Universidade Estadual de Santa Cruz

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# INTRODUÇÃO À TEORIA DO LIMITE E DA DERIVADA PARA O ENSINO MÉDIO

por

**Roberto Silva Levita**[†]

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Ilhéus - BA

**Orientador: Ricardo M Bentín**

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes
obtido através da SBM.

**Universidade Estadual de Santa Cruz**
**Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT**

# INTRODUÇÃO À TEORIA DO LIMITE E DA DERIVADA PARA O ENSINO MÉDIO

**por**

**Roberto Silva Levita**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UESC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

**Prof. Dr. André Nagamine**

**Prof. Dr. Sérgio Mota Alves**

**Prof. Dr. Ricardo M Bentín**
**Orientador**

**MAR/2014**

# DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, Lorena e Milton.*
*Aos meus irmãos, Romário, Bruna e Edmundo.*
*Aos meus amigos.*

# AGRADECIMENTOS

**Meus mais sinceros agradecimentos:**

Primeiramente, à **Deus**, pela vida, saúde e força de vontade que Ele me deu para que eu possa conquistar meus objetivos;

À minha **família**, pelo amor, apoio e carinho. Sem essa base, eu não estaria aqui;

Aos meus **amigos**, pela ajuda e incentivo nos momentos mais diversos do decorrer dessa difícil caminhada;

Aos meus **colegas** mestrandos, que tanto contribuíram com o processo de aprendizagem mútuo durante estes dois anos, dedicando muitas horas de estudo, seja na resolução das listas, na preparação para as provas ou no exaustivo momento do Exame de Qualificação. Devo à cada um de vocês uma parcela desta vitória que conquisto;

Ao distinto **Corpo Docente** do ProfMat/UESC, representado na pessoa do coordenador, Profº Dr Sérgio Mota, e do vice-coordenador, Profº Dr Vinicius Arakawa;

Ao meu **orientador**, Profº Dr Ricardo Bentin, por ser exigente e ao mesmo tempo paciente e descontraído no exercício da orientação;

Aos **colegas, professores e amigos** da minha graduação em Licenciatura em Matemática da UESC, da qual fui aluno no período 2006-2010;

À **Capes**, pelo apoio financeiro, através da bolsa de estudos.

# RESUMO

Nosso intuito é encontrar uma maneira de introduzir os conceitos do cálculo de limite e sobretudo da derivada de um polinômio ao professor e ao estudante de ensino médio, em particular aqueles que cursam o terceiro ano. Pelo geral estes conceitos recorrentemente aparecem em diversos livros didáticos, porém não de uma forma clara e nem simples para estes alunos.
Nosso objetivo é que esta dissertação ao mesmo tempo sirva de curso básico ao estudante que pretende pleitear uma vaga no conjunto de cursos das ciências exatas e tecnológicas, em especial aqueles que já ofertam a disciplina Cálculo Diferencial no primeiro semestre.

**Palavras-Chave:** Ensino do Cálculo, Derivada de Polinômios, Introdução ao Cálculo, Aplicações Básicas da Derivada.

# ABSTRACT

Our aim is to find a way of introducing the concepts of calculus of limits and mostly the derivative of a polynomial to teachers and high school students, particularly those enrolled at the last year. Generally these concepts appear repeatedly in various textbooks, but not in a clear and simple manner even for these students.
Our goal is that this dissertation at the same time serve as a basic course to the student who wants to claim a place in courses of exact sciences and technology, especially those who already offer the discipline of Differential Calculus in the first half.

**Keywords:** Calculus Teaching, Derivative of Polynomials, Introduction to Calculus, Basic Applications of the Derivative.

# CONTEÚDO


**Introdução** **1**

**1 ÁLGEBRA BÁSICA** **3**

1.1 Produtos Notáveis . . . 3

1.1.1 Quadrado da soma de dois termos . . . 4

1.1.2 Quadrado da diferença de dois termos . . . 5

1.1.3 Produto da soma pela diferença de dois termos . . . 5

1.2 Propriedade Distributiva . . . 8

1.3 Propriedade Associativa . . . 9

1.4 Fatoração . . . 9

1.4.1 Fator Comum . . . 10

1.4.2 Agrupamento . . . 11

1.4.3 Diferença de Dois Quadrados . . . 12

1.4.4 Trinômio do 2º grau qualquer . . . 12

**2 CONCEITO HISTÓRICO DO LIMITE E DA DERIVADA** **14**

**3 LIMITE** **18**

3.1 A ideia intuitiva de limite . . . 19

3.2 Definição de Limite . . . 22

3.2.1 Exemplos . . . 22

3.3 Propriedades dos Limites . . . . . . . . 23
3.3.1 Linearidade do Limite . . . . . . . . 23
3.3.2 Limite do produto . . . . . . . . 24
3.3.3 Limite da função polinomial . . . . . . . . 24
3.4 Cálculo de limites interessantes . . . . . . . . 25

**4 DERIVADA** **30**
4.1 Derivada . . . . . . . . 31
4.1.1 Definição . . . . . . . . 32
4.2 Propriedade da Linearidade da Derivada . . . . . . . . 36
4.3 Derivada de $x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ . . . . . . . . 40
4.4 Derivadas de ordens maiores . . . . . . . . 41

**5 APLICAÇÕES DA DERIVADA** **44**
5.1 Algumas aplicações na Física . . . . . . . . 44
5.2 Algumas aplicações na Matemática . . . . . . . . 48
5.3 Aplicações em Economia e Finanças . . . . . . . . 51
5.4 Algumas aplicações na Biologia . . . . . . . . 52

**Considerações Finais** **1**

**6 Considerações Finais** **1**

**A Princípio de Indução Finita** **3**

**B Binômio de Newton** **5**
**Bibliografia** . . . . . . . . 9

# INTRODUÇÃO

A abordagem deste trabalho surgiu a partir de uma curiosidade do mestrando e que provavelmente muitos professores já se perguntaram, em especial aqueles que lecionam no 3ª série do ensino médio: por que não trabalhamos o conteúdo de limites e derivadas com nossos alunos, uma vez que alguns livros didáticos contém páginas dedicadas aos mesmos? Algumas coleções como a Matemática Completa (Giovanni e Bonjorno [2]), Fundamentos de Matemática Elementar (Iezzi e outros [3]) e Matemática: Contexto e Aplicações (Dante [1]) apresentam capítulos inteiros destinados à teoria dos limites e das derivadas em suas páginas, mas os mesmos não são aplicados em sala de aula.

Além disso, procuramos também uma simplificação deste conteúdo de forma que sirva como um módulo preparatório para estudantes que pretendem ingressar em algum dos cursos da área de exatas, em particular aqueles ofertam o Cálculo Diferencial logo no 1º semestre.

O estudo do *limite* e da *derivada* de uma função é um dos tópicos do *Cálculo Diferencial e Integral*. É um importante ramo da Matemática, que envolve Álgebra e Geometria e compreende o estudo de taxas de variação das funções e da reta tangente a uma curva qualquer no plano. Os pensadores, hoje conhecidos como cientistas, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), separadamente, lançaram no século XVIII as bases teóricas para o Cálculo Diferencial e Integral.

Embora o objeto de estudo seja um conteúdo da Matemática à nível universitário, mais precisamente do Cálculo Diferencial e Integral, buscamos a interação destes conceitos, mais especificamente os referentes à Limites e Derivadas, de forma que possamos aplicá-los numa sala de aula de ensino médio. Desta forma, dividimos nosso trabalho em cinco capítulos.

Iniciamos nossa dissertação com o capítulo Álgebra Básica, como uma breve revisão de conceitos considerados simples, tais como produtos notáveis, propriedades e fatoração de polinômios. Além do mais, identificamos estas operações como sendo um fator de dificuldade de muitos alunos e são conceitos necessários para simplificação e posterior resolução no cálculo de limites. Em seguida, teremos uma abordagem histórica do surgimento da teoria do limite, segundo seus precursores, Newton e Leibniz, e as posteriores contribuições de Cauchy e Riemann.

Os capítulos centrais são a base de todo o nosso trabalho. O conceito de limite (capítulo 3) e de derivada (capítulo 4) são abordados de forma clara e objetiva, buscando oferecer um embasamento teórico mínimo para o estudante que procura ingressar aos cursos de exatas do ensino superior. Cabe aqui a ressalva de que escolhemos analisar e discutir apenas funções polinomiais, deixando a encargo de trabalhos futuros a abordagem de outros tipos de funções.

Em seguida, dedicamos o quinto capítulo às aplicações da derivada que encontramos em diversas áreas do conhecimento. Procuramos trabalhar com situações do cotidiano do ensino médio, que possam ser mais facilmente assimiladas pelos estudantes e que crie uma identificação deles, que são o público alvo de nosso estudo, com os conteúdos trabalhados nesta dissertação.

Por fim, deixamos em nossas considerações finais comentários sobre o que desenvolvemos ao longo destas páginas. Salientamos também para os dois apêndices, posteriores à conclusão, no qual analisamos de forma básica, no primeiro, o *Princípio de Indução Finita*, a fim de dar sequência, no segundo, para a demonstração do *Teorema do Binômio de Newton.*

# CAPÍTULO 1

# ÁLGEBRA BÁSICA

Nosso objetivo neste capítulo é relembrar definições e resultados importantes para uma melhor compreensão do texto. Em geral, não apresentaremos demonstrações, e em casos mais importantes, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

No decorrer do texto, faremos uso demasiado da palavra *termo matemático* ou, simplesmente, *termo*. Para melhor entendimento e facilitar para o leitor, definimos *termo* como "um número ou variável, ou então um produto de um número por uma variável". Um termo desprovido de variável é chamado de *termo independente* ou *constante*. Numa expressão matemática, os termos estarão separados entre si por sinais de adição e de subtração. Para fixar a ideia, alguns exemplos simples incluem $3ab^2$, que é um único termo, porém, $3ab^2 + 2b$, é uma soma de dois termos.

## 1.1 Produtos Notáveis

Alguns produtos que envolvem expressões algébricas apresentam um *padrão*, uma regularidade em seus resultados, por isso são chamados de *notáveis*. Para simplificar o trabalho nos cálculos e não termos de recorrer frequentemente aos dispositivos para efetuar as multiplicações, será muito útil a aplicação dos *produtos notáveis*.

Vejamos os três produtos mais comuns. Dados dois termos, $a$ e $b$ quaisquer, temos.

### 1.1.1 Quadrado da soma de dois termos

Considere a expressão

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Uma maneira de demonstrarmos esse resultado é através da figura 1.1.

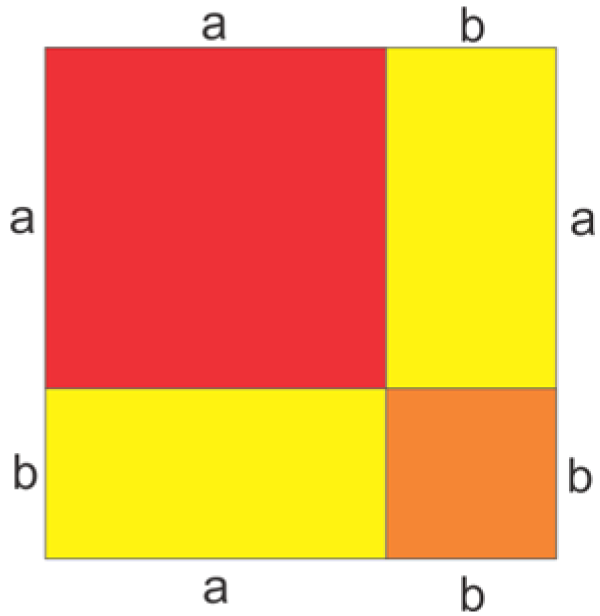


Figura 1.1: Quadrado da Soma

Considere o quadrado de lado $l$, com $l \in \Re$. Então a área desse quadrado é dada por $l^2 = (a+b)^2$.

Porém, como o quadrado foi dividido em quadriláteros menores (um quadrado de lado $a$ e área $A_1$, dois retângulos de dimensões $a$ e $b$ e áreas $R_1 = R_2$ e um quadrado de lado $b$ e área $A_2$), a soma das áreas desses quadriláteros deve ser a área do quadrado de lado $l$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} l^2 = (a+b)^2 &= A_1 + A_2 + R_1 + R_2, \\ &= a^2 + b^2 + ab + ab, \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Recomendamos fortemente que as variáveis sejam sempre colocadas, quando multiplicadas entre si, em ordem alfabética. Isso evita possíveis dúvidas ou equívocos quanto à, por exemplo, o produto $ab$ ser igual ou não ao produto $ba$, que sabemos serem iguais.

Ao mesmo tempo, buscamos que o aluno perca a "timidez"de perguntar caso tenha dúvidas. No exemplo acima, relacionado ao produto $ab$ ou $ba$, percebemos que muitas vezes o aluno tem a dúvida, mas evita fazer a pergunta.

### 1.1.2 Quadrado da diferença de dois termos

Seja a expressão

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Uma maneira de provarmos essa expressão é utilizando o resultado anterior, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, fazendo a substituição de $b$ por $-b$, possível pois $b \in \Re$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+(-b))^2, \\ &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2, \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Dessa forma, não há a necessidade de uma nova relação de produto notável; bastou apenas usar uma existente, atentando para o jogo de sinal envolvendo uma das variáveis.

### 1.1.3 Produto da soma pela diferença de dois termos

Observe a expressão

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Vejamos de uma maneira geométrica, através das sequência de figuras[1], como demonstrar esse produto notável. A demonstração a seguir será baseada no que foi visto do trabalho de SOUZA [4].

Inicialmente, considere o quadrado da figura 1.2 de lado $a$ e área $a^2$. Buscamos uma representação geométrica retangular, de dimensões $(a+b)$ e $(a-b)$, a fim de ser fiel à expressão dada no início da seção.

[1]retiradas de [4]

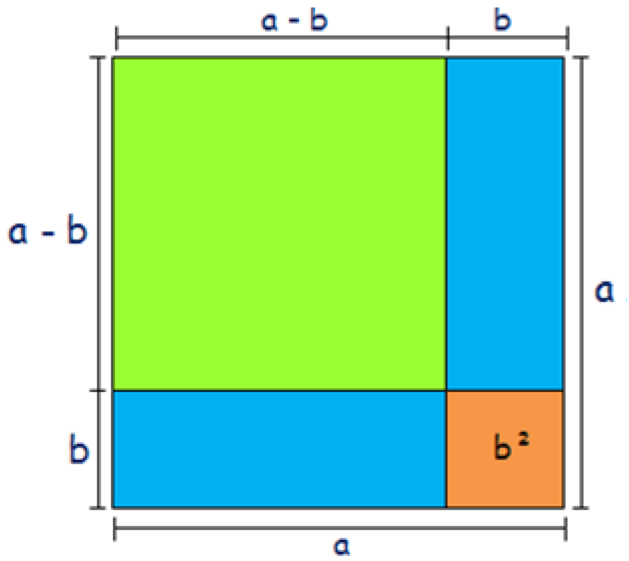


Figura 1.2:

Nesse quadrado, subdividindo-o, temos dois quadrados, $Q_1$ de lado $(a-b)$ e $Q_2$ de lado $b$, e dois retângulos de dimensões $b$ e $(a-b)$. Naturalmente, somando suas áreas, obtemos a área do quadrado original, de lado $a^2$. Sendo $A_1$ a área do quadrado subdividido, temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= (a-b)^2 + 2b(a-b) + b^2, \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab - 2b^2 + b^2, \\ &= a^2. \end{aligned}$$

Observe que, se retirarmos o quadrado $Q_2$, ficamos com a figura 1.3 abaixo, porém esta figura nada tem a ver com a representação que buscamos.

Perceba que a figura tem área $A_2$ igual a:

$$\begin{aligned} A_2 &= (a-b)^2 + 2b(a-b), \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab - 2b^2, \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Nesse caso, faremos a transposição de um dos retângulos, a fim de que os dois fiquem lado a lado, tal como 1.4. Formamos, deste modo, o retângulo procurado, de dimensões $(a+b)$ e $(a-b)$, cuja área é dada por $A_2$.

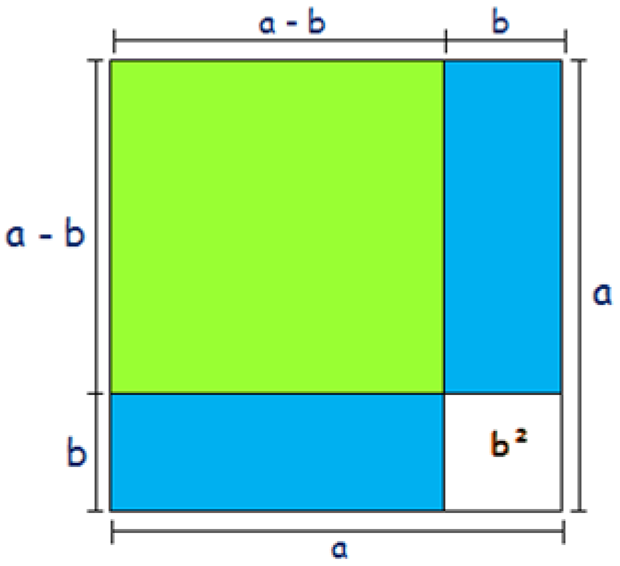


Figura 1.3:

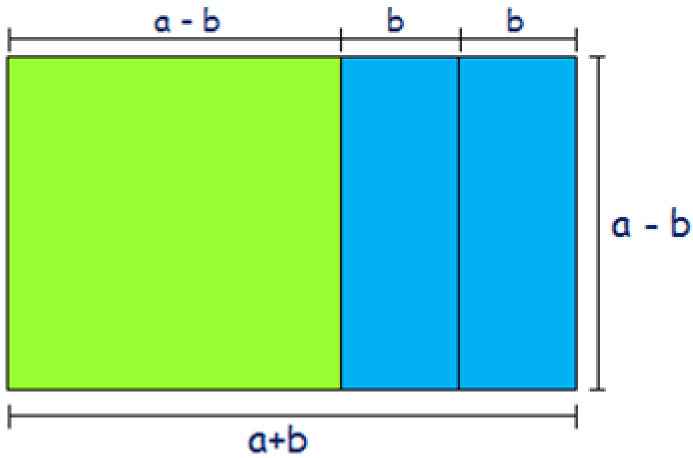


Figura 1.4: Produto da soma pela diferença de dois termos

Esse é um dos produtos notáveis mais utilizados na resolução de limites e derivadas (que veremos em capítulos posteriores).

## 1.2 Propriedade Distributiva

A propriedade distributiva diz respeito a uma multiplicação de vários termos por um único elemento. Dados quatro termos $x$, $y$, $z$ e $w$ quaisquer, podemos ter:

$$x(y+z) = xy + xz$$

ou

$$x(y+z+w) = xy + xz + xw.$$

Essa propriedade também é verdadeira caso a multiplicação esteja sendo efetuada à esquerda dos termos destacados.

$$(x+y)z = xz + yz$$

ou

$$(x+y+z)w = xw + yw + zw.$$

Existe uma outra de forma de vermos o resultado obtido no *Quadrado da Soma* utilizando como ideia base a propriedade distributiva.

Por exemplo, as multiplicações abaixo:
$a(a+b) = a^2 + ab$;
$b(a+b) = ba + b^2 = ab + b^2$.

Sabemos que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Porém, se distribuirmos os termos do primeiro parênteses no segundo, obtemos:

$$(a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b).$$

Perceba que $a(a+b)$ e $b(a+b)$ são resultados encontrados anteriormente. Então,

$$(a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = (a^2+ab) + (ab+b^2) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ou seja, podemos chegar no importante resultado $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ de duas formas distintas.

Considere, agora, a expressão $(a+b)^3$. Como poderíamos resolvê-la sem recorrer diretamente a relação que usualmente é explicada no Ensino Fundamental?

Perceba que podemos escrever $(a+b)^3$ como $(a+b)(a+b)^2$ e que $(a+b)^2$ já é um resultado conhecido por nós. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2,\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2),\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2),\\ &= (a^3+2a^2b+ab^2)+(a^2b+2ab^2+b^3),\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3,\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Perceba que, no processo da distributiva de $b$ em relação ao parêntese, foi feito o uso da observação referente à ordem alfabética dos termos para melhor organização dos termos resultantes das multiplicações. Assim como é importante ressaltar que na penúltima linha da equação temos as somas dos termos algébricos de mesmo índice; $2a^2b$ e $a^2b$, resultando em $3a^2b$, além de $ab^2$ $2ab^2$, totalizando $3ab^2$.

Como você faria para encontrar $(a-b)^3$?

## 1.3 Propriedade Associativa

Quando realizamos certas operações antes de outras, o resultado final não se alterará, porém será mais fácil visualizá-lo. Isso é possível ao associarmos elementos.

Dados três termos, $a$, $b$ e $c$ quaisquer, temos:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Esse é um resultado muito utilizado nos cálculos que envolvem expressões algébricas.

## 1.4 Fatoração

Fatorar uma expressão algébrica é escrevê-la na forma de produto, indicando um ou mais termos comuns, que aparecem em evidência.

### 1.4.1 Fator Comum

A melhor forma de fixar essa ideia é através de um exemplo. Vamos determinar o fator comum de

$$2a^2b^4c^5 - 4ab^5c^2 + 8a^3b^3c^4.$$

Observe que os três termos têm a variável $a$ repetindo com *menor expoente* sendo 1, logo o fator comum envolverá $a$. Da mesma forma, observamos que os três termos têm a variável $b$ repetindo com *menor espoente* 3, logo o fator comum terá $b^3$. Por fim, a variável $c$ repete com *menor expoente* 2, logo o seu fator comum será $c^2$. Assim, temos que o fator comum das três variáveis será expresso por $ab^3c^2$.

De maneira similar, os coeficientes, 2, 4 e 8, de cada um dos três termos também possuem um fator comum entre eles. O maior número que os divide simultaneamente é o 2, logo este será o coeficiente do fator comum. Portanto, temos que o fator comum dos três termos será expresso por $2ab^3c^2$.

Agora, devemos determinar os elementos que "sobram"em cada um dos termos; em cada um deles, devemos extrair o fator comum, que foi posto em *evidência*. Assim, de $2a^2b^4c^5$, evidenciando $2ab^3c^2$, resta $abc^3$; de $4ab^5c^2$, evidenciando $2ab^3c^2$, resta $2b^2$; por fim, em $8a^3b^3c^4$, retirando $2ab^3c^2$, resta $4a^2c^2$.

Portanto, a forma fatorada do exemplo acima proposto é dada por

$$2a^2b^4c^5 - 4ab^5c^2 + 8a^3b^3c^4 = 2ab^3c^2(abc^3 - 2b^2 + 4a^2c^2).$$

Outra forma de encontrar o termo que resta após evidenciar o fator comum é dividir o termo original pelo fator comum. Por exemplo, façamos para o primeiro termo, dado por $2a^2b^4c^5$. Assim,

$$\frac{2a^2b^4c^5}{2ab^3c^2} = abc^3.$$

É importante salientar que o fator comum possuirá variáveis com expoentes menores ou, no máximo, iguais ao do termo original. Por exemplo, no termo $3x^4y^2$ o fator comum envolvendo $x$ possuirá expoente no máximo igual a 3.

Vejamos outro exemplo.

Seja $3x^4y^2 + 10x^2$. Observe que, a variável $x$ aparece nos dois termos, ao contrário da variável $y$; logo, podemos determinar que no fator comum não aparecerá a variável $y$. Enquanto isso, a variável $x$ que tem o *menor expoente* é 2. Logo, $x^2$ será do fator comum.

Outro fato a observar é que os coeficientes 3 e 10 são *primos entre si*, ou seja, não possuem divisores comuns diferentes do número 1.

Logo, o elemento que comporá o fator comum será apenas o $x^2$. Assim, temos que

$$3x^4y^2 + 10x^2 = x^2(2x^2y^2 + 10).$$

### 1.4.2 Agrupamento

Assim como na seção anterior, vejamos através de um exemplo. Considere a expressão

$$2ax + 4bx - 3ay - 6by$$

Usando a ideia anterior, procuremos um fator comum para os 4 termos dados no exemplo. Perceba que, entre as variáveis, termos 4 diferentes. Desta forma, procuramos formar um "par"no qual apareça a mesma variável.

Por exemplo, $2ax$ e $4bx$ possuem a variável $x$ em comum, logo esta será o fator comum entre esses dois termos. Além disso, entre os coeficientes temos 2 e 4, que podem ser divididos por 2. Logo, o fator comum dos termos $2ax$ e $4bx$ será $2x$. Então, evidenciando o fator, obtemos

$$2ax + 4bx = 2x(a + 2b)$$

De maneira similar, nos termos que sobraram, $-3ay$ e $-6by$, procuramos uma variável comum, que é dada por $y$. Assim, evidenciamos a mesma. Entre os coeficientes, observe que $-3$ e $-6$ podem ser divididos por $-3$. Logo, o fator comum entre $-3ay$ e $-6by$ é dado por $-3y$. Então, obtemos

$$-3ay - 6by = -3y(a + 2b).$$

Desta forma, juntando as duas fatorações, temos que

$$2ax + 4bx - 3ay - 6by = 2x(a + 2b) - 3y(a + 2b).$$

Porém, observe que, mesmo fatorado, ainda restou um termo, $(a+2b)$, comum aos fatores comuns. Assim, evidenciando novamente os termos, obtemos

$$2x(a + 2b) - 3y(a + 2b) = (2x - 3y)(a + 2b)$$

Portanto, a forma fatorada, por *agrupamento*, é expressa por

$$\begin{aligned} 2ax + 4bx - 3ay - 6by &= 2x(a+2b) - 3y(a+2b), \\ &= (2x-3y)(a+2b). \end{aligned}$$

O agrupamento funciona de maneira semelhante ao *fator comum* e à *propriedade distributiva*; nesse caso, sendo dois ou mais fatores comuns que devemos evidenciar e, depois, novamente evidenciar os termos restantes.

Essa é uma das formas de fatoração que requer maior prática para perceber quando se é possível utilizá-la, porém, uma vez dominada, torna as outras ainda mais fáceis de trabalhar.

### 1.4.3 Diferença de Dois Quadrados

Considere a expressão

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Perceba que há uma igualdade entre esta forma fatorada e o resultado do produto notável *produto da soma pela diferença de dois termos.*

### 1.4.4 Trinômio do 2º grau qualquer

Considere a expressão abaixo:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b).$$

Essa expressão também é usada na resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2+bx+c$, que pode ser fatorada como $a(x-x_1)(x-x_2)$, com $x_1$ e $x_2$ sendo as raízes da equação.

Assim, temos que a soma das raízes é dada por $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e o produto das raízes é dado por $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Logo, em $a(x - x_1)(x - x_2)$ temos

$$\begin{aligned}
a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) &= a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2), \\
&= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2), \\
&= a(x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a}), \\
&= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}), \\
&= ax^2 + a\frac{b}{a}x + a\frac{c}{a}, \\
&= ax^2 + bx + c.
\end{aligned}$$

Alguns exemplos de trinômios envolvendo raízes inteiras incluem:
a) $x^2 + 2x - 15$, onde a soma das duas raízes é dada por $\frac{-2}{1} = -2$ e o produto das mesmas é dado por $\frac{-15}{1} = 1$; precisamos de uma solução para o sistema $x_1 + x_2 = -2$ e $x_1x_2 = -15$. Nesse caso, $x_1 = -5$ e $x_2 = 3$.
b) $x^2 - 8x + 16$, onde a soma das duas é igual à 8 e o produto delas é igual à 16. Nesse caso, temos $x_1 = x_2 = 4$.
c) $x^2 - 4x + 3$, com soma igual à 4 e produto igual à 3, as raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Com o que foi abordado neste capítulo, estamos mais aptos a seguir com a exploração da *teoria do limite*, no capítulo 3. Antes, porém, veremos um pouco de como surgiu o conceito de limite.

# CAPÍTULO 2

# CONCEITO HISTÓRICO DO LIMITE E DA DERIVADA

Lembramos que, no capítulo anterior, vimos a demonstração por duas formas distintas da identidade

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

sendo uma demonstração geométrica por *áreas* e outra algébrica com o auxílio da *propriedade distributiva*. Este fenômeno serve para ilustrar o fato de que, na evolução da Matemática, muitos conceitos foram desenvolvidos por mais de um matemático em momentos distintos e de formas independentes, contudo chegando o mesmo resultado. E esse foi o caso do desenvolvimento do conceito da *derivada*, no Cálculo Diferencial e Integral.

Podemos dizer que ele nasceu na época de Galileu Galilei (1564-1642) e Johann Kepler (1571-1630) e foi sistematizado mais tarde, de modo independente um do outro, por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). O Cálculo Diferencial foi um dos ramos da Matemática que mais auxiliaram e ainda auxiliam na resolução de problemas das mais variadas ciências, como Física, Astronomia, Engenharia, Biologia e Economia.

Posteriormente, o Cálculo Diferencial recebeu contribuições valiosas de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Hoje, podemos dizer que o Cálculo é uma ferramenta, por excelência, de praticamente todas as ciências.

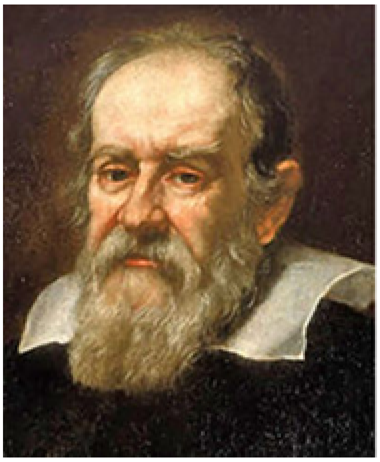 

Figura 2.1: Galileu Galilei (E) e Johann Kepler (D)

A forma como Newton e Leibniz desenvolveram as ideias do cálculo não seguiram o rigor matemático de hoje e este é o ponto crucial na filosofia desssa *dissertação*, que é de fazer o trabalho de uma forma intuitiva e muito mais acessível ao estudante do ensino médio. A escolha de uma boa notação é de grande ajuda no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Vale ressaltar que muitas notações da autoria de Leibniz, utilizadas em seus trabalhos, resistiram até hoje; um exemplo disso é a simbologia $f(x)$ em função, e que foi adaptada para o $s(t)$ que descreve o movimento de um corpo na Física. Porém, essa simbologia em particular causa uma desordem bastante comum ao conhecimento dos estudantes, que não compreendem $f(x)$ e $s(t)$ como simplesmente funções, a primeira $f$ em função da variável $x$ e a segunda $s$ em função do parâmetro $t$. Já a formalização dos conceitos do cálculo, como o conhecemos hoje, veio mais tarde com as ideais de Cauchy e Riemann.

Embora, hoje, os pesquisadores em História Matemática concordem que Newton e Leibniz desenvolveram a ideia do *cálculo infinitesimal* de forma independente, e com notações e simbologia diferentes, a *Royal Society*[1] (da qual Newton era presidente) acusou Leibniz de plagiar a ideia de Newton. Em carta aos pesquisadores da época, Newton declarou-se como o real "inventor"do Cálculo e que Leibniz apenas o aperfeiçoou, criando notações mais convenientes, que foram adotados por matemáticos do continente europeu e, somente mais tarde, pelos britânicos. Posteriormente, foram encontradas em anotações de Newton

[1] *The Royal Society of London for the Improvement of Natural Knowledge* (ou A Real Sociedade de Londres para o Melhoramento do Conhecimento Natural) é uma instituição destinada à divulgação do conhecimento científico. Ela foi fundada em 28 de novembro 1660.

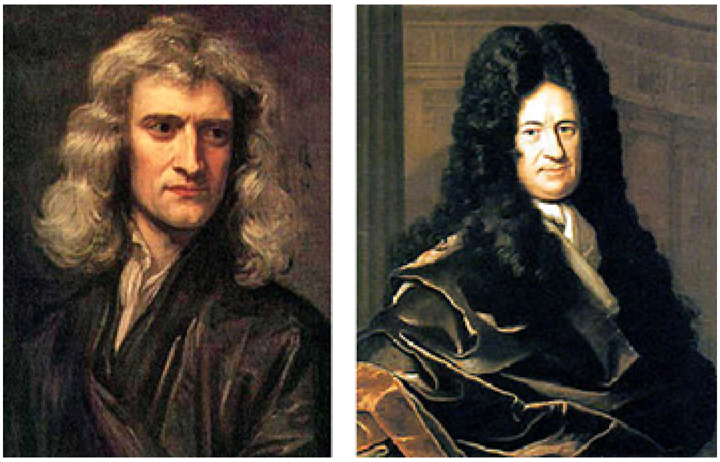

Figura 2.2: Isaac Newton (E) e Gottfried Wilhelm Leibniz (D)

considerações sobre a obra de Leibniz, o que colocou em xeque a acusação da *Royal Society*.

Muito se especulou sobre o fato de Newton não ter publicado quase nada a respeito de seu trabalho até 1693, pois temia controvérsias e críticas, apenas apresentando um relato completo em 1704; ao contrário de Leibniz, que publicou regularmente relatos completos de seu trabalho a partir de 1684.

Após o controverso episódio, o *Cálculo Diferencial* não deixou de ser desenvolvido. Cauchy e Riemann também deram contribuições importantes.

Figura 2.3: Augustin-Loius Cauchy (E) e Bernhard Riemann (D)

Apesar de sua personalidade intratável, Cauchy contribuiu enormemente para o desenvolvimento da Matemática, publicando uma infinidade de obras e sendo responsável pela introdução do *rigor ao Cálculo*. Fornecendo um tratamento rigoroso à teoria dos limites e derivadas (abordados neste trabalho), além das integrais e séries infinitas (outros conceitos do Cálculo não abordados aqui) e criando a noção moderna da continuidade, ele ainda contribuiu com outras áreas do conhecimento.

Riemann, por outro lado, apesar de sua vida ter sido curta e de ter publicado pouco, seus trabalhos alteraram permanentemente o curso da Matemática na Análise, Geometria e Teoria dos Números. Em particular, na área do *Cálculo*, contribuiu com as *Integrais de Riemann*, usando a ideia do limite de um somatório (assunto que não abordaremos neste trabalho).

# CAPÍTULO 3

# LIMITE

Estaremos aqui abordando os conceitos do limite de forma o mais simples possível. Em nosso trabalho, não trataremos de *continuidade*, *existência do limite* ou outros conceitos que serão melhor abordados e estudados num curso de Cálculo Diferencial e Integral à nível universitário; iremos admitir apenas o estudo de funções "bem comportadas", ou seja, funções que sempre admitam a existência do limite, continuidade e diferenciabilidade.

O nosso objetivo é esclarecer a resposta para a pergunta:

$$\textit{O que significa } \lim_{x \to x_0} f(x) \textit{ ?}$$

É importante frisar que a notação $f(x)$ significa que "$f$ é uma função na variável $x$", porém $f$ não é a única letra para a representação de uma função nem $x$ é a única letra para a representação de uma variável. Na Física, por exemplo, usa-se a notação $v(t)$ para representar "a função $s$ velocidade em função da variável $t$". Podemos representar as funções, também, com letras maiúsculas de nosso alfabeto.

No decorrer do texto, faremos bastante uso da simbologia $\lim_{x \to x_0} f(x)$, que iremos ler como "o limite da função $f(x)$ quando $x$ *tende* à $x_0$"ou, simplesmente, "o limite de $f$ quando $x$ *tende* à $x_0$"; em princípio, e de forma até ingênua, seria "substituir"o valor de $x_0$ na função $f(x)$.

## 3.1 A ideia intuitiva de limite

Vejamos o cálculo do limite de uma função através de exemplos.

Considere a função definida nos números reais $f(x) = x^2$. Qual será o valor de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Nesse caso, lemos como "limite de $f(x)$ quando $x$ *tende* à 1". Calcular o limite de uma função significa "aplicar"(ou "substituir") o valor para o qual $x$ *tende* na própria função. No exemplo dado, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} x^2,\\ &= (1)^2,\\ &= 1.\end{aligned}$$

Admita a mesma função $f(x) = x^2$, agora com $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, ou seja, com o limite de $f(x)$ *tendendo* à 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3} x^2,\\ &= (3)^2,\\ &= 9.\end{aligned}$$

Por fim, vejamos o cálculo de $f(x) = x^2$ quando temos $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} f(x) &= \lim_{x\to -2} x^2,\\ &= (-2)^2,\\ &= 4.\end{aligned}$$

Consideremos, agora, a função $g(t) = at^2 + 1$. Perceba que nessa função temos duas variáveis, $a$ e $t$, porém $g$ está em função apenas de $t$. Vamos determinar os limites de $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$, $\lim\limits_{t\to a} g(t)$ e $\lim\limits_{t\to -1} g(t)$.

No primeiro caso, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 2} g(t) &= \lim_{t\to 2}(at^2+1),\\ &= a(2)^2+1,\\ &= a4+1,\\ &= 4a+1.\end{aligned}$$

Quando $t$ *tende* à $a$, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a} g(t) &= \lim_{t\to a}(at^2+1),\\ &= a(a)^2+1,\\ &= aa^2+1,\\ &= a^3+1.\end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to -1} g(t) &= \lim_{t\to -1}(at^2+1),\\ &= a(-1)^2+1,\\ &= 1a+1,\\ &= a+1.\end{aligned}$$

Para finalizar esses exemplos, admita a função $k(r) = r^2 + 6r + 9$, com $\lim_{r\to 3} k(r)$. Deste modo, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 3} k(r) &= \lim_{r\to 3}(r^2+6r+9),\\ &= (3)^2+6(3)+9,\\ &= 9+18+9,\\ &= 36.\end{aligned}$$

Porém, observe que a função $k(r) = r^2 + 6r + 9$ pode ser escrita como $k(r) = (r+3)^2$, usando as relações algébricas vistas no primeiro capítulo. Desta forma, o limite $\lim_{r\to 3} k(r)$ pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 3} k(r) &= \lim_{r\to 3}(r+3)^2,\\ &= (3+3)^2,\\ &= (6)^2,\\ &= 36.\end{aligned}$$

Conforme discutimos anteriormente, podem existir mais de uma maneira de chegarmos ao resultado de uma operação matemática e foi o que pretendíamos mostrar com o exemplo da função $k(r)$. Além disso, mesmo que os cálculos sejam considerados simples, perceba que na primeira forma de resolução vista, a quantidade de operações matemáticas realizadas foi maior do que na segunda, o que aumenta a probabilidade de cometermos erros. Por esta razão, destacamos a importância de saber fazer uso das relações algébricas estudadas no primeiro capítulo.

Observe o gráfico[1] da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 1$.

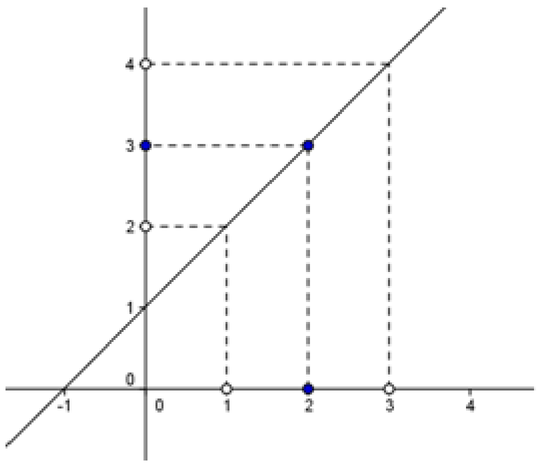


Figura 3.1: Gráfico de *f(x)*

Dizemos que o limite da função $f(x) = x + 1$, quando $x$ *tende* à 2 é igual à 3.

[1]figura construída no software *GeoGebra*

## 3.2 Definição de Limite

O *limite* de uma função $f(x)$, quando **x** tende a **a**, é o número real **L**, se, e somente se, os números reais da imagem de $f(x)$ permanecerem próximos de **L** para os infinitos valores de **x**, com $x \in (a - \delta, a + \delta)$ e $\delta \in \mathbb{R}$. Simbolizamos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Esta definição quase formal é uma introdução aquela que será vista pelo aluno numa disciplina de Cálculo na universidade.

### 3.2.1 Exemplos

Vejamos alguns exemplos básicos.

**Exemplo 01:** Calcular o limite das seguintes funções:

1. $\lim_{x \to 3}(2x - 1)$;
2. $\lim_{x \to -2}(x^2 + 3x - 1)$;
3. $\lim_{x \to \frac{1}{2}}(3x + 5)$.

*Resolução*

1. $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$
2. $\lim_{x \to -2}(x^2 + 3x - 1) = (-2)^2 + 3(-2) - 1 = 4 - 6 - 1 = -3$
3. $\lim_{x \to \frac{1}{2}}(3x + 5) = 3\frac{1}{2} + 5 = \frac{3}{2} + 5 = \frac{3}{2} + \frac{10}{2} = \frac{13}{2}$

**Exemplo 02:** Calcular o limite da função:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}.$$

Quando $x$ se aproxima de 1, o valor numérico de $(x^2 + 3x - 1)$ se aproxima de $(1 + 3 - 1)$, ou seja, de 3, e o valor numérico de $(x + 1)$ se aproxima de $(1 + 1)$, ou seja, de 2. Logo, o valor numérico de $\frac{x^2+3x-1}{x+1}$ se aproxima de $\frac{3}{2}$. Poderíamos aplicar diretamente o valor numérico de $x = 1$ no limite e calculá-lo de maneira mais rápida.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} = \frac{1^2 + 3 \cdot 1 - 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}.$$

**Exemplo 03:** Calcular o limite da função:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}.$$

Perceba que nesse caso, aplicar diretamente o valor de $x = 2$ anula o denominador. Deste modo, precisamos utilizar de algum meio que permita contornar essa situação e uma forma de fazer isso é colocando em evidência o termo $2x$ no numerador. Assim, obtemos

$$\frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \frac{2x(x-2)}{x - 2} = 2x$$

e poderemos aplicar o valor do limite. Logo,

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 2x = 2(2) = 4.$$

## 3.3 Propriedades dos Limites

Nessa seção, definiremos algumas propriedades que podemos utilizar para o cálculo de limites de algumas funções.

Para tanto, consideremos as funções $f(x)$ e $g(x)$, definidas num domínio real $D$, tais que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$ e $k$ uma constante real.

### 3.3.1 Linearidade do Limite

Sejam $f(x), g(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ duas constantes. Então,

$$\lim_{x \to x_0} (af(x) + bg(x)) = a \lim_{x \to x_0} f(x) + b \lim_{x \to x_0} g(x) = aL_1 + bL_2.$$

**Exemplo:**

a) $\lim\limits_{x\to 4}(5x^2+2y) = 5\lim\limits_{x\to 4} x^2 + 2\lim\limits_{x\to 4} y = 5(4)^2 + 2(y) = 5(16) + 2y = 80 + 2y.$

### 3.3.2 Limite do produto

O limite do produto de duas funções é igual ao produto dos limites dessas funções, ou seja:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2.$$

**Exemplo:**

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2z^3 = \lim\limits_{x\to 2} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to 2} z^3 = (2)^2 \cdot z^3 = 4z^3.$

**Observação:** Podemos determinar também o limite do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, desde que tenhamos $g(x) \neq 0$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = L_1 \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}.$$

### 3.3.3 Limite da função polinomial

Dada uma função polinomial do tipo $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, definida em $\Re$, quando $x$ tende à $x_0$, o limite de $f(x)$ tende à $f(x_0)$, isto é:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Exemplos:**

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3 - 3x^2 + x - 1) = 2(2)^3 - 3(2)^2 + 2 - 1 = 8 - 3\cdot 4 + 2 - 1 = 8 - 12 + 2 - 1 = -3$

b) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2 - 3x + 2) = 5^2 - 3(5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$

## 3.4 Cálculo de limites interessantes

Considere a função

$$f(h) = \frac{h^2 - h}{h - 1},$$

definida para todo $h$ real, desde que o denominador $h - 1$ seja diferente de zero, ou seja, para todo $h \neq 1$.

Porém, o que acontece com a função $f(h)$ quando o valor de $h$ *tende* à 1? O valor do numerador $h^2 - h$ tende à zero, assim como o valor do denominador $h - 1$ também tende à zero, gerando a *indeterminação* $\frac{0}{0}$.

Cabe aqui ressaltar o que tratamos como *indeterminação*. Por exemplo a fração $\frac{10}{5}$ pode ser representada por 2, pois pode ser escrita de forma única como

$$\frac{10}{5} = 2 \Leftrightarrow 10 = 2 \cdot 5.$$

Da mesma forma, temos que

$$\frac{21}{7} = 3 \Leftrightarrow 21 = 3 \cdot 7.$$

Em contrapartida, a fração $\frac{0}{0}$ é considerado *indeterminação* pois

$$\frac{0}{0} = k \Leftrightarrow 0 = k \cdot 0,$$

onde $k$ pode ser qualquer número real, ou seja, não podemos determinar um valor de $k$ tal que $0 = k \cdot 0$ seja escrito de forma única.

São casos como este que estudaremos nessa seção.

**Exemplo 01:** Calcular o limite da função

$$\lim_{h \to 1} \frac{h^2 - h}{h - 1}.$$

Perceba que atribuir diretamente $h = 1$ anula simultaneamente numerador e denominador da função. Porém, perceba que no numerador pode ser fatorado, tendo $h$ como *fator comum* aos dois termos. Assim, temos que

$$h^2 - h = h(h - 1).$$

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 1} f(h) &= \lim_{h\to 1} \frac{h^2-h}{h-1},\\ &= \lim_{h\to 1} \frac{h(h-1)}{h-1},\\ &= \lim_{h\to 1} h,\\ &= 1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 1} \frac{h^2-h}{h-1} = 1.$$

Esse processo é conhecido no Cálculo como *a remoção da indeterminação.*

**Exemplo 02:** Calcular o limite da função

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$

Perceba que atribuir diretamente $x = 2$ anula tanto o numerador quanto o denominador da função. Nesse caso, observemos que o numerador da função pode ser fatorado para um dos produtos notáveis estudados no Capítulo 1, o *produto da soma pela diferença de dois termos*; podendo ser escrito como

$$x^2 - 4 = (x+2)\cdot(x-2).$$

Assim, podemos reescrever

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

como

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2}$$

e, simplificando os termos iguais, ficamos

$$\lim_{x\to 2}(x+2),$$

que resulta em $2 + 2 = 4$.

Portanto,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

De maneira análoga ao exemplo anterior, realizamos uma *remoção da indeterminação.*

**Exemplo 03:** Calcular o limite da função

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2+2x}.$$

Observe que a função $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2+2x}$ não é definida para $x=-1$, pois numerador e denominador tendem à zero. Assim, recorrendo à fatoração para remover a indeterminação, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2+2x} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+3)}{x(x+1)(x+2)},\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{x+3}{x(x+2)},\\
&= \frac{(-1)+3}{(-1)((-1)+2)},\\
&= \frac{2}{(-1)(1)},\\
&= -2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+3x+2}=-2.$$

**Exemplo 04:** Calcular o limite de

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-ax-2x+2a}{x-a}.$$

Ao aplicarmos o valor do limite $x=a$, anulamos denominador e numerador. Porém, perceba que o polinômio $x^2 - ax - 2x + 2a$ é um trinômio do 2º grau e pode ser escrito como $x^2 - (a+2)x + 2a = (x-a)(x-2)$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{x^2 - ax - 2x + 2a}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x-a}, \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x-2)}{x-a}, \\
&= \lim_{x\to a} (x-2), \\
&= a - 2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 - ax - 2x + 2a}{x-a} = a - 2.$$

**Exemplo 05:** Seja a função $f(x) = x^2$. Agora, vejamos como calcular o valor de outro limite interessante. Calcule o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Neste caso, aplicar $h = 0$ anula o denominador da função; desta forma, buscamos desenvolver os termos do numerador, a fim de remover a indeterminação. Assim:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - (x)^2}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} (2x+h), \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Um cuidado que devemos tomar aqui é no desenvolvimento do binômio $(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$, comumente escrito de maneira errada como $x^2 + h^2$, devido ao pouco domínio que os alunos têm com as relações algébricas mais básicas. Em parte, isso causa grande evasão nos cursos de exatas, em particular na disciplina de Cálculo, pois muito da resolução de limites passa pela habilidade em "manipular"essas expressões.

Uma outra maneira de interpretarmos o desenvolvimento do numerador, $(x+h)^2-(x)^2$, é como uma *diferença de dois quadrados*, o que nos levaria a um *produto da soma pela diferença de dois termos*. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned}(x+h)^2-(x)^2 &= (x+h+x)(x+h-x),\\ &= (2x+h)h.\end{aligned}$$

Isso nos possibilita uma *remoção da indeterminação* de maneira relativamente mais rápida:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h},\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h},\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+x)(x+h-x)}{h},\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+h)h}{h},\\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h),\\ &= 2x.\end{aligned}$$

Agora, estamos prontos para iniciar os estudos referentes à teoria da derivada, no capítulo seguinte.

# CAPÍTULO 4

# DERIVADA

Neste capítulo trabalharemos o conceito de *derivada* tal qual Newton o fez, desde que está abordagem é, segundo nós, a mais acessível ao aluno do ensino médio. Logo precisaremos das ideias de *reta secante* e *reta tangente*. Portanto, é fundamental nesta parte inicial do capítulo deixar claro o que são a definições geométricas dessas retas.

**Definição (Reta Secante):** Dado o gráfico de uma função $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer, dizemos que uma reta $s$ é secante à $f$ se, e somente se, houver ao menos dois pontos de intersecção entre elas.


Figura 4.1: A reta secante $s$ intersecta $f$ em pelos menos DOIS PONTOS.

**Definição (Reta Tangente):** Dado o gráfico de uma função $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer, dizemos que uma reta $t$ é tangente à $f$ se, e somente se, houver houver apenas um ponto de intersecção entre elas, sem, no entanto, que haja um "corte"da reta na curva.

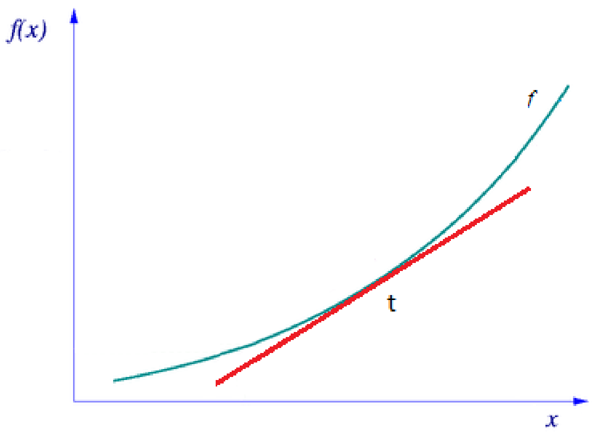


Figura 4.2: A reta tangente $t$ intersecta $f$ em UM PONTO.

## 4.1 Derivada

Os estudos iniciais que levaram a desenvolver as ideias sobre a derivada ocorreram a partir de Galileu, que analisou a velocidade de um corpo. Posteriormente, muitas pessoas ficaram interessadas nas ideias sobre o movimento dos corpos e uma delas foi Sir Isaac Newton, que continuou e ainda o aprimorou de uma forma tal que ficou gravada na história da Matemática e da Ciência. Perceba que a velocidade é dada por

$$\tilde{v} = \frac{s(t+h) - s(t)}{(t+h) - t},$$

que justamente coincide com o coeficiente angular da reta secante como é visto na figura 4.3.

Newton considerou que se o ponto **A** fosse fixo e que o ponto **B** pudesse se deslocar sobre a curva $v$, encontraríamos "várias velocidades". Porém, ele se questionou sobre o que aconteceria se o ponto **B** *tendesse* ao ponto **A**, uma vez que resultaria em uma indeterminação. Foi quando Newton teve a ideia de aplicar o limite na função velocidade, obtendo:

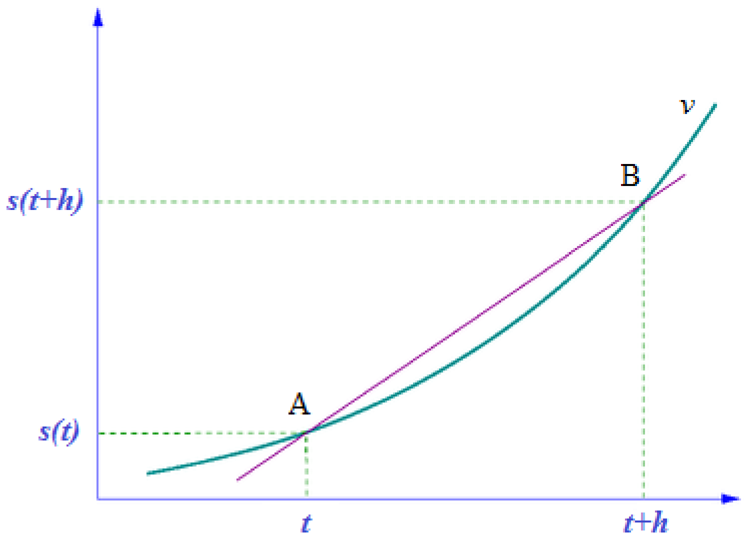


Figura 4.3: Função velocidade

$$\tilde{v} = \frac{s(t+h)-s(t)}{(t+h)-(t)} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h},$$
$$v = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Newton observou que o limite teria uma indeterminação, porém a geometria da reta (neste caso, tangente) teria coeficiente angular finito. Partindo de um exemplo simples, tal qual determinar o limite de $s(t) = t^2$ quando $h$ *tende* à zero, ele encontrou o seguinte resultado

$$v = \lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^2-(t)^2}{h} = 2t,$$

e percebeu que a notação $\tilde{v}$ não era a melhor forma de calcular o limite, mas sim a $v$. Cabe aqui a observação de que o cálculo de $\lim\limits_{h\to 0} s(t)$, com $s(t) = t^2$, foi feito como o último exemplo do capítulo anterior, porém usando $f(x) = x^2$.

### 4.1.1 Definição

Seja $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos a derivada de $f$ como

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Observação: ao longo dos anos, os matemáticos utilizaram diversas notações para representar a derivada, entre elas $\dot{f}$, $f'(x)$, $D_x f$ e $\frac{df}{dx}$. As simbologias mais utilizadas hoje em dia são as $f'(x)$ e $\frac{df}{dx}$.

Vejamos alguns exemplos de derivadas para funções de expoentes naturais, tais como $x^3$, $x^4$ e $x^5$. Em todos os casos, desenvolveremos os binômios do tipo $(x+h)^n$ usando os conceitos do Apêndice 2: Binômio de Newton.

Seja $g(x) = x^3$. Então, temos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h}, \end{aligned}$$

expandindo o binômio elevado ao cubo, teremos,

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x)^3)}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}, \end{aligned}$$

cancelando $x$ elevado ao cubo,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h},$$

e colocando o $h$ em evidência,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h},$$

podemos remover a indeterminação,

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2, \\ &= 3x^2 + 0 + 0, \\ &= 3x^2. \end{aligned}$$

$\therefore$ temos que

$$g'(x) = 3x^2.$$

Tomemos, agora, $p(x) = x^4$. Observe:

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - (x)^4}{h},$$

aqui, desenvolvemos o binômio do quarto grau,

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) - (x)^4}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}, \end{aligned}$$

cancelamos os termos $x$ do quarto grau,

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h}, \end{aligned}$$

pomos em evidência o fator comum $h$,

$$= \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3,$$

e, finalmente, removemos a indeterminação,

$$\begin{aligned} &= 4x^3 + 0 + 0 + 0, \\ &= 4x^3. \end{aligned}$$

$\therefore$ temos

$$p'(x) = 4x^3.$$

Por fim, seja $q(x) = x^5$. Os passos que iremos tomar aqui serão similares ao do exemplo anterior, quanto ao desenvolvimento do binômio e do cancelamento dos termos. Então:

$$\begin{aligned}
q'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-(x)^5}{h},\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5)-(x)^5}{h},\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5-x^5}{h},\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5}{h},\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(5x^4+10x^3h+10x^2h^2+5xh^3+h^4)}{h},\\
&= \lim_{h\to 0} 5x^4+10x^3h+10x^2h^2+5xh^3+h^4,\\
&= 5x^4+0+0+0+0,\\
&= 5x^4.
\end{aligned}$$

Então, temos que

$$q'(x) = 5x^4.$$

Seja $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Você consegue perceber qual será o resultado de $f'(x)$?

**Observação:** Existem duas funções relativamente comuns, mas que costumam levar os estudantes a um erro bastante recorrente.

Seja $f(x) = x$, onde $x$ tem expoente 1. Desta forma, a derivada de $f$ será dada por:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h},
\end{aligned}$$

eliminando os parenteses, temos

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h},\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h},
\end{aligned}$$

simplificando os termos semelhantes e aplicando o limite, temos

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} 1, \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Assim, a derivada de uma função identidade $f(x) = x$ é dada por

$$f'(x) = 1.$$

Considere agora a função constante $g(x) = c$, onde $c$ é um número real. Deste modo, temos:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

como $g$ é uma função constante, não importa o incremento $h$ que seja feito nela, pois o resultado será a própria constante,

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}, \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}, \\
&= \lim_{h \to 0} 0, \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, a derivada de uma função constante $g(x) = c$ é dada por

$$g'(x) = 0.$$

## 4.2 Propriedade da Linearidade da Derivada

Sejam $f(x), g(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ duas constantes. Então,

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = a\frac{d}{dx}f(x) + b\frac{d}{dx}g(x).$$

Vejamos alguns exemplos de como aplicamos essa propriedade.

**Exemplo 01:** Analisando primeiramente a função $f(x) = 4x^2 + 5$, temos que a derivada de *f*, aplicando a definição, é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(4(x+h)^2 + 5) - (4x^2 + 5)}{h}, \end{aligned}$$

desenvolvendo os termos dos binômios e aplicando a distributiva quando necessário, temos

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} \frac{(4(x^2 + 2xh + h^2) + 5) - (4x^2 + 5)}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(4x^2 + 8xh + 4h^2 + 5) - (4x^2 + 5)}{h}, \end{aligned}$$

atentar nesse ponto para o "jogo de sinal", no segundo parêntese,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 + 5 - 4x^2 - 5}{h},$$

cancelando os termos opostos,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2}{h},$$

e colocando o $h$ em evidência para removermos a indeterminação, temos

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h)}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} (8x + 4h), \end{aligned}$$

aplicando o valor para o qual o limite *tende*,

$$\begin{aligned} &= 8x + 0, \\ &= 8x \end{aligned}$$

$\therefore$ a derivada da função $f(x) = 4x^2 + 5$ é dada por

$$f'(x) = 8x.$$

Podemos calcular essa derivada de maneira mais simples se fizermos uso da propriedade da linearidade da derivada. Vejamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(4x^2+5) &= 4\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(5), \\ &= 4\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{(5)-(5)}{h}, \end{aligned}$$

lembrando que a derivada de uma constante é igual a zero, temos $\frac{d}{dx}(5)=0$, restando apenas

$$= 4\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-(x)^2}{h},$$

também já havíamos calculado a derivada $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-(x)^2}{h}=2x$,

$$\begin{aligned} &= 4(2x+0), \\ &= 8x. \end{aligned}$$

Ou seja, aplicando a propriedade, encontramos o mesmo resultado de uma maneira mais rápida.

**Exemplo 02:** Vejamos, agora, a derivada da função $g(r)=r^2-4r+3$, primeiramente calculada pela definição. Temos,

$$\begin{aligned} g'(r) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(r+h)-g(r)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{((r+h)^2-4(r+h)+3)-(r^2-4r+3)}{h}, \end{aligned}$$

desenvolvendo os binômios e aplicando a distributiva, obtemos

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(r^2+2rh+h^2-4r-4h+3)-(r^2-4r+3)}{h},$$

atentar para o “jogo de sinal”no segundo parêntese,

$$= \lim_{h\to 0}\frac{r^2+2rh+h^2-4r-4h+3-r^2+4r-3}{h},$$

cancelando os termos opostos,

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2rh+h^2-4h}{h},$$

e colocando o $h$ em evidência para removermos a indeterminação, encontramos

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2r+h-4)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0}(2r+h-4), \end{aligned}$$

finalmente, aplicando o valor do limite,

$$\begin{aligned} &= 2r+0-4, \\ &= 2r-4. \end{aligned}$$

$\therefore$ temos que a derivada de $g(r)=r^2-4r+3$ é igual à

$$g'(r)=2r-4.$$

Iremos calcular agora a derivada de $g(x)$ usando a propriedade. Assim:

$$\frac{d}{dr}(r^2-4r+3)=\frac{d}{dr}(r^2)-4\frac{d}{dr}(r)+\frac{d}{dr}(3)$$

Já sabemos que $\frac{d}{dr}(r^2)=2r$, $\frac{d}{dr}(r)=1$ e que $\frac{d}{dr}(3)=0$, pois 3 é uma constante. Logo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r^2-4r+3) &= \frac{d}{dr}(r^2)-4\frac{d}{dr}(r)+\frac{d}{dr}(3), \\ &= 2r-4(1)+0, \\ &= 2r-4. \end{aligned}$$

Mais uma vez, pela propriedade, encontramos o mesmo resultado de forma mais prática.

**Exemplo 03:** Por fim, calculemos a derivada de $p(a)=5a-1$. Temos:

$$\begin{aligned}
p'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{p(a+h)-p(a)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(5(a+h)-1)-(5a-1)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(5a+5h-1)-(5a-1)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5a+5h-1-5a+1}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} 5, \\
&= 5.
\end{aligned}$$

$\therefore$ a derivada de $p(a)$ é dada por

$$p'(a) = 5.$$

Usando a propriedade, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}(5a-1) &= 5\frac{d}{da}(a) - \frac{d}{da}(1), \\
&= 5(1) - 0, \\
&= 5.
\end{aligned}$$

## 4.3 Derivada de $x^n$, com $n \in \mathbb{N}$

Faremos o cálculo da derivada da função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, utilizando a definição da derivada. Ressaltamos que a variável aqui é somente o $x$, pois $n$ representa um número natural.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-(x)^n}{h},
\end{aligned}$$

aqui, estamos fazendo do desenvolvimento do Binônio de Newton $(x+h)^n$ segundo visto no Apêndice 2,

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{(C_{n,0}x^n + C_{n,1}x^{n-1}h + C_{n,2}x^{n-2}h^2 + ... + C_{n,n-2}x^2h^{n-2} + C_{n,n-1}xh^{n-1} + C_{n,n}h^n) - (n)^n}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{C_{n,0}x^n + C_{n,1}x^{n-1}h + C_{n,2}x^{n-2}h^2 + ... + C_{n,n-2}x^2h^{n-2} + C_{n,n-1}xh^{n-1} + C_{n,n}h^n - n^n}{h},
\end{aligned}
$$

lembrando a propriedade de $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$, para qualquer $n$, substituímos os coeficientes de $x^n$ e $h^n$,

$$
= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + C_{n,1}x^{n-1}h + C_{n,2}x^{n-2}h^2 + ... + C_{n,n-2}x^2h^{n-2} + C_{n,n-1}xh^{n-1} + h^n - n^n}{h},
$$

cancelamos os termos semelhantes

$$
= \lim_{h\to 0} \frac{C_{n,1}x^{n-1}h + C_{n,2}x^{n-2}h^2 + ... + C_{n,n-2}x^2h^{n-2} + C_{n,n-1}xh^{n-1} + h^n}{h},
$$

e colocamos h em evindência para a remoção da indeterminação,

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(C_{n,1}x^{n-1} + C_{n,2}x^{n-2}h + ... + C_{n,n-2}x^2h^{n-3} + C_{n,n-1}xh^{n-2} + h^{n-1})}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0}(C_{n,1}x^{n-1} + C_{n,2}x^{n-2}h + ... + C_{n,n-2}x^2h^{n-3} + C_{n,n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}),
\end{aligned}
$$

aplicamos o limite, restando apenas

$$
= C_{n,n-1}x^{n-1},
$$

que pode ser resolvido como

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{(n-1)!1!}x^{n-1}, \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}x^{n-1}, \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

## 4.4 Derivadas de ordens maiores

No decorrer do estudo neste capítulo, derivamos diversas funções, mas cada uma delas por apenas uma vez. Por isso, chamamos de "derivada primeira"; porém, uma função pode ser derivada mais uma vez, conforme a necessidade. Chamamos de “derivada segunda”ou “segunda derivada”, “derivada terceira”ou “terceira derivada”, ...

Dada uma função $f(x)$, utilizamos as notações $\frac{d^2}{dx}(f(x))$ ou $f''(x)$ para a segunda derivada; para derivadas de ordem $n$, com $n \geq 3$, usamos $\frac{d^n}{dx}(f(x))$ ou $f^{(n)}(x)$.

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 01:** Determine a derivada segunda de $f(x) = 2x^3$.
Inicialmente, calcularemos a primeira derivada de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x^3), \\ &= 2\frac{d}{dx}(x^3, \\ &= 2(3x^2), \\ &= 6x^2. \end{aligned}$$

Agora, basta calcularmos a derivada de $f'(x)$, ou seja, a segunda derivada de $f(x)$. Então:

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) &= \frac{d}{dx}(6x^2), \\ &= 6\frac{d}{dx}(x^2), \\ &= 6(2x), \\ &= 12x. \end{aligned}$$

$\therefore$ a derivada segunda de $f(x) = 2x^3$ é dada por

$$f''(x) = 12x.$$

**Exemplo 02:** Determine a derivada terceira de $g(y) = y^4 - 2y$.
Mais uma vez, dividiremos o processo em partes, calculando as derivadas passo a passo.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}(y) &= \frac{d}{dy}(y^4 - 2y),\\
&= \frac{d}{dy}(y^4) - 2\frac{d}{dy}(y),\\
&= 4y^3 - 2.
\end{aligned}$$

Para determinar $\frac{d^2}{dy}(y)$, derivamos novamente a função:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dy}(g(y)) &= \frac{d}{dy}(\frac{d}{dy}(g(y))),\\
&= \frac{d}{dy}(4y^3 - 2),\\
&= \frac{d}{dy}(4y^3) - \frac{d}{dy}(2),\\
&= 4\frac{d}{dy}(y^3) - \frac{d}{dy}(2),
\end{aligned}$$

perceba que $\frac{d}{dy}(2)$ é a derivada de uma constante, logo seu resultado é igual a zero,

$$\begin{aligned}
&= 4(3y^2),\\
&= 12y^2.
\end{aligned}$$

Por fim, a terceira derivada da função é a derivada de sua segunda derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dy}(g(y)) &= \frac{d}{dy}(\frac{d^2}{dy}(g(y)),\\
&= \frac{d}{dy}(12y^2),\\
&= 12\frac{d}{dy}(y^2),\\
&= 12(2y),\\
&= 24y.
\end{aligned}$$

$\therefore$ a terceira derivada de $g(y)$ é dada por

$$\frac{d^3}{dy}(g(y)) = 24y.$$

# CAPÍTULO 5

# APLICAÇÕES DA DERIVADA

Neste capítulo, abordaremos várias aplicações da derivada, começando pela sequência histórica da Física (em particular, na Cinemática). Posteriormente, veremos aplicações na própria Matemática, Economia, Biologia...

## 5.1 Algumas aplicações na Física

Um dos casos mais elementares no estudo da Cinemática é a função do movimento $s(t)$, que descreve o deslocamento de uma partícula ao longo de uma reta. É importante salientarmos que a a função velocidade $v(t)$ é obtida a partir da primeira derivada da função $s(t)$; e que a função aceleração $a(t)$ é a segunda derivada de $s(t)$, ou, simplesmente, a primeira derivada de $v(t)$.

Por exemplo, seja a função $s(t) = t^2{+}2t{+}3$, que descreve o movimento de um determinado corpo ao longo de uma reta. Se derivamos a função espaço $s(t)$, obtemos a função velocidade $v(t)$. Assim:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{d}{dt}(s(t)) &= \frac{d}{dt}(t^2 + 2t + 3), \\ &= \frac{d}{dt}(t^2) + 2\frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(3), \\ &= 2t + 2 + 0, \\ &= 2t + 2. \end{aligned}$$

Importante ressaltarmos que a velocidade está em função do tempo. Neste caso, num instante inicial $t_i = 0s$, temos velocidade

$$v(0) = 2(0) + 2 = 2m/s,$$

enquanto num instante $t_f = 2s$, temos velocidade

$$v(2) = 2(2) + 2 = 6m/s.$$

Se derivarmos mais uma vez, obtemos a função aceleração $a(t)$. Ou seja:

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{d^2}{dt}(s(t)) &= \frac{d}{dt}(v(t)), \\ &= \frac{d}{dt}(2t + 2), \\ &= 2\frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(2), \\ &= 2 + 0, \\ &= 2. \end{aligned}$$

Como encontramos uma constante, podemos dizer que a aceleração desse corpo não apresenta variação, permanecendo a mesma ao longo da trajetória.

Vejamos um caso mais geral, agora muito algébrico, com aceleração constante.
Considere

$$s(t) = s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2.$$

Ressaltamos que a nossa variável é $t$, sendo $s_o$, $v_o$ e $a$ constantes. Portanto, ao derivarmos $s(t)$, estaremos derivando em relação à $t$.

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{d}{dt}(s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2),\\
&= \frac{d}{dt}(s_o) + \frac{d}{dt}(v_o t) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}at^2),\\
&= 0 + v_o\frac{d}{dt}(t) + \frac{1}{2}a\frac{d}{dt}(t^2),\\
&= v_o + \frac{1}{2}a(2t),\\
&= v_o + at.
\end{aligned}$$

Perceba que, se isolarmos a variável $t$ na equação acima, obtemos

$$v = v_o + at \Leftrightarrow v - v_o = at,$$

então

$$t = \frac{v - v_o}{a} \tag{5.1}$$

e, ao substituirmos em $s(t)$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
s &= s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2,\\
s - s_o &= v_o t + \frac{1}{2}at^2,
\end{aligned}$$

substituímos a equação 5.1 na relação encontrada a partir de $v(t)$,

$$\begin{aligned}
s - s_o &= v_o(\frac{v - v_o}{a}) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_o}{a}\right)^2,\\
\Delta s &= v_o(\frac{v - v_o}{a}) + \frac{1}{2}a\frac{(v - v_o)^2}{a^2},\\
\Delta s &= v_o(\frac{v - v_o}{a}) + \frac{1}{2}a\frac{(v - v_o)(v - v_o)}{a^2},
\end{aligned}$$

simplificamos o fator $a$ na segunda fração,

$$\Delta s = v_o(\frac{v - v_o}{a}) + \frac{1}{2}\frac{(v - v_o)(v - v_o)}{a},$$

e colocando $\frac{v-v_o}{a}$ em evidência, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta s &= \frac{(v - v_o)}{a}\left(v_o + \frac{1}{2}(v - v_o)\right),\\
\Delta s &= \frac{(v - v_o)}{a}\left(v_o + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v_o\right),
\end{aligned}$$

encontramos um denominador comum ao termos do parênteses

$$
\begin{aligned}
\Delta s &= \frac{(v-v_o)}{a}\left(\frac{2v_o}{2}+\frac{v}{2}-\frac{v_o}{2}\right),\\
\Delta s &= \frac{(v-v_o)}{a}\frac{(v+v_o)}{2},
\end{aligned}
$$

perceba que os numerados formam o produto notável *produto da soma pela diferença*

$$
\Delta s = \frac{v^2-v_o^2}{2a},
$$

finalmente, isolamos $v^2-v_o^2$ e ficamos com

$$
\begin{aligned}
2a\Delta s &= v^2-v_o^2,\\
v^2-v_o^2 &= 2a\Delta s.
\end{aligned}
$$

A relação acima é conhecida como *Equação de Torricelli.*

Nas escolas, costuma-se ensinar (na verdade, decorar) as três *fórmulas* acima, $s(t)$, $v(t)$ e *Torricelli*, para o aluno como se fossem independentes entre si, porém mostramos que basta conhecer a função $s(t)$ e saber o conceito de derivada que conseguimos encontrar as outras duas. É também de importância lembrar que o processo de ensino e aprendizagem requer uma construção lógica (no caso da Matemática, uma construção lógica-abstrata) por parte do estudante-professor, o fato de mandar decorar fórmulas vai abruptamente na contra-mão deste princípio. Este princípio pode ser citado como "uma sequência de autoconstrução lógica facilita, tanto para o professor quanto para o estudante, o processo do aprendizado e fixação de ideias e conceitos".

É importante frisar que nós esperamos que o aluno entenda o conceito e não somente *memorize* as fórmulas, uma vez que esse *não é um bom* hábito acadêmico e que pode levar o estudante a chegar a ser um cidadão *pouco criativo.* Além disso, lembramos também que um bom ensino de Física nas escolas é de grande importância, uma vez que essa ciência serve de base para a maioria das Engenharias, além da Computação, da Química, e também exerce grande influência no desenvolvimento de tecnologias para uma nação.

## 5.2 Algumas aplicações na Matemática

O próprio conceito da derivada surgiu na Matemática com Newton e Leibniz (Newton, em particular, estava interessado no estudo da função movimento), mas logo foram descobertas várias outras aplicações, tais como, por exemplo, o estudo de *Máximos* e *Mínimos* de uma função, *pontos de inflexão* (com a segunda derivada), além de possibilitar o desenvolvimento referente ao estudo das *Equações Diferencias*, da *Geometria Diferencial*, entre muitas outras áreas.

O nosso intuito aqui é introduzir ao estudante o cálculo de extremais (*máximos* e *mínimos*) de uma função.

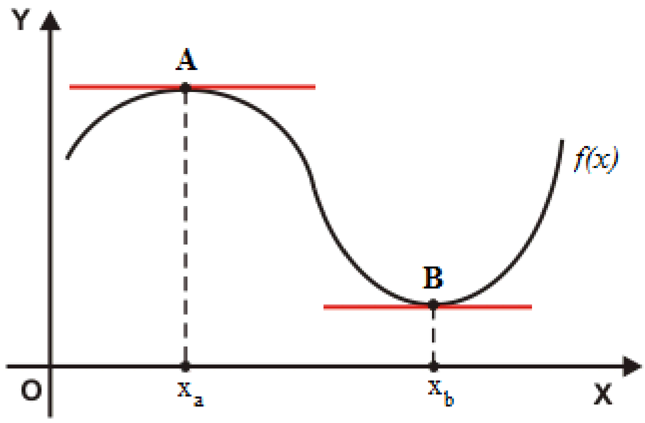


Figura 5.1: O ponto **A** é um máximo local e o ponto **B** é um mínimo local.

Observe que as *retas tangentes* aos pontos **A** e **B** são paralelas ao *eixo* $X$, ou seja, ambas possuem coeficiente angular nulo. Isso significa que nesses pontos a primeira derivada de $f(x)$ é igual à zero.

Analisemos, então, o gráfico 5.2, descrito abaixo, de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Seja **V** o *vértice* da parábola $f(x)$. O vértice é o ponto mais extremo da parábola, é o ponto a partir de onde ocorre a variação do crescimento para o decrescimento, ou o contrário,

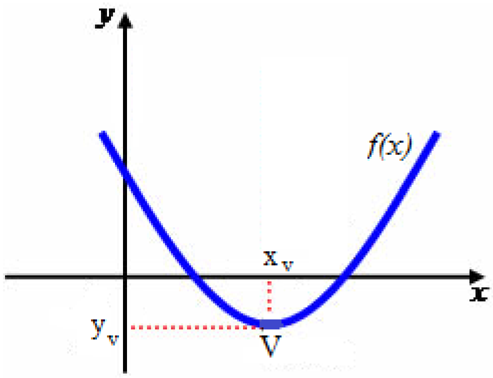


Figura 5.2: Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$

da função (em termos de $x$), e também onde encontramos o máximo ou o mínimo da imagem da função (em termos de $y$).

Vimos que a reta tangente ao ponto **V**, de coordenadas $(x_v, y_v)$, sendo paralela ao *eixo X*, deve possuir coeficiente angular nulo. Então, se derivarmos *f*, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c), \\ &= a\frac{d}{dx}(x^2) + b\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(c), \\ &= a(2x) + b(1) + 0, \\ &= 2ax + b. \end{aligned}$$

Como $f'(x) = 2ax + b$, se fizermos $f'(x) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2ax_v + b &= 0, \\ 2ax_v &= -b, \\ x_v &= \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto **V** tem coordenada $x_v = \frac{-b}{2a}$. Para determinarmos a coordenada $y_v$, basta substituirmos em $f(x)$ o $x_v$ encontrado. Assim:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

aplicando $x_v$ em $f(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x_v) = y_v &= ax_v^2 + bx_v + c, \\ y_v &= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c, \\ y_v &= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c, \end{aligned}$$

simplificando o coeficiente $a$ na primeira fração e multiplicando $b$ na segunda, temos

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c,$$

encontrando o denominador comum entre os termos, obtemos

$$\begin{aligned} y_v &= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}, \\ y_v &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}, \\ y_v &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}, \end{aligned}$$

aqui, colocando o sinal de menos em evidência no numerador, temos

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a},$$

perceba que a expressão $b^2 - 4ac$, no numerador, é o mesmo discriminante $\Delta$ que é visto ao se trabalhar a equação de 2º grau, logo

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a},$$

Portanto, a coordenada $y$ do ponto **V** é dada por $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$. Em outras palavras, podemos escrever o vértice $V = (x_v, y_v)$ de uma parábola como

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

Como um exemplo de ilustração das ideias que foram desenvolvida acima, vamos determinar o vértice da função a $g(x) = x^2 - 6x + 5$. Desta forma, basta lembrar que o vértice é dado por $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Então, temos que

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3,$$

e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((-6)^2 - 4(1)(5))}{4(1)} = \frac{-(36-20)}{4} = \frac{-16}{4} = -4.$$

Portanto, o vértice de $g(x)$ é dado por $V_g = (3, -4)$.

## 5.3 Aplicações em Economia e Finanças

Em Economia e Finanças existem conceitos importantes que ajudam uma pessoa, uma empresa, uma corporação e até governos a tomarem decisões visando otimizar a produtividade, reduzindo os custos, como, por exemplo, *custo total* e *custo marginal*.

**CUSTO TOTAL:** A função *custo total* $C_T$ descreve os custos referentes à produção e totalizam custos varáveis, que oscilam de acordo com a quantidade $x$ de um bem produzido e incluem insumos como trabalho e matéria prima, e também custos fixos, que independem da quantidade de bens produzidas.

**CUSTO MARGINAL:** A função *custo marginal* $C_m$ é definida como

$$C_m = \frac{d}{dx}(C_T),$$

que representa a derivada da função *custo total* em relação à quantidade $x$ de bens produzidos.

Considere, como exemplo, a situação a seguir.

A empresa RSL comercializa o produto GFBPA. Um economista da empresa calculou que a função *custo total* desse produto comercializado é dada pela função $C_T(x) = x^2 - 6x + 20$, para a produção de uma determinada quantidade $x$ produzida. Qual é custo marginal $C_m$ de produção desse produto?

Nesse caso, derivando a função *custo total*, obtemos:

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{d}{dx}(C_T), \\ C_m &= \frac{d}{dx}(x^2 - 6x + 20), \\ C_m &= \frac{d}{dx}(x^2) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(20), \\ C_m &= 2x - 6(1) + 0, \\ C_m &= 2x - 6. \end{aligned}$$

Portanto, a função *custo marginal* dessa empresa será representada por

$$C_m = 2x - 6.$$

A derivada é um dos conceitos mais importantes para os estudantes dos cursos de Administração, Ciências Contábeis e Ciências Econômicas, à nível superior, porém, muitas vezes o curso de Cálculo não é devidamente explorado, chegando a estudar apenas até o conceito de *limites*.

Em alguns casos, alega-se que eles (os alunos) passaram mais tempo revisando conceitos básicos de função (para a construção de gráficos) e aprendendo como racionalizar (para efetuar a simplificação no cálculo de limites). O nosso intuito é fazer com que o aluno ingresse no ensino superior já sabendo, ao menos, o conceito de derivada de um polinômio.

## 5.4 Algumas aplicações na Biologia

Na biologia, temos diversas aplicações elementares da Matemática, seja na determinação do número máximo de elementos de uma *cultura* ou em quanto tempo ela atinge população máxima. Em particular, como um exemplo concreto, podemos utilizar a derivada para encontrar os picos de fertilidade de uma mulher, analisando a flutuação de sua temperatura corporal durante o seu ciclo menstrual[1].

Os mamíferos são seres de sangue quente e bastante suscetíveis às variações de temperatura do ambiente; por esta razão, manter a temperatura corporal num nível estreito é ideal para uma resposta fisiológica adequada ao meio. Essas variações de temperatura ocorrem das mais diversas formas, sejam através de exercícios, estresse, infecções ou outras situações

[1]tradução livre e adaptado de [9]

normais, mas, por meio do controle neurológico, o corpo se autorregula para manter uma temperatura razoavelmente constante. As temperaturas mais baixas costumam ocorrer durante o sono, enquanto a mais altas, durante o final da manhã, porém variam décimos de um grau *Celsius*.

As mulheres são extremamente influenciadas pelos hormônios, principalmente durante o seu ciclo menstrual. Algumas, inclusive, monitoram a variação da temperatura corporal basal para determinar o período de pico de fertilidade, a fim de maximizar (ou minimizar) as chances de gravidez, porém, essa é uma prática não recomendada. O início da ovulação corresponde ao maior aumento na temperatura corporal, o que dá pico de fertilidade.

Abaixo, encontra-se um gráfico, figura 5.3, da temperatura basal do corpo feminino feita ao mesmo tempo em cada dia, durante um período de 28 dias de uma mulher. O melhor polinômio que ajusta o gráfico, por uma *Interpolação de Lagrange* a partir dos pontos fornecidos, é dado por

$$T(t) = -0,0002762t^3 + 0,01175t^2 - 0,1121t + 36,41,$$

onde $T(t)$ representa a temperatura em graus *Celsius* e $t$ o tempo, em dias.

A partir da curva acima, podemos encontrar a temperatura mais alta e mais baixa e, então, determinar o tempo de pico de fertilidade. As temperaturas máxima e mínima ocorrem onde a reta tangente tem coeficiente angular nulo, isto é, onde a derivada é igual à zero. Então, basta derivar a função $T(t)$, resultando:

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{d}{dt}(-0,0002762t^3 + 0,01175t^2 - 0,1121t + 36,41), \\ &= -0,0002762\frac{d}{dt}(t^3) + 0,01175\frac{d}{dt}(t^2) - 0,1121\frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(36,41), \\ &= -0,0002762t^2 + 0,01175(2t) - 0,1121, \\ &= -0,0002762t^2 + 0,02350t - 0,1121. \end{aligned}$$

Portanto, basta encontrarmos as raízes de $T'(t) = -0,0002762t^2 + 0,02350t - 0,1121$, quando $T'(t) = 0$ para determinar os valores onde ocorrem máximo e mínimo; que são $T_1 = 6,069$ dias e $T_2 = 22,29$ dias.

Inserindo $t_1$ e $t_2$ no polinômio $T(t)$, obtemos a temperatura mínima

$$T_1(6,069) = 36,1^{\circ}$$

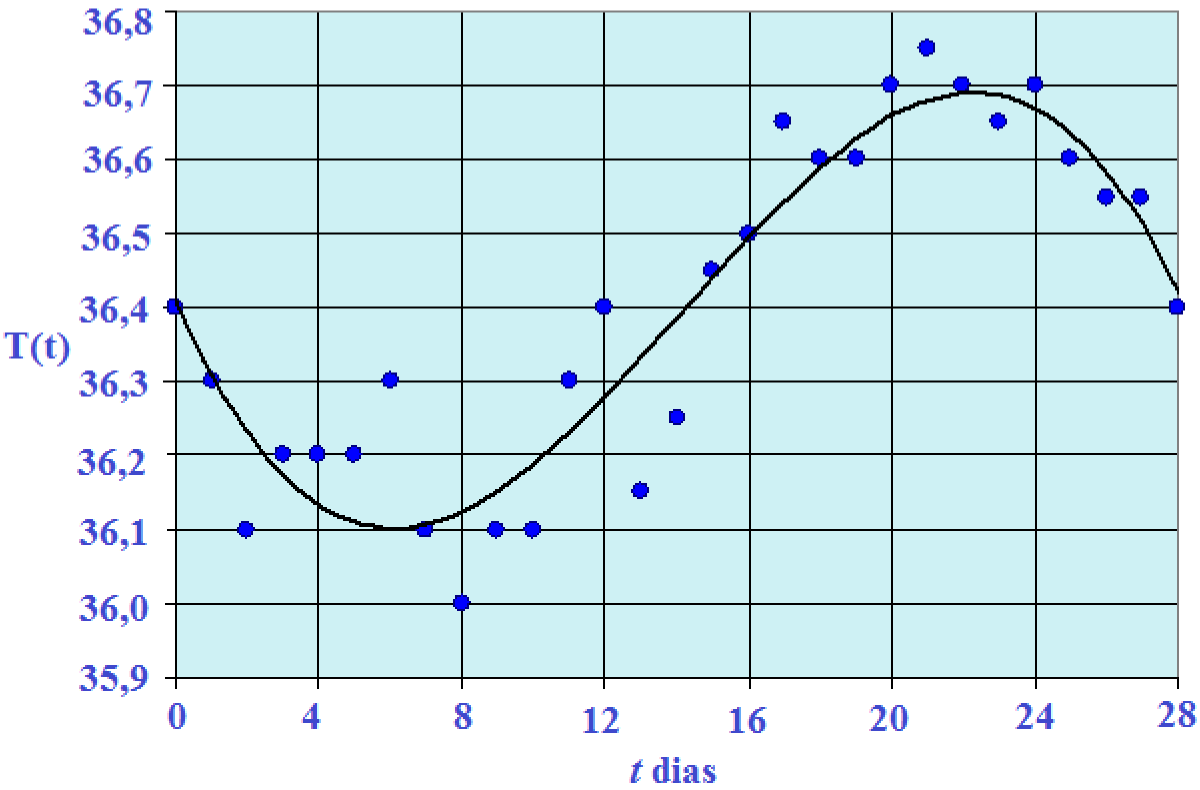


Figura 5.3: Temperatura corporal feminina durante ciclo menstrual

e máxima

$$T_2(22,29) = 36,7^o,$$

o que significa que que houve uma variação de apenas $0,6^o$ *Celsius* na temperatura basal do corpo durante o ciclo menstrual de 28 dias.

Neste capítulo, mostramos algumas aplicações da derivada de funções polinomiais em situações cotidianas. Entretanto, existem muitas outras aplicações que utilizam diferentes funções, como funções trigonométricas, a importante função exponencial de Euler e outras, que deixaremos à encargo de um trabalho futuro.

# CAPÍTULO 6

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi construído a partir de uma curiosidade, previamente comentada, do por que não ensinamos o conteúdo de limite e derivada aos estudantes do ensino médio visto que muitos livros didáticos da 3ª série do ensino médio apresentam estes conceitos em suas páginas.

Como o trabalho de conclusão de curso do *ProfMat* deve ser um *produto* para a sala de aula da educação básica, buscamos, então, encontrar uma forma de trazer para o aluno e o professor do ensino médio o conteúdo visto em nossas páginas de uma maneira mais simples e acessível, de modo que o estudante não apenas compreenda o conceito, mas também esteja preparado para os cursos de nível superior que trabalham com o *Cálculo Diferencial e Integral*, em particular, àqueles que já ofertam a disciplinas nos semestres iniciais.

Acima de tudo, implicitamente, acabamos por responder uma pergunta bastante recorrente que a maioria dos estudantes costumam fazer: onde eu irei ver toda essa Matemática na minha vida? Com os exemplos trabalhados no último capítulo, procuramos proporcionar uma visão da aplicabilidade destes conteúdos nas mais diversas áreas do conhecimento.

Um comentário digno de nota é que buscamos ao longo dos exemplos abordados no texto utilizar polinômios com as mais diferentes variáveis, além do tradicional $x$, e também de representar as funções por letras distintas de $f$. Recorremos a este recurso porque muitas vezes os alunos não compreendem que, na cinemática, $s(t) = s_o + vt$ é uma função polinomial na variavél $t$ tanto quanto, na álgebra, $f(x) = ax + b$ é uma função polinomial na variável

$x$. Deste modo, em diversos exemplos, utilizamos funções com "nomes"diferentes de $f$, além de fazer uso de variáveis que não fosse a $x$.

A partir do que foi exposto neste trabalho, buscamos sensibilizar alunos e professores para a prática do estudo da teoria do limite e da derivada à nível de ensino médio, dada a importância futura do conceito em cursos da área de Exatas e, também, em Ciências Econômicas. Além disso, pudemos analisar diversas aplicações em áreas do *cotidiano* do ensino médio, mostrando que este pode (e *deve*) ser um conteúdo palpável para o aluno pré-universitário.

Deixamos claro que o nosso trabalho não é definitivo, cabendo posteriores contribuições de outros pesquisadores que se interessem em seguir adiante com a ideia de aproximar cada vez mais o ensino básico do ensino superior. Por exemplo, recomendamos para um futuro trabalho a possível elaboração de uma pesquisa que envolva a parte da integração de polinômios voltados para os estudantes do ensino médio, conteúdo que não foi trabalhado nesta dissertação.

# APÊNDICE A

# PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

O Princípio de Indução Finita é um método de *demonstração* matemática que serve para provar a verdade de um número finito de proposições, ou seja, se um enunciado é válido para um valor inicial, então ele é válido para um segundo valor e assim sucessivamente para todos os valores.

De maneira intuitiva, pense no conhecido *efeito dominó*: uma longa fila de peças de dominó em pé, próximas umas das outras, de tal forma que, se você derruba a primeira peça da fila, a segunda cairá, assim como a terceira também e, consequentemente, todas as peças, enquanto houver peças dispostas na fila.

Quando trabalhamos com números naturais, a forma mais comum de se provar uma propriedade por indução é dada *pelo princípio de indução finita* que na prática vem dada por dois passos:

1. **base indutiva**: mostrar que a propriedade é verdadeira para $n = 1$;

2. **passo indutivo**: supondo a propriedade ser verdadeira para $n$, mostrar que é verdadeira também para $n + 1$.

Vejamos um exemplo ilustrativo de realizar uma prova por indução. Suponha que queremos demonstrar a veracidade da propriedade

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim:

i) para o menor valor, $n = 1$, temos que o primeiro membro da igualdade é claramente igual à 1. O segundo membro pode ser escrito como

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

e, portanto, igual ao primeiro membro. Logo, a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

ii) suponhamos, agora, que a propriedade valha para $n$; mostraremos que é verdadeira também para $n + 1$. Assim, temos que:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Então, somando $n + 1$ aos dois membros da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}, \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

colocamos $(n + 1)$ em evidência

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

perceba que $(n + 2)$ pode ser escrito como $(n + 1) + 1$,

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Portanto, provamos por indução sobre $n$ que a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

# APÊNDICE B

# BINÔMIO DE NEWTON

Chamamos de Binômio de Newton toda expressão do tipo $(a+b)^n$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Alguns são *famosos*, como o produto notável *quadrado da soma (ou da diferença) de dois termos* e já possui estabelecido um resultado conhecido; porém, quando termos valores muito elevados para $n$, precisamos de um *mecanismo* viável para determinar os resultados.

Antes, porém, precisamos definir os conceitos de *fatorial de um número* e *número combinatório.*

**Fatorial de um número:** Seja $n$ um número natural. Definimos $n!$ (e lemos como *fatorial* de n) como o produto de $n$ por todos os seus antecessores até o número 1,

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Importante salientar que o fatorial de n é sempre um número positivo, no mínimo igual a 1. Definimos também os fatoriais de 0 e de 1 como, ambos, iguais a 1. Assim, temos

$$0! = 1$$

e

$$1! = 1.$$

Para fixar as ideias, determinaremos 3! e 5!. Então,

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

e

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Perceba que, no desenvolvimento de 5! aparece o produto $3 \cdot 2 \cdot 1$, que é exatamente o mesmo que 3!. Assim, podemos escrever 5! também da forma $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3!$.

Observe agora o caso

$$\frac{5!}{3!}.$$

Basta dividirmos o resultado de 5! pelo resultado de 3!, encontrando

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20.$$

Porém, perceba que podemos fazer uso do caso em que $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3!$, a fim de simplificar alguns termos, ao invés de fazer diversos cálculos. Desta forma, temos que

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20.$$

**Número combinatório:** Definimos o *número combinatório* $C_{n,k}$, onde $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$, como sendo

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Propriedades do Número Combinatório:

**i)** Fórmula de Stieffel:

$$C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1}.$$

Demonstração:

Usando a definição de *número combinatório*, desenvolveremos os termos abaixo:

$$\begin{aligned}
C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!}, \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!}, \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!},
\end{aligned}$$

perceba que $\frac{1}{(n-k-1)!} = \frac{(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!} = \frac{(n-k)}{(n-k)!}$ e que $\frac{1}{(k-1)!} = \frac{k}{k(k-1)!} = \frac{k}{k!}$, e portanto

$$= \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!},$$

colocando $\frac{(n-1)!}{(n-k)!k!}$, ficamos com

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!}((n-k)+k),\\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!}(n-k+k),\\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!}n,\\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!},\\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_{n,k}.
\end{aligned}$$

**ii)** $C_{n,n} = C_{n,0} = 1$.

Demonstração:

$$C_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1n!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

$$C_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

**TEOREMA DO BINÔMIO DE NEWTON**

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$, logo $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{n,k}a^k b^{n-k}$.

Demonstração:

Provaremos por indução sobre $n$.

i) Seja $n = 1$. Então, temos que $(a+b)^1 = (a+b)$.

$$\sum_{k=0}^{1} C_{1,k}a^k b^{1-k} = (C_{1,0}a^0b^1 + C_{1,1}a^1b^0) = (1b + 1a) = (a+b).$$

Portanto, temos que é válido para $n = 1$.

ii) Agora, suponhamos que valha para $n$, provaremos que vale para $n + 1$. Logo:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n, \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}a^k b^{n-k}, \end{aligned}$$

distribuímos $(a + b)$ à direita, obtemos

$$\begin{aligned} &= a\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}a^k b^{n-k}, \\ &= a(C_{n,0}a^0b^n + C_{n,1}a^1b^{n-1} + ... + C_{n,n-1}a^{n-1}b^1 + C_{n,n}a^nb^0) \\ &\quad +b(C_{n,0}a^0b^n + C_{n,1}a^1b^{n-1} + ... + C_{n,n-1}a^{n-1}b^1 + C_{n,n}a^nb^0), \end{aligned}$$

distribuímos, novamente, $a$ e $b$ em seus respectivos parênteses, temos

$$\begin{aligned} &= C_{n,0}a^1b^n + C_{n,1}a^2b^{n-1} + ... + C_{n,n-1}a^nb^1 + C_{n,n}a^{n+1}b^0 \\ &\quad +C_{n,0}a^0b^{n+1} + C_{n,1}a^1b^n + ... + C_{n,n-1}a^{n-1}b^2 + C_{n,n}a^nb^1, \end{aligned}$$

agora, agrupamos os números combinatórios de termos semelhantes

$$\begin{aligned} &= C_{n,0}a^0b^{n+1} + (C_{n,0} + C_{n,1})a^1b^n + (C_{n,1} + C_{n,2})a^2b^{n-1} \\ &\quad +(C_{n,2} + C_{n,3})a^2b^{n-3} + (C_{n,3} + C_{n,4})a^3b^{n-4} + ... \\ &\quad +(C_{n,n-1} + C_{n,n})a^nb^1 + (C_{n,n-1} + C_{n,n})a^{n+1}b^0, \end{aligned}$$

e usamos a *Fórmula de Stieffel*

$$\begin{aligned} &= C_{n,0}a^0b^{n+1} + C_{n+1,1}a^1b^n + C_{n+1,2}a^2b^{n-1} + C_{n+1,3}a^3b^{n-2} + ... \\ &\quad +C_{n+1,n-1}a^{n-1}b^2 + C_{n+1,n}a^nb^1 + C_{n,n}a^{n+1}b^0, \end{aligned}$$

por fim, usamos o somatório, resultando em

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1,k}a^k b^{n+1-k}.$$

Portanto, provamos, por indução, que a relação

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} a^k b^{n-k}$$

vale para todo $n$ natural.

# BIBLIOGRAFIA

[1] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contextos e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2011. V.3

[2] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa**. 2ª edição renovada. São Paulo: FTD, 2005. V.3

[3] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José.**Fundamentos de matemática elementar: limites, derivadas, noções de integral**. 6ª edição. São Paulo: Atual, 2005. V.8

[4] SOUZA, C. C. A. **Materiais manipuláveis: a matemática ao alcance das mãos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual de Santa Cruz, 2013.

[5] LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3ª edição. São Paulo: HARBRA, 1994. V.1

[6] MENDELSON, Elliott. **Schaum's outline of theory and problems of beginning calculus**. 2ª Edição. Elliott Mendelson, –.

[7] SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**. 2ª edição. São Paulo: Makron Books, c1995. V.1

[8] FLEMMING, Diva Marilia; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 6ª edição, revisada e ampliada. São Paulo: Makron Books, 2007. 448 p.

[9] Calculus for Biology I. **Applications of the Derivative - Graphing**. San Diego State University: 2003. Disponível em $http : //www - rohan.sdsu.edu/ jmahaffy/courses/s00a/math121/lectures/graph_deriv/diffgraph.html$ . Acesso em 5 de mar. 2014.

[10] Fatos Matemáticos. Disponível em $http : //fatosmatematicos.blogspot.com.br$ . Acesso em 26 de fev. 2014.