



Universidade Federal do Tocantins
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Thiago Beirigo Lopes

**Uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito
sobre Números Complexos**

Palmas - TO
Março - 2014

Thiago Beirigo Lopes

**Uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito
sobre Números Complexos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, sob a orientação do Dr. Douglas Azevedo Castro, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Palmas - TO
Março - 2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

L864m Lopes, Thiago Beirigo
 Uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito
 sobre Números Complexos / Thiago Beirigo Lopes. - Palmas, 2014.
 58f.

 Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins,
 Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, 2014.
 Linha de pesquisa: Matemática.
 Orientador: Prof. Dr. Douglas Azevedo Castro.

 1. Complexos. 2. História. 3. Aplicação. I. Castro, Douglas Azevedo. II.
 Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDD 510.7

Bibliotecária: Emanuele Santos
CRB-2 / 1309

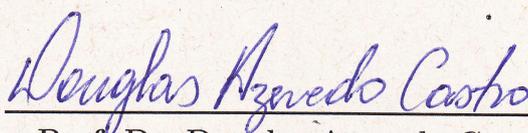
TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Thiago Beirigo Lopes

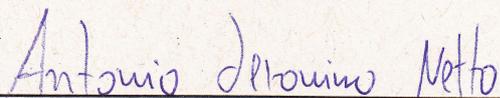
Uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito sobre Números Complexos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, sob a orientação do Dr. Douglas Azevedo Castro, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

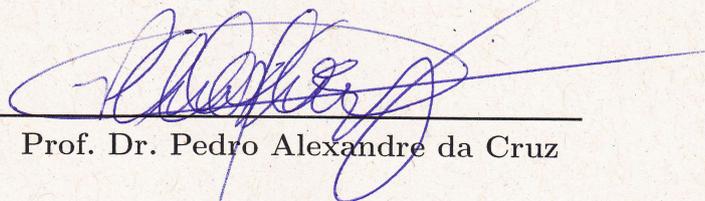
Aprovado em 27 / 03 / 2014



Prof. Dr. Douglas Azevedo Castro
Orientador



Prof. Dr. Antonio Jeronimo Netto



Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz

Palmas - TO

Março - 2014

*Dedico às pessoas mais importantes da minha vida, minha esposa Gisllayne e minhas
filhas Heloisa e Marina.*

*Dedico também aos grandes amigos de sala Leniédson, Cláudio, Flávio e Ivanilson. Que
por tantas vezes tivemos prazerosos e pensamentos filosóficos em uma mesa de bar.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço minha esposa Gislaynne pelo apoio e paciência. Agradeço aos professores que passaram durante esse PROFMAT, especialmente ao meu orientador, Dr. Douglas Azevedo Castro, por ter aceito esse desafio.

A mente que se abre a uma nova idéia, jamais volta ao seu tamanho original.
(Albert Einstein)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é criar uma fonte de conhecimento sobre números complexos, ou seja, propor um material onde se possa pesquisar conteúdos e aplicações da maneira como eles surgiram na História.

Essa maneira de introduzir os números complexos surgiu quando analisava alguns livros didáticos que propunham resolver uma equação do segundo grau com discriminante negativo. O modo como esses números são tradicionalmente expostos dá-nos a impressão de que na matemática, tudo brota da inspiração de algumas pessoas que “inventam” os conceitos, sem nenhum fundamento. Além disso, as equações de grau dois (quadráticas) não motivaram o surgimento dos complexos, uma vez que quando a resolução de uma equação quadrática apresentava um discriminante negativo, isso apenas indicava que tal problema não tinha solução.

No decorrer do trabalho, pretendemos mostrar aos leitores a necessidade do cálculo da raiz quadrada um número negativo e, também, para que possam chegar a respostas reais de problemas concretos.

Palavras-chaves: História, Complexos, Aplicações, Problemas Concretos.

ABSTRACT

The goal of this work is to create a source of knowledge about complex numbers, in other words, it proposes a material in which you can search for content and applications like the way they appeared in history.

This way of introducing complex numbers arose when the author analyzed some textbooks which proposed to solve a quadratic equation with negative discriminant. The way these numbers are traditionally exposed gives us the impression that in mathematics, all inspiration springs from some people who “invent” the concepts, without any foundation. Moreover, the second degree equation (quadratic) did not elicit the appearance of complex numbers, since when someone tries to solve quadratic equations with negative discriminant, it merely indicated that this problem had no solution.

In this work, we intend to show readers the necessity of calculating the square root of a negative number and, also, so they can get the real answers to real problems.

Key-words: History, Complex, Applications, Real Problems.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es crear una fuente de conocimiento sobre números complejos, o sea, proponer un material donde se pueda pesquisar contenidos y aplicaciones de esa forma mostrar como los mismos surgieron en la Historia. Esa forma de introducir los números complejos surgió cuando se analizaba algunos libros didácticos que proponían una ecuación de segundo grado con discriminante negativo para ser solucionado. Esa forma de abordar esos números nos da la impresión que en matemáticas, todo nace de la inspiración de algunas personas que “inventan” los conceptos. Además, la ecuaciones de grado dos (cuadráticas) no motivaron el surgimiento de los complejos, una vez que cuando la resolución de una ecuación cuadrática presentaba un discriminante negativo, solo indicaba que tal problema no había solución. En esta secuencia que describimos, pretendemos mostrar a los lectores la necesidad del cálculo de la raíz cuadrada un número negativo y también para que puedan llegar a respuestas reales de problemas concretos.

Palabras clave: Historia, Complejos, Aplicaciones, Problemas Concretos.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Tronco de pirâmide idealizado por Herão	19
Figura 2 – Tronco da pirâmide em uma visão superior	19
Figura 3 – Tronco da pirâmide em uma visão lateral em relação à diagonal das bases	20
Figura 4 – Interpretação geométrica dos números complexos segundo C. Wessel . .	25
Figura 5 – Representação na forma polar de um número complexo.	32
Figura 6 – Diferentes possibilidades para o gráfico das funções polinomiais conforme os tipos de raízes da equação polinomial correspondente. Na parte superior, à esquerda, situação em que temos 3 raízes reais distintas e, à direita, 3 raízes reais iguais. Na parte inferior, à esquerda, temos 3 raízes reais, sendo que 2 delas são iguais. À direita, na parte inferior, temos duas raízes complexas e uma real.	36
Figura 7 – Triângulo formado pelas 3 raízes de $\sqrt[3]{8}$	42
Figura 8 – Quadrado formado pelas 4 raízes de $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$	43
Figura 9 – Produto Algébrico entre z_1 e z_2 no Plano de Argand-Gauss.	44
Figura 10 – Produto Trigonométrico entre z_1 e z_2 no Plano de Argand-Gauss . . .	45
Figura 11 – Rotação de vetores, com $ z_1 = z_3 = 2$ e $ z_2 = 1$	46
Figura 12 – Esboço dos quadrados $ABCD$ e $ABC'D'$	48
Figura 13 – Representação dos quadrados $ABCD$ e $ABC'D'$	49
Figura 14 – Esboço do quadrado $ABCD$ e a diagonal \overline{AC}	49
Figura 15 – Representação do quadrado $ABCD$ do segundo problema no plano de Argand-Gauss	50
Figura 16 – Esboço do pentágono regular $ABCDE$ e o ângulo entre os segmentos \overline{OA} e \overline{OB}	51
Figura 17 – Representação do pentágono regular $ABCDE$ no plano de Argand-Gauss.	52
Figura 18 – Esboço do suposto mapa do pirata.	53
Figura 19 – O mapa com as novas coordenadas descobertas.	54
Figura 20 – Representação de 6 formas possíveis que poderia ser tal mapa.	55

Lista de símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
Δ	Letra grega Delta, usada como discriminante de equações do 2º e 3º graus

Sumário

Introdução	14
1 História dos Números Complexos	17
1.1 A Evolução Numérica na Civilização	17
1.2 A Difícil Anuência da Existência da Raiz Quadrada de Números Negativos	18
1.3 O Auge das Cúbicas e as Legitimidade dos Complexos	21
1.4 Uma Nova Visão Sobre os Complexos e sua Aplicação na Álgebra de Vetores	24
2 Estudo algébrico e qualitativo da fórmula de resolução de equações cúbicas	27
2.1 Fórmula para resolução de equações do terceiro grau	27
2.2 Um caso particular do Teorema Fundamental da Álgebra	30
2.3 Estudo algébrico sobre o discriminante	31
2.4 Estudo qualitativo sobre o discriminante	35
3 Aplicações	38
3.1 Números Complexos e Somatórios	38
3.2 Figuras regulares planas através de raízes de complexos	41
3.3 Rotações de vetores	43
3.3.1 Construção de um quadrado a partir de uma aresta	48
3.3.2 Construção de um quadrado a partir de uma diagonal	49
3.3.3 Determinando um pentágono, conhecidos um vértice e o circuncentro	50
3.4 O problema do tesouro	52
Considerações Finais	56
Referências	59

Introdução

São dois os objetivos deste trabalho, portanto, é composto por duas partes, a saber. Na primeira apresentamos como, de fato, foi o surgimento dos números complexos. A segunda visa a motivação do uso dos números complexos, não como se fossem apenas símbolos matemáticos, mas que com os quais se chega a respostas reais de problemas concretos. Apresentamos, por exemplo, a dificuldade encontrada quando da resolução de equações do 3º grau, pelo método de Cardano-Tartaglia. Na tentativa de solucionar uma dessas equações, depara-se com a raiz quadrada de um número negativo; mas, por uma análise prévia, descobre-se que a equação tem soluções, desde que se suponha a existência da raiz quadrada de um número negativo, e este é o motivo para que continuem com essa resolução. Nas aplicações na geometria analítica também é um excelente recurso, como no, já clássico, "problema do tesouro" (GARBI, 2006).

Nosso trabalho inicia com um breve histórico sobre a evolução dos números complexos na civilização, fazendo destaques aos constantes afrontamentos dos matemáticos da época com novas e surpreendentes situações numéricas. Alcançando as raízes quadradas de números negativos e mostrando alguns cálculos e situações, feitos pelo autor ou com sua respectiva referência, para ampliar e melhorar a compreensão do leitor.

Perpassa sobre as equações cúbicas e a, então inegável, legitimidade dos números complexos, mostrando muitos dos empecilhos transpassados para reconhecimento de tal legitimidade. Continuando com a interpretação geométrica idealizada, semelhantemente, por Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Argand (1786-1822) e K. F. Gauss (1777-1855). Culminando com a dedicação de Sir William R. Hamilton (1805-1865) para a também busca da legitimidade dos quatérnions. Busca que não finalizou como ele esperava, pois não conseguiu estruturar os quatérnions como define a álgebra dos números. A fim de mostrar ao leitor uma noção do meio em que se desenrolou os desafios de Cardano, Tartaglia e Ferrari, deixamos dois trechos citados por Elon Lages Lima (LIMA, 2012) retirados do livro "Histoire des Sciences Mathématiques en Italie", de G. Libri, Paris, 1840 (pags. 6 e 152 do vol. III): "Em nossa opinião, como já repetimos tantas vezes, é o caráter, é a energia que faz os grandes homens, e o talento nunca faltou aos povos que sentem e que desejam com tanto ardor. Entretanto, uma reunião de homens como Leonardo da Vinci, Machiavel, Colombo, Raphael, Michelângelo, Ariosto, que congregavam plêiades de discípulos ilustres e de rivais, É um fato que nenhuma pesquisa histórica parece poder explicar."

"Os *quesiti* são uma coleção, em nove livros, de respostas dadas por Tartaglia a questões que lhe eram endereçadas por príncipes, monges, doutores, embaixadores, pro-

fessores, arquitetos, etc. Frequentemente, essas questões continham problemas do terceiro grau propostos no começo do século XVI, compreende-se a importância que se atribuía naquela época às descobertas algébricas. Seria difícil achar na história das ciências exemplo de fato semelhante. As apostas, as disputas públicas, os panfletos se sucediam sem interrupção: todas as classes da sociedade se interessavam por essas lutas científicas, do mesmo modo como na antiguidade se interessavam pelos desafios dos poetas e pelos jogos dos atletas. Parecia que se pressentia a descoberta, e a descoberta não se fez esperar”.

Buscaremos, como citado anteriormente, retratar a sequência histórica sobre os números complexos, passando pela sua álgebra e finalizando com aplicações concretas na geometria.

No Capítulo 1 fazemos um breve histórico sobre os números no decorrer dos tempos e como se deu sua evolução nas diversas civilizações. Mostramos que os números complexos não foram os únicos tipo de números a ter que superar barreiras para ter sua aceitação como ”números de verdade”. Houveram impecilhos para se aceitar os números negativos, os números racionais periódicos e, por último, os números irracionais. Mostramos que historicamente os números complexos (apesar do indigno nome) tiveram desconfiança da comunidade científica tanto quanto qualquer outro tipo de número. Tendo nas equações cúbicas o alicerce necessário para alcançar o passaporte para o nível de números de verdade perante os matemáticos da época. Sobre a evolução da utilidade dos números complexos, principalmente na geometria plana, explana-se a descoberta do Plano de Argand-Gauss que coloca o número complexo como um ente dotado de módulo, direção e sentido. Mostrando também a longa relação do irlandês Sir William R. Hamilton (1805-1865) com a ineficaz tentativa de estender os números complexos para a geometria espacial, porém descobriu os quatérnions que o faria abrir mão da comutatividade.

No Capítulo 2 fazemos uma análise algébrica e qualitativa sobre o discriminante Δ . Inicia-se fazendo a demonstração para obtenção da fórmula para resolução de equações cúbicas (conhecida como Fórmula de Cardano-Tartaglia), tanto para as equações ditas completas ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) quanto para as equações incompletas com $b = 0$ ($ax^3 + cx + d = 0$). Em seguida uma breve dissertação sobre o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) para decorrer na implicação que uma equação de grau n tem n raízes complexas não necessariamente distintas. Na parte referente à análise algébrica fazemos um estudo sobre os sinais do discriminante Δ e uma fórmula reduzida para cada um dos casos citados. No entanto, dando uma atenção especial ao caso onde $\Delta < 0$ que indicará que a equação possui 3 raízes reais distintas, o que pontualmente implica na utilização de complexos na forma $a + bi$. Na parte referente à análise qualitativa fazemos análises gráficas de casos pontuais para que o leitor possa visualizar os modelos gráficos e fazer uma relação, mesmo que empírica, entre o máximo e mínimo da função e seu tipo de raízes.

No Capítulo 3 mostramos algumas aplicações dos números complexos. Inicialmente mostramos a aplicação nos somatórios através da expansão binomial, utilizando-se a propriedade referente às potências de i onde se dá em ciclos. Apresentamos um contexto onde a fórmula para calcular raízes de complexos vista no Capítulo 2 gera figuras regulares planas conforme a quantidade de raízes extraídas com circuncentro na origem do plano. Mostramos ainda a utilidade dos Números Complexos como ferramenta para a rotação de vetores no plano, usamos a rotação veorial para encontrar vértices de uma figura dados os vértices iniciais. Finalizamos esse capítulo, e esse trabalho, com a aplicação em um problema concretamente dentro da realidade. Um problema que consiste na estória que um pirata escondeu um tesouro utilizando uma palmeira e dois carvalhos como pontos de referência, porém acontece que ao voltar para o lugar onde descreve o mapa foram encontrados os carvalhos e percebeu-se que a palmeira havia desaparecido. Há a possibilidade de encontrar o tesouro mesmo sem o ponto referencial da palmeira?

Portanto desejamos uma boa leitura e que se sinta envolvido por essa proposta cronológica de se ensinar sobre Números Complexos. Boa leitura.

1 História dos Números Complexos

Na matemática tudo tem uma base firme, não sendo um conteúdo simplesmente estudado por que alguém “inventou” algo, que nos casos dos complexos são os números $a + bi$, e definiu suas operações de uma forma avulsa, sem nenhum sentido. A finalidade desse capítulo é estudar a história dos números complexos para se ter uma noção de como realmente foi sua origem, como e por quais motivos se deu sua evolução, fazendo assim uma base sólida que ajudará na aquisição de um conceito concreto de suas operações e aplicações.

1.1 A Evolução Numérica na Civilização

Os tempos mais remotos da humanidade revelam que nossos antepassados, desde os mais primitivos, já possuíam uma noção de número e que, dessa forma, eram capazes de diferenciar as variações para mais e para menos (COURANTE; ROBIN, 2012). Mas a percepção mais pontual de quantidade somente se deu com o passar de milhares de anos, existem ainda resquícios que indicam que as palavras utilizadas para nomear os números podem ter sofrido influência dos objetos daquele período. Para numerar grupos também eram utilizadas palavras desse tipo. Com o aumento da quantidade existente em cada grupo, passou a ser necessário uma organização no processo de contagem, existindo registros de tempos primitivos onde o homem dessa época utilizava um sistema de numeração com base 5 (BOYER, 2012).

Após essas épocas de pensamento estritamente rudimentar, o homem evoluiu e suas novas capacidades de raciocínio lhes permitem conceber a ideia de divisão, juntamente com as demais operações matemáticas. A partir desse primeiro conceito de divisão encontram-se casos de frações, onde os homens daquela época demonstraram uma excelente habilidade computacional ao se depararem com divisões não exatas, mantendo a estrutura da divisão, no entanto, sem efetuar-la. Cada povo, de acordo com sua cultura, representou a fração de forma bem particular (EVES, 2004).

Nesse processo da evolução da matemática, nos deparamos com os números negativos e estes também demoraram um tempo significativo para serem notados. Sabe-se apenas que foi na China que surgiram os números negativos (BOYER, 2012), estimam-se aproximadamente dois milênios. Encontram-se ainda regras de sinais para a adição e subtração em uma obra da matemática chinesa, só não há registro do uso dessas regras para multiplicação e divisão até o século XIII. Após os chineses, foi a vez dos povos hindus utilizarem os negativos. Depois dos hindus foram os árabes, mas os números negativos

demoraram a ser aceitos, bem como no restante dos povos, isso por haver uma grande rejeição por parte dos matemáticos até meados do século XII (BOYER, 2012).

Outro evento que necessitou de tempo para ter seu aceite, foi o caso dos irracionais, esses causaram um grande mistério em torno da matemática pelo fato de contarem com uma expansão decimal infinita e não periódica, e os processos infinitos demoraram a ser desenvolvidos na matemática. Somente na metade do século XIX que o caso dos números irracionais foi solucionado em termos aritméticos. Desde então ficou claro que a matemática não poderia mais prescindir dos processos infinitos, incorporando, dessa forma, os números irracionais na matemática.

Surge então uma nova questão no cenário da matemática, raízes quadradas de números negativos, como se assimilar algo tão abstrato se, na época, nem os números negativos tinham o que podemos chamar de “cidadania plena”.

1.2 A Difícil Anuência da Existência da Raiz Quadrada de Números Negativos

O primeiro vestígio conhecido de uma raiz quadrada de número negativo na história da matemática localiza-se na obra “Stereometria”, do grego Herão de Alexandria (aprox. 50 a.C-50 d.C) (IEZZI, 2013), um aristocrático geômetra, tendo-se ocupado das aplicações práticas da Matemática, úteis à arte da Engenharia e Agrimensura, deixando uma obra importante pelo enorme número de verdades apresentadas e pelos muitos problemas que traz. Ao que parece Herão não escreveu especificamente sobre aritmética, mas os seus escritos são muito relevantes para se apreciar o modo como os gregos regiam-se nas operações de cálculo cotidiano. Pelo que se refere à extração da raiz quadrada, que se julga constituir, para os antigos, um cálculo dos mais difíceis e dos menos práticos, muito embora a metodologia de extração de raízes fosse aos gregos um objeto de ensino costumeiro. Em um de seus escritos, ao determinar a altura de um tronco de uma pirâmide de base quadrada em que o lado da base maior mede 28, e da menor 4 e a aresta lateral 15, conforme Figura 1, o autor encontra acertadamente ao resultado $\sqrt{-63}$, possivelmente da seguinte forma:

Pelo teorema de pitágoras, a diagonal d da base de menor área é de

$$d^2 = 4^2 + 4^2,$$

ou seja,

$$d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Analogamente, a diagonal D da base de maior área é de

$$D = \sqrt{1586} = 28\sqrt{2}.$$

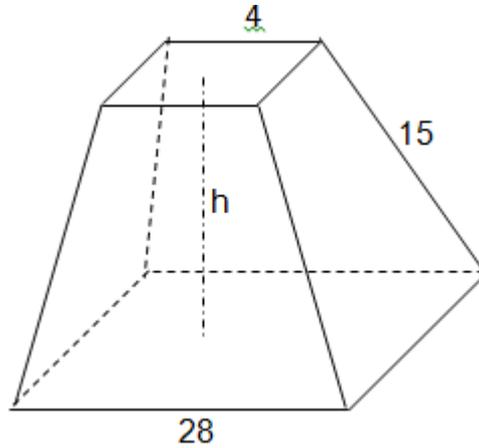


Figura 1 – Tronco de pirâmide idealizado por Herão

Ao projetar a base menor sobre a base maior, observamos, conforme Figura 2 que,

$$D = x + d + x,$$

em que D e d são as diagonais anteriormente calculadas. Assim, para se calcular a menor distância x entre a extremidade da diagonal da base maior e a projeção ortogonal da extremidade da base menor observamos que

$$x + 4\sqrt{2} + x = 28\sqrt{2},$$

ou seja,

$$x = 12\sqrt{2}.$$

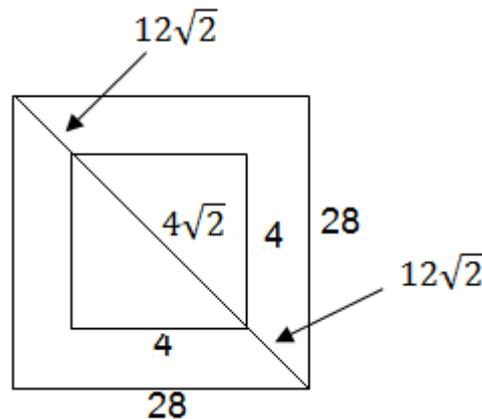


Figura 2 – Tronco da pirâmide em uma visão superior

Agora olhando tronco da pirâmide lateralmente, de modo que tenhamos um trapézio de base maior D e base menor d , de acordo com a Figura 3, temos

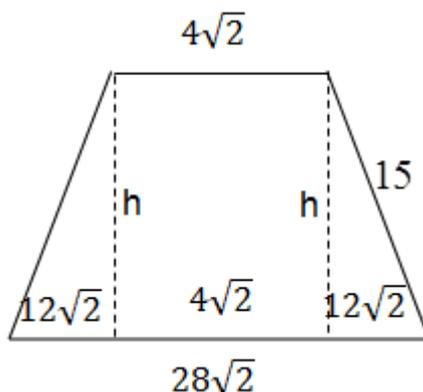


Figura 3 – Tronco da pirâmide em uma visão lateral em relação à diagonal das bases

com o auxílio do Teorema de Pitágoras, a altura h dada por

$$15^2 = h^2 + (12\sqrt{2})^2,$$

$$225 = h^2 + 288,$$

$$h^2 = 255 - 288,$$

$$h = \sqrt{255 - 288},$$

$$h = \sqrt{-63}.$$

O que significa que o problema não tinha solução para a época, mas, desastrosamente, ele converteu essa raiz em $\sqrt{63}$. Aproximadamente dois séculos depois, o também grego Diofanto de Alexandria (aprox. 200 a 284 d.C), conhecido popularmente como o “Pai da Álgebra” por fazer a primeira utilização sistemática de símbolos algébricos e cuja vida é uma incógnita, incluiu na sua obra “Arithmetica”, que é uma coleção de 130 problemas dando soluções numéricas a equações determinadas e indeterminadas, o seguinte problema: achar os lados de um triângulo retângulo de área 7 e perímetro 12. Dentro de seu estilo de resolução, Diofanto indicou os catetos por expressões análogas, na simbologia atual, a $\frac{1}{x}$ e $14x$. Chegando, então, à equação $-336x^2 + 172x = 24$, que concluiu não ter raízes (BOYER, 2012). Possivelmente, o cálculo de Diofanto se deu da seguinte maneira:

1. Considerando os catetos do triângulo retângulo com medidas $b = \frac{1}{x}$ e $c = 14x$, como Diofanto o fez, o cálculo da área é dado por

$$A_T = \frac{bc}{2} = \frac{\frac{1}{x}14x}{2} = \frac{14}{2} = 7,$$

e satisfaz a condição imposta ao problema.

2. Com as mesmas medidas dos catetos, calculamos o valor da hipotenusa a , pelo Teorema de Pitágoras, e obtemos

$$a^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + (14x)^2 = \frac{1}{x^2} + 196x^2 = \frac{1 + 196x^4}{x^2},$$

ou

$$a = \sqrt{\frac{1 + 196x^4}{x^2}}.$$

3. Ao impormos a segunda condição, do perímetro de tal triângulo retângulo ser igual a 12, obtemos, pela relação $2P = a + b + c$,

$$12 = \frac{\sqrt{(1 + 196x^4)}}{x} + \frac{1}{x} + 14x.$$

Os cálculos que se seguem são apenas manipulações algébricas a fim de auxiliar o leitor. Assim,

$$12 = \frac{\sqrt{1 + 196x^4} + 1 + 14x^2}{x},$$

$$12x = \sqrt{1 + 196x^4} + 1 + 14x^2,$$

$$12x - 1 - 14x^2 = \sqrt{1 + 196x^4},$$

$$(12x - 1 - 14x^2)^2 = 1 + 196x^4,$$

$$144x^2 - 12x - 168x^3 - 12x + 1 + 14x^2 - 168x^3 + 14x^2 + 196x^4 = 1 + 196x^4,$$

$$196x^4 - 196x^4 - 168x^3 - 168x^3 + 144x^2 + 14x^2 + 14x^2 - 12x - 12 + 1 - 1 = 0,$$

$$-316x^3 + 172x^2 - 24x = 0.$$

Por fim, dividindo-se ambos os membros por x , chegamos finalmente à equação:

$$-316x^2 + 172x = 24.$$

Em meados do século IX, o matemático hindu Mahavira universalizou a conclusão de Diofanto: “Tal como na natureza das coisas, uma quantidade negativa não é um quadrado e, portanto, não tem raiz quadrada” (COURANTE; ROBIN, 2012). Muitos longos séculos se passariam até que essa afirmativa fosse repensada.

1.3 O Auge das Cúbicas e as Legitimidade dos Complexos

Seria impraticável falar da gênese dos números complexos e não comentar das cúbicas, que são as equações cujo grau é 3. Em meados do século XVI, inicia-se o descobrimento da solução das equações cúbicas, então surgiram questionamentos que envolviam raízes quadradas de números negativos e já não podiam mais ser evitados alegando um simples “não existe solução”. Então entrava em cena G. Cardano (1501-1576), natural da cidade de Pavia, na Itália, homem de muitos interesses, publicou em 1545 o trabalho matemático pelo qual ele é mais conhecido atualmente, “Ars Magna” (A Grande Arte). Obra que tem como enfoque as várias formas de equações de terceiro grau e suas respectivas soluções e onde se adianta à descoberta dos números complexos, sendo o matemático pioneiro em

divulgar essa solução, também foi o primeiro a operar com esses números, nessa mesma obra, embora num único problema apenas. O problema tratava de que se alguém buscar dividir o número 10 em duas partes, de modo que seu produto seja 40. Tarefa impossível na época. Em algumas publicações é assegurado que Cardano encontrou as raízes por meio da multiplicação, mas Cardano diz que o problema pode ser assim resolvido (BOYER, 2012):

Equacionando as informações temos o sistema de duas equações e duas variáveis,

$$\begin{cases} x + y = 10, & (1.1) \\ xy = 40. & (1.2) \end{cases}$$

Elevamos a equação (1.1) ao quadrado e multiplicamos a equação (1.2) por 4, e então,

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 100, & (1.3) \\ 4xy = 160. & (1.4) \end{cases}$$

Subtraindo a equação (1.4) da equação (1.3) temos

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60. \quad (1.5)$$

Como $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$, pelo critério de fatoração do trinômio do quadrado perfeito, temos, da equação (1.5),

$$(x - y)^2 = -60$$

ou seja,

$$x - y = \pm 2\sqrt{-15}. \quad (1.6)$$

Consideramos então o novo sistema composto pelas equações (1.1) e (1.6).

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = \pm 2\sqrt{-15} \end{cases}$$

Somando as equações temos $2x = 10 \pm 2\sqrt{-15}$. Ou,

$$x = \frac{10 \pm 2\sqrt{-15}}{2}.$$

Consequentemente,

$$x = 5 + \sqrt{-15} \text{ e } y = 5 - \sqrt{-15}$$

ou

$$x = 5 - \sqrt{-15} \text{ e } y = 5 + \sqrt{-15}.$$

Então, tendo obtido as raízes $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, como solução de $x \cdot (x - 10) = 40$, que é uma equação do segundo grau, afirmou: “Pondo de lado as torturas mentais envolvidas, multiplique $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$, o resultado é $25 - (-15) = 40$, que é o produto pretendido” (IEZZI, 2004). Meio constrangido por não ter como decifrá-la e ao mesmo tempo obrigado a acatar essa solução, comentou que a matemática é tão sutil quanto inútil.

Mas uma nova e interessante questão, envolvendo raízes negativas, escapou ao sagaz Cardano. Por exemplo, na resolução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, que é fácil verificar que tem como raiz o número 4, a fórmula de Cardano-Tartaglia ¹ (1.7) nos fornece a seguinte solução.

Consideramos a Fórmula de Cardano-Tartaglia para equações da forma $x^3 + px + q = 0$, que é dada por

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \quad (1.7)$$

A fórmula (1.7) para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ é,

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-4}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-4}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{3}\right)^3}},$$

que, após algumas simplificações dos números racionais tem a forma

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{(-2)^2 + (-5)^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{(-2)^2 + (-5)^3}}$$

e após resolver as potências

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}.$$

Assim,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Portanto, pode-se observar que de alguma maneira essa expressão é igual a 4. Quem desenrolou esse segredo foi o algebrista bolonhês Rafael Bombelli (1530-1579), que depois de inúmeras atividades pormenores, passou a trabalhar para um nobre romano, Alessandro Rufini. Período onde se interessou pela matemática e envolveu-se na tendência da época que era a resolução das cúbicas e quádricas que submergia todos os maiores nomes da matemática da época, culminando com o encontro entre Ferrari e Tartaglia, em Milão. Sua principal publicação sobre álgebra foi a obra “Algebra”, composta de cinco volumes, com os livros IV e o V ainda inacabados, sendo só publicados no ano posterior ao da sua

¹ A demonstração de tal fórmula não se faz necessária nesse momento, mas poderá ser observada adiante nesse trabalho no capítulo 2

morte. Nessa obra, Bombelli cita uma solução para o problema proposto por Cardano, porém, para isso, teve de recorrer às raízes de números negativos. Sua ideia consistiu em supor, brilhantemente, as parcelas da solução dada pela fórmula com números complexos conjugados, que em nossa notação equivale a $a + b\sqrt{-1}$ e $a + b\sqrt{-1}$. No caso, Bombelli demonstrou (LIMA, 2004) de forma dedutiva que:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\(2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) - \sqrt{-1} \\(2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 12 \cdot \sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2 + 11 \cdot \sqrt{-1} \\(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2 + \sqrt{-121}.\end{aligned}$$

Logo $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e, analogamente, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$, então obteve $a = 2$ e $b = 1$, portanto uma raiz é $(2 + \sqrt{-1}) + (2 + \sqrt{-1}) = 2 + 2 + \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 4$, como se era esperado. As outras duas raízes podem ser encontradas através do critério de fatoração da equação, ou seja,

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4) \cdot (x^2 + 4x + 1) = 0,$$

e então temos,

$$\begin{cases} x - 4 = 0, & (1.8) \\ x^2 + 4x + 1 = 0. & (1.9) \end{cases}$$

Isolando x na equação (1.8) temos raiz $x' = 4$, como esperado, e calculando x na equação (1.9) temos que $x'' = -2 + \sqrt{3}$ e $x''' = -2 - \sqrt{3}$ (confira), fazendo assim total de três raízes complexas como nos afirma o Teorema Fundamental da Álgebra (GARBI, 2006).

1.4 Uma Nova Visão Sobre os Complexos e sua Aplicação na Álgebra de Vetores

Apesar de todas as considerações já obtidas, os números complexos prosseguiram ainda tendo certo ar enigmático até o fim do século XVIII. Foi quando Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Argand (1786-1822) e K. F. Gauss (1777-1855) descobriram, independentemente um em relação ao outro, que esses números admitem uma representação na geometria. Mas enquanto Gauss concebia essa representação por meio dos pontos de um plano, Wessel e Argand empregavam segmentos de reta orientados, ou seja, vetores, coplanares (LIMA, 2004). Na realidade, Wessel e Argand escreveram trabalhos unicamente a respeito dessa representação vetorial, com Wessel sendo o pioneiro na publicação, em 1799. Já Gauss, apenas deixou bem claro conhecer as ideias implícitas ao assunto, inclusive utilizando-as.

Esses três ilustres matemáticos se deram conta que, além de representar pontos ou vetores, os números complexos podem ser utilizados para operar algebricamente, formalizando-se assim a álgebra dos vetores de um plano.

Hoje em dia, um plano cartesiano utilizado para representar os complexos é designado plano de Argand-Gauss (ver Figura 4), apesar das ideias de Argand contribuírem mais para esse assunto. Argand, laborando com a ideia de rotação, considerava um número complexo $a + bi$ como combinação geométrica \overrightarrow{OB} de a e bi , e provia também a representação geométrica trigonométrica, ou seja, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (BOYER, 2012).

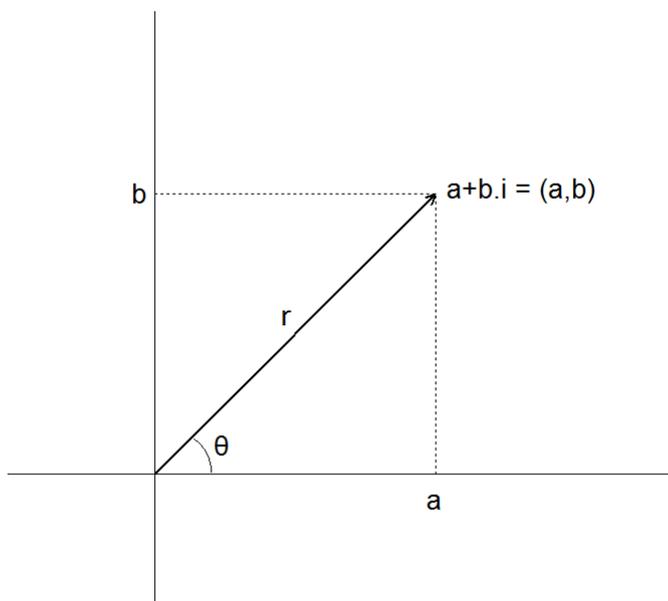


Figura 4 – Interpretação geométrica dos números complexos segundo C. Wessel

Mas ainda havia uma questão formal a ser esclarecida: o fato de a expressão algébrica $a + bi$ de um número complexo envolver a soma das duas quantidades a e bi , de espécies completamente distintas. O irlandês Sir William R. Hamilton (1805-1865), elucidaria o assunto. Órfão de pai e mãe ainda menino, Hamilton foi criado por um tio que era linguista. Quiçá por isso sua rara precocidade intelectual tenha sido concentrada muito cedo para o aprendizado de línguas. Aos cinco anos de idade sabia grego, latim e hebraico; aos oito, francês e italiano; aos dez, árabe e sânscrito; e aos doze, persa. Algum tempo depois, porém, assistindo a uma apresentação de um calculista relâmpago, suas preferências intelectuais penderam para o lado da matemática. E logo começou a ler os grandes clássicos da matemática como a Mecânica celeste, do francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), na qual, aos dezoito anos de idade, encontrou um erro. Em 1824, entrou no Trinity College de Dublin, do qual se tornaria docente de astronomia em 1827, antes mesmo de se tornar graduado, passando a ser, inclusive, astrônomo real da Irlanda (IEZZI, 2013).

Foi num diálogo à Academia Irlandesa, em 1833, que Hamilton tornou pública seu

modo de ver os números complexos. Por essa maneira, a estrutura dos números complexos era analisada como entes em forma de pares ordenados (a, b) de números reais e as operações de adição e multiplicação assim definidas:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ab + bc)$$

Dessa definição transcorrem, espontaneamente, as propriedades algébricas aguardadas para as operações, como, por exemplo, que todo par ordenado $(a, b) \neq (0, 0)$ possui inverso multiplicativo.

Nessa sequência de ideias, o par $(a, 0)$ identifica-se como número real a . Deste modo, se fizermos $(0, 1) = i$ e considerando que $(b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$, então $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, b)(0, 1)$, ou seja, $(a, b) = a + bi$, e, conseqüentemente, nesse contexto, os pares ordenados têm a forma esperada. Por outro lado, como $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$, então $i = (0, 1)$ efetivamente satisfaz o papel de unidade imaginária. Enfim, Hamilton conseguiu transcrever os números complexos a limpo, com toda a elegância que a álgebra pode proporcionar.

Mas o que Hamilton aspirava quando adquiriu esses resultados era algo bem mais pretensioso: buscar uma álgebra que fosse para os vetores do espaço em três dimensões o mesmo que a álgebra dos complexos é para os vetores de um plano. Assim como um número complexo tem a forma $(a, b) = a + bi$, a expressão desses novos entes deveria ser $(a, b, c) = a + bi + cj$. Durante mais de uma década Hamilton buscou inutilmente a regra para multiplicar esses ternos, já que a adição não oferecia dificuldades. No ano de 1843, ocorreu-lhe que seria preciso procurar quádruplos em vez de ternos e abdicar da comutatividade da multiplicação, vinham ao mundo assim os quatérnions $(a, b, c, d) = a + bi + cj + dk$, em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$ (IEZZI, 2013).

Hamilton acreditava na aplicabilidade dos quatérnions. Por esse motivo concentrou daí em diante a maioria do seu tempo para desenvolver a álgebra que desvendara. Se os resultados ficaram aquém das expectativas almejadas, pelo menos libertara a comutatividade na álgebra, perpetuando um grande avanço na matemática.

2 Estudo algébrico e qualitativo da fórmula de resolução de equações cúbicas

Esse capítulo é um conjunto de ideias e demonstrações baseado nas obras de Gilberto Garbi (GARBI, 2006), Carl B. Boyer (BOYER, 2012), Howard Whitley Eves (EVES, 2004), Elon Lages Lima (LIMA, 2012) e nas aulas dos professores Augusto César Morgado e Luciano Guimarães Monteiro de Castro sobre números complexos (Janeiro de 2002 e janeiro de 2013, respectivamente), Paulo Cezar Pinto Carvalho sobre equações algébricas (Janeiro de 2013) ministradas no CAPEM (Cursos do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio) no IMPA¹.

Procedemos, fazendo algumas manipulações algébricas, de modo a encontrar as mesmas fórmulas obtidas outrora por Scipione Ferro, primeiro a encontrar a fórmula para calcular uma raiz das equações cúbicas, e Girolamo Cardano, primeiro a publicar, em sua obra “Ars Magna”, em 1545, após ter acesso aos arquivos de Ferro em Bolonha (LIMA, 2012).

O método consiste em eliminar por meio de operações algébricas o termo de grau 2, e obter uma equação do tipo: $z^3 + pz + q = 0$.

2.1 Fórmula para resolução de equações do terceiro grau

Para encontrarmos uma fórmula para a resolução de uma equação do terceiro grau do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, teremos de fazer um processo não muito simples e, portanto, o dividiremos em 2 passos para uma melhor e mais detalhada compreensão.

Primeiro, substituiremos x por $z + w$ na equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e obtemos

$$a(z + w)^3 + b(z + w)^2 + c(z + w) + d = 0. \quad (2.1)$$

Desenvolvendo todas as potências da equação (2.1) temos

$$az^3 + 3az^2w + 3azw^2 + aw^3 + bz^2 + 2bzw + bw^2 + cz + cw + d = 0. \quad (2.2)$$

Colocando as potências de z em evidência na equação (2.2), temos

$$az^3 + (3aw + b)z^2 + (3aw^2 + 2bw + c)z + (aw^3 + bw^2 + cw + d) = 0. \quad (2.3)$$

Visto que, por substituir a incógnita pela soma de duas parcelas, temos liberdade para dar um valor qualquer tanto para z , tanto quanto para w . Para eliminar o termo de

¹ Tais vídeos podem ser baixados do site <http://videos.impa.br>

grau 2 faremos $3aw + b = 0$, ou, simplesmente,

$$w = \frac{-b}{3a}. \quad (2.4)$$

Substituindo o valor de w , dado em (2.4), na equação (2.3), sabendo que o coeficiente de z^2 é igual a 0, e fazendo algumas manipulações, listadas a seguir, temos

$$\begin{aligned} az^3 + \left(3a \left(\frac{-b}{3a} \right)^2 + 2b \left(\frac{-b}{3a} \right) + c \right) z + \left(a \left(\frac{-b}{3a} \right)^3 + b \left(\frac{-b}{3a} \right)^2 + c \left(\frac{-b}{3a} \right) + d \right) &= 0, \\ az^3 + \left(3a \left(\frac{b^2}{9a^2} \right) + 2b \left(\frac{-b}{3a} \right) + c \right) z + \left(a \left(\frac{-b^3}{27a^3} \right) + b \left(\frac{b^2}{9a^2} \right) + c \left(\frac{-b}{3a} \right) + d \right) &= 0, \\ az^3 + \left(\frac{3ab^2}{9a^2} - \frac{2b^2}{3a} + c \right) z + \left(-\frac{ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right) &= 0, \\ az^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c \right) z + \left(-\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right) &= 0, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$az^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c \right) z + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right) = 0. \quad (2.5)$$

Agora multiplicando ambos os lados da equação (2.5) por $\frac{1}{a}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left(az^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c \right) z + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right) \right) &= \frac{1}{a} 0, \\ z^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \right) z + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Então ao denotarmos que $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$ e $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$, obtemos a equação $z^3 + pz + q = 0$.

Por fim, como segundo passo, faremos um artifício análogo ao do primeiro passo. Substituindo z por $u + v$ na equação $z^3 + pz + q = 0$, temos

$$z^3 + pz + q = (u + v)^3 + p(u + v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0,$$

que é reescrita na forma

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \quad (2.6)$$

Novamente, temos plena liberdade para atribuir valores a u ou a v . Convenientemente, para termos uma solução, adotaremos $3uv + p = 0$ na equação (2.6), ou,

$$uv = \frac{-p}{3}. \quad (2.7)$$

Assim, a equação (2.6) assume a forma

$$u^3 + v^3 = -q. \quad (2.8)$$

Tendo, enfim, um sistema de duas equações com as equações (2.7) e (2.8)

$$\begin{cases} uv = \frac{-p}{3} & (2.7) \\ u^3 + v^3 = -q. & (2.8) \end{cases}$$

Elevando-se a equação (2.7) ao cubo, teremos

$$\begin{cases} u^3 v^3 = \left(\frac{-p}{3}\right)^3 \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Podemos perceber que u^3 e v^3 são raízes de uma equação do segundo grau, cujo produto é $\left(\frac{-p}{3}\right)^3$ e a soma é $-q$. Mais precisamente, a equação do segundo grau em questão é

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

cuja solução, dada pela fórmula de Bhaskara, é

$$t = \frac{-q \pm \sqrt{(-q)^2 - 4\left(\frac{-p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 - 4\left(\frac{-p}{3}\right)^3}{4}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

ou seja,

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Denotando por $u^3 = t'$ e $v^3 = t''$ teremos $u = \sqrt[3]{t'}$ e $v = \sqrt[3]{t''}$. Temos ainda,

$$u = \sqrt[3]{t'} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

e

$$v = \sqrt[3]{t''} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

em suas formas expandidas.

Fazendo um retrospecto desde o passo 1, temos que $x = z + w = u + v + w$. Finalmente chegamos à conclusão que as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ podem ser extraídas pela fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a} \quad (2.9)$$

onde $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$ e $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$.

2.2 Um caso particular do Teorema Fundamental da Álgebra

Antes de iniciar com o estudo algébrico e qualitativo do discriminante $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ no cálculo de raízes de equações do terceiro grau, faremos uma síntese sobre o (TFA) “Teorema Fundamental da Álgebra” (que não necessitará de demonstração nesse trabalho)² que afirma que qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n > 0$ tem alguma raiz complexa. E, em consequência, possui exatamente n raízes, não necessariamente distintas (ÁVILA, 2002). O nome desse teorema é hoje em dia considerado inadequado por muitos matemáticos, por não ser fundamental para a Álgebra atual.

Ao considerarmos a equação $x^n = z$, (que equivale a $x = \sqrt[n]{z}$), sabemos que, de acordo com o TFA, tem n raízes. A melhor maneira de se encontrar todas essas raízes é transformarmos x e z em complexos na forma trigonométrica, ou seja, $x = R(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, e $z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, em que r é o módulo de z e α é o argumento de z . Então, se $x^n = z$, temos

$$\begin{aligned} [R(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)]^n &= r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha), \\ R^n (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)^n &= r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha), \\ R^n \underbrace{(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \cdots (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)}_{\text{multiplicados } n \text{ vezes}} &= r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha), \\ R^n [\underbrace{\cos(\beta + \beta + \cdots + \beta)}_{n \text{ parcelas } \beta} + i \operatorname{sen}(\underbrace{\beta + \beta + \cdots + \beta}_{n \text{ parcelas } \beta})] &= r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha), \end{aligned}$$

ou, de forma equivalentemente,

$$R^n [\cos(n\beta) + i \operatorname{sen}(n\beta)] = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha). \quad (2.10)$$

Agora é evidente que para os números complexos sob a forma trigonométrica serem iguais, tem de ocorrer que seus módulos sejam iguais e seus argumentos não necessariamente sejam iguais, mas que no círculo trigonométrico tenham a mesma posição, isto é, sejam congruentes. Tomemos como exemplo, para argumento de z o arco $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Como no círculo trigonométrico há infinitos arcos onde o valor de seu seno e cosseno serão o mesmo, por exemplo, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \cdots = \operatorname{sen}\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \cdots = \cos\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$ para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, então qualquer que seja o valor de k , natural, temos diferentes representações para o número complexo $z = r\left(\cos\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)\right)$. Observamos que, existe um intervalo em que a representação é única. O menor comprimento onde tal propriedade é observada, chamamos de *período*. Mais precisamente, o valor corresponde a múltiplos de 2π , ou seja, $2k\pi$, para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

² Demonstração bastante intuitiva que pode ser encontrada em alguns livros, como “O Romance das Equações Algébricas” de Gilberto Garbi (GARBI, 2006).

Então não é necessário que os argumentos dos complexos acima sejam iguais, mas correspondentes. Então, se $x = \sqrt[n]{z}$ e usando as condições

$$R^n = r \Rightarrow R = \sqrt[n]{r}$$

e

$$n\beta = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n},$$

obtidas de (2.10), podemos generalizar que

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad (2.11)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Note que definimos os valores de k como sendo $0 \leq k \leq n-1$, pois ao aplicarmos a fórmula acima em um dado complexo, notaremos que para os valores de $k \geq n$, as raízes começarão a se repetir.

2.3 Estudo algébrico sobre o discriminante

No Capítulo 1 vimos que a fórmula (2.9), para resolução de equações cúbicas, foi colocada a desafios quando as três raízes são reais, visto a necessidade de se recorrer à raiz quadrada de números negativos. Um desses desafios foi vencido por Bombelli (LIMA, 2004), mas seu critério de resolução não resolvia satisfatoriamente todas as equações. Por isso, muitos matemáticos procuraram determinar um método geral que solucionasse todas as equações. Será que tal método existiria? O próprio Bombelli e o matemático François Viète se destacaram com uma profunda contribuição para tais dúvidas. Viète foi um mestre na arte de substituição de incógnitas como artifício matemático, conseguindo a façanha de obter uma fórmula para as equações de três raízes reais distintas. Seu método foi de utilizar a substituição de z na equação $z^3 - 3pz + 2q = 0$ por $r \cos \theta$, utilizando várias identidades trigonométricas e outros artifícios (GARBI, 2006).

Nessa seção, porém, apresento uma outra maneira de se chegar à uma fórmula para resolução de equações cúbicas com 3 raízes reais distintas que tem o mesmo propósito da obtida por Viète mas sem “adivinhações”. Não querendo diminuir o trabalho de Viète, visto que, quando ele obteve essa fórmula, as dificuldades eram bem maiores para se estudar qualquer assunto e os números complexos não estavam tão evoluídos quanto nos dias de hoje.

Para uma melhor análise denotaremos o discriminante da fórmula (2.9) por

$$\Delta = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3,$$

pois é este discriminante que vai nos dizer se a raiz quadrada da fórmula necessitará do uso dos complexos. Inicialmente Viète e Bombelli perceberam que, se o discriminante é negativo, ou seja, $\Delta < 0$, então todas as raízes são reais e distintas, e que seria necessário do uso de números complexos para se chegar a tais raízes. Além disso, sabe-se que, se $\Delta > 0$, a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas; se $\Delta = 0$, têm-se três raízes reais, sendo uma repetida.

Após a aplicação da fórmula (2.9) em uma equação cujas raízes são reais e distintas, teremos uma equação do tipo

$$x = \sqrt[3]{m + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{\Delta}} - \frac{b}{3a}, \quad (2.12)$$

onde $m = -\frac{q}{2}$ e $\Delta < 0$. Evidenciando a necessidade de extrair as raízes cúbicas dos complexos $z_1 = m + i\sqrt{\Delta}$ e $z_2 = m - i\sqrt{\Delta}$.

Primeiramente vamos transformar os números complexos z_1 e z_2 , anteriormente mencionados, para a forma trigonométrica. Para tal, observamos que os módulos dos dois complexos conjugados são iguais, por isso

$$r = \sqrt{m^2 + (\sqrt{-\Delta})^2} = \sqrt{m^2 - \Delta} = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Logo, se $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, então $p < 0$ e $\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ é um número real.

Temos ainda que, representados no plano de Argand-Gauss, os números complexos possuem características que podem ser observadas na Figura 5. Por exemplo, vemos que o argumento do número complexo é o ângulo entre o eixo das abscissas e o segmento de reta que liga a origem do plano ao ponto $(m, \sqrt{-\Delta})$; E, considerando a representação polar

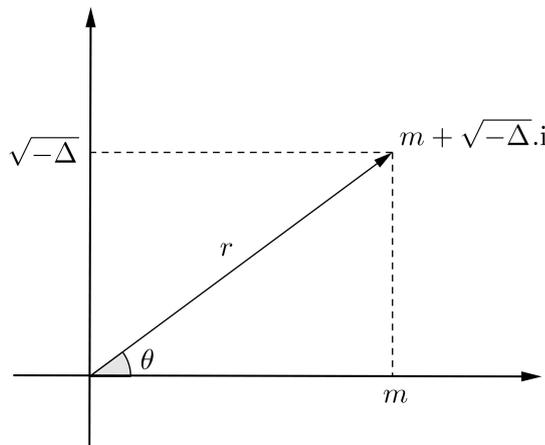


Figura 5 – Representação na forma polar de um número complexo.

dos números complexos, podemos obter as seguintes razões trigonométricas para z_1

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{m}{r} \\ \text{sen} \theta &= -\frac{\sqrt{-\Delta}}{r} \end{aligned}$$

e para z_2

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{m}{r} \\ \text{sen}\theta &= \frac{\sqrt{-\Delta}}{r},\end{aligned}$$

tais que, substituídas na equação (2.12) nos fornece a relação

$$x = \sqrt[3]{r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)} + \sqrt[3]{r(\cos\theta - i\text{sen}\theta)} - \frac{b}{3a}. \quad (2.13)$$

Consideremos agora apenas uma das 3 raízes da equação cúbica, como visto na seção 2.2. Por exemplo, consideramos a raiz onde $k = 0$ e obtemos

$$x = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \text{sen} \frac{\theta}{3} \right) + \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \text{sen} \frac{\theta}{3} \right) - \frac{b}{3a}. \quad (2.14)$$

Colocando $\sqrt[3]{r}$ em evidência na equação (2.14) chegamos a

$$x = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) - \frac{b}{3a}. \quad (2.15)$$

Lembrando que, $\cos\theta = \frac{m}{r}$ e, conseqüentemente,

$$\theta = \arccos \left(\frac{m}{r} \right), \quad (2.16)$$

obtemos, multiplicando ambos os membros da equação (2.16) por $\frac{1}{3}$, a equação

$$\frac{\theta}{3} = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{m}{r} \right).$$

Substituindo o valor de $\frac{\theta}{3}$ na equação (2.15), obtemos

$$x = 2\sqrt[3]{r} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{m}{r} \right) \right) - \frac{b}{3a}. \quad (2.17)$$

Mas, também sabemos que, $r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ e $m = \frac{-q}{2}$ e então reescrevemos a equação (2.17) na forma

$$x = 2\sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{\frac{-q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right) \right) - \frac{b}{3a}.$$

Como r é o módulo do número complexo não real, temos então que $r > 0$ e, portanto, podemos definir

$$r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3},$$

pois p é o único termo que pode transformar a raiz quadrada em um número complexo. Logo, fazendo algumas simplificações nos radicais, finalmente chegamos a

$$x = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{\frac{-q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}} \right) \right) - \frac{b}{3a}.$$

Assim, notamos que, de fato, o cálculo das raízes fundamenta-se na obtenção do valor de Δ . Portanto, de posse do mesmo estrutura-se a solução. Resumindo o que obtemos observamos que

- Se $\Delta = 0$: $x' = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} - \frac{b}{3a}$;
- Se $\Delta > 0$: $x' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{b}{3a}$;
- Se $\Delta < 0$: $x' = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)} \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}\right)\right) - \frac{b}{3a}$,

que é a expressão de uma das raízes da equação para cada um dos diferentes sinais do discriminante.

Existem várias formas de se calcular as demais raízes, umas delas é simplesmente dividirmos a equação original por $x - x'$ e recairemos numa equação de grau 2, a qual pode ser resolvido usando a fórmula indevidamente atribuída a Bháskara (Este método de resolução é conhecido há pelo menos 1700 anos antes de Cristo, porém, era aplicado somente para obtenção de raízes positivas)(BOYER, 2012). Podemos ainda utilizar duas das três seguintes relações envolvendo as raízes x' (que já conhecemos pela fórmula), x'' e x''' da cúbica. São elas

- $x' + x'' + x''' = -\frac{b}{a}$;
- $x'x'' + x'x''' + x''x''' = \frac{c}{a}$;
- $x'x''x''' = -\frac{d}{a}$.

Vamos agora fazer uma sinopse dos métodos acima mostrados. Será imprescindível o uso de calculadora científica, principalmente quando o discriminante for negativo.

Passo 1: obtenção de p , q e Δ :

- $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$;
- $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$;
- $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$;

Passo 2: análise de delta e cálculo de x' :

- Se $\Delta = 0$: $x' = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} - \frac{b}{3a}$;
- Se $\Delta > 0$: $x' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{b}{3a}$

- Se $\Delta < 0$: $x' = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)} \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\frac{-q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}\right)\right) - \frac{b}{3a}$.

Passo 3: cálculo x'' e x''' :

- Fica a critério de cada um, porém o método da divisão por $x - x'$ e posteriormente a utilização da fórmula para resolução de equações do segundo grau é mais simples.

2.4 Estudo qualitativo sobre o discriminante

Começaremos fazendo uma análise gráfica da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a \neq 0$. Sabemos que cada ponto de intersecção com o eixo das abcissas corresponde a uma raiz real da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Inicialmente, colocando x^3 em evidência na função acima e considerando $a > 0$ (que não perderá a generalidade, visto que $a < 0$ tem raciocínio análogo), temos:

$$f(x) = x^3 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right).$$

Podemos observar que, para valores positivos muito grandes de x , $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x^2}$ e $\frac{d}{x^3}$ são desprezíveis. Logo, prevalece o sinal positivo de a . Então o sinal de $f(x)$, quando o valor de x é muito grande, é o mesmo sinal de x^3 , ou seja, mesmo sinal de x . Agora, se x é um valor muito grande em módulo, mas negativo, então $f(x)$ também será negativo (Pensamento análogo ao exposto anteriormente para $a > 0$).

Podemos perceber que $f(x)$, por passar continuamente de negativo para positivo (ou positivo para negativo caso $a < 0$), deve se anular em um ponto qualquer, isto é, existe algum valor para x tal que $f(x) = 0$. Tais argumentos nos leva a concluir que toda equação cúbica tem pelo menos uma raiz real e, conseqüentemente, o gráfico de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passa pelo eixo das abcissas pelo menos uma vez.

Temos ainda que, se um número complexo não real é uma raiz de uma equação, seu conjugado também é raiz da mesma equação (IEZZI, 2013). Então não existe a possibilidade de ter 1 ou 3 raízes complexas não reais. Então temos as seguintes possibilidades de raízes:

- 3 raízes reais distintas;
- 3 raízes reais iguais;
- 3 raízes reais, sendo que 2 delas são iguais; e

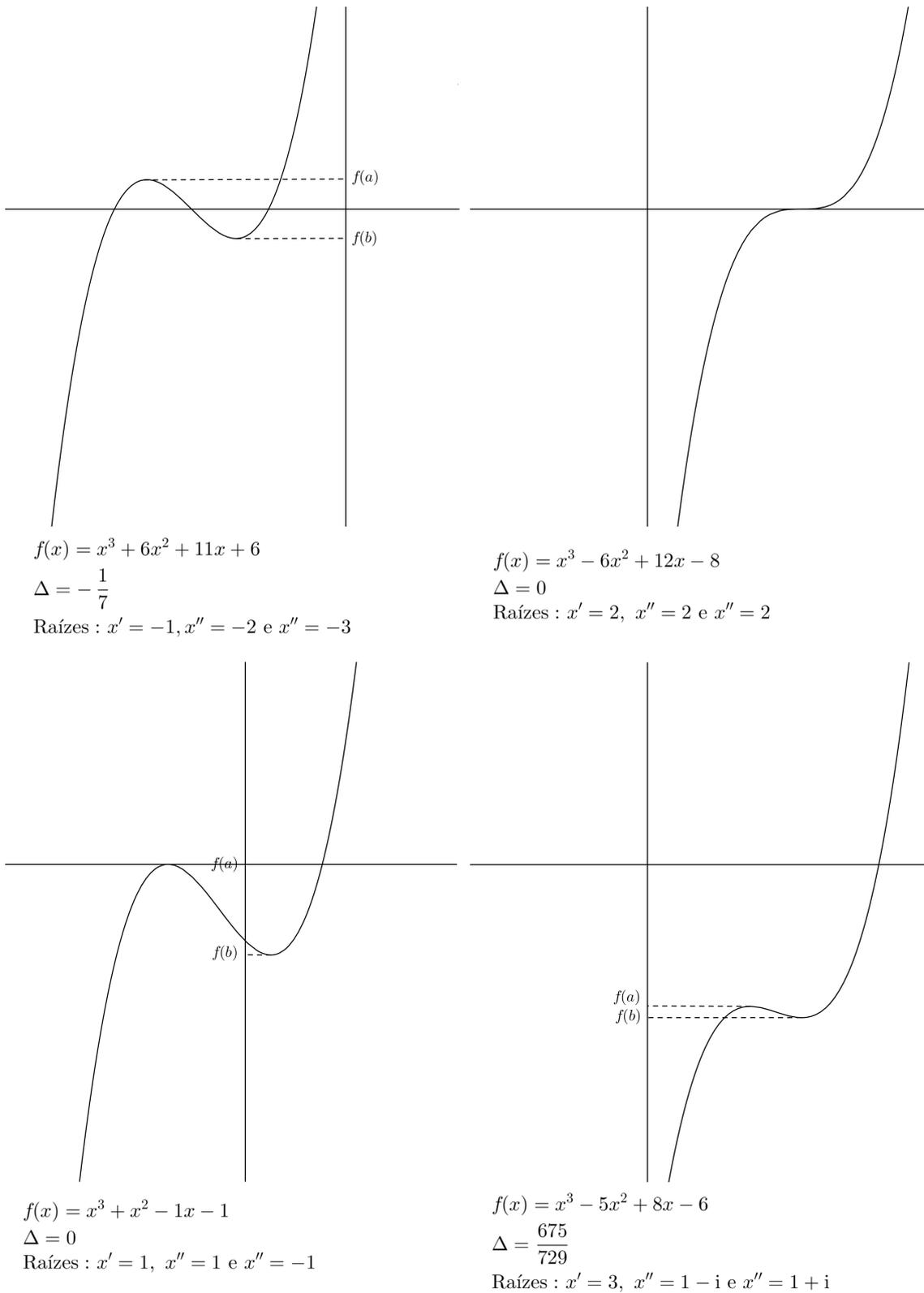


Figura 6 – Diferentes possibilidades para o gráfico das funções polinomiais conforme os tipos de raízes da equação polinomial correspondente. Na parte superior, à esquerda, situação em que temos 3 raízes reais distintas e, à direita, 3 raízes reais iguais. Na parte inferior, à esquerda, temos 3 raízes reais, sendo que 2 delas são iguais. À direita, na parte inferior, temos duas raízes complexas e uma real.

- 1 raiz real e 2 raízes complexas.

Na Figura 6 ilustramos as diferentes possibilidades para o gráfico das funções polinomiais conforme os tipos de raízes da equação polinomial correspondente. Na parte superior, à esquerda, situação em que temos 3 raízes reais distintas e, à direita, 3 raízes reais iguais. Na parte inferior, à esquerda, temos 3 raízes reais, sendo que 2 delas são iguais. À direita, na parte inferior, temos duas raízes complexas e uma real. Como indicativo do que acontece de modo geral, pela Figura 6, apontamos que,

- se $\Delta < 0$:
 - 3 raízes reais distintas
- se $\Delta = 0$:
 - 1 raiz real distinta e 2 raízes reais iguais; ou
 - 3 raízes reais iguais.
- se $\Delta > 0$:
 - 1 raiz real e 2 complexas.

Ainda analisando os gráficos e denotando o valor de máximo local e o valor de mínimo local das funções por, respectivamente, $f(a)$ e $f(b)$ podemos perceber que se:

- $f(a)f(b) < 0$, 3 raízes reais distintas;
- $f(a)f(b) = 0$, 1 raiz distinta e 2 raízes reais iguais;
- $f(a)f(b) > 0$, 1 raiz real e 2 raízes complexas;³
- $f(a) = f(b)$, 3 raízes reais iguais.

Não provamos ou demonstramos as afirmações sobre os tipos de raízes por acreditar que se faz necessário um estudo mais aprofundado e foge aos objetivos desse trabalho. Mas caso o leitor queira uma leitura mais aprofundada desse tema, recomendamos a leitura das páginas 11 à 25 do livro “Meu professor de matemática e outras histórias” do autor Elon Lages Lima (LIMA, 2012).

³ Raíz real consideremos o complexo da forma $a + 0.i$ e raíz complexa consideremos o complexo na forma $a + b.i$ com $b \neq 0$.

3 Aplicações

Os números complexos tiveram dificuldades em adquirir sua “cidadania plena”, porém hoje são amplamente utilizados em diversas áreas, da própria matemática e da física. Nos ateremos a explicar algumas aplicações interessantes na matemática devido ao fato das aplicações na física necessitarem um conhecimento teórico prévio.

3.1 Números Complexos e Somatórios

Uma das propriedades dos números complexos que podemos citar é o comportamento cíclico das potências de i . Os ciclos se repetem como descrito a seguir

$$\begin{aligned}i^0 &= i^4 = i^8 = \dots = 1, \\i^1 &= i^5 = i^9 = \dots = i, \\i^2 &= i^6 = i^{10} = \dots = -1, \\i^3 &= i^7 = i^{11} = \dots = -i.\end{aligned}$$

Usaremos esse fato em nosso benefício.

Começemos com a expansão binomial de Newton de $(1+x)^n$, ou seja,

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n, \quad (3.1)$$

e desta equação obteremos alguns resultados bastante úteis.

Substituindo $x = 1$ na equação (3.1) temos

$$(1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n, \quad (3.2)$$

conhecido Teorema das Linhas de Pascal.

Agora, fazendo $x = -1$ na mesma equação (3.1) temos

$$(1-1)^n = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (3.3)$$

Somando as equações (3.2) e (3.3) e efetuando algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned}(1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) + (1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n) &= 2^n, \\1 + 1 + C_n^1 - C_n^1 + C_n^2 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + C_n^n + (-1)^n C_n^n &= 2^n, \\2 + 2C_n^2 + 2C_n^4 + 2C_n^6 + \dots + (1 + (-1)^n)C_n^n &= 2^n \text{ e} \\2(1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots + C_n^k) &= 2^n,\end{aligned}$$

em que $k = n$ se n for par e $k = n - 1$ se n é ímpar. Dividindo ambos os lados da última equação por 2, obtemos a equação (3.4)

$$2^{n-1} = 1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots + C_n^k, \quad (3.4)$$

em que $k = n$ se n for par e $k = n - 1$ se n é ímpar.

Agora, subtraindo a equação (3.3) da equação (3.2) e, efetuando novamente algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n - 1 + C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \dots + (-1)^n C_n^n &= 2^n, \\ 2C_n^1 + 2C_n^3 + 2C_n^5 + \dots + 2C_n^\ell &= 2^n, \\ 2(C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^\ell) &= 2^n, \end{aligned}$$

em que $\ell = n$ se n for ímpar e $\ell = n - 1$ se n é par.

Novamente, dividindo a última equação por 2, encontramos a equação (3.5)

$$2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^\ell, \quad (3.5)$$

em que $\ell = n$ se n for ímpar e $\ell = n - 1$ se n é par.

Comparando as equações (3.4) e (3.5) obtemos a relação

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots + C_n^k = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^\ell = 2^{n-1},$$

em que $k = n$ e $\ell = n - 1$ se n for par e, se n é ímpar $k = n - 1$ e $\ell = n$. Assim, obtemos, com alguma facilidade, utilizando conceitos básicos, a soma binomial de combinações de n tomadas em números pares, como também em números ímpares.

Uma pergunta é muito pertinente nesse momento: Onde se encaixam os números complexos? Visto que, na obtenção das equações (3.4) e (3.5), não foi utilizado em momento algum os números complexos. Porém, será que conseguimos calcular a seguinte soma?

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots + C_n^\eta,$$

em que η é o maior inteiro positivo menor ou igual a n .

Fazendo uma reflexão com os resultados já obtidos, seria interessante utilizarmos um valor para x , na equação (3.1), que altere sua potência em ciclos diferentes de 2. Lembremos que no início desse capítulo esplanamos sobre as potências do complexo i que muda em ciclos de 4. Vejamos como isso pode nos auxiliar. Substituindo $x = i$ na expansão binomial (3.1),

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= 1 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + C_n^4 i^4 + C_n^5 i^5 + C_n^6 i^6 + C_n^7 i^7 + C_n^8 i^8 + \dots + C_n^n i^n, \\ &= 1 + C_n^1 i + C_n^2 (-1) + C_n^3 (-i) + C_n^4 + C_n^5 i + C_n^6 (-1) + C_n^7 (-i) + C_n^8 + \dots + C_n^n i^n, \\ &= 1 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + C_n^5 i - C_n^6 - C_n^7 i + C_n^8 + \dots + C_n^n i^n, \\ &= \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \dots + (-1)^\nu C_n^h\right) + i \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots + (-1)^\rho C_n^j\right), \end{aligned}$$

em que h é o maior número par menor ou igual a n , $\iota = 0$ se h é múltiplo de 4 e $\iota = 1$, caso h seja par mas não múltiplo de 4. Se $j + 1$ for múltiplo de 4, então $\rho = 1$, caso contrário, com j ímpar, $\rho = 0$.

Da expressão anterior, destacamos dois resultados úteis, a parte real

$$Re(1+i)^n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \dots + (-1)^\iota C_n^h \quad (3.6)$$

e a parte imaginária

$$Im(1+i)^n = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots + (-1)^\rho C_n^j, \quad (3.7)$$

em que h é o maior número par menor ou igual a n , $\iota = 0$ se h é múltiplo de 4 e $\iota = 1$, caso h seja par mas não múltiplo de 4. Se $j + 1$ for múltiplo de 4, então $\rho = 1$, caso contrário, com j ímpar, $\rho = 0$.

Uma vez que $(1+i)^n = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^n$ que, pela fórmula de Moivre, é equivalente a $\sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, temos

$$Re(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad (3.8)$$

e

$$Im(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right). \quad (3.9)$$

E, associar ainda, por meio de somas binomiais, a equação (3.6) com a equação (3.8)

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \dots + (-1)^\iota C_n^h = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad (3.10)$$

e a equação (3.7) com (3.9)

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots + (-1)^\rho C_n^j = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right), \quad (3.11)$$

lembrando que h , ι , j e ρ são os mesmos definidos nas equações (3.6) e (3.7).

Somando as equação (3.10) com a (3.4) e fazendo algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) &= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \dots + (-1)^\iota C_n^k + 1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots + C_n^k, \\ &= 2(1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots + C_n^h), \end{aligned}$$

lembrando que k é o maior inteiro positivo que é par e menor que n e h é o maior múltiplo de 4 que é menor ou igual a n . Se k é múltiplo de 4 então $\iota = 0$, se não, $\iota = 1$.

Finalmente, obtemos

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots + C_n^h = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

em que h é o maior múltiplo de 4 que é menor ou igual a n .

Utilizando um raciocínio análogo, podemos encontrar a expressão reduzida para a soma

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + C_n^{17} + \cdots + C_n^p,$$

com p inteiro positivo tal que $p = 4m + 1 \leq n$, para m também inteiro positivo.

Agora paira outra pergunta no ar: “E se fosse um somatório binomial que tivesse um ciclo de 3?”.

Para responder essa pergunta, analisamos problemas resolvidos para ciclo de 2 (1 e -1 que são equivalentes a i^0 e i^2) e com ciclo de 4 (1, i , -1 e $-i$ que são equivalentes a i^0, i^1, i^2 e i^3).

Portanto, se quisermos encontrar uma equação reduzida de um somatório binomial com ciclo 3, como $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + C_n^{12} + \cdots + C_n^t$ (t maior múltiplo de 3 $\leq n$) por exemplo, temos que utilizar valores que dividam o ciclo trigonométrico em quantidade igual ao ciclo desejado. Ou seja, para um somatório binomial de ciclo 3 temos de usar os valores de forma que suas potências, com expoente múltiplo de 3, sejam iguais, isto é, $x^0 = x^3 = x^6 = x^9 = x^{12} = \cdots$. Assim, se $1 = x^3 \Rightarrow x = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}$. Desse modo, se queremos encontrar a equação reduzida para n ciclos fazemos $x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$, assim encontramos um valor do argumento de um complexo na forma trigonométrica que satisfaça a quantidade de ciclos que se desejar.

3.2 Figuras regulares planas através de raízes de complexos

Algo também muito interessante é a representação no plano de Argand-Gauss das raízes n -ésimas de um número complexo, pois os vetores formam figuras regulares planas, em que a quantidade de raízes é igual ao número vértices.

Para checarmos o que foi afirmado, lembremos de alguns resultados.

O Teorema Fundamental da Álgebra, Seção 2.2, afirma que qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos de uma variável de grau $n > 0$ tem alguma raiz complexa e, em consequência, possui exatamente n raízes não necessariamente distintas. Outro fato é que, a equação $x^n = a$, como visto na Seção 2.2, tem n raízes distintas com mesmo módulo. Também podemos perceber que o argumento $\frac{\alpha + 2k\pi}{n}$ rad na fórmula (2.11) (também estudada na seção 2.2), para $k = 0, 1, \dots, n-1$, dividem o ciclo trigonométrico em n partes iguais, gerando assim uma figura plana regular de n vértices inscrita num círculo de raio igual ao módulo das raízes em questão, onde os vértices são as próprias raízes.

Vejamos, como exemplo, a representação no plano de Argand-Gauss das raízes de $\sqrt[3]{8}$. É de uso frequente dizer que $\sqrt[3]{8} = 2$, mas 2 não é a única raiz dessa raiz cúbica.

Como vimos, é evidente que calcular $\sqrt[3]{8}$ equivale a resolver a equação $x^3 = 8$. Então, para encontrar todas as raízes da equação, reescrevemos o número complexo $8 = 8 + 0i = a + bi$ na forma trigonométrica. Para tal, temos que seu módulo é $r = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$ e o argumento α é tal que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{r} = \frac{0}{8} = 0$ e $\operatorname{cos} \alpha = \frac{a}{r} = \frac{8}{8} = 1$. Assim, temos que $\alpha = 0$. Logo, podemos representar o complexo 8 como sendo $8(\operatorname{cos}(0) + i \operatorname{sen}(0))$ em sua forma trigonométrica.

Utilizando a fórmula de De Moivre (2.11) temos que

$$\sqrt[3]{8} = 2 \left(\operatorname{cos} \left(\frac{0 + 2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{0 + 2k\pi}{3} \right) \right). \quad (3.12)$$

Substituindo os valores de $k = 0, 1$, e 2 na equação (3.12), respectivamente, temos as raízes

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8} &= 2(\operatorname{cos} 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2(1 + 0i) = 2, \\ \sqrt[3]{8} &= 2 \left(\operatorname{cos} \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + \sqrt{3}i, \\ \sqrt[3]{8} &= 2 \left(\operatorname{cos} \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Então para as raízes 2 , $-1 + \sqrt{3}i$ e $-1 - \sqrt{3}i$ tem-se um triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio igual a 2, conforme a Figura 7.

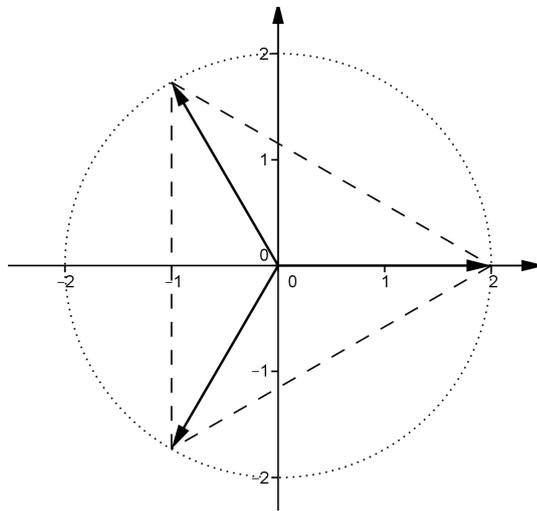


Figura 7 – Triângulo formado pelas 3 raízes de $\sqrt[3]{8}$.

Agora façamos um outro exemplo, calculemos $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$. A expressão $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ que é equivalente a $x^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$. O número complexo $-8 + 8\sqrt{3}i$ tem módulo $r = 16$ e argumento $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Logo suas raízes são

$$k = 0 \Rightarrow \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt{3} + i,$$

$$k = 1 \Rightarrow \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$k = 2 \Rightarrow \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = -\sqrt{3} - i,$$

$$k = 3 \Rightarrow \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = 1 - \sqrt{3}i.$$

E na representação no plano de Argand-Gauss tem-se um quadrado inscrito em um círculo de raio igual a 2, conforme a Figura 8.

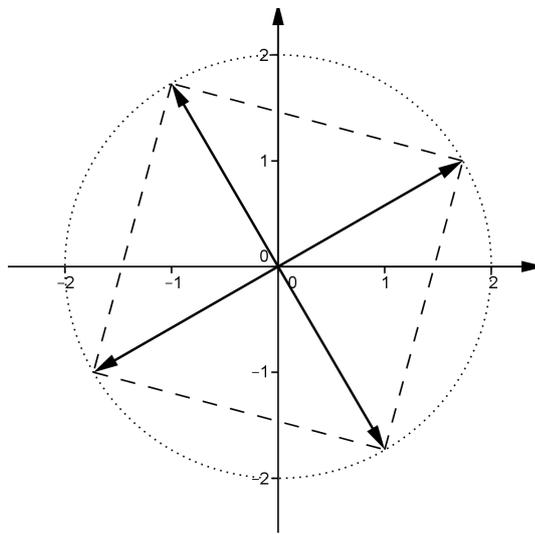


Figura 8 – Quadrado formado pelas 4 raízes de $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$.

Essa representação pode contribuir com a formação de figuras planas na geometria analítica, podendo se achar as coordenadas de qualquer figura regular plana e de qualquer tamanho, visto que todas as figuras representadas estarão inscritas em um círculo de raio igual a $\sqrt[n]{r}$, isto é, o raio do círculo tem raio igual a raiz n -ésima do módulo do complexo dado.

3.3 Rotações de vetores

Nessa seção faremos um estudo sobre aplicações referentes aos números complexos na rotação de vetores em duas dimensões, um dos tópicos estudados em Geometria Analítica. Serão propostos e solucionados problemas onde se poderá chegar ao resultado através da utilização dos números complexos, o que não quer dizer que os números complexos são a única maneira de se chegar ao resultado, podendo haver outras formas de alcançá-lo através de diferentes ferramentas. Utilizaremos as notações $a + bi$ e (a, b) sem distinção para representar os números complexos e/ou coordenadas de um ponto específico.

A multiplicação entre números complexos gera uma rotação seguida da multiplicação por um escalar. Para exemplificar, tomemos $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = \sqrt{3} + i$. A multiplicação desses dois números é $z_1 z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + 3i - \sqrt{3} = 4i$, como podemos analisar na Figura 9.

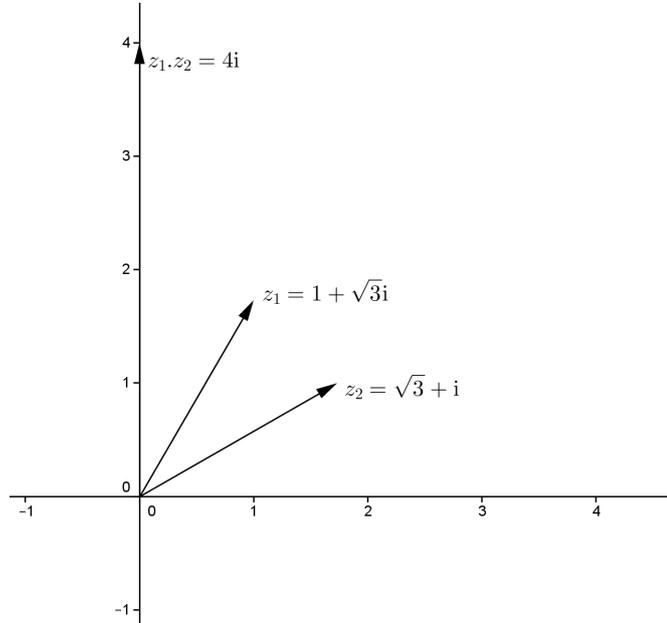


Figura 9 – Produto Algébrico entre z_1 e z_2 no Plano de Argand-Gauss.

Para uma melhor interpretação do leitor, faremos a mesma multiplicação na forma trigonométrica. Pois, visualizaremos o efeito da rotação e multiplicação por escalar. Primeiramente, observamos que os módulos de z_1 e z_2 são iguais e dados por

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Em seguida, para obter o argumento de cada um dos complexos, observamos que

$$\operatorname{sen}\theta_{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\theta_{z_1} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\theta_{z_2} = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta_{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

logo $\theta_{z_1} = \frac{\pi}{3}$ e $\theta_{z_2} = \frac{\pi}{6}$.

Fazendo a multiplicação na forma trigonométrica de z_1 e z_2 através da fórmula $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_{z_1} + \theta_{z_2}) + i \operatorname{sen}(\theta_{z_1} + \theta_{z_2}))$, obtemos, substituindo os valores correspondentes, $z_1 z_2 = 2^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right) = 4 \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \right)$. Portanto, $z_1 z_2$ significa z_1 multiplicado pelo módulo de z_2 seguido de uma rotação pelo argumento de z_2 , rotação obtida pela soma dos argumentos de z_1 e z_2 . Observe Figura 10.

Como vimos, no início desta seção, a multiplicação entre números complexos z_1 e z_2 gera uma rotação de z_1 em um ângulo, correspondente ao argumento de z_2 , θ_{z_2} seguido pela multiplicação do módulo de z_1 por um escalar, que é o módulo de z_2 . Lembrando

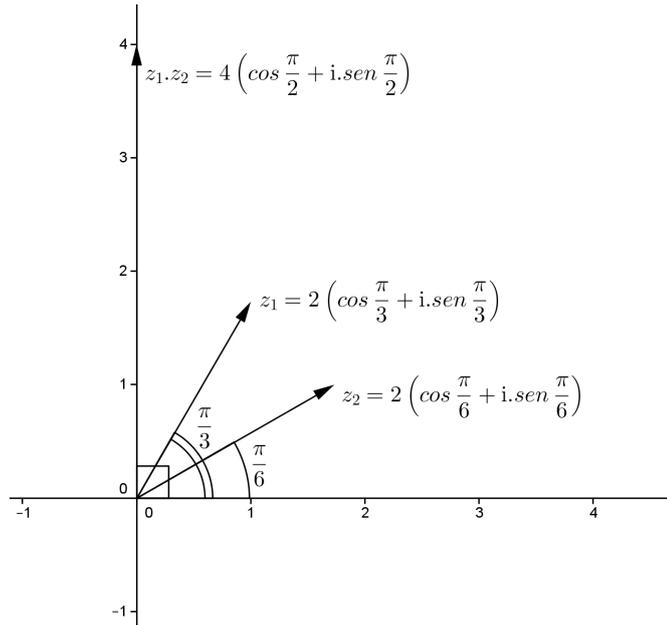


Figura 10 – Produto Trigonométrico entre z_1 e z_2 no Plano de Argand-Gauss

que queremos apenas rotacionar um complexo z_1 (que possui um ângulo θ_{z_1}) de um certo ângulo θ_{z_2} com relação à origem, consideramos os complexos

$$z_1 = a_1 + b_1i = |z_1|(\cos\theta_{z_1} + i\text{sen}\theta_{z_1}),$$

$$z_2 = a_2 + b_2i = |z_2|(\cos\theta_{z_2} + i\text{sen}\theta_{z_2}),$$

em que

$$a_1 = |z_1|\cos\theta_{z_1}, \tag{3.13}$$

$$b_1 = |z_1|\text{sen}\theta_{z_1}, \tag{3.14}$$

$$a_2 = |z_2|\cos\theta_{z_2},$$

$$b_2 = |z_2|\text{sen}\theta_{z_2}.$$

Para que haja a rotação por um ângulo θ_{z_2} e o módulo de z_1 se mantenha inalterado, vamos considerar $|z_2| = 1$, conforme Figura 11. Logo, o produto

$$z_3 = z_1z_2 = |z_1|(\cos(\theta_{z_1} + \theta_{z_2}) + i\text{sen}(\theta_{z_1} + \theta_{z_2})),$$

e com o uso das relações (3.13) e (3.14), obtemos

$$a_3 = |z_1|\cos(\theta_{z_1} + \theta_{z_2}) = |z_1|\cos\theta_{z_1}\cos\theta_{z_2} - |z_1|\text{sen}\theta_{z_1}\text{sen}\theta_{z_2} = a_1\cos\theta_{z_2} - b_1\text{sen}\theta_{z_2},$$

$$b_3 = |z_1|\text{sen}(\theta_{z_1} + \theta_{z_2}) = |z_1|\text{sen}\theta_{z_1}\cos\theta_{z_2} + |z_1|\cos\theta_{z_1}\text{sen}\theta_{z_2} = b_1\cos\theta_{z_2} + a_1\text{sen}\theta_{z_2}.$$

Podemos, portanto, definir uma fórmula para a rotação de um número complexo z_1 por um ângulo θ_{z_2} , em termos mais precisos, uma transformação linear, por

$$T(z_1) = T(a_1 + b_1i) = a_1\cos\theta_{z_2} - b_1\text{sen}\theta_{z_2} + i(b_1\cos\theta_{z_2} + a_1\text{sen}\theta_{z_2}). \tag{3.15}$$

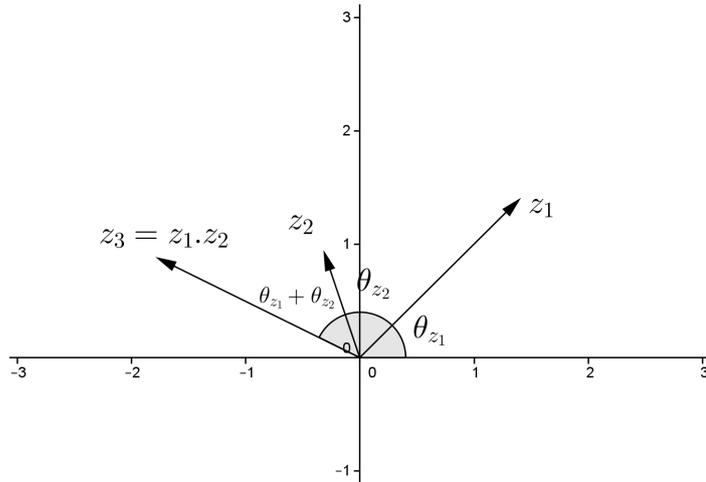


Figura 11 – Rotação de vetores, com $|z_1| = |z_3| = 2$ e $|z_2| = 1$.

É comum escrevermos uma transformação linear na forma matricial, assim, precisamos de uma notação que associe os números complexos com as matrizes.

Marcio G. Soares (SOARES, 2009), por exemplo, de forma diferenciada, propõe a notação dos números complexos em forma de matriz quadrada de ordem 2. Procura-se encontrar uma solução para a equação matricial

$$X \cdot X = I,$$

em que X é uma matriz quadrada de ordem 2 com coeficientes reais, I é a matriz identidade também de ordem 2 e “ \cdot ” é o produto de matrizes. A solução é dada por

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que, geometricamente, corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad no plano \mathbb{R}^2 .

Com a notação matricial tem-se a relação biunívoca $z = a + bi \leftrightarrow Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Então, a soma e o produto são definidos, respectivamente, por

1. $Z_1 + Z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$ e
2. $Z_1 \cdot Z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix},$

e satisfazem as seguintes propriedades;

3. comutatividade para adição e multiplicação, $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$ e $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$,
4. associatividade para adição e multiplicação, $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$ e $(Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 = Z_1 (Z_2 \cdot Z_3)$,

5. existe o elemento neutro em relação à adição $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
6. existe o elemento inverso em relação à adição $\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$,
7. existe o elemento neutro em relação à multiplicação $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
8. existe o elemento inverso em relação à multiplicação $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ para a, b não ambos nulos, e
9. distributividade da multiplicação em relação à adição, $Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$.

Portanto essa notação matricial também representa o corpo \mathbb{C} . Temos ainda

10. o conjugado $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$,
11. o módulo $\sqrt{\text{Det} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}$, em que $\text{Det}A$ é o determinante da matriz A ,
12. a unidade imaginária $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, finalmente podemos escrever a transformação linear (3.15), em notação matricial

$$Z_3 = Z_1 \cdot Z_2 = \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta_{z_2} - b_1 \text{sen} \theta_{z_2} & -b_1 \cos \theta_{z_2} + a_1 \text{sen} \theta_{z_2} \\ b_1 \cos \theta_{z_2} + a_1 \text{sen} \theta_{z_2} & a_1 \cos \theta_{z_2} - b_1 \text{sen} \theta_{z_2} \end{pmatrix}$$

que é o produto entre as matrizes

$$Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

e

$$Z_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_{z_2} & -\text{sen} \theta_{z_2} \\ \text{sen} \theta_{z_2} & \cos \theta_{z_2} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

matriz complexa, conhecida como matriz de rotação de vetores no \mathbb{R}^2 dos estudos de transformação linear em geometria analítica e álgebra linear. Mas por comodidade vamos resolver os problemas propostos utilizando a notação mais difundida $z = (\cos \theta + i \text{sen} \theta)$, quando $|z| = 1$ para que haja rotação sem alterar o módulo.

3.3.1 Construção de um quadrado a partir de uma aresta

Começemos com um problema de criar um quadrado $ABCD$, com uma das arestas com vértices em $A(2,3)$ e $B(4,6)$. Queremos determinar as coordenadas dos vértices C e D .

Inicialmente, podemos notar que, fixados os vértices A e B podemos formar dois quadrados $ABCD$ e $ABC'D'$, conforme a Figura 12 e que o vetor \overrightarrow{AD} é a rotação do vetor \overrightarrow{AB} em 90° ($\frac{\pi}{2}$ rad).

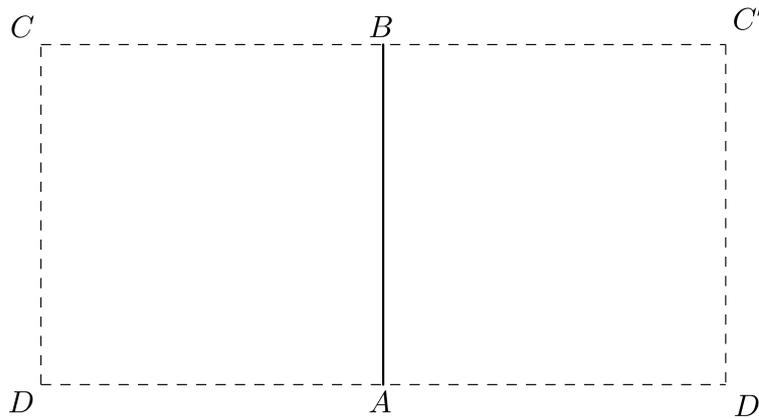


Figura 12 – Esboço dos quadrados $ABCD$ e $ABC'D'$.

Em posse desses dados, vamos determinar o vértice D . Lembrando que a equação que determina a rotação é dada por $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ obtemos, com as substituições $\overrightarrow{AD} = D - A$ e $\overrightarrow{AB} = B - A$

$$D - A = (B - A) \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = (B - A) (0 + 1i) = (B - A)i = Bi - Ai,$$

ou simplesmente,

$$D = Bi - Ai + A. \quad (3.17)$$

Como $A = (2,3) = 2 + 3i$ e $B = (4,6) = 4 + 6i$, fazemos a substituição em 3.17, para que a utilização de números complexos seja mais perceptível. Assim,

$$\begin{aligned} D &= (4 + 6i)i - (2 + 3i)i + 2 + 3i \\ &= (4i + 6i^2) - (2i + 3i^2) + 2 + 3i \\ &= (4i - 6) - (2i - 3) + 2 + 3i \\ &= -6 + 3 + 2 + 4i - 2i + 3i \\ &= -1 + 5i, \end{aligned}$$

logo a coordenada pretendida é $D(-1,5)$. Para determinar completamente o quadrado, precisamos encontrar as coordenadas de C , porém, não é necessário se fazer mais nenhuma rotação. Utilizaremos o fato de que os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{DC} são iguais. Então, se $\overrightarrow{DC} =$

$\overrightarrow{AB} \Rightarrow C - D = B - A \Rightarrow C = B - A + D$ e substituindo as coordenadas de A , B e D temos $C = (4 + 6i) - (2 + 3i) + (-1 + 5i) = 4 - 2 - 1 + 6i - 3i + 5i = 1 + 8i$. O cálculo das coordenadas dos pontos C' e D' são análogos e, portanto, serão omitidos. A Figura 13 representa os quadrados $ABCD$ e $ABC'D'$ no plano de Argand-Gauss.

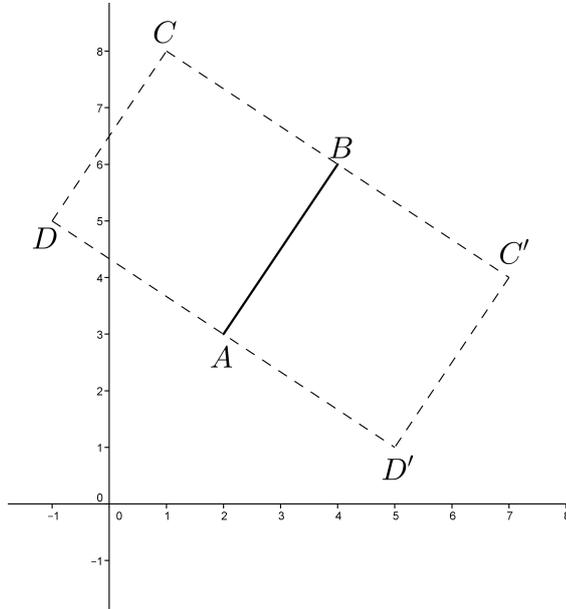


Figura 13 – Representação dos quadrados $ABCD$ e $ABC'D'$.

3.3.2 Construção de um quadrado a partir de uma diagonal

Analisaremos agora um problema onde é dado uma diagonal de um quadrado, desse modo vamos ter de utilizar, além do argumento, o módulo do vetor de rotação.

O problema consiste em determinar os vértices do quadrado $ABCD$ cuja diagonal \overline{AC} tem vértices em $A(-2, -1)$ e $C(4, 3)$, ou seja, devemos determinar as coordenadas dos pontos B e D . Observemos que com os vértices A e C podemos formar somente um quadrado, podendo somente alternar os valores dos vértices B e D , conforme a figura 14.

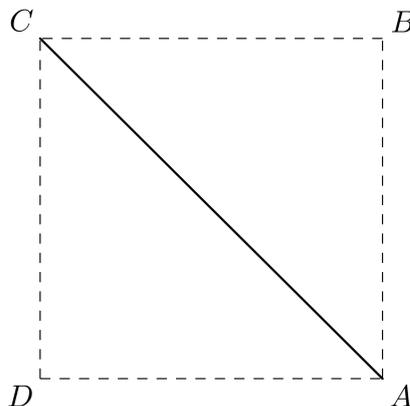


Figura 14 – Esboço do quadrado $ABCD$ e a diagonal \overline{AC}

Inicialmente, iremos rotacionar o vetor \overrightarrow{AC} em 45° ($\frac{\pi}{4}$ rad), mas somente isso não é suficiente, pois os módulos dos vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} são diferentes. É sabido, pelo critério da trigonometria que em triângulo retângulo isósceles o valor da hipotenusa é $\sqrt{2}$ vezes maior que seus catetos, então temos que dividir o módulo de \overrightarrow{AC} por $\sqrt{2}$. Logo, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$ e fazendo algumas manipulações algébricas obtemos

$$\begin{aligned} D - A &= \frac{1}{\sqrt{2}} (C - A) \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \\ D - A &= \frac{1}{\sqrt{2}} (C - A) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \\ D - A &= \left(\frac{C}{2} - \frac{A}{2} \right) + \left(\frac{C}{2} - \frac{A}{2} \right) i. \end{aligned}$$

Substituindo as coordenadas de A e C temos $D = -1 + 4i$.

Para encontrar a coordenada de B utilizaremos o fato de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e após alguns cálculos simples, omitidos devido sua simplicidade, teremos $B = 3 - 2i$. O quadrado formado com as coordenadas de A, B, C e D pode ser visto na Figura 15.

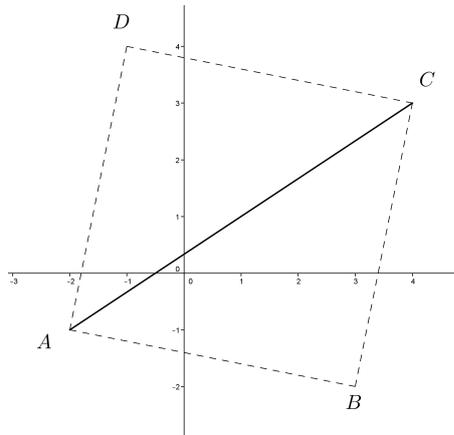


Figura 15 – Representação do quadrado $ABCD$ do segundo problema no plano de Argand-Gauss

Existem outras maneiras de resolver esse problema ainda usando a rotação no plano de Argand-Gauss. Poderíamos calcular o ponto médio M da diagonal \overline{AC} e rotacionar o vetor \overrightarrow{MC} em 90° ($\frac{\pi}{2}$ rad). Podemos ainda rotacionar o vetor \overrightarrow{AC} em 90° ($\frac{\pi}{2}$ rad) fazendo um vetor $\overrightarrow{AC'}$, logo um dos vértices do quadrado $ABCD$ será o ponto médio do segmento $\overline{CC'}$, ou seja, $D = \frac{C+C'}{2}$.

3.3.3 Determinando um pentágono, conhecidos um vértice e o circuncentro

Agora resolvamos um último problema que consiste em determinar, aproximadamente, os vértices B, C, D e E de um pentágono regular $ABCDE$ com circuncentro na origem do plano e tendo como vértice um dos vértices $A(2,0)$.

Nesse problema formaremos apenas um pentágono regular com vértice em A o circuncentro em O . Começaremos traçando os segmentos \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} , \overline{OD} e \overline{OE} , com um ângulo de 72° ($\frac{2\pi}{5}$ rad) entre dois segmentos consecutivos traçados, conforme a Figura 16.

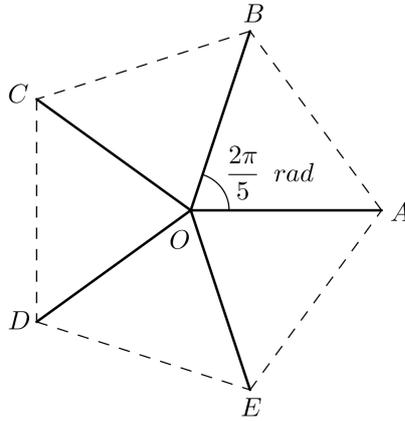


Figura 16 – Esboço do pentágono regular $ABCDE$ e o ângulo entre os segmentos \overline{OA} e \overline{OB} .

Como o vetor \overrightarrow{OB} é igual ao vetor \overrightarrow{OA} rotacionado de 72° ($\frac{2\pi}{5}$ rad), logo $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$. Utilizando uma aproximação de 3 casas decimais adotaremos $\cos \frac{2\pi}{5} = 0,309$ e $\sin \frac{2\pi}{5} = 0,951$, obtemos $B - O = (A - O)(0,309 + 0,951i)$. Como O corresponde ao número complexo nulo temos $B = A(0,309 + 0,951i) = 2(0,309 + 0,951i) = 0,618 + 1,830i$, a coordenada do vértice pretendido é $B \approx (0,618; 1,830)$.

Para o cálculo do vértice C utilizaremos o fato de \overrightarrow{OC} ser igual ao vetor \overrightarrow{OA} rotacionado de 144° ($\frac{4\pi}{5}$ rad). Assim, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right)$. Então obtemos $C - O = (A - O)(-0,809 + 0,588i)$. Logo $C = A(-0,809 + 0,588i) = 2(-0,809 + 0,588i) = -1,618 + 1,176i$ e a coordenada do vértice pretendido é $C \approx (-1,618; 1,176)$.

Procedendo de modo análogo obteremos os vértices $D \approx (-1,618; -1,176)$ e $E \approx (0,618; -1,830)$. Com as coordenadas de todos os vértices, o pentágono regular na plano de Argand-Gauss pode ser traçado, conforme a Figura 17.

Um outro método pelo qual poderíamos ter resolvido esse último problema seria encontrar as raízes de $\sqrt[5]{32}$ utilizando a fórmula de Moivre $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right)$ para $k = 0, 1, 2, 3$ e 4 , em que, se $k = 0$ a raiz é o complexo 2 (que corresponde ao vértice A e os outros valores de k correspondem respectivamente aos outros vértices).

Utilizando a rotação de vetores podemos encontrar figuras diferentes das mostradas nesse capítulo. Poderemos obter triângulos, hexágonos ou qualquer figura plana regular desde que se tenha alguma outra informação pertinente, como o comprimento dos lados de retângulo ou um ângulo de um losango.

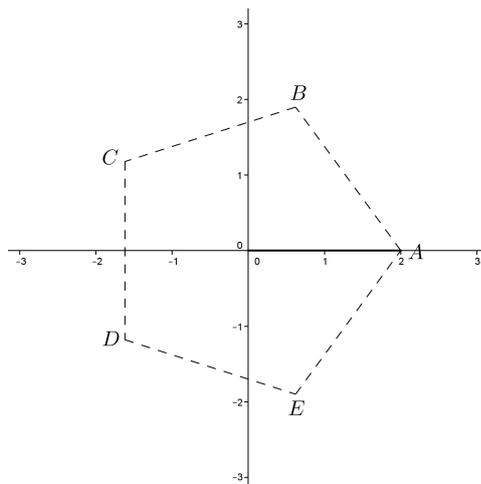


Figura 17 – Representação do pentágono regular $ABCDE$ no plano de Argand-Gauss.

3.4 O problema do tesouro

Nesta seção veremos uma aplicação bastante interessante e concreta sobre a utilização de números complexos como ferramenta de rotação de vetores.

Na matemática existem problemas históricos que ficaram famosos, temos o exemplo do problema da herança dos camelos, o problema da partida em um jogo de cara ou coroa que termina antes do final por um motivo qualquer e se discute qual será a maneira mais justa de se dividir o prêmio, entre vários outros. O problema do tesouro é um exemplo clássico do uso de vetores no plano. A estória é a seguinte:

“Recentemente foi descoberto um manuscrito pirata descrevendo a localização de um tesouro enterrado em certa ilha (plana). O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções:

Qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente dois grandes carvalhos, que chamarei de carvalho A e carvalho B, e também uma palmeira. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado assim:

1. *Caminhe da palmeira para o carvalho A contando seus passos. Chegando ao carvalho A, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto M, marcando o local.*
2. *Volte até a palmeira.*
3. *Caminhe da palmeira para o carvalho B contando seus passos. Chegando ao carvalho B, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto N, novamente marcando o local.*
4. *O ponto X, local do tesouro, está exatamente entre M e N.*

Com base nessas informações precisas, os exploradores chegaram à referida ilha, mas tiveram uma desagradável surpresa: os carvalhos A e B lá estavam, mas a palmeira (que representaremos por P) havia desaparecido. Será possível descobrir a posição do tesouro sem a palmeira?”

Surpreendentemente, a resposta para o problema é sim!

Para solucionarmos o problema teremos que fazer alguns cálculos, mas primeiramente colocaremos os dados do mapa num plano seguindo suas instruções, conforme Figura 18.

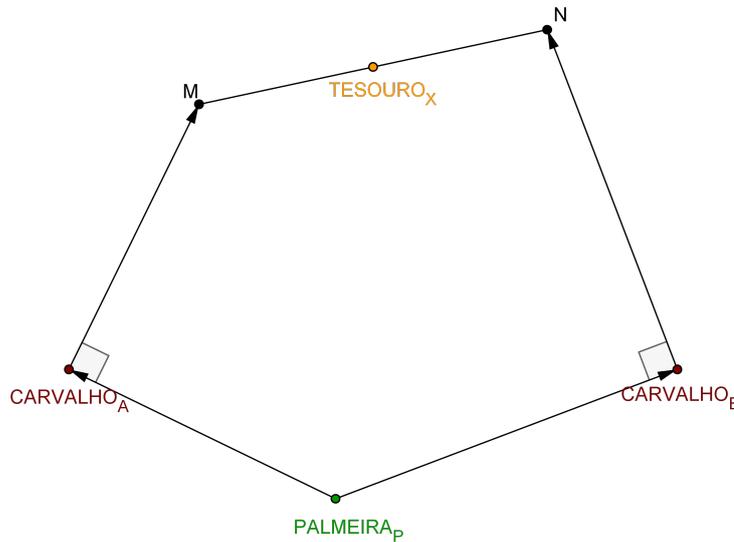


Figura 18 – Esboço do suposto mapa do pirata.

Observemos que, para encontrar o vetor \overrightarrow{AM} basta rotacionar o vetor \overrightarrow{PA} por um ângulo de $\frac{3\pi}{2}$. Da mesma forma, o vetor \overrightarrow{BN} é obtido pela rotação do vetor \overrightarrow{PB} pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$. O tesouro se encontra no ponto médio de \overline{MN} . Obtemos as três seguintes equações

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PA} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right) = \overrightarrow{PA}(-i), \quad (3.18)$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{PB} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = \overrightarrow{PB}i, \quad (3.19)$$

$$X = \frac{M+N}{2}. \quad (3.20)$$

Façamos e resolvamos então o sistema formado pelas equações (3.18) e (3.19)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PA}(-i), \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{PB}i. \end{cases}$$

Rescrevemos a equação (3.18) na forma $M - A = (A - P)(-i) = (P - A)i$, e fazendo

o mesmo na equação (3.19) o sistema anterior toma a nova forma

$$\begin{cases} M - A = (P - A)i, \\ N - B = (B - P)i. \end{cases} \quad (3.21)$$

$$(3.22)$$

Somando as equações (3.21) e (3.22) temos

$$M - A + N - B = (P - A)i + (B - P)i = (P - A + B - P)i = (B - A)i. \quad (3.23)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, perceberemos que a coordenada P da palmeira é eliminada na equação (3.23), então, por conveniência, escrevemos na forma

$$M + N = A + B + (B - A)i. \quad (3.24)$$

Substituindo $M + N$, da equação (3.24), na equação (3.20), temos a relação

$$X = \frac{M + N}{2} = \frac{A + B + (B - A)i}{2} = \frac{A + B}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}i}{2}. \quad (3.25)$$

Pronto, encontramos a localização do tesouro enterrado, só precisamos compreender o significado da equação encontrada. Ela é a soma do ponto médio entre os dois carvalhos A e B , somado com a metade do vetor rotacionado de $\frac{\pi}{2}$ (ver Figura 19). Graficamente isso representa o seguinte

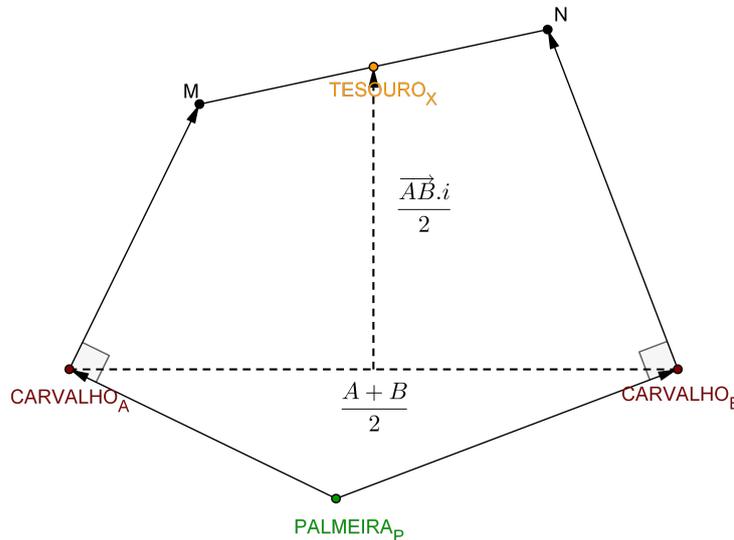


Figura 19 – O mapa com as novas coordenadas descobertas.

Observamos que a pessoa que enterrou tal tesouro nessa ilha plana, fez um mapa de tal maneira que a posição do tesouro não dependia da posição da palmeira, mas dependia exclusivamente dos dois carvalhos como podemos ver na Figura 20, que foram colocadas em um sistema de coordenadas para se ter um ponto referencial.

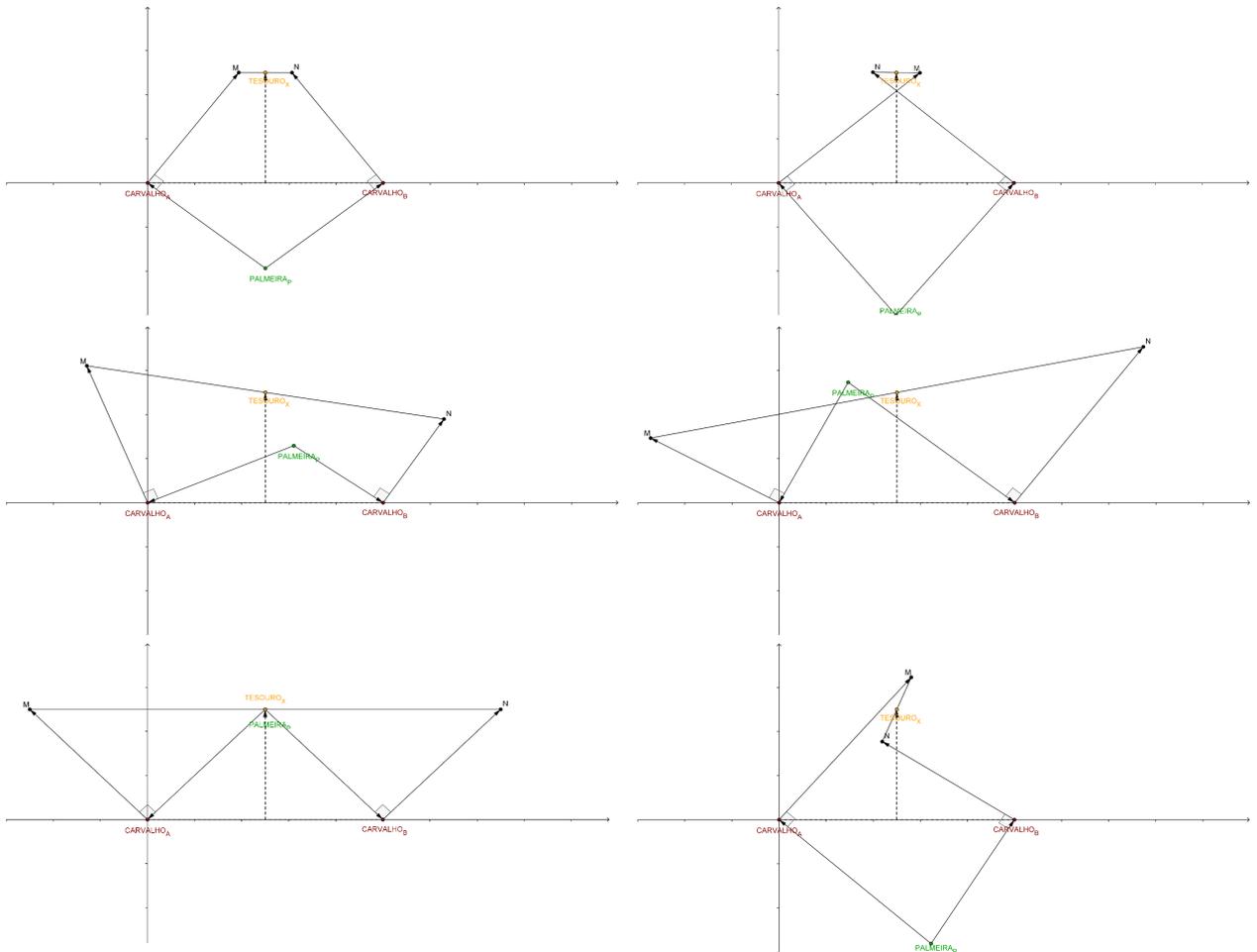


Figura 20 – Representação de 6 formas possíveis que poderia ser tal mapa.

Seria interessante fazermos o mapa como descrito acima em um software gratuito de geometria (como o Geogebra), assim poderíamos notar que, ao arrastar a palmeira para qualquer lugar que a posição do tesouro permaneceria inalterada. Poderíamos também dizer que os exploradores colocaram o mapa num plano cartesiano como nas quatro figuras acima, sendo que o carvalho A fora colocado na origem e o carvalho B no ponto $(d, 0)$, onde d é a distância entre os carvalhos. A resposta ao problema onde se levava em consideração a distância (d) entre os carvalhos vai ter uma fórmula geral que é $X_{Tesouro} = \left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

Considerações Finais

Devemos modificar a ótica de que matemática é somente algoritmos, regras e fórmulas seguidas de memorização e procedimentos recursivos. Fica claro que isso está acontecendo em razão do professor entender a matemática como uma área do conhecimento pronta e acabada, onde os discentes abarcados nesse processo podem até obter algum determinado tipo de conhecimento, mas não desenvolvem a competência de pensar. Mais ainda: os problemas são estabelecidos com uma linguagem específica do assunto abordado, sem mostrar conexões com outros ramos da matemática, dando a impressão de que a matemática é um fim em si mesma. No aluno mais instigador é natural que esta maneira de apresentar o conteúdo desperte os questionamentos: “Para que serve isso?” e “Por que tenho que estudar esse conteúdo?”.

Durante o ensino fundamental e na maioria do ensino médio os alunos estudam como se não existisse raiz quadrada de números negativos. Que equações do segundo grau que tenham discriminante negativo não têm soluções reais e que as situações que incidem nesse tipo de equações, são situações que não oferecem soluções. Cremos que no fim do segundo grau, para que eles passem a extrair raízes quadradas de números negativos, seria interessante apresentarmos motivações.

Fizemos um levantamento histórico dos números complexos descobrimos que, para a resolução de algumas equações especiais do terceiro grau, era necessário calcular a raiz quadrada de um número negativo. Fazendo uma análise sobre algumas dessas equações, descobrimos que elas tinham pelo menos uma raiz real. Esta foi a causa que motivou os matemáticos a conjecturarem a existência das raízes quadradas dos números negativos.

A civilização levou milhares de séculos para descobrir os números complexos, mas apenas três séculos após seu primeiro contato começou a compreender o verdadeiro significado e as potencialidades de aplicação desta magnífica descoberta. Passados mais dois séculos o ensino dos números complexos não evoluiu como necessário para cativar o aluno do ensino médio, por exemplo, pelo fato de dispormos de recursos computacionais que podem dar uma visão geométrica desse tópico e que são subutilizados ou nem sequer são utilizados.

Seguindo a orientação dos PCNEMs (RASIL, 2006) que no campo da matemática mostram que é essencial suplantarmos a aprendizagem focada em procedimentos mecânicos, recomendando a resolução de problemas como um dos pontos de início da atividade matemática a ser desenvolvida na sala de aula, é que apresentamos a unidade imaginária i sem começar com algoritmos, para só posteriormente formalizar e mostrar as propriedades e aplicações dos números complexos. Essa forma de abordar o ensino dos números complexos permite que os alunos os compreendam não somente como símbolos matemáticos, mas como números de verdade, com os quais se obtém as respostas de problemas reais, conforme exemplos dados no Capítulo 3.

Apesar de ser um assunto com amplo potencial para aplicações e contribuir com o desenvolvimento de inúmeras áreas do conhecimento, especialmente da matemática, a grande maioria dos livros didáticos faz uma abordagem meramente algébrica na forma $a + bi$ ou na forma geométrica (a, b) , ficando o aluno com a impressão errônea que esses números não possuem aplicação. Assim, precisamos colocar em questão a prioridade que os livros dão a esse tipo de abordagem.

Confiamos que, para uma aprendizagem expressiva é preciso apresentarmos, primeiramente, os números complexos como se deu na sua linha do tempo. Somente assim, mostraremos a serventia do ensino dos números complexos, sobretudo no ensino médio. Para os professores abarcados nesse processo, essa abordagem gera mudanças na aprendizagem e, assim, facilita o ensino dos números complexos, tanto quanto sua significação e compreensão.

Não poderíamos finalizar este trabalho sem deixarmos de fazer uma observação quanto a um equívoco frequentemente cometido por alguns professores e livros-textos didáticos relativamente à origem da Teoria dos Números Complexos: foram as equações do terceiro grau e não as do segundo grau que desencadearam todo o desenvolvimento teórico desse conjunto numérico. Quando uma equação quadrática tinha o discriminante negativo era simples e comum o fato de dizer que essa equação não tinha raízes, mas com a descoberta da solução das cúbicas, através da fórmula de Cardano-Tartaglia, ficava evidente a existência daquelas raízes. Fruto do trabalho que durou mais dois séculos e iniciou a partir da ideia pioneira e corajosa de Bombelli. Como em muitas áreas da matemática, uma grande descoberta tem uma humilde e simples origem. Com a teoria dos números complexos não foi diferente.

Referências

- ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Edgard Blcher, 2012.
- COURANTE, R.; ROBIN, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2012.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática, Tradução Hygino H. Domingues**. São Paulo: Unicamp, 2004.
- GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron Books, 2006.
- IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar 6: complexos, polinômios, equações**. São Paulo: Atual, Coleção fundamentos da matemática elementar, 2013.
- IEZZI, G. e. a. **Matemática: ciência e aplicações, vol. 3**. São Paulo: Atual, Coleção matemática: ciências e aplicações, 2004.
- LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do professor de matemática, 2012.
- LIMA, E. L. e. a. **A matemática do ensino médio, vol. 3**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do professor de matemática, 2004.
- RASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM): Orientações complementares aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEMT, 2006.
- SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.