que $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, são denominados, respectivamente,* numerador *e* denominador *do i-ésimo convergente.*

Agora apresentaremos algumas propriedades dos convergentes de frações contínuas simples finitas. Observe que, dada a fração contínua em (2.1), podemos escrever

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}, \text{ com } p_1 = a_1 \text{ e } q_1 = 1;\\
c_2 &= a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 \cdot a_1 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}, \text{ com } p_2 = a_2 \cdot a_1 + 1 \text{ e } q_2 = a_2;\\
c_3 &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_3 \cdot a_2 + 1}{a_3}} = a_1 + \frac{a_3}{a_3 \cdot a_2 + 1} = \frac{a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 + a_1 + a_3}{a_3 \cdot a_2 + 1}\\
&= \frac{a_3(a_2 \cdot a_1 + 1) + a_1}{a_3 \cdot a_2 + 1} = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3}, \text{ com } p_3 = a_3 \cdot p_2 + p_1 \text{ e } q_3 = a_3 \cdot q_2 + q_1.
\end{aligned}$$

Se calcularmos c_4 e c_5, obteremos, respectivamente,

$$c_4 = \frac{a_4 \cdot p_3 + p_2}{a_4 \cdot q_3 + q_2}, \qquad c_5 = \frac{a_5 \cdot p_4 + p_3}{a_5 \cdot q_4 + q_2},$$

e, assim, podemos conjecturar que os numeradores p_i e os denominadores q_i dos convergentes c_i, $i = 3, 4, \ldots, n$, satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} p_i &= a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}. \end{aligned}$$

No próximo resultado, mostraremos que essas relações se verificam para $i = 3, 4, \ldots, n$.

Teorema 2.5 *O numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente c_i da fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ satisfazem as equações*

$$\left\{ \begin{aligned} p_i &= a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2} \end{aligned} \right. , \quad \textit{para} \quad i = 3, 4, \ldots, n, \tag{2.2}$$

com as condições iniciais

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= a_1 \\ q_1 &= 1 \end{aligned} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{aligned} p_2 &= a_2 \cdot a_1 + 1 \\ q_2 &= a_2 \end{aligned} \right. .$$

Demonstração: Nas verificações anteriores, vimos que o resultado é válido para c_1, c_2, c_3, ou seja, para $i = 3$, as equações (2.2) são satisfeitas. Vamos supor que o resultado seja válido para $k \leq i$, com $3 \leq i < n$. Isso significa que

$$c_i = [a_1, a_2, \ldots, a_i] = \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}}. \tag{2.3}$$

Observemos que

$$c_i = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i}}}}$$

e que

$$c_{i+1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{a_{i+1}}}}}},$$

e, assim, podemos obter c_{i+1} de c_i simplesmente pela substituição de a_i por $a_i + \dfrac{1}{c_{i+1}}$. Isso nos diz que se pudermos mostrar que os números p_{i-1}, p_{i-2}, q_{i-1}, q_{i-2} dependem somente dos números $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$, poderemos usar (2.3) para obter c_{i+1}, pois estamos supondo, como hipótese de indução, a validade de (2.3), para todo $k \leq i$. Como

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{a_{i-1} \cdot p_{i-2} + p_{i-3}}{a_{i-1} \cdot q_{i-2} + q_{i-3}},$$

temos que os números p_{i-1} e q_{i-1} dependem somente dos números a_{i-1} e dos números p_{i-2}, p_{i-3}, q_{i-2}, q_{i-3}, os quais, por sua vez, dependem de seus precedentes. Dessa forma, p_{i-1}, p_{i-2}, q_{i-1}, q_{i-2} dependem apenas dos números $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$, sendo independentes de a_i. Logo, eles não serão alterados com a substituição de a_i por $a_i + \dfrac{1}{c_{i+1}}$. Podemos, portanto, utilizar a expressão (2.3) para obter de c_{i+1}, bastando, para isso, substituir a_i por $a_i + \dfrac{1}{c_{i+1}}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_{i+1} &= \frac{(a_i + \frac{1}{a_{i+1}}) \cdot p_{i-1} + p_{i-2}}{(a_i + \frac{1}{a_{i+1}}) \cdot q_{i-1} + p_{i-2}} \\
&= \frac{(a_{i+1} \cdot a_i + 1) \cdot p_{i-1} + a_{i+1} \cdot p_{i-2})}{(a_{i+1} \cdot a_i + 1) \cdot q_{i-1} + a_{i+1} \cdot q_{i-2})} \\
&= \frac{a_{i+1} \cdot a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-1} + a_{i+1} \cdot p_{i-2}}{a_{i+1} \cdot a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-1} + a_{i+1} \cdot q_{i-2}} \\
&= \frac{a_{i+1} \cdot (a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{a_{i+1} \cdot (a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}} \\
&= \frac{a_{i+1} \cdot p_i + p_{i-1}}{a_{i+1} \cdot q_i + q_{i-1}} \\
&= \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}},
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Sabendo que

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 \cdot p_0 + p_{-1}}{a_1 \cdot q_0 + q_{-1}}$$

e usando o fato de que $p_1 = a_1$ e $q_1 = 1$, segue que

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 \cdot p_0 + p_{-1}}{a_1 \cdot q_0 + q_{-1}} = \frac{a_1}{1},$$

e definindo $p_0 = 1$ e $q_0 = 0$, $p_{-1} = 0$ e $q_{-1} = 1$, as equações (2.2) são satisfeitas para $i = 1$, e podemos reescrevê-las como

$$\begin{cases} p_i &= a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{2.4}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} p_{-1} &= 0 \\ q_{-1} &= 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p_0 &= 1 \\ q_0 &= 0 \end{cases}.$$

Observamos que p_{-1}, q_{-1}, p_0 e q_0 não definem numeradores e denominadores de convergentes.

O próximo teorema desempenhará um papel importante em demonstrações relacionadas à convergência de convergentes, bem como fundamental nas aplicações, mais especificamente, na resolução de equações com números inteiros.

Teorema 2.6 (Fórmula do Determinante) *A relação*

$$\begin{vmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{vmatrix} = p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i \tag{2.5}$$

é verdadeira para todo $i \geq 0$, sendo p_i e q_i o numerador e o denominador, respectivamente, do i-ésimo convergente (c_i).

Demonstração: Usaremos o princípio de indução finita para demonstrar este teorema. Para $i = 0$, temos

$$p_0 \cdot q_{-1} - p_{-1} \cdot q_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^0.$$

Para $i = 1$, temos

$$p_1 \cdot q_0 - p_0 \cdot q_1 = a_1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = (-1)^1.$$

Para $i = 2$, temos

$$p_2 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_2 = (a_2 \cdot a_1 + 1) \cdot 1 - a_1 \cdot a_2 = 1 = (-1)^2.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para $i \leq k$, com $k \geq 0$, isto é,

$$p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i, \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Mostraremos que o resultado é verdadeiro para $i = k + 1$. Pelo Teorema 2.5 sabemos que $p_{i+1} = a_{i+1} \cdot p_i + p_{i-1}$ e $q_{i+1} = a_{i+1} \cdot q_i + q_{i-1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
p_{i+1} \cdot q_i - p_i \cdot q_{i+1} &= (a_{i+1} \cdot p_i + p_{i-1}) \cdot q_i - p_i \cdot (a_{i+1} \cdot q_i + q_{i-1}) \\
&= a_{i+1} \cdot p_i \cdot q_i + p_{i-1} \cdot q_i - a_{i+1} \cdot p_i \cdot q_i - p_i \cdot q_{i-1} \\
&= -(p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i) \\
&= (-1) \cdot (-1)^i \\
&= (-1)^{i+1},
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 2.1 *Todo convergente* $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, $i \geq 1$, *de uma fração contínua simples finita, é um número racional irredutível, ou seja,* $mdc(p_i, q_i) = 1$.

Demonstração: Pelo teorema anterior, sabemos que

$$p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i, \ i \geq 0.$$

Suponhamos que exista um número inteiro não nulo r, tal que $p_i = r \cdot p'_i$ e $q_i = r \cdot q'_i$, em que p'_i, $q'_i \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$r \cdot p'_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot r \cdot q'_i = (-1)^i.$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por r, obtemos

$$p'_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q'_i = \frac{(-1)^i}{r} \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $r = \pm 1$, o que conclui a demonstração do teorema. □

Proposição 2.2 *Se* $a_1 > 0$ *e* $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, *então* $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1]$.

Demonstração: Novamente usaremos o princípio de indução finita para demonstrar esta proposição. Para $n = 1$, temos $[a_1] = a_1 = \dfrac{a_1}{1} = \dfrac{p_1}{p_0}$, comprovando, assim, a veracidade do resultado para $n = 1$. Admitindo que o resultado seja verdadeiro para i fixo, com $1 \leq i < n$, ou seja,

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = [a_i, a_{i-1}, \ldots, a_2, a_1],$$

mostraremos que o resultado é verdadeiro para $i+1$, como segue:

$$\begin{aligned}
[a_{i+1}, a_i, a_{i-1}, \ldots, a_2, a_1] &= a_{i+1} + \frac{1}{[a_i, a_{i-1}, \ldots, a_2, a_1]} \\
&= a_{i+1} + \frac{1}{\frac{p_i}{p_{i-1}}} \\
&= a_{i+1} + \frac{p_{i-1}}{p_i} \\
&= \frac{a_{i+1} \cdot p_i + p_{i-1}}{p_i} \\
&= \frac{p_{i+1}}{p_i},
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração da proposição. □

Exemplo 2.7 Sabendo que a fração contínua simples finita de $\frac{128}{37}$ é $[3, 2, 5, 1, 2]$, obteremos a fração contínua simples finita de $\frac{p_5}{p_4}$.

Observemos que temos cinco quocientes parciais $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = [3, 2, 5, 1, 2]$, e que o último convergente $c_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{128}{37}$. Logo, pela Proposição 2.2, resulta que $\frac{p_5}{p_4} = [2, 1, 5, 2, 3]$.

Outra maneira de obter o desejado consiste em obervar que $p_5 = 128$, $p_4 = 45$ e usar o algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned}
128 &= \mathbf{2} \cdot 45 + 38 \\
45 &= \mathbf{1} \cdot 38 + 7 \\
38 &= \mathbf{5} \cdot 7 \ + 3 \\
7 &= \mathbf{2} \cdot 3 \ + 1 \\
3 &= \mathbf{3} \cdot 1 \ + 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{p_5}{p_4} = \frac{128}{45} = [2, 1, 5, 2, 3]$.

Definição 2.5 *Uma fração contínua* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *é denominada* simétrica *se* $a_i = a_{n-(i-1)}$, *para* $1 \leq i \leq n$.

Proposição 2.3 *Se o número racional* $\frac{r}{s}$, *tal que* $\mathrm{mdc}(r, s) = 1$, *possui representação em fração contínua simétrica* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, *então*

$$r \mid [s^2 + (-1)^n].$$

Demonstração: Por hipótese, sabemos que $\mathrm{mdc}(r, s) = 1$ e, assim,

$$\frac{r}{s} = \frac{p_n}{q_n} \quad \Longrightarrow \quad r = p_n \quad \text{e} \quad s = q_n, \tag{2.6}$$

tendo em vista que $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$. Usando a Proposição 2.2 e a hipótese de que $\frac{r}{s}$ possui representação em fração contínua simétrica, temos que

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{p_{n-1}} &= [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] \\ &= [a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}, a_n]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{r}{s}. \tag{2.7}$$

Usando o Teorema 2.6 e as equações (2.6) e (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n &= (-1)^n \\ r \cdot q_{n-1} - s^2 &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Logo, $r \cdot q_{n-1} = s^2 + (-1)^n$.
Portanto,

$$r|[s^2 + (-1)^n].$$

□

Exemplo 2.8 Dado o número racional $\frac{91}{27}$, mostraremos que 91 divide 728.

Usando o algoritmo de Euclides, obtemos $\text{mdc}(91, 27) = 1$, e sua fração contínua simples finita é dada por $\frac{91}{27} = [3, 2, 1, 2, 3] = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$, que é uma fração contínua simétrica. Daí, resulta que $n = 5$ (pois são cinco quocientes parciais). A Proposição 2.3 nos garante que $r = 91$ divide $s^2 + (-1)^n = 27^2 + (-1)^5 = 729 - 1 = 728 = 8 \cdot 91$.

Capítulo 3

Frações Contínuas e os Números Irracionais

Neste capítulo, apresentaremos a relação das frações contínuas com os números irracionais. Primeiramente, vamos trabalhar com a expansão de números irracionais em frações contínuas. Em seguida, veremos algumas propriedades sobre convergência de frações contínuas simples infinita. Apresentaremos também as frações contínuas períodicas e, assim, veremos que, dada uma fração contínua períodica, podemos obter um número irracional que a representa. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [1], [7], [9], [10] e [11].

3.1 Expansão de números irracionais em frações contínuas

Nesta seção, vamos construir a expansão de um número irracional na forma de uma fração contínua. Nesse processo de construção, faremos uso das substituições sucessivas, como segue.

Consideremos x um número irracional qualquer e $a_1 = \lfloor x \rfloor$, ou seja, a_1 é o maior inteiro menor que x. Podemos escrever

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \text{em que} \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1.$$

Logo, $x_2 = \dfrac{1}{x - a_1} > 1$ é um número irracional. Do mesmo modo, podemos escrever

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad \text{com} \quad a_2 = \lfloor x_2 \rfloor \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{1}{x_3} < 1.$$

Assim, obtemos $x_3 = \dfrac{1}{x_2 - a_2} > 1$, que também é um número irracional. Repetindo esse processo, obteremos

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 > 1 \\
x_2 &= a_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad x_3 > 1, \qquad a_2 \geq 1, \\
&\vdots \\
x_n &= a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_{n+1} > 1, \quad a_n \geq 1, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

sendo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ números inteiros e $x, x_2, x_3, \ldots$ números irracionais.

Observemos que esse processo não termina, pois isso só ocorreria se $x_n = a_n$, para algum n, o que é impossível, já que a_n é um número inteiro e x_n é um número irracional, para todo n. Efetuando as substituições no processo descrito acima, obtemos a seguinte fração contínua simples infinita:

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 + \frac{1}{x_2} \\
&= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}} \\
&= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_4}}} \\
&\vdots \\
&= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}},
\end{aligned}
$$

a qual denotaremos por $[a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$.

Exemplo 3.1 Expressaremos $\sqrt{3}$ como uma fração contínua simples infinita.

Observemos que $1^2 < 3 < 2^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$ e, assim, $a_1 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$. Podemos escrever

$$
\sqrt{3} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{x_2} \tag{3.2}
$$

e, assim,

$$
x_2 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.
$$

Substituindo esse valor de x_2 em (3.2), obtemos

$$
\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3} + 1}{2}}. \tag{3.3}
$$

Com o mesmo raciocínio obtemos que $a_2 = \left\lfloor \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$ e, assim,

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = a_2 + \frac{1}{x_3} = 1 + \frac{1}{x_3} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3}+1.$$

Substituindo esse valor de x_3 em (3.3), obtemos

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}.$$

Como $a_3 = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2$, podemos escrever

$$\sqrt{3}+1 = a_3 + \frac{1}{x_4} = 2 + \frac{1}{x_4} \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Observemos que $x_4 = x_2$. Consequentemente, x_5 será igual a x_3; x_6 será igual a x_4, e assim sucessivamente. Portanto,

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = [1, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1, \overline{1, 2}\,], \tag{3.4}$$

em que $\overline{1, 2}$ significa que os números 1 e 2 repetem alternadamente e infinitamente, representam o período, conforme Definição 3.4, da página 45.

Exemplo 3.2 Sabendo que $-\sqrt{2} = -1,414213\ldots$, expressaremos esse número sob forma de fração contínua simples.

Sabemos que $x = -\sqrt{2} = -1,414213\ldots$ Por consequência, $a_1 = \lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$. Podemos escrever

$$-\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = -2 + \frac{1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{-\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}.$$

Como $a_2 = \left\lfloor \dfrac{\sqrt{2}+2}{2} \right\rfloor = 1$, podemos escrever

$$\frac{\sqrt{2}+2}{2} = a_2 + \frac{1}{x_3} = 1 + \frac{1}{x_3} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}+2}{2} - 1} = \sqrt{2}.$$

De modo análogo, temos $a_3 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$. Assim,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_4} \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1.$$

Como $a_4 = \lfloor \sqrt{2}+1 \rfloor = 2$, podemos escrever

$$\sqrt{2}+1 = 2 + \frac{1}{x_5} \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \sqrt{2}+1.$$

Observemos que $x_5 = x_4$. Assim, x_6 será igual a x_5; x_7 será igual a x_6, e assim sucessivamente. Logo, realizando as substituições apropriadas, obtemos

$$-\sqrt{2} = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}} = [-2, 1, 1, 2, 2, 2, \ldots] = [-2, 1, 1, \overline{2}].$$

3.2 Convergentes de frações contínuas simples infinitas

Os convergentes das frações contínuas simples infinitas são calculados do mesmo modo que os convergentes das frações contínuas finitas, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}, \text{ com } p_1 = a_1 \text{ e } q_1 = 1, \\
c_2 &= a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 \cdot a_1 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}, \text{ com } p_2 = a_2 \cdot a_1 + 1 \ e \ q_2 = a_2, \\
c_3 &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_3 \cdot a_2 + 1}{a_3}} = a_1 + \frac{a_3}{a_3 \cdot a_2 + 1} = \frac{a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 + a_1 + a_3}{a_3 \cdot a_2 + 1} \\
c_3 &= \frac{a_3(a_2 \cdot a_1 + 1) + a_1}{a_3 \cdot a_2 + 1} = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3}, \text{ com } p_3 = a_3 \cdot p_2 + p_1 \ e \ q_3 = a_3 \cdot q_2 + q_1.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$c_i \;=\; a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_i}}} = \frac{p_i}{q_i},$$

de modo que o numerador p_i e o denominador q_i do $i-$ésimo convergente c_i satisfazem as equações

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_i & = & a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i & = & a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2} \end{array} \right. , \quad i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n \ ,$$

com as condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_{-1} & = & 0 \\ q_{-1} & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} p_0 & = & 1 \\ q_0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Exemplo 3.3 Calcularemos os sete primeiros convergentes da fração contínua simples infinita

$$x = \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = [1, \overline{1, 2}\,].$$

Calculando os sete primeiros convergentes, obtemos

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1} = 1,\\
c_2 &= \frac{p_2}{q_2} = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2,\\
c_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{5}{3} \cong 1,666667,\\
c_4 &= \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4 \cdot p_3 + p_2}{a_4 \cdot q_3 + q_2} = \frac{1 \cdot 5 + 2}{1 \cdot 3 + 1} = \frac{7}{4} = 1,75,\\
c_5 &= \frac{p_5}{q_5} = \frac{a_5 \cdot p_4 + p_3}{a_5 \cdot q_4 + q_3} = \frac{2 \cdot 7 + 5}{2 \cdot 4 + 3} = \frac{19}{11} \cong 1,727273,\\
c_6 &= \frac{p_6}{q_6} = \frac{a_6 \cdot p_5 + p_4}{a_6 \cdot q_5 + q_4} = \frac{1 \cdot 19 + 7}{1 \cdot 11 + 4} = \frac{26}{15} \cong 1,733333,\\
c_7 &= \frac{p_7}{q_7} = \frac{a_7 \cdot p_6 + p_5}{a_7 \cdot q_6 + q_5} = \frac{2 \cdot 26 + 19}{2 \cdot 15 + 11} = \frac{71}{41} \cong 1,731707.
\end{aligned}$$

Observemos que os convergentes são aproximações sucessivas racionais de $\sqrt{3}$, ou seja, são, alternadamente, aproximações por falta e por excesso de $\sqrt{3}$. Mais ainda, os convergentes de índice ímpar são crescentes e se aproximam por falta; já os de índice par são decrescentes e se aproximam por excesso.

3.3 Convergência de frações contínuas simples infinitas

Recordando os Exemplos 3.1 e 3.3, obtivemos a expansão em fração contínua simples infinita de $\sqrt{3}$ e, posteriormente, calculamos os sete primeiros convergentes, os quais, por sua vez, são aproximações por excesso e por falta. Assim, intuitivamente, podemos conjecturar que os convergentes dessa fração contínua simples infinita devem convergir para $\sqrt{3}$. No decorrer desta seção veremos que essa conjectura é verdadeira, ou seja, toda fração contínua simples infinita $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ representa um número irracional.

Nesta seção, demostraremos alguns resultados sobre convergência de frações contínuas simples infinitas. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [1], [7], [10] e [11].

Proposição 3.1 *Os convergentes de frações contínuas simples infinitas satisfazem*

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n \cdot q_{n-1}}, \quad n \geq 2, \tag{3.5}$$

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n \cdot (-1)^{n-1}}{q_n \cdot q_{n-2}}, \quad n \geq 3. \tag{3.6}$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.6 (Fórmula do Determinante)[1] temos que

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Dividindo ambos os lados dessa igualdade por $q_n \cdot q_{n-1}$, obtemos

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n \cdot q_{n-1}}, \quad \text{ou seja,} \quad c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n \cdot q_{n-1}},$$

donde segue (3.5). Para mostrar (3.6), observemos que

$$c_n - c_{n-2} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot q_n}{q_n \cdot q_{n-2}}$$

e usando o fato de que $p_n = a_n \cdot p_{n-1} - p_{n-2}$ e $q_n = a_n \cdot q_{n-1} - q_{n-2}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} p_n \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot q_n &= (a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}) \cdot q_{n-2} - (a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}) \cdot p_{n-2} \\ &= a_n(p_{n-1} \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot q_{n-1}) \\ &= a_n \cdot (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n \cdot (-1)^{n-1}}{q_n \cdot q_{n-2}},$$

o que conclui a demostração da proposição. □

A seguir, estabelecemos um resultado fundamental sobre convergentes de frações contínuas simples infinitas.

Teorema 3.1 *Os convergentes de ordem ímpar* (c_{2n+1}) *de uma fração contínua simples infinita formam uma sequência numérica crescente, enquanto que os convergentes de ordem par* (c_{2n}) *formam uma sequência decrescente, e todo convergente de ordem ímpar é menor do que qualquer convergente de ordem par. Além disso, cada convergente* $(c_n), n \geq 3$ *está entre os convergentes* c_{n-2} *e* c_{n-1}. *Os termos da sequência* $\{c_n\}$ *satisfazem*

$$c_1 < c_3 < c_5 \ldots < c_{2n+1} < \ldots < c_{2n} < \ldots < c_6 < c_4 < c_2. \tag{3.7}$$

Demonstração: Lembrando que $a_n > 0$, para $n > 1$ e $q_n > 0$, para $n \geq 1$, então, da expressão (3.6) resulta

$$c_{2n+1} - c_{2n-1} = \frac{a_{2n+1} \cdot (-1)^{2n}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} > 0 \quad \Rightarrow \quad c_{2n-1} < c_{2n+1} \tag{3.8}$$

$$c_{2n+2} - c_{2n} = \frac{a_{2n+2} \cdot (-1)^{2n+1}}{q_{2n+2}q_{2n}} < 0 \quad \Rightarrow \quad c_{2n+2} < c_{2n}. \tag{3.9}$$

[1]A fórmula do determinante é válida independentemente de a fração contínua simples ser finita ou infinita.

Usando (3.5), obtemos

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n}} < 0 \qquad \Rightarrow \quad c_{2n+1} < c_{2n} \tag{3.10}$$

$$c_{2n+2} - c_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{q_{2n+2}q_{2n+1}} > 0 \qquad \Rightarrow \quad c_{2n+1} < c_{2n+2}. \tag{3.11}$$

Das relações (3.8) e (3.9) podemor inferir, respectivamente, que $\{c_{2n+1}\}$ é uma sequência crescente e que $\{c_{2n}\}$ é uma sequência decrescente.

Analisando (3.8), (3.9), (3.10) e (3.11), resulta que

$$c_{2n-1} < c_{2n+1} < c_{2n+2} < c_{2n}. \tag{3.12}$$

Logo, c_n está entre c_{n-2} e c_{n-1}.

De (3.12), temos que

- $n = 1 \quad \Rightarrow c_1 < c_3 < c_4 < c_2$.
- $n = 2 \quad \Rightarrow c_3 < c_5 < c_6 < c_4$. Assim, $c_1 < c_3 < c_5 < c_6 < c_4 < c_2$.
- $n = 3 \quad \Rightarrow c_5 < c_7 < c_8 < c_6$. Portanto, $c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < c_8 < c_6 < c_4 < c_2$.

Continuando com o mesmo raciocínio e combinando essas desigualdades, obtemos o resultado

$$c_1 < c_3 < c_5 \ldots < c_{2n+1} < \ldots < c_{2n} < \ldots < c_6 < c_4 < c_2,$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Definição 3.1 *Dizemos que uma sequência* (c_n) *é* limitada *se é limitada superiormente e inferiormente, isto é, quando existem números reais* a *e* b *tais que* $a \leq c_n \leq b$ *.*

Definição 3.2 *As sequências crescentes, não crescentes, decrescentes, não decrescentes são denominadas sequências* monótonas*.*

Para que o segue, necessitamos do seguinte resultado.

Teorema 3.2 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7], na página 111.

O próximo resultado nos mostra que as sequências, de ordem ímpar e par, dos convergentes de uma fração contínua simples infinita, convergem para o mesmo limite.

Teorema 3.3 *Toda fração contínua simples infinita é convergente, sendo seu limite* k *dado por*

$$k = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} c_{2n}.$$

Demonstração: De acordo com o Teorema 3.1, a sequência dos convergentes de índice ímpar $\{c_{2n+1}\}$ é uma sequência crescente, limitada superiormente por c_2, e a sequência dos convergentes de índice par $\{c_{2n}\}$ é uma sequência decrescente, limitada inferiormente por c_1. Assim, pelo Teorema 3.2, as sequências $\{c_{2n}\}$ e $\{c_{2n+1}\}$ convergem, pois toda sequência monótona limitada é convergente. Consideremos k_i o limite de $\{c_{2n+1}\}$ e k_p o limite de $\{c_{2n}\}$. Mostraremos que $k_p = k_i$. Usando a expressão (3.10), segue que $c_{2n+1} - c_{2n} = \dfrac{-1}{q_{2n+1}q_{2n}}$. Como os valores de q_n são inteiros positivos e $q_{n+1} > q_n$, pois $q_{n+1} = a_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1} \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $c_{2n+1} - c_{2n} \longrightarrow 0$, ou seja, o limite de $c_{2n+1} - c_{2n}$ é igual a zero. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} (c_{2n+1} - c_{2n}) = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} c_{2n} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} c_{2n},$$

ou seja, $k_i = k_p = k$. □

Como vimos, de acordo com o Teorema 2.4, toda fração contínua simples finita corresponde a um número racional. O próximo resultado afirma que, quando a fração contínua simples infinita, seus convergentes têm um número irracional como representante.

Teorema 3.4 *A sequência dos convergentes $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de uma fração contínua simples infinita converge para um número irracional.*

Demonstração: Suponhamos que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = k = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad \text{com } p \text{ e } q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{p}{q} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q}.$$

Usando o Teorema 3.1, temos

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

Consequentemente,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p}{q} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{2n} \cdot q - p \cdot q_{2n}}{q_{2n} \cdot q} > 0.$$

Mas $p_{2n} \cdot q - p \cdot q_{2n} \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} > \dfrac{p}{q}$. Logo, $p_{2n} \cdot q - p \cdot q_{2n} \geq 1$.
Dividindo ambos os lados por $q_{2n} \cdot q$, obtemos

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{q_{2n} \cdot q}. \tag{3.13}$$

Porém,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p}{q} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = -(c_{2n+1} - c_{2n}) = -\left[\frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n+1} \cdot q_{2n}}\right] = \frac{1}{q_{2n+1} \cdot q_{2n}}. \tag{3.14}$$

Comparando as expressões (3.13) e (3.14), temos que $\dfrac{1}{q_{2n} \cdot q} < \dfrac{1}{q_{2n+1} \cdot q_{2n}}$. Consequentemente, $q_{2n+1} < q$, para todo $n \geq 1$. Contradição, pois $\{q_n\}$ é uma sequência crescente.
Portanto, a sequência dos convergentes $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge para um número irracional. □

Teorema 3.5 *Para qualquer número real* α, *temos*

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \alpha] = \frac{\alpha \cdot p_{i-1} + p_{i-2}}{\alpha \cdot q_{i-1} + q_{i-2}}, \tag{3.15}$$

sendo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *uma sequência infinita de números inteiros positivos, com possível exceção de* a_1, *e as sequências dos* $p_i^{\prime}s$ *e* $q_i^{\prime}s$ *são dadas pelo Teorema 2.5, ou seja,*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_i & = & a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i & = & a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2} \end{array} \right. \quad i = 1, 2, 3, 4, \cdots, n \ , \quad \textit{com} \ \left\{ \begin{array}{lcl} p_{-1} & = & 0 \\ q_{-1} & = & 1 \end{array} \right. \quad \textit{e} \ \left\{ \begin{array}{lcl} p_0 & = & 1 \\ q_0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Demonstração: Usaremos o princípio de indução finita para demonstrar este teorema. Para $i = 1$, o resultado é verdadeiro, pois

$$\alpha = \frac{\alpha \cdot p_0 + p_{-1}}{\alpha \cdot q_0 + q_{-1}}.$$

Para $i = 2$, obtemos

$$[a_1, \alpha] = a_1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot a_1 + 1}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot p_1 + p_0}{\alpha \cdot q_1 + q_0}.$$

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para $i - 1$, com $i - 1 \geq 0$, ou seja,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{i-2}, \alpha] = \frac{\alpha \cdot p_{i-2} + p_{i-3}}{\alpha \cdot q_{i-2} + q_{i-3}}.$$

Mostraremos que ele é verdadeiro para i, como segue:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \alpha] &= [a_1, a_2, \ldots, a_{i-2}, a_{i-1} + \frac{1}{\alpha}] \\ &= \frac{(a_{i-1} + \frac{1}{\alpha}) \cdot p_{i-2} + p_{i-3}}{(a_{i-1} + \frac{1}{\alpha}) \cdot q_{i-2} + q_{i-3}} \\ &= \frac{(\alpha \cdot a_{i-1} + 1) \cdot p_{i-2} + \alpha \cdot p_{i-3}}{(\alpha \cdot a_{i-1} + 1) \cdot q_{i-2} + \alpha \cdot q_{i-3}} \\ &= \frac{\alpha \cdot a_{i-1} \cdot p_{i-2} + p_{i-2} + \alpha \cdot p_{i-3}}{\alpha \cdot a_{i-1} \cdot q_{i-2} + q_{i-2} + \alpha \cdot q_{i-3}} \\ &= \frac{\alpha \cdot (a_{i-1} \cdot p_{i-2} + p_{i-3}) + p_{i-2}}{\alpha \cdot (a_{i-1} \cdot q_{i-2} + q_{i-3}) + q_{i-2}} \\ &= \frac{\alpha \cdot p_{i-1} + p_{i-2}}{\alpha \cdot q_{i-1} + q_{i-2}}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Definição 3.3 *Consideremos a fração contínua simples infinita* $x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots]$. *Definimos como* cauda de ordem n *da fração contínua* x *a fração contínua simples infinita*

$$x_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]. \tag{3.16}$$

Consideremos, agora, a sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dada por (3.1) e a sequência dos convergentes $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
x &= a_1 + \frac{1}{x_2} \\
&= [a_1, x_2] \\
&= [a_1, a_2 + \frac{1}{x_3}] \\
&= [a_1, a_2, x_3] \\
&= [a_1, a_2, a_3 + \frac{1}{x_4}] \\
&= [a_1, a_2, a_3, x_4] \\
&\vdots \\
&= [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}}] \\
&= [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n], \quad \text{com} \quad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.5, podemos escrever $a_n < x_n < a_n + 1$ e

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n] = \frac{x_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}}. \tag{3.17}$$

Como mostrado anteriormente (Teorema 3.4), a sequência dos convergentes de uma fração contínua infinita converge para um número irracional. O resultado a seguir afirma que esse número irracional é o próprio número que originou a expansão.

Teorema 3.6 *Se um número irracional positivo x é expandido em fração contínua simples infinita $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots]$, então*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = x,$$

em que $\{c_n\}$ é a sequência dos convergentes da fração contínua dada.

Demonstração: Consideremos

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}.$$

Logo,

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}},$$

sendo x_n a cauda definida em (3.16). Sabendo que $x_{n+1} > a_{n+1}$, temos

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} < a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \implies a_n < x_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}},$$

ou

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{x_n} > \frac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}.$$

As informações acima nos dizem que x está entre dois convergentes, c_n e c_{n+1}. De acordo com as relações acima, segue que

- $c_1 = a_1 < x = x_1 < a_1 + \dfrac{1}{a_2} = c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 < x < c_2.$
- $c_2 = a_1 + \dfrac{1}{a_2} > x = a_1 + \dfrac{1}{x_2} > a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = c_3 \quad \Rightarrow \quad c_3 < x < c_2.$
- $c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} < x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}} < a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} = c_4 \Rightarrow c_3 < x < c_4.$

Prosseguindo dessa maneira, podemos concluir que

$$c_{2n-1} < x < c_{2n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

De fato, para $n = 1$, o resultado é verdadeiro, pois $c_1 < c_2$. Analogamente, temos $c_3 < c_4$. Verificamos, assim, a veracidade do resultado para $n = 2$. Suponhamos que ele seja verdadeiro para $n-1$, isto é, $c_{2(n-1)-1} < x < c_{2(n-1)}$. Pelo Teorema 3.1, temos que $c_{2(n-1)-1} < c_{2n-1} < x$ e $x < c_{2(n-1)} < c_{2n}$. Daí, temos que $c_{2(n-1)-1} < c_{2n-1} < x < c_{2(n-1)} < c_{2n}$. Portanto,

$$c_{2n-1} < x < c_{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Usando o Teorema 3.3 e o Teorema do sanduíche[2], podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} c_{2n} = k \quad \Rightarrow \quad k = x.$$

□

O resultado a seguir nos diz que quanto maior for o convergente, melhor será a aproximação do número irracional x pela fração contínua simples a ele associada. Em outras palavras, podemos obter melhores aproximações para x, à medida que aumentamos o índice do convergente.

Teorema 3.7 *Se x é um número irracional qualquer e $\{c_n\}$ é a sequência dos convergentes da fração contínua simples associada a x, então*

$$|x - c_n| < |x - c_{n-1}|, \quad n \geq 2.$$

[2]Sejam $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = k$, então $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = k$. Demonstrado em [7] na página 119.

Demonstração: Consideremos $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$, com $x_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$.

Usando a expressão (3.17), podemos escrever

$$x = \frac{x_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}.$$

Assim, obtemos

$$x \cdot (x_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}) = x_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1},$$

que, para $n \geq 2$, podemos escrever como

$$x_{n+1} \cdot (x \cdot q_n - p_n) = -q_{n-1} \cdot \left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right).$$

Dividindo ambos os lados dessa equação por $x_{n+1} \cdot q_n$ e aplicando o valor absoluto, obtemos

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{-q_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n} \right| \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|.$$

Como $x_{n+1} > 1$, para $n \geq 2$, e $q_n > q_{n-1} > 0$, segue que $0 < \dfrac{q_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n} < 1$.

Portanto,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|,$$

ou seja,

$$|x - c_n| < |x - c_{n-1}|, \quad n \geq 2.$$

□

O próximo resultado nos diz como obter uma estimativa com que o convergente c_n se aproxima de um número irracional x, escrito sob forma de fração contínua simples infinita.

Teorema 3.8 *Se x é um número irracional qualquer e $\{c_n\}$ é a sequência dos convergentes da fração contínua simples associada a x, então*

$$\frac{1}{2q_n \cdot q_{n+1}} \leq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}, \quad n \geq 1. \tag{3.18}$$

Demonstração: Por (3.5) da Proposição 3.1 podemos escrever

$$c_{n+1} - c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1} \cdot q_n}.$$

Aplicando o valor absoluto em ambos os lados, temos que

$$|c_{n+1} - c_n| = \frac{1}{q_{n+1} \cdot q_n}, \quad n \geq 1. \tag{3.19}$$

O Teorema 3.7 nos diz que x está mais próximo de c_{n+1} do que de c_n. A Figura 3.1 abaixo nos mostra o caso em que c_n está à esquerda de c_{n+1}.

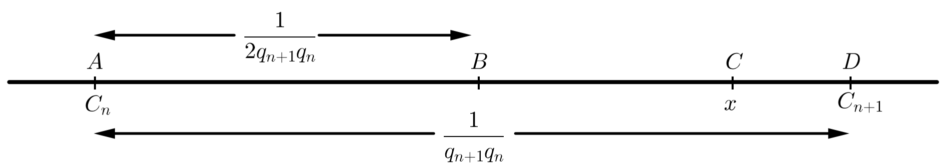

Figura 3.1: Estimativa de convergentes.

Consequentemente, usando o Teorema 3.7, a Desigualdade[3] $|x|-|y| \leq ||x|-|y|| \leq |x-y|$ e a expressão (3.19), obtemos

$$
\begin{aligned}
|x-c_n| &= |x-c_{n+1}+c_{n+1}-c_n| = |(c_{n+1}-c_n)-(c_{n+1}-x)| \\
|x-c_n| &\geq |c_{n+1}-c_n| - |x-c_n| \geq \frac{1}{q_{n+1}\cdot q_n} - |x-c_n| \\
2|x-c_n| &\geq \frac{1}{q_{n+1}\cdot q_n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2q_n\cdot q_{n+1}} \leq \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Mais ainda,

$$|x-c_n| = \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < |c_{n+1}-c_n| = \frac{1}{q_n\cdot q_{n+1}}. \qquad (3.21)$$

Portanto, das expressões (3.20) e (3.21) obtemos

$$\frac{1}{2q_n\cdot q_{n+1}} \leq \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n\cdot q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2},$$

pois $q_{n+1} > q_n$. □

3.4 Frações contínuas periódicas

Nesta seção, trataremos das frações contínuas que, a partir de um certo valor a_i, começam a se repetir, ou seja, apresentam um "período", como nos Exemplos 3.1 e 3.2. Mostraremos dois resultados fundamentais que relacionam frações contínuas periódicas e os números irracionais quadráticos, que são os teoremas de Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [1], [9], [10] e [11].

Definição 3.4 *Uma fração contínua simples é denominada* fração contínua periódica *se a sequência dos valores a_i apresenta repetição (período), que denotaremos por*

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+n}}\ ],$$

sendo $a_{k+n} = a_k$, e os valores $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+n}$ formam o período. A fração contínua

$$[\overline{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}\ ]$$

é denominada fração contínua puramente periódica.

Definição 3.5 *Um número irracional x que é raiz da equação quadrática $ax^2+bx+c=0$, com a, b e c números inteiros, e $b^2-4ac>0$ não é um quadrado perfeito, é denominado* irracional quadrático.

Definição 3.6 *Um número irracional quadrático x é denominado* reduzido*, se $x>1$ e seu conjugado $x'=-x$ está entre -1 e 0.*

[3]Demonstrada em [7], na página 73.

Teorema 3.9 (Euler) *Se x é uma fração contínua periódica, isto é, se*

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+n}}\ ],$$

então x é um número irracional quadrático.

Demonstração: Consideremos $x = [a_1, a_2, \ldots, a_k, x_{k+1}]$, com $x_{k+1} = [a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$. Consequentemente, $x_{k+1} = [a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+n}, x_{k+1}\ ]$ e, usando a expressão (3.17), segue que

$$x_{k+1} = \frac{x_{k+1} \cdot p' + p''}{x_{k+1} \cdot q' + q''},$$

ou seja,

$$q' \cdot x_{k+1}^2 + (q'' - p') \cdot x_{k+1} - p'' = 0, \tag{3.22}$$

sendo $\dfrac{p''}{q''}$ e $\dfrac{p'}{q'}$ os dois últimos convergentes de $[a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+n}]$.

Pelo Teorema 3.5 podemos escrever

$$x = \frac{x_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}}{x_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}}.$$

Assim,

$$x_{k+1} = \frac{p_{k-1} - x \cdot q_{k-1}}{x \cdot q_k - p_k}. \tag{3.23}$$

Substituindo o valor de x_{k+1} de (3.23) em (3.22), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= q' \cdot \left(\frac{p_{k-1} - x \cdot q_{k-1}}{x \cdot q_k - p_k}\right)^2 + (q'' - p') \cdot \left(\frac{p_{k-1} - x \cdot q_{k-1}}{x \cdot q_k - p_k}\right) - p'' \\
0 &= q' \cdot (p_{k-1} - x \cdot q_{k-1})^2 + (q'' - p') \cdot (p_{k-1} - x \cdot q_{k-1}) \cdot (x \cdot q_k - p_k) + \\
&\quad -p'' \cdot (x \cdot q_k - p_k)^2 \\
0 &= q' \cdot (p_{k-1}^2 - 2x \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1} + x^2 \cdot q_{k-1}^2) + (q'' - p') \cdot (x \cdot p_{k-1} \cdot q_k - p_{k-1} \cdot p_k + \\
&\quad -x^2 \cdot q_{k-1} \cdot q_k + x \cdot p_k \cdot q_{k-1}) - p''(x^2 \cdot q_k^2 - 2x \cdot p_k \cdot q_k + p_k^2) \\
0 &= x^2 \cdot [q' \cdot q_{k-1}^2 - (q'' - p')(q_{k-1} \cdot q_k) - p'' \cdot q_k^2] + x \cdot [2 \cdot (p'' \cdot p_k \cdot q_k - q' \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1}) + \\
&\quad (q'' - p') \cdot (p_{k-1} \cdot q_k + p_k \cdot q_{k-1})] + [q' \cdot p_{k-1}^2 - (q'' - p') \cdot p_{k-1} \cdot p_k - p'' \cdot p_k^2].
\end{aligned}$$

Logo,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com

$$\begin{aligned}
a &= q' \cdot q_{k-1}^2 - (q'' - p')(q_{k-1} \cdot q_k) - p'' \cdot q_k^2, \\
b &= 2 \cdot (p'' \cdot p_k \cdot q_k - q' \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1}) + (q'' - p') \cdot (p_{k-1} \cdot q_k + p_k \cdot q_{k-1}), \\
c &= q' \cdot p_{k-1}^2 - (q'' - p') \cdot p_{k-1} \cdot p_k - p'' \cdot p_k^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a, b, c são números inteiros. Por hipótese, sabemos que x é um número irracional, de modo que $b^2 - 4ac > 0$. $\square$

Exemplo 3.4 Determinaremos o número irracional que representa a fração contínua que segue abaixo

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}=[2,\overline{4}].$$

Temos uma fração periódica cujo período é 4, ou seja, esse número se repete infinitamente. Assim, podemos escrever

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}=2+\frac{1}{x}, \tag{3.24}$$

em que

$$x=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}.$$

Daí,

$$x=4+\frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-4x-1=0.$$

Segue que $x=\dfrac{4\pm\sqrt{20}}{2}$. Logo, $x=2+\sqrt{5}$, pois x é positivo.
Substituindo o valor de x em (3.24), obtemos

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}=2+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}=2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}\right)=2+\sqrt{5}-2=\sqrt{5}.$$

Portanto,

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}=\sqrt{5}.$$

Exemplo 3.5 Determinaremos o número irracional que representa a fração contínua simples infinita

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}=[1,1,1,\ldots].$$

Consideremos x o número irracional desejado. Assim, temos

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ddots}}} = 1 + \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x - 1 = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

O valor positivo de x é conhecido na literatura matemática como *número áureo* ou *seção áurea*. Calculando os convergentes de x, obtemos $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \cdots$, de modo que os seus numeradores e os seus denominadores constituem a sequência de números inteiros

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots,$$

sendo que cada termo após os dois iniciais é a soma dos dois precedentes, que é conhecida na literatura matemática como *sequência de Fibonacci.*

Teorema 3.10 (Lagrange) *A fração contínua que representa um número irracional quadrático x é periódica.*

Demonstração: Sabemos, da Definição 3.5, que um número irracional quadrático satisfaz uma equação quadrática com coeficientes inteiros, a qual podemos escrever como

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ em que } a, b, c \in \mathbb{Z},\ b^2 - 4ac > 0, \tag{3.25}$$

não é um quadrado perfeito. Se $x = [a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$, considerando $x_k = [a_k, a_{k+1}, \ldots]$, então $x = [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k]$. Sabemos, por (3.17), que

$$x = \frac{x_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Substituindo esse valor de x em (3.25) e efetuando as operações apropriadas, obtemos

$$A_k \cdot x_k^2 + B_k \cdot x_k + C_k = 0, \tag{3.26}$$

em que

$$\begin{aligned}
A_k &= a \cdot p_{k-1}^2 + b \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1} + c \cdot q_{k-1}^2, & (3.27)\\
B_k &= 2a \cdot p_{k-1} \cdot p_{k-2} + b \cdot (p_{k-1} \cdot q_{k-2} + p_{k-2} \cdot q_{k-1}) + 2c \cdot q_{k-1} \cdot q_{k-2}, & (3.28)\\
C_k &= a \cdot p_{k-2}^2 + b \cdot p_{k-2} \cdot q_{k-2} + c \cdot q_{k-2}^2. & (3.29)
\end{aligned}$$

Observemos que $C_k = A_{k-1}$. Se $A_k = 0$, ou seja, $a \cdot p_{k-1}^2 + b \cdot q_{k-1} \cdot p_{k-1} + c \cdot q_{k-1}^2 = 0$, então temos que

$$\begin{aligned}
p_{k-1} &= \frac{-b \cdot q_{k-1} \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) \cdot q_{k-1}^2}}{2a}\\
&= \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \cdot q_{k-1}.
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$. Assim, a equação (3.25) tem um número racional que é raiz, o que é impossível, pois x é um número irracional. Portanto, $A_k \neq 0$, e a equação

$$A_k \cdot y^2 + B_k \cdot y + C_k = 0$$

tem x_k como uma de suas raízes. Usando as equações (3.27), (3.28), (3.29), o Teorema 2.5 e efetuando as operações apropriadas, segue que

$$\begin{aligned} B_k^2 - 4A_k \cdot C_k &= [2a \cdot p_{k-1} \cdot p_{k-2} + b \cdot (p_{k-1} \cdot q_{k-2} + p_{k-2} \cdot q_{k-1}) + 2c \cdot q_{k-1} \cdot q_{k-2}]^2 \\ &\quad -4 \cdot (a \cdot p_{k-1}^2 + b \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1} + c \cdot q_{k-1}^2) \cdot (a \cdot p_{k-2}^2 + b \cdot p_{k-2} \cdot q_{k-2} \\ &\quad + c \cdot q_{k-2}^2) \\ &= (b^2 - 4ac) \cdot (p_{k-1} \cdot q_{k-2} - p_{k-2} \cdot q_{k-1})^2 \\ &= b^2 - 4ac. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Pelo Teorema 3.8, temos que

$$\left| x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \frac{1}{q_{k-1}^2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{q_{k-1}} < (x \cdot q_{k-1} - p_{k-1}) < \frac{1}{q_{k-1}} \quad \Rightarrow$$

$$x \cdot q_{k-1} - p_{k-1} > \frac{-1}{q_{k-1}}.$$

Logo, existe um número λ_{k-1}, $|\lambda_{k-1}| < 1$, tal que

$$p_{k-1} = x \cdot q_{k-1} + \frac{\lambda_{k-1}}{q_{k-1}}. \tag{3.31}$$

Substituindo (3.31) na equação (3.27), obtemos

$$\begin{aligned} A_k &= a \cdot \left(x \cdot q_{k-1} + \frac{\lambda_{k-1}}{q_{k-1}} \right)^2 + b \cdot q_{k-1} \cdot \left(x \cdot q_{k-1} + \frac{\lambda_{k-1}}{q_{k-1}} \right) + c \cdot q_{k-1}^2 \\ &= (ax^2 + bx + c) \cdot q_{k-1}^2 + 2ax \cdot \lambda_{k-1} + a \cdot \left(\frac{\lambda_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} \right) + b \cdot \lambda_{k-1} \\ &= 2ax \cdot \lambda_{k-1} + a \cdot \left(\frac{\lambda_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} \right) + b \cdot \lambda_{k-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A_k < 2|ax| + |a| + |b|.$$

Da observação logo após a equação (3.29), temos que $C_k = A_{k-1}$ e, assim,

$$C_k < 2|ax| + |a| + |b|.$$

Usando a equação (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} B_k^2 &\leq 4|A_k \cdot C_k| + |b^2 - 4ac| \\ &< 4 \cdot (2|ax| + |a| + |b|)^2 + |b^2 - 4ac|. \end{aligned}$$

Mostramos, assim, que A_k, B_k e C_k são números inteiros menores do que os que não dependem de k, ou seja, que estão uniformemente limitados. Daí, há apenas um número finito de possíveis equações $A_k \cdot y^2 + B_k \cdot y + C_k = 0$, e, portanto, de possíveis valores de x_k. Assim, necessariamente, $x_{k+n} = x_k$, para alguma escolha de k, o que mostra que a fração contínua é periódica. $\square$

Capítulo 4

Aplicações de Frações Contínuas

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações de frações contínuas. Mostraremos que esse importante conceito matemático pode ser utilizado em diversas situações. Como aplicações, trataremos da relação das frações contínuas com os logaritmos, determinantes, raiz quadrada de um número inteiro positivo (que não é um quadrado perfeito), equação de Pell e as equações diofantinas lineares. Para mais detalhes veja as referências [1], [2], [3], [4], [5], [6], [8], [9] e [10].

4.1 Frações contínuas e os logaritmos

Nesta seção, apresentaremos um método para o cálculo dos logaritmos por meio das frações contínuas. Por se tratar de um tópico em que os alunos geralmente apresentam dificuldades para o entendimento, esse método visa uma nova abordagem para o cálculo dos logaritmos. Não objetiva substituir a função da calculdora, mas como uma ferramenta para utilizar os recursos computacionais, bem como outros conceitos matemáticos, tais como potenciação e progressões geométricas.

Destacamos, ainda, que este método pode ser implementado para a computação, devido à facilidade e à alta velocidade na realização dos cálculos. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [3], [5] e [10].

4.1.1 Calculando logaritmos por meio de frações contínuas

Historicamente, a palavra *logaritmo* significa "número de razão", devido à composição das palavras gregas *logos* (razão) e *arithmos* (números). Em 1614, o matemático escocês John Napier (1550-1617) publicou um texto intitulado "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos)" contendo uma tábua que fornecia os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco, cujo propósito era facilitar as operações aritméticas, ou seja, transformar multiplicação e divisão em adição e subtração, respectivamente.

O único rival de Napier, quanto à prioridade da invenção dos logaritmos, foi o suiço *Jobst Bürgi* (1552-1632), um construtor de instrumentos. Bürgi concebeu e construiu uma tábua de logaritmos independentemente de Napier e publicou seus resultados em 1620, seis anos depois de Napier anunciar sua descoberta ao mundo. Enquanto a abordagem de Napier era geométrica, a de Bürgi era algébrica. Bürgi deve ser considerado um descobridor independente, que não teve crédito pela invenção, pelo fato de a publicação de Napier ter sido anterior à dele.

Em 1615, o inglês Henry Briggs (1561-1631), professor de Geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor de Oxford, visitou Napier em sua casa na Escócia, e lá discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs-lhe o uso de potências de dez, e estes chegaram a um acordo.

Napier já não tinha a energia suficiente para pôr em prática essas ideias, pois veio a falecer em 1617. Por isso, recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tábua de logaritmos *comuns* ou *briggsianos*, que são essencialmente os logaritmos de base 10 (ou *decimais)*, os quais devem sua superioridade em cálculos numéricos, devido ao fato de o nosso sistema de numeração ser decimal.

Atualmente, as calculadoras científicas facilitam os cálculos, de modo que dispensam o uso das tábuas de logaritmos. O estudo dos logaritmos se justifica pela importância das suas aplicações, não somente à Matemática, mas também a outras áreas do conhecimento. Como aplicações dos logaritmos, podemos citar suas relações com a escala Richter, matemática financeira, acústica, crescimento populacional, decaimento radioativo, depreciação de um bem, dentre outras.

Após tal prelúdio, iniciaremos a apresentação da aplicação de frações contínuas ao estudo de logaritmos.

Definição 4.1 *Dados os números reais positivos* b_0 *e* b_1 *(*$b_0 \neq 1$*), denominamos* logaritmo *de* b_1 *na base* b_0 *o expoente* x *tal que* $b_0^x = b_1$*, ou seja,*

$$\log_{b_0} b_1 = x \quad \Longleftrightarrow \quad b_0^x = b_1.$$

Dados uma base b_0 ($b_0 \neq 1$) e um número b_1 ($1 < b_1 < b_0$), apresentaremos um método para o cálculo do logaritmo $\log_{b_0} b_1$ por meio de frações contínuas.

Para isso, vamos obter duas sequências:

$$b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$$

e a de números inteiros positivos

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots$$

Agora, veremos como obter esses números $n_1, b_2, n_2, b_3, n_3, b_4, \ldots$ Para tal finalidade, faremos uso das seguintes relações:

$$\begin{array}{ccccc}
b_1^{n_1} < & b_0 & < b_1^{n_1+1}, & \text{consideremos} & b_2 = \dfrac{b_0}{b_1^{n_1}}, \\
b_2^{n_2} < & b_1 & < b_2^{n_2+1}, & \text{consideremos} & b_3 = \dfrac{b_1}{b_2^{n_2}}, \\
b_3^{n_3} < & b_2 & < b_3^{n_3+1}, & \text{consideremos} & b_4 = \dfrac{b_2}{b_3^{n_3}}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_k^{n_k} < & b_{k-1} & < b_k^{n_k+1}, & \text{consideremos} & b_{k+1} = \dfrac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Inicialmente, devemos obter n_1 tal que

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}.$$

Decorre da expressão acima que

$$b_0 = b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}}, \qquad \text{em que} \qquad \frac{1}{x_1} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 > 1. \tag{4.1}$$

Em seguida, devemos calcular

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}, \tag{4.2}$$

e obter n_2 tal que

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}.$$

Usando a hipótese de que n_2 é um número inteiro positivo, decorre que

$$b_1 = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}}, \qquad \text{em que} \qquad x_2 > 1. \tag{4.3}$$

Continuando essse procedimento, devemos calcular

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}} \tag{4.4}$$

e obter n_3 tal que

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}.$$

Daí, escrevemos

$$b_2 = b_3^{n_3+\frac{1}{x_3}}, \qquad \text{em que} \qquad x_3 > 1, \tag{4.5}$$

e assim sucessivamente.

Das expressões (4.1) e (4.2) resulta

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}} = b_0 \cdot b_1^{-n_1} = b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}} \cdot b_1^{-n_1} = b_1^{\frac{1}{x_1}}, \text{ ou, alternativamente,} \quad b_2^{x_1} = b_1. \tag{4.6}$$

Comparando as equações (4.3) e (4.6), obtemos

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2}. \tag{4.7}$$

Usando as expressões (4.3) e (4.4), consequentemente temos

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}} = b_1 \cdot b_2^{-n_2} = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}} \cdot b_2^{-n_2} = b_2^{\frac{1}{x_2}}, \text{ que é equivalente a} \quad b_3^{x_2} = b_2. \tag{4.8}$$

Usando as equações (4.5) e (4.8), temos que

$$x_2 = n_3 + \frac{1}{x_3}. \tag{4.9}$$

Agora, de (4.7) e (4.9), podemos concluir que

$$x_1 = n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{x_3}}. \tag{4.10}$$

Repetindo o procedimento acima, podemos mostrar que

$$x_3 = n_4 + \frac{1}{x_4}, \tag{4.11}$$

e assim por diante.

Substituindo esses resultados na equação (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
b_0 &= b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}} \iff b_1 = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{x_1}}},\\
b_1 &= b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{x_1}}},\\
b_1 &= b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{x_2}}}},\\
b_1 &= b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\ddots}}}},
\end{aligned}$$

e aplicando a definição de logaritmo, concluímos que

$$\log_{b_0} b_1 = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}} = 0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}} = [0, n_1, n_2, n_3, \cdots].$$

Apresentaremos, a seguir, alguns exemplos numéricos para ilustrar o método apresentado acima.

Exemplo 4.1 Usando o método apresentado anteriormente, vamos obter uma expansão para $\log 2$.

Neste caso, temos que $b_0 = 10$ e $b_1 = 2$. Inicialmente, devemos obter n_1 tal que $b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}$. Como

$$2^3 < 10 < 2^4,$$

consequentemente temos que $n_1 = 3$ e $b_2 = \dfrac{b_0}{b_1^{n_1}} = \dfrac{10}{2^3} = 1,25$.

Em seguida, devemos obter n_2 tal que $b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$. Efetuando alguns cálculos simples, obtemos

$$(1,25)^3 < 2 < (1,25)^4.$$

Consequentemente, temos que $n_2 = 3$ e $b_3 = \dfrac{b_1}{b_2^{n_2}} = \dfrac{2}{(1,25)^3} = 1,024$.

Continuando esse procedimento, devemos obter n_3 tal que $b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$. Efetuando alguns cálculos simples, obtemos

$$(1,024)^9 < 1,25 < (1,024)^{10},$$

de onde segue que $n_3 = 9$ e $b_4 = \dfrac{b_2}{b_3^{n_3}} = \dfrac{1,25}{(1,024)^9} \cong 1,009741958$.

Prosseguindo de maneira análoga e realizando as operações apropriadas, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{array}{lcll}
b_1 & = & 2 & n_1 = 3,\\
b_2 & = & 1,25 & n_2 = 3,\\
b_3 & = & 1,024 & n_3 = 9,\\
b_4 & \cong & 1,009741958 & n_4 = 2,\\
b_5 & \cong & 1,004336279 & n_5 = 2,\\
 & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Como estamos interessados apenas na sequência dos números inteiros, temos, portanto, que

$$\log 2 = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}} = [0, 3, 3, 9, 2, 2, \cdots].$$

Usando o Teorema 2.5, mais especificamente, da expressão (2.4) para o cálculo dos convergentes iniciais, obtemos os seguintes primeiros convergentes de $\log 2$:

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_i			0	3	3	9	2	2
p_i	0	1	0	1	3	28	59	146
q_i	1	0	1	3	10	93	196	485
c_i			0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{28}{93}$	$\frac{59}{196}$	$\frac{146}{485}$

Tabela 4.1: Primeiros convergentes de $\log 2$.

Observemos que no convergente $c_2 = \dfrac{1}{3} = 0,33\overline{3}$, já temos uma casa decimal correta; $c_3 = \dfrac{3}{10} = 0,30$, duas casas decimais corretas; $c_4 = \dfrac{28}{93} \cong 0,301075268$, quatro casas decimais corretas, e, prosseguindo dessa maneira, podemos observar que quanto maior for o convergente, mais próximo ele estará de $\log 2 \cong 0,301029995\cdots$.

Exemplo 4.2 Usando o método das frações contínuas, obteremos a expansão de $\log 1,12$.

Dados $b_0 = 10$ e $b_1 = 1,12$, efetuando alguns cálculos simples, obtemos

$$(1,12)^{20} < 10 < (1,12)^{21},$$

de onde segue que $n_1 = 20$ e $b_2 = \dfrac{10}{(1,12)^{20}} \cong 1,036667651$. De maneira análoga, obtemos

$$(1,036667651)^3 < 1,12 < (1,036667651)^4.$$

Daí, segue que $n_2 = 3$ e $b_2 = \dfrac{1,12}{(1,036667651)^3} \cong 1,005308566$.

Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$\begin{array}{lcl} b_1 & = & 1,12 \qquad\qquad n_1 = 20, \\ b_2 & \cong & 1,036667651 \qquad n_2 = 3, \\ b_3 & \cong & 1,005308566 \qquad n_3 = 6, \\ b_4 & \cong & 1,004253258 \qquad n_4 = 1, \\ b_5 & \cong & 1,001050838 \qquad n_5 = 4, \\ & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

Logo,

$$\log 1,12 = 0 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4+\ddots}}}}} = [0, 20, 3, 6, 1, 4, \ldots].$$

Calculando os primeiros convergentes, obtemos

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_i			0	20	3	6	1	4
p_i	0	1	0	1	3	19	22	107
q_i	1	0	1	20	61	386	447	2174
c_i			0	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{61}$	$\frac{19}{386}$	$\frac{22}{447}$	$\frac{107}{2174}$

Tabela 4.2: Primeiros convergentes de $\log(1, 12)$.

Observemos que no convergente $c_3 = \dfrac{3}{61} \cong 0,049180327$, já temos três casas decimais corretas; $c_6 = \dfrac{107}{2174} \cong 0,049218031$, sete casas decimais corretas. Analogamente, no convergente subsequente, já teremos uma melhor aproximação que no anterior, e, consequentemente, mais próximo de $\log 1,12 = 0,049218022\ldots$

Exemplo 4.3 Suponha que uma pessoa tenha emprestado um capital C a uma taxa fixada de 12% ao ano. Determinar o tempo necessário para que o valor a receber seja o dobro do emprestado inicialmente.

Sabemos, da Matemática Financeira, que $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que M é o montante (ou valor futuro), C é o capital (ou valor presente), i é a taxa de juros e t é o período de tempo de aplicação do capital. De acordo com os dados do exemplo, temos que $M = 2C$, $i = 12\% = 0,12$, e devemos obter o valor de t correspondente. Substituindo esses valores na expressão acima e utilizando os resultados dos últimos convergentes dos Exemplos 4.1 e 4.2, temos que

$$\begin{aligned}
M &= C \cdot (1 + i)^t \\
2C &= C \cdot (1 + 0,12)^t \\
2 &= (1,12)^t \\
\log 2 &= \log(1,12)^t \\
\log 2 &= t \cdot \log(1,12) \\
t &= \frac{\log 2}{\log(1,12)} \cong \frac{0,3010}{0,0492} \cong 6,1178,
\end{aligned}$$

o que corresponde a aproximadamente 6 anos, 1 mês e 13 dias.

4.2 Determinantes e as frações contínuas

Nesta seção, apresentaremos a relação existente entre as frações contínuas e os determinantes. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [1] e [9].

Inicialmente, vamos considerar a seguinte indagação: Será possível obter o n-ésimo convergente de uma fração contínua, sem antes obter todos os convergentes precedentes àquele?

Veremos que a resposta a essa pergunta é afirmativa, bem como um modo diferente de resolver esse problema, usando determinantes. Para tal finalidade, necessitaremos apenas dos números inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, obtidos da expansão de um dado número em forma de fração contínua.

Definição 4.2 *O* determinante *de uma matriz quadrada A de ordem n, denotado por $det(A)$, é a única função (escalar) f que possui as seguintes propriedades:*

- *f é n-linear* [1] *e alternada* [2] *nas linhas da matriz A.*
- *$f(I_n) = 1$, em que I_n denota a matriz identidade de ordem n.*

Para o cálculo efetivo do determinante de uma matriz quadrada A de ordem n, podemos usar o conhecido *desenvolvimento de Laplace*, como segue: escolhemos uma coluna j qualquer de A, de modo que

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}),$$

sendo A_{ij} a matriz obtida de A por supressão da sua i-ésima linha e sua j-ésima coluna.

Usando a expressão (2.4), consequência do Teorema 2.5, temos que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_i & = & a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i & = & a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2} \end{array} \right. , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

com as condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_{-1} & = & 0 \\ q_{-1} & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} p_0 & = & 1 \\ q_0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Inicialmente, para os nossos propósitos, vamos considerar o caso de obter o numerador p_i do i-ésimo convergente. Iniciemos investigando os cinco primeiros, os quais satisfazem as equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 \cdot p_0 + p_{-1} & = & p_1 \\ a_2 \cdot p_1 + p_0 & = & p_2 \\ a_3 \cdot p_2 + p_1 & = & p_3 \\ a_4 \cdot p_3 + p_2 & = & p_4 \\ a_5 \cdot p_4 + p_0 & = & p_5 \end{array} \right. . \tag{4.12}$$

Podemos reescrever a expressão (4.12) da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} p_{-1} & + & a_1 \cdot p_0 & - & p_1 & & & & & & & = & 0 \\ & & p_0 & + & a_2 \cdot p_1 & - & p_2 & & & & & = & 0 \\ & & & & p_1 & + & a_3 \cdot p_2 & - & p_3 & & & = & 0 \\ & & & & & & p_2 & + & a_4 \cdot p_3 & - & p_4 & = & 0 \\ & & & & & & & + & p_3 & - & a_5 \cdot p_4 \; - \; p_5 & = & 0 \end{array} \right. . \tag{4.13}$$

[1] Linear em cada uma das suas n variáveis.

[2] Significa que é anti-simétrica.

Observe que $p_{-1} = 0$ e $p_0 = 1$. Substituindo essas informações na expressão (4.13), resulta que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} -p_1 & & & & & & & & & = & -a_1 \\ a_2 \cdot p_1 & - & p_2 & & & & & & & = & -1 \\ p_1 & + & a_3 \cdot p_2 & - & p_3 & & & & & = & 0 \\ & & p_2 & + & a_4 \cdot p_3 & - & p_4 & & & = & 0 \\ & & & + & p_3 & - & a_5 \cdot p_4 & - & p_5 & = & 0 \end{array}\right. . \tag{4.14}$$

Agora, temos cinco equações lineares nas cinco incógnitas p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5. Isso significa que podemos resolver o sistema acima para obter o valor de qualquer uma dessas incógnitas, que, em verdade, são os numeradores dos convergentes c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5, respectivamente. Vamos concentrar nossa atenção na obtenção da incógnita p_5. Usando determinantes, podemos calcular

$$p_5 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & -1 \end{vmatrix}}. \tag{4.15}$$

Analisando o determinante do denominador da expressão acima, observamos claramente que seu resultado será $(-1)^5$, e, de maneira mais geral, para p_n, será $(-1)^n$, pois se trata de uma matriz diagonal inferior, cujo determinante é o produto dos elementos de sua diagonal.

O próximo passo será colocar a última coluna do determinante do numerador, expressão (4.15), na primeira posição. Para isso, basta permutar suas colunas, num total de $4 = 5 - 1$ (ou $n - 1$) permutações, lembrando que, ao permutar duas colunas (ou inversão de sinais de uma coluna), seu determinante (em valor absoluto) será o mesmo. Assim, necessitamos realizar $5 = (5-1)+1$ alterações de sinais, sendo as quatro primeiras devido à troca de colunas, acrescida de uma inversão de sinais da coluna mencionada. Geralmente, precisamos de $n = (n-1) + 1$ alterações de sinais. Realizar as $n = (n-1) + 1$ alterações de sinais do determinante do numerador corresponde a executar essas modificações e multiplicar o determinante por $(-1)^n$. Observando que o determinante do denominador é $(-1)^n$, temos que esses valores se simplificam, independentemente de se n é par ou ímpar.

Por consequência, a expressão (4.15) se resume a

$$p_5 = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}. \tag{4.16}$$

Isso significa que necessitamos apenas dos termos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, decorrentes da expansão em fração contínua do número dado.

Para obter o denominador q_i do i-ésimo convergente, procedemos de maneira completamente análoga. A única alteração consiste nas condições iniciais, em que $q_{-1} = 1$ e $q_0 = 0$. Assim, obtemos a seguinte expressão para o denominador q_5, ou seja,

$$q_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}. \tag{4.17}$$

Portanto, das expressões (4.16) e (4.17), obtemos o convergente $c_5 = \dfrac{p_5}{q_5}$, sem a necessidade dos convergentes precedentes.

Com raciocínio análogo podemos obter o convergente c_n, conhecendo apenas os quocientes parciais $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ (desconhecendo os convergentes precedentes), isto é,

$$c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}}.$$

Sem dúvida, o método recorrente para obter os convergentes é bem mais vantajoso. Mas isso não é de suma importância, pois nosso objetivo consiste em apresentar uma ideia distinta, procurando apenas relacionar as frações contínuas com diferentes conceitos matemáticos.

No exemplo a seguir, ilustramos o uso de determinantes, conforme o apresentamos anteriormente.

Exemplo 4.4 Usando determinantes (sem usar os convergentes precedentes), obteremos o quarto convergente da fração contínua correspondente ao número $\dfrac{225}{157}$.

Pelo algoritmo de Euclides, obtemos

$$\begin{aligned} 225 &= \mathbf{1} \cdot 157 + 68 \\ 157 &= \mathbf{2} \cdot 68 \ + 21 \\ 68 &= \mathbf{3} \cdot 21 \ + 5 \\ 21 &= \mathbf{4} \cdot 5 \ \ + 1 \\ 5 &= \mathbf{5} \cdot 1 \ \ + 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}} = [1, 2, 3, 4, 5] = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5].$$

Para fixar as ideias, vamos adaptar as expressões (4.16) e (4.17) para o caso em que $n = 4$. Assim,

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{43}{30}.$$

□

Observemos que para obtermos o convergente desejado, devemos calcular os determinantes presentes no numerador (de ordem 4) e no denominador (de ordem 3), que resultam em ótimos exercícios relacionados a esse conceito.

4.3 A expansão de $\sqrt{N}$

Nesta seção, mostraremos que, dado um número inteiro $N > 0$, que não é um quadrado perfeito, a expansão de $\sqrt{N}$ em frações contínuas é periódica. Mais ainda, esse período tem uma forma muito interessante, e vamos mostrar como caracterizá-lo totalmente. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [1], [8] e [10].

Para os nossos propósitos, necessitaremos do seguinte resultado.

Teorema 4.1 *Se x é um número irracional quadrático reduzido, tal que $x > 1$, e raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros, cuja raiz conjugada $x' = -\sqrt{x}$ está entre -1 e 0, então a fração contínua de x é puramente periódica.*

Demonstração: O leitor interessado na demonstração deste teorema pode encontrá-la em [10], p. 104.

Proposição 4.1 *Se $N > 0$ é um número inteiro, não quadrado perfeito, então $\sqrt{N} = [a_1, \overline{a_2, a_3, \ldots, a_n, 2a_1}\ ]$. Em outras palavras, a fração contínua de $\sqrt{N}$ é periódica, com período $[\overline{a_2, a_3, \ldots, a_n, 2a_1}\ ]$.*

Demonstração:

Consideremos $N > 0$ um número inteiro, que não é um quadrado perfeito. Temos que $\sqrt{N}$ é irracional. De fato, se $\sqrt{N} = \dfrac{p}{q}$, tal que $mdc(p, q) = 1$ e $q > 1$, teríamos $N = \dfrac{p^2}{q^2}$, o que é absurdo, pois $mdc(p, q) = 1$ implica que $mdc(p^2, q^2) = 1$, donde $\dfrac{p^2}{q^2}$ não pode ser um número inteiro.

Observemos que $\sqrt{N}$ é um número irracional quadrático, pois satisfaz a equação $x^2 - N = 0$. Observemos também que $\sqrt{N} > 1$, de modo que seu conjugado $-\sqrt{N}$ não pode estar entre -1 e 0. Por esse motivo, $\sqrt{N}$ não pode ser um *número irracional quadrático reduzido*, e, consequentemente, a sua expansão

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{+ \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} = a_1 + \frac{1}{a_2}\ + \cdots +\ \frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_n}\ + \ \cdots \qquad (4.18)$$

em frações contínuas simples não pode ser puramente periódica.

Por outro lado, dado que a_1 é o maior número inteiro menor que $\sqrt{N}$, denotado por $a_1 = \lfloor\sqrt{N}\rfloor$, segue que $\sqrt{N} + a_1$ é maior que 1, e seu conjugado $-\sqrt{N} + a_1$ está entre -1 e 0. Agora, pelo Teorema 4.1, temos que $\sqrt{N} + a_1$ é um *número irracional quadrático reduzido*, e, consequentemente, sua fração contínua é puramente periódica.

Adicionando a_1 a ambos os lados das expressão (4.18), obtemos

$$\sqrt{N} + a_1 = 2a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3}\cdots + \frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_n} + \cdots, \tag{4.19}$$

que consiste em uma fração contínua puramente periódica. Logo,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{N} + a_1 \\ &= 2a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3}\cdots + \frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3} + \cdots \\ &= a_1 + a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3}\cdots + \frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3} + \cdots \end{aligned}$$

Portanto, a expansão de $\sqrt{N}$ é dada por

$$\begin{aligned} \sqrt{N} &= a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3}\cdots + \frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3} + \cdots \\ &= [a_1, \overline{a_2, a_3, \cdots, a_n, 2a_1}\ ]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

□

Em outras palavras, para obter a fração contínua de $\sqrt{N}$, basta obter o primeiro termo a_1 e parar apenas quando obter o seu dobro, e, assim, a representação períodica estará completa.

Corolário 4.1 *Dado um número inteiro positivo a, temos as seguintes expansões em frações contínuas periódicas:*

i) $\sqrt{a^2+1} = [a,\ \overline{2a}\ ],\ a \geq 1.$

ii) $\sqrt{a^2-1} = [a-1,\ \overline{1, 2(a-1)}\ ],\ a > 1.$

iii) $\sqrt{a^2-2} = [a-1,\ \overline{1, a-2, 1, 2(a-1)}\ ],\ a > 2.$

iv) $\sqrt{a^2-a} = [a-1,\ \overline{2, 2(a-1)}\ ],\ a > 1.$

Demonstração: Demonstraremos cada um dos casos.

i) Consideremos $k = a^2 + 1$. Temos que

$$a^2 < k < (a+1)^2 \Longrightarrow a < \sqrt{k} < a + 1 \Longrightarrow a_1 = a. \tag{4.21}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\sqrt{k} = a + \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{k} - a} \cdot \frac{(\sqrt{k} + a)}{(\sqrt{k} + a)} = \sqrt{k} + a.$$

Da expressão (4.21) obtemos

$$2a < x_2 = \sqrt{k} + a < 2a + 1 \Longrightarrow a_2 = 2a = 2a_1. \tag{4.22}$$

Observando que, na expressão (4.22), a_2 é o dobro de a_1, e utilizando a Proposição 4.1, concluímos que a representação em frações contínuas de $\sqrt{k} = \sqrt{a^2+1}$ é periódica, com período $2a$, ou seja,

$$\sqrt{a^2+1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \ddots}}} = [a,\ \overline{2a}\ ].$$

ii) Consideremos $k = a^2 - 1$. Para $a > 1$, temos que

$$(a-1)^2 < k < (a)^2 \Longrightarrow (a-1) < \sqrt{k} < a \Longrightarrow a_1 = (a-1). \tag{4.23}$$

Daí, segue que

$$\sqrt{k} = (a-1) + \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{k}-(a-1)} \cdot \left[\frac{\sqrt{k}+(a-1)}{\sqrt{k}+(a-1)}\right] = \frac{\sqrt{k}+(a-1)}{2(a-1)}. \tag{4.24}$$

Usando a expressão (4.23), podemos escrever

$$1 = \frac{2(a-1)}{2(a-1)} < x_2 = \frac{\sqrt{k}+(a-1)}{2(a-1)} < \frac{2a-1}{2(a-1)} \Longrightarrow a_2 = 1. \tag{4.25}$$

Assim, temos

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3} \Longrightarrow x_3 = \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{k}+(a-1)}{2(a-1)} - 1} = \sqrt{k} + (a-1). \tag{4.26}$$

Usando (4.25), temos

$$2(a-1) < x_3 = \sqrt{k} + (a-1) < 2a - 1 \Longrightarrow a_3 = 2(a-1) = 2a_1.$$

Como a_3 é o dobro de a_1, temos, pela Proposição 4.1, que a fração contínua de $\sqrt{a^2-1} = \sqrt{k}$ é periódica, cujo período é composto por a_2 e $a_3 = 2a_1$, isto é,

$$\sqrt{a^2-1} = (a-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2(a-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2(a-1) + \ddots}}}} = [a-1,\ \overline{1, 2(a-1)}\ ].$$

iii) Consideremos $k = a^2 - 2$. Para $a > 2$, temos que

$$(a-1)^2 < k < (a)^2 \Longrightarrow (a-1) < \sqrt{k} < a \Longrightarrow a_1 = (a-1). \tag{4.27}$$

Assim, podemos escrever

$$\sqrt{k} = (a-1) + \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{k}-(a-1)} \cdot \left[\frac{\sqrt{k}+(a-1)}{\sqrt{k}+(a-1)}\right] = \frac{\sqrt{k}+(a-1)}{(2a-3)}. \tag{4.28}$$

Das expressões $(a-1) < \sqrt{k} < a$ e $(a-2) < (a-1) < a$, obtemos

$$2a-3 < \sqrt{k}+(a-1) < 2a \Longrightarrow 1 < x_2 = \frac{\sqrt{k}+(a-1)}{2a-3} < \frac{2a}{2a-3} \Longrightarrow a_2 = 1. \quad (4.29)$$

Segue que

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3} \Longrightarrow x_3 = \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{k}+(a-1)}{2a-3} - 1} = \frac{\sqrt{k}+(a-2)}{2}. \quad (4.30)$$

Da desigualdade $2a-3 < \sqrt{k}+(a-1) < 2a$ em (4.29) temos

$$a-2 < x_3 = \frac{\sqrt{k}+(a-2)}{2} < \frac{2a-1}{2} \Longrightarrow a_3 = a-2. \quad (4.31)$$

Por consequência, temos

$$x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4} \Longrightarrow x_4 = \frac{1}{x_3-(a-2)} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{k}+(a-2)}{2} - (a-2)} = \frac{\sqrt{k}+(a-2)}{2a-3}. \quad (4.32)$$

Usando a expressão (4.27), resulta

$$(a-1) < \sqrt{k} < a \Longrightarrow 1 = \frac{2a-3}{2a-3} < x_4 = \frac{\sqrt{k}+(a-2)}{2a-3} < \frac{2(a-1)}{2a-3} \Longrightarrow a_4 = 1. \quad (4.33)$$

Consequentemente, temos

$$x_5 = a_4 + \frac{1}{x_4} \Longrightarrow x_5 = \frac{1}{x_4 - 1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{k}+(a-2)}{2a-3} - 1} = \sqrt{k}+(a-1). \quad (4.34)$$

Novamente, pela expressão (4.27), obtemos

$$(a-1) < \sqrt{k} < a \Longrightarrow 2(a-1) < x_5 = \sqrt{k}+(a-1) < 2a-1 \Longrightarrow a_5 = 2(a-1). \quad (4.35)$$

Observemos que $a_5 = 2a_1$. Logo, pela Proposição 4.1, temos que a fração contínua de $\sqrt{a^2-2} = \sqrt{k}$ é periódica. Mais ainda, o seu período é formado por a_2, a_3, a_4 e a_5. Portanto,

$$\sqrt{a^2-2} = (a-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(a-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2(a-1) + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} = [a-1,\ \overline{1, (a-2), 1, 2(a-1)}\,].$$

iv) Consideremos $k = a^2 - a$. Para $a > 1$, temos

$$(a-1)^2 < k < (a)^2 \Longrightarrow (a-1) < \sqrt{k} < a \Longrightarrow a_1 = (a-1). \tag{4.36}$$

Daí, podemos escrever

$$\sqrt{k} = (a-1) + \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{k}-(a-1)} \cdot \left[\frac{\sqrt{k}+(a-1)}{\sqrt{k}+(a-1)}\right] = \frac{\sqrt{k}+(a-1)}{(a-1)}. \tag{4.37}$$

Usando (4.36), temos

$$2 = \frac{2(a-1)}{(a-1)} < x_2 = \frac{\sqrt{k}+(a-1)}{(a-1)} < \frac{2a-1}{(a-1)} \Longrightarrow a_2 = 2. \tag{4.38}$$

Segue que

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \Longrightarrow x_3 = \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{k}+(a-1)}{(a-1)} - 2} = \sqrt{k} + (a-1). \tag{4.39}$$

Da expressão (4.38) obtemos

$$2(a-1) < x_3 = \sqrt{k} + (a-1) < 2a - 1 \Longrightarrow a_3 = 2(a-1) = 2a_1.$$

Logo, pela Proposição 4.1, a fração contínua de $\sqrt{a^2-a} = \sqrt{k}$ é periódica, sendo a_2 e a_3 os componentes do seu período. Portanto,

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1) + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2(a-1) + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2(a-1) + \ddots}}}} = [a-1,\ \overline{2, 2(a-1)}\ ],$$

o que conclui a demonstração do corolário. □

Exemplo 4.5 Obteremos as expansões em frações contínuas de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ e $\sqrt{8}$.

É suficiente observarmos que $2 = 1^2 + 1$, $3 = 2^2 - 1$, $5 = 2^2 + 1$, $6 = 3^2 - 3$, $7 = 3^2 - 2$ e $8 = 3^2 - 1$, de modo que, por meio de aplicação imediata do Corolário 4.1, obtemos

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}\,], \sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}\,], \sqrt{5} = [2, \overline{4}\,],\ \sqrt{6} = [2,\ \overline{2, 4}\,], \sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}\,] \text{ e } \sqrt{8} = [2,\ \overline{1, 4}\,].$$

Agora, apresentaremos outra expansão para números irracionais. Consideremos $x = \sqrt{K}$, em que K ($K \in \mathbb{N}$) não é um quadrado perfeito. Podemos obter expansões de $\sqrt{K}$ em frações contínuas, como segue:

i) Inicialmente, devemos obter a e $b \in \mathbb{N}$ tais que $K = a^2 + b$ e calcular

$$\sqrt{K} - a = \frac{(\sqrt{K}-a)\cdot(\sqrt{K}+a)}{\sqrt{K}+a} = \frac{K-a^2}{\sqrt{K}+a} = \frac{b}{2a + \sqrt{K} - a}. \tag{4.40}$$

ii) Observemos que $\sqrt{K} - a$ ocorre no denominador da última equação em (4.40) e, assim, o próximo passo consiste em substituir o valor de $\sqrt{K} - a$ obtido em cada estágio precedente, ou seja,

$$\sqrt{K}-a=\frac{b}{2a+\sqrt{K}-a}=\frac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\sqrt{K}-a}}=\frac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\sqrt{K}-a}}}.$$

iii) Realizando as sucessivas substituições, obtemos

$$\sqrt{K}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ddots}}}.$$

Destacamos que as expansões obtidas por meio do procedimento descrito acima podem resultar em frações contínuas simples ou não.

Observemos que, considerando $b=1$, obtemos o item **i)** do Corolário 4.1.

Exemplo 4.6 Expressaremos $\sqrt{18}$ em forma de fração contínua.

Podemos escrever $18=a^2+b$, onde $a=4, b=2$. Assim,

$$\sqrt{18}-4=\frac{(\sqrt{18}-4)\cdot(\sqrt{18}+4)}{(\sqrt{18}+4)}=\frac{18-4^2}{(\sqrt{18}+4)}=\frac{2}{(\sqrt{18}+4)+4-4}=\frac{2}{8+\sqrt{18}-4}$$

Logo,

$$\sqrt{18}=4+\frac{2}{8+\sqrt{18}-4}=4+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\sqrt{18}-4}}.$$

Como $b=2$ divide $2a=8$, podemos simplificar a expressão acima dividindo o numerador e o denominador de algumas frações por $b=2$, isto é,

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= 4+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ddots}}}=4+\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\cdots\\ \sqrt{18} &= 4+\frac{2/2}{8/2+}\,\frac{2/2}{8}+\frac{2/2}{8/2+}\,\frac{2/2}{8}+\cdots\\ &= 4+\frac{1}{4+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{8+}\,\cdots=[4,\overline{4,8}].\end{aligned}$$

Exemplo 4.7 Expressaremos $\sqrt{13}$ em forma de fração contínua.

Podemos escrever $13=a^2+b$, onde $a=3, b=4$. Assim,

$$\sqrt{13}-3=\frac{(\sqrt{13}-3)\cdot(\sqrt{13}+3)}{(\sqrt{13}+3)}=\frac{13-9}{(\sqrt{13}+3)+3-3}=\frac{4}{6+\sqrt{13}-3}.$$

Logo,

$$\sqrt{13}=3+\frac{4}{6+\sqrt{13}-3}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\sqrt{13}-3}}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\ddots}}}.$$

Como $b=4$ não divide $2a=6$, não podemos reduzir a fração acima a uma fração contínua simples.

4.4 Resolução de equações com números inteiros

4.4.1 A equação de Pell

Nesta seção, discutiremos uma equação que, erroneamente, leva o nome do matemático inglês John Pell (1611-1685). Existem evidências do uso dessas equações bem antes de Pell, nos trabalhos de Brahmagupta, Bhaskara, Diofante. Mas elas ocorrem pela primeira vez apenas no *problema do gado*, de Arquimedes. Trata-se de uma designação errada que, mesmo assim, se consagrou. O erro da atribuição se deve ao matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783) que, em uma correspondência ao matemático russo Christian Goldbach (1690-1764), datada de 10 de agosto de 1732, afirmou, por engano, que o matemático inglês John Pell havia obtido um método de resolução daquelas equações, quando, na verdade, isso foi feito pelo seu conterrâneo, o matemático Lord Brouncker (1620-1684). A teoria completa dessas equações foi finalmente elaborada pelo matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813), de 1766 a 1769. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [4], [5], [8], [9] e [10].

Consideremos N um número inteiro positivo. Estamos interessados nas soluções inteiras x e y da equação

$$x^2 - Ny^2 = 1, \tag{4.41}$$

denominada *equação de Pell.* Se N é um quadrado perfeito, digamos $N = m^2$, para algum m inteiro, temos que $x^2 - Ny^2 = (x - my)(x + my) = 1$ admite apenas as soluções triviais $y = 0$ e $x = \pm 1$, pois $(x - my) = (x + my) = \pm 1$. O caso mais interessante é aquele em que N não é um quadrado perfeito e, assim, $\sqrt{N}$ é irracional.

A expansão da fração contínua de $\sqrt{N}$ fornece todas as informações de que precisamos para resolver a equação de Pell $x^2 - Ny^2 = 1$ ou $x^2 - Ny^2 = -1$, caso existam soluções. A equação $x^2 - Ny^2 = -1$ nem sempre possui solução. Por exemplo, a equação $x^2 - 3y^2 = -1$ não possui soluções inteiras (veja Apêndice I de [10]). Por esse motivo, vamos nos concentrar apenas no caso $x^2 - Ny^2 = 1$, que sempre possui solução (para mais detalhes, o leitor pode consultar [8]). Usando a expressão (4.20), temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{N} &= a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{a_n +} \frac{1}{2a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \cdots \\ \sqrt{N} &= a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{a_n +} \frac{1}{x_{n+1}}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

sendo

$$x_{n+1} = 2a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots = \sqrt{N} + a_1. \tag{4.43}$$

Usando a equação (3.17), podemos escrever

$$\sqrt{N} = \frac{x_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}, \tag{4.44}$$

sendo p_{n-1}, q_{n-1}, p_n e q_n calculados a partir dos convergentes $c_{n-1} = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, que vêm imediatamente antes do termo $2a_1$ em (4.43). Substituindo o valor de x_{n+1} na equação (4.44), obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{N} &= \frac{(\sqrt{N}+a_1)\cdot p_n + p_{n-1}}{(\sqrt{N}+a_1)\cdot q_n + q_{n-1}}. \\ \iff \sqrt{N}\cdot(\sqrt{N}+a_1)\cdot q_n + q_{n-1}\cdot\sqrt{N} &= (\sqrt{N}+a_1)\cdot p_n + p_{n-1} \\ \iff N\cdot q_n + (a_1\cdot q_n + q_{n-1})\cdot\sqrt{N} &= (a_1\cdot p_n + p_{n-1}) + p_n\cdot\sqrt{N}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\{\begin{array}{lcl} N\cdot q_n & = & a_1\cdot p_n + p_{n-1} \\ a_1\cdot q_n + q_{n-1} & = & p_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} p_{n-1} & = & N\cdot q_n - a_1\cdot p_n \\ q_{n-1} & = & p_n - a_1\cdot q_n \end{array}\right. . \tag{4.45}$$

Usando o Teorema 2.6, temos que

$$p_n\cdot q_{n-1} - p_{n-1}\cdot q_n = (-1)^n.$$

Substituindo, nessa expressão, os valores de p_{n-1} e q_{n-1}, calculados em (4.45), obtemos

$$p_n\cdot(p_n - a_1\cdot q_n) - (N\cdot q_n - a_1\cdot p_n)\cdot q_n = (-1)^n,$$

que é equivalente a

$$p_n^2 - N\cdot q_n^2 = (-1)^n, \tag{4.46}$$

sendo n o número de termos que precedem o termo $2a_1$.

Se n é par, então a equação (4.46) se torna

$$p_n^2 - N\cdot q_n^2 = (-1)^n = 1, \tag{4.47}$$

e $x_1 = p_n$ e $y_1 = q_n$ é uma solução particular da equação $x^2 - N\cdot y^2 = 1$.

Se n é ímpar, e ainda desejamos obter soluções da equação $x^2 - N\cdot y^2 = 1$, devemos avançar para o *segundo período* da expansão de $\sqrt{N}$, ou seja, obter o termo a_n que ocorre pela segunda vez. Observemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{N} &= a_1 + \frac{1}{a_2 +}\cdots + \frac{1}{a_n +}\frac{1}{2a_1 +}\cdots + \frac{1}{a_n +}\frac{1}{2a_1 +}\cdots \\ &= a_1 + \frac{1}{a_2 +}\cdots + \frac{1}{a_n +}\frac{1}{a_{n+1} +}\cdots + \frac{1}{a_{2n} +}\frac{1}{a_{2n+1} +}\cdots, \end{aligned}$$

de modo que o termo a_n, quando ocorre novamente, é o termo a_{2n}, e, assim,

$$p_{2n}^2 - N\cdot q_{2n}^2 = (-1)^{2n} = 1,$$

e $x_1 = p_{2n}$ e $y_1 = q_{2n}$ é uma solução particular da equação $x^2 - N\cdot y^2 = 1$.

Exemplo 4.8 Obteremos uma solução particular da equação

$$x^2 - 7\cdot y^2 = 1.$$

Do Exemplo 4.5 temos que $\sqrt{7} = [2, \overline{1,1,1,4}\ ] = [a_1, a_2, a_3, a_4, 2a_1]$, o que nos mostra que $a_n = a_4$ e, assim, $n = 4$, que é um número par. Isso significa que os valores do convergente c_4 são soluções da equação dada. Calculando tais convergentes, obtemos Logo, $c_4 = \dfrac{p_4}{q_4} = \dfrac{8}{3}$, e $x_1 = p_4 = 8$ e $y_1 = q_4 = 3$ são soluções da equação dada. De fato,

$$x_1^2 - 7\cdot y_1^2 = (8)^2 - 7\cdot(3)^2 = 64 - 7\cdot(9) = 64 - 63 = 1.$$

Portanto, $(x_1, y_1) = (8, 3)$ é uma solução particular da equação $x^2 - 7\cdot y^2 = 1$.

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_i			2	1	1	1	4	1
p_i	0	1	2	3	5	8	37	46
q_i	1	0	1	1	2	3	14	17
c_i			$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{37}{14}$	$\frac{46}{17}$

Tabela 4.3: Primeiros convergentes de $\sqrt{7}$.

Exemplo 4.9 Obteremos uma solução particular da equação

$$x^2 - 29 \cdot y^2 = 1.$$

Temos que a expansão de $\sqrt{29} = [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}\ ] = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 2a_1]$. Segue que $a_n = a_5$, e, assim, $n = 5$, que é um número ímpar. Calculando os convergentes, obtemos

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i			5	2	1	1	2	10	2	1	1	2	10
p_i	0	1	5	11	16	27	70	727	1524	2251	3775	9801	101785
q_i	1	0	1	2	3	5	13	135	283	418	701	1820	18901
c_i			$\frac{5}{1}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{70}{13}$	$\frac{727}{135}$	$\frac{1524}{283}$	$\frac{2251}{418}$	$\frac{3775}{701}$	$\frac{9801}{1820}$	$\frac{101785}{18901}$

Tabela 4.4: Primeiros convergentes de $\sqrt{29}$.

Se considerarmos o convergente $c_5 = \dfrac{p_5}{q_5} = \dfrac{70}{13}$, teremos $x_1 = p_5 = 70$ e $y_1 = q_5 = 13$. Mas uma verificação direta nos mostra que

$$x_1^2 - 29 \cdot y_1^2 = (70)^2 - 29 \cdot (13)^2 = 4900 - 29 \cdot (169) = 4900 - 4901 = -1.$$

Sendo assim, devemos observar o segundo período da expansão de $\sqrt{29}$, isto é, devemos considerar $x_1 = p_{2n} = p_{10} = 9801$ e $y_1 = q_{2n} = q_{10} = 1820$, que são soluções da equação dada. De fato,

$$x_1^2 - 29 \cdot y_1^2 = (9801)^2 - 29 \cdot (1820)^2 = 96059601 - 96059600 = 1.$$

Portanto, $(x_1, y_1) = (9801, 1820)$ é uma solução particular da equação $x^2 - 29 \cdot y^2 = 1$.

Dada uma equação de Pell, que possua solução, uma vez que obtemos a sua menor solução positiva (ou *solução minimal*), podemos obter sistematicamente todas as outras suas soluções positivas.

Não demonstraremos o teorema a seguir. (O leitor interessado em sua demonstração pode encontrá-la, por exemplo, em [8]).

Teorema 4.2 *Se (x_1, y_1) é uma solução positiva de $x^2 - N \cdot y^2 = 1$, então todas as outras soluções positivas (x_n, y_n) podem ser obtidas pela equação*

$$x_n + y_n \cdot \sqrt{N} = (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{N})^n.$$

Exemplo 4.10 Obteremos as soluções gerais das equações $x^2 - 7 \cdot y^2 = 1$ *e* $x^2 - 29 \cdot y^2 = 1$.

No Exemplo 4.8, obtivemos a solução particular $(x_1, y_1) = (8, 3)$ da equação $x^2 - 7 \cdot y^2 = 1$. O teorema acima nos garante que sua solução geral (x_n, y_n) é da forma

$$x_n + y_n \cdot \sqrt{7} = (8 + 3 \cdot \sqrt{7})^n.$$

Analogamente, no Exemplo 4.9, obtivemos $(x_1, y_1) = (9801, 1820)$ como solução particular da equação $x^2 - 29 \cdot y^2 = 1$. Portanto, de acordo com o teorema acima, podemos expressar sua solução geral por

$$x_n + y_n \cdot \sqrt{29} = (9801 + 1820 \cdot \sqrt{29})^n.$$

$\square$

4.4.2 Equações diofantinas lineares

Nesta seção, mostraremos como aplicar frações contínuas à resolução das equações diofantinas lineares. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências [2], [4], [6], [9] e [10].

A resolução de vários problemas em Matemática conduzem a equações cujas soluções devem ser números inteiros (possivelmente positivos). Um exemplo típico de um tal problema é o seguinte: [Euler] De quantas maneiras podemos comprar selos de 5 e 7 reais, se dispomos de 100 reais?

Definição 4.3 *Uma equação da forma*

$$ax + by = c \quad ou \quad ax - by = c,$$

sendo a, b e c números inteiros não nulos, é denominada equação diofantina linear.

O nome se deve ao matemático grego Diofanto de Alexandria, que viveu aproximadamente no século III d.C.

Existem equações diofantinas lineares que não possuem solução. Por exemplo, a equação diofantina linear $3x + 9y = 4$ não possui solução.

O resultado que segue nos fornece uma condição necessária e suficiente para que uma equação diofantina linear possua solução (o qual, em particular, justifica, *a posteriori*, a afirmação feita no parágrafo imediatamente anterior).

Proposição 4.2 *Sejam a e b inteiros positivos tais que $d = mdc(a, b)$. A equação $ax + by = c$ admite soluções em números inteiros se e somente se d divide c.*

Demonstração: Suponhamos que a equação $ax + by = c$ admita solução, digamos x_0 e y_0. Como d divide a e d divide b, segue que d divide $ax_0 + by_0$. Logo, d divide c $(= ax + by)$. Reciprocamente, se d divide c, então existe um número inteiro k tal que $c = kd$. Por outro lado, pelo Teorema de Bachet-Bézout [3], existem inteiros n e m de modo que $d = an + bm$. Multiplicando por k essa última equação, obtemos $c = kd = a(kn) + b(km)$. Logo, a equação $ax + by = c$ admite pelo menos uma solução, a saber, $x = kn$ e $y = km$. $\square$

Se a equação $ax + by = c$ possui solução, é imediato verificar que essa equação é equivalente à equação $a_1x + b_1y = c_1$, em que $a_1 = \dfrac{a}{d}$, $b_1 = \dfrac{b}{d}$ e $c_1 = \dfrac{c}{d}$ tal que $mdc(a_1, b_1) = 1$. Assim, podemos nos concentrar apenas nas equação do tipo $ax + by = c$, tais que $d = mdc(a, b) = 1$.

[3] O Teorema de Bachet-Bézout afirma que: se $d = mdc(a, b)$, então existem números inteiros n e m tais que $d = an + bm$.

Teorema 4.3 *Se a e b são números inteiros positivos, tais que $d = mdc(a, b) = 1$, então a equação*

$$ax - by = 1 \tag{4.48}$$

possui infinitas soluções inteiras.

Demonstração: Primeiramente, usando o Teorema 2.4, convertemos o número racional $\dfrac{a}{b}$ em uma fração contínua simples e finita

$$\frac{a}{b} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \tag{4.49}$$

e calculamos os convergentes $c_1, c_2, \cdots, c_n$. Os dois últimos convergentes $c_{n-1} = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $c_n = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{a}{b}$ constituem a "chave" para a solução da equação $ax - by = 1$, pois eles satisfazem as relações do Teorema 2.6, ou seja,

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n,$$

e substituindo $p_n = a$ e $q_n = b$, obtemos

$$a \cdot q_{n-1} - b \cdot p_{n-1} = (-1)^n. \tag{4.50}$$

Se n é par, segue que $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$ é uma *solução particular* da equação $ax - by = 1$. Denotaremos por (x_0, y_0) uma solução particular da equação $ax - by = 1$.

Se n é ímpar, temos que $(-1)^n = -1$. Neste caso, podemos modificar o último termo a_n da expansão da fração contínua obtida em (4.49), substituindo

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & \text{por} & \dfrac{1}{a_n - 1 + \dfrac{1}{1}}, & \text{se} & a_n > 1 \\ \dfrac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}} & \text{por} & \dfrac{1}{a_{n-1} + 1}, & \text{se} & a_n = 1 \end{cases}.$$

Em outras palavras, se a expressão (4.49) possui um número ímpar de quocientes parciais, podemos transformá-la em outra com um número par, do seguinte modo:

$$\begin{cases} [a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1] & \text{se} \quad a_n > 1 \\ [a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1] & \text{se} \quad a_n = 1 \end{cases}.$$

Calculando os convergentes para o caso em que a expansão em fração contínua tem um número par de convergentes parciais, temos que os dois últimos, $c_{n-1} = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $c_n = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{a}{b}$, satisfazem a equação (4.50).

Uma vez que obtivemos a solução particular (x_0, y_0) da equação (4.48), podemos obter facilmente a sua *solução geral.*

Para essa finalidade, consideremos (x, y) uma outra solução de (4.48). Logo,

$$ax - by = ax_0 - by_0 = 1.$$

Daí resulta que

$$a(x - x_0) = b(y - y_0). \tag{4.51}$$

Como $mdc(a, b) = 1$, segue que b divide $x - x_0$. Logo, existe um número inteiro t tal que

$$x - x_0 = bt \Longleftrightarrow x = x_0 + bt. \tag{4.52}$$

De (4.52) em (4.51), obtemos

$$b(at) = b(y - y_0).$$

Logo,

$$y - y_0 = at \Longleftrightarrow y = y_0 + at. \tag{4.53}$$

Portanto, qualquer solução (x, y) da equação $ax - by = 1$ é da forma

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 + at \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{4.54}$$

Por outro lado, se (x_0, y_0) é uma solução particular da equação $ax - by = 1$, as equações dadas em (4.54) satisfazem a equação dada. De fato,

$$\begin{aligned} ax - by &= a(x_0 + bt) - b(y_0 + at) \\ &= a(x_0 - by_0) + abt - abt \\ &= a(x_0 - by_0) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções dadas, conforme (4.54), são denominadas de *solução geral* da equação $ax - by = 1$. $\square$

Exemplo 4.11 Obteremos a solução geral da equação $13x - 17y = 1$.

Usando o algoritmo de Euclides, temos que

$$\begin{aligned} 17 &= \mathbf{1} \cdot 13 + 4 \\ 13 &= \mathbf{3} \cdot 4 \ + 1 \\ 4 &= \mathbf{4} \cdot 1 \ + 0. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.1, temos que $\frac{13}{17} = [0, 1, 3, 4]$. Logo, existe um número par de quocientes parciais. Devemos calcular o convergente c_3. Para isso, vamos usar determinantes, isto é,

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -1 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{4}.$$

Segue que $(x_0, y_0) = (4, 3)$ é uma solução particular da equação $13x - 17y = 1$. De fato, $13x - 17y = 13(4) - 17(3) = 1$. Portanto, sua solução geral é dada por

$$\begin{cases} x = 4 + 17t \\ y = 3 + 13t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 4.12 Obteremos a solução geral da equação $13x - 17y = -1$.

Do exemplo anterior, temos que $(x_0, y_0) = (4, 3)$ é uma solução particular da equação $13x - 17y = 1$. Usando esse fato, podemos escrever $13(4) - 17(3) = 1$. Multiplicando essa igualdade por (-1), obtemos $13(-4) - 17(-3) = -1$. Logo, $(x_1, y_1) = (-4, -3)$ é uma solução particular da equação $13x - 17y = -1$. Portanto, sua solução geral é da forma

$$\begin{cases} x &= -4 + 17t \\ y &= -3 + 13t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Estudaremos, agora, as soluções das equações $ax - by = c$ e $ax + by = c$, tais que $mdc(a, b) = 1$. Tendo aprendido como resolver a equação $ax - by = 1$, as soluções dessas equações decorrem sem dificuldade, como segue.

- **1º caso**: A equação $ax - by = c, \quad mdc(a, b) = 1$.

Consideremos (x_0, y_0) uma solução particular da equação $ax - by = 1$, de modo que

$$ax_0 - by_0 = 1.$$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por c, obtemos

$$a(cx_0) - b(cy_0) = c. \tag{4.55}$$

Logo, (cx_0, cy_0) é uma solução particular da equação $ax - by = c$. Portanto, sua solução geral é dada por

$$\begin{cases} x &= cx_0 + bt \\ y &= cy_0 + at \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{4.56}$$

Uma substituição direta dessas expressões na equação $ax - by = c$ nos mostra que essas são, realmente, soluções da equação $ax - by = c$, de modo que constituem sua solução geral.

- **2º caso**: A equação $ax + by = c, \quad mdc(a, b) = 1$.

Inicialmente, devemos obter uma solução particular da equação $ax + by = 1$. Para fazer isso, devemos obter a expansão em fração contínua de $\frac{a}{b}$ com um número par de convergentes e obter os convergentes $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$, pois esses satisfazem

$$a \cdot q_{n-1} - b \cdot (p_{n-1}) = 1 \Longleftrightarrow a \cdot q_{n-1} + b \cdot (-p_{n-1}) = 1, \tag{4.57}$$

mostrando, portanto, que $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = -(p_{n-1})$ é uma *solução particular* da equação $ax + by = 1$.

A ideia é escrever a equação $ax + by = c$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} ax + by &= c \cdot 1 = c \cdot [a \cdot q_{n-1} + b \cdot (-p_{n-1})] \\ a(x - c \cdot q_{n-1}) &= b(-y - c \cdot p_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.58}$$

Como $mdc(a, b) = 1$, segue que b divide $(x - c \cdot q_{n-1})$. Logo, existe um número inteiro t, tal que

$$x - c \cdot q_{n-1} = bt \Longleftrightarrow x = c \cdot q_{n-1} + bt. \tag{4.59}$$

De (4.59) em (4.58), temos

$$b(at) = b(-y - c \cdot p_{n-1}).$$

Assim,

$$-y - c \cdot p_{n-1} = at \Longleftrightarrow y = c \cdot (-p_{n-1}) - at. \quad (4.60)$$

Por outro lado, para qualquer número inteiro t, uma substituição direta utilizando (4.57), (4.59) e (4.60), nos fornece

$$\begin{aligned} ax + by &= a(c \cdot q_{n-1} + bt) + b(-at - c \cdot p_{n-1}) \\ &= a \cdot c \cdot q_{n-1} + abt - abt + b \cdot c \cdot (-p_{n-1}) \\ &= c \cdot [a \cdot q_{n-1} + b \cdot (-p_{n-1})] = c \cdot 1 = c. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação $ax + by = c$ tem a forma

$$\begin{cases} x = c \cdot q_{n-1} + bt \\ y = c \cdot (-p_{n-1}) - at \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.61)$$

Exemplo 4.13 Obteremos as soluções gerais das equações $205x - 93y = 5$ e $205x - 93y = -5$.

Usando o algoritmo de Euclides, temos que

$$\begin{aligned} 205 &= \mathbf{2} \cdot 93 + 19 \\ 93 &= \mathbf{4} \cdot 19 + 17 \\ 19 &= \mathbf{1} \cdot 17 + 2 \\ 17 &= \mathbf{8} \cdot 2 + 1 \\ 2 &= \mathbf{2} \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{205}{93} = [2, 4, 1, 8, 2]$, que, por sua vez, tem um número ímpar de convergentes. Com isso, devemos tranformá-la em uma outra equivalente, com um número par de quocientes parciais. Como $a_n = a_5 = 2 > 1$, consequentemente $\frac{205}{93} = [2, 4, 1, 8, 2] = [2, 4, 1, 8, 1, 1]$. Calculando os convergentes, obtemos

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_i			2	4	1	8	1	1
p_i	0	1	2	9	11	97	108	205
q_i	1	0	1	4	5	44	49	93
c_i			$\frac{2}{1}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{97}{44}$	$\frac{108}{49}$	$\frac{205}{93}$

Tabela 4.5: Primeiros convergentes de $\frac{205}{93}$.

Como $n = 6$, segue que $x_0 = q_{n-1} = q_5 = 49$ e $y_0 = p_{n-1} = p_5 = 108$ são soluções da equação $205x - 93y = 1$. De fato, $205(49) - 93(108) = 10045 - 10044 = 1$. Multiplicando $205(49) - 93(108) = 1$ por (5), obtemos $205(245) - 93(540) = 5$. Logo, $(5x_0, 5y_0) = (245, 540)$ é uma solução particular da equação $205x - 93y = 5$. Portanto, sua solução geral é

$$\begin{cases} x = 245 + 93t \\ y = 540 + 205t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente, basta multiplicarmos $205(49)-93(108)=1$ por (-5). Assim, $(-5x_0,-5y_0)=(-245,-540)$ é uma solução particular da equação $205x-93y=-5$. Consequentemente, sua solução geral é

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -245+93t \\ y & = & -540+205t \end{array}\right., \qquad t\in\mathbb{Z}.$$

□

Exemplo 4.14 Dispondo-se de 100 reais, quais são as quantias que se podem gastar para comprar alimentos que custam 11 reais e 7 reais?

Sabendo que uma quantia (k_1) é múltipla de 11 e outra (k_2) é múltipla de 7, podemos escrever, $k_1=11x$ e $k_2=7y$, em que x e y são números inteiros positivos. Assim, a solução do problema consiste em resolver a equação

$$11x+7y=100. \tag{4.62}$$

Usando o algoritmo de Euclides, obtemos $\dfrac{11}{7}=[1,1,1,3]=[a_1,a_2,a_3,a_4]$. Como $n=4$, segue que $x_0=q_{n-1}=q_3$ e $y_0=p_{n-1}=p_3$ são soluções da equação $11x-7y=1 \Longleftrightarrow 11x+7(-y)=1$. Usando determinates, obtemos

$$c_3=\frac{p_3}{q_3}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -1 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3}{2}.$$

Logo, $(x_0,y_0)=(2,3)$. Usando a expressão (4.61), resulta que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 100\cdot 2+7t \\ y & = & 100\cdot(-3)-11t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 200+7t \\ y & = & -300-11t \end{array}\right. \tag{4.63}$$

é solução geral da equação $11x+7y=100$. A natureza peculiar do problema exige que os números x e y sejam positivos, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 200+7\cdot t>0 \\ y & = & -300-11\cdot t>0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t & > & -28,5714285714\ldots \\ t & < & -27,2727272727\ldots \end{array}\right. \Longrightarrow \quad t=-28,$$

pois t deve ser um número inteiro. Substituindo esse valor de t em (4.63), obtemos

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} x & = & 200+7t & = & 200+7(-28) & = & 4 \\ y & = & -300-11t & = & -300-11(-28) & = & 8 \end{array}\right..$$

Logo, $k_1=11x=44$ e $k_2=7y=56$. Portanto, podem ser gastos 44 reais comprando alimentos que custam 11, e 56 reais com os que custam 7.

Considerações Finais

Procuramos, no decorrer deste trabalho, justificar o porquê de o tema *Frações Contínuas* ter atraído o interesse de grandes matemáticos ao longo do tempo, o que, inclusive, torna-se um ponto de partida para trabalhar tópicos de História da Matemática.

Ao desenvolvermos este trabalho, pudemos perceber que esse tema possui uma relação intrínseca com alguns dos conteúdos tradicionalmente presentes no currículo do ensino de Matemática do Ensino Médio, particularmente no que diz respeito às aplicações apresentadas, o que não justifica sua conspícua ausência em tais currículos.

Frações Contínuas podem (a nosso ver, devem) ser utilizadas na abordagem dos conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e irracionais), principalmente nas operações básicas com elementos desses conjuntos, para enfatizar as operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) com as frações usuais, potenciação, radiciação, os conceitos de divisão euclidiana, máximo divisor comum, algoritmo de Euclides (relacionando entes aritméticos com geométricos), assim como figuras geométricas planas, bem como trabalhadas em consonância com os logaritmos, progressões aritméticas e geométricas, matrizes, determinantes, sistemas lineares, na resolução de situações-problema que recaiam em soluções de equações com números inteiros.

Por meio das frações contínuas, podemos representar uma sequência infinita, de forma completa, apenas com um número finito de números naturais. Por exemplo, as frações contínuas fornecem uma representação periódica para $\sqrt{n}$ (n um número natural não quadrado perfeito), contrariamente às representações expressas por decimais.

Portanto, diante de sua imensa utilidade, pretendemos que esse tema seja divulgado amplamente pelos professores (em especial, professores de Matemática da rede pública), bem como que estes desenvolvam pesquisas sobre ele, de modo que tal tema tenha o seu devido lugar no currículo de Matemática do ensino básico e, consequentemente, torne-se presente na prática docente.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, E. X. L., BRACCIALI, C. F. **Frações contínuas: algumas propriedades e aplicações**. *In*: II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2004, UFBA, Salvador -BA. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/MC34.pdf. Acesso em 22/09/2013.

[2] BONFIM, D. D. **Frações contínuas: um estudo**. 2009. 56 p. Trabalho de Conclusão de Curso. Curso de Matemática. Universidade Federal do Tocantins, Arraias, TO, 2009.

[3] BOYER, C. B. **História da Matemática**, revista por Uta C. Merzbach:Tradução Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2012.

[4] BREZINSKI, C. **History of continued fractions and padé approximants**. New York: Spring-Verlag, 1991. (Springer Series in Computational Mathematics, v. 12).

[5] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**: Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[6] HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção Textos Universitários).

[7] LIMA, E. L. **Curso de Análise vol. 1**. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides).

[8] MARTINEZ, F. B. *et al.* **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. (Projeto Euclides).

[9] MOORE, C. G. **An introduction to continued fractions**. Washington: The National Council of Teachers of Mathematics, 1964.

[10] OLDS, C.D. **Continued fractions**. New York: Handom House The L. W. Singer Company, 1963. (New Mathematical Library Series).

[11] SANTOS, J. P. de O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: IMPA, 2000. (Coleção Matemática Universitária).