



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FRANCISCO HEBER DA SILVA

DISCUTINDO PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO

MOSSORÓ
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FRANCISCO HEBER DA SILVA

DISCUTINDO PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO

Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues

Co-orientador: Prof.Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

**Ficha catalográfica preparada pelo setor de classificação e
catalogação da Biblioteca “Orlando Teixeira” da UFERSA**

S581d Silva, Francisco Heber da.

Discutindo probabilidade geométrica no ensino básico. /
Francisco Heber da Silva. -- Mossoró: 2013.

42f.: il.

Dissertação (Pós-Graduação em Matemática) – Área de
concentração: Estatística) – Universidade Federal Rural do
Semi-Árido. Pró-Reitoria de Ensino e Pesquisa.

Orientador: Prof^o. Dr. Sc. Walter Martins Rodrigues.

Co-orientador: Prof^o. Dr. Sc. Antonio Ronaldo Gomes
Garcia.

1.Ensino probabilidade. 2.Geometria. 3.Currículo.
I.Título.

CDD:625 9

Bibliotecária: Marilene Santos de Araújo
CRB-5/1033

FRANCISCO HEBER DA SILVA

DISCUTINDO PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em matemática.

APROVADO EM : 12 de Abril de 2013

BANCA EXAMINADORA



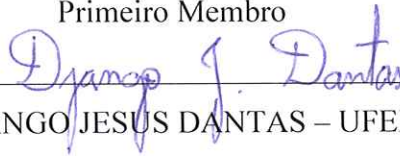
Prof.º Dr. WALTER MARTINS RODRIGUES – UFERSA

Presidente



Prof.º Dr. ANTONIO RONALDO GOMES GARCIA – UFERSA

Primeiro Membro



Dr. DJANGO JESUS DANTAS – UFERSA

Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 12 de Abril de 2013.

Dedico este trabalho a duas pessoas que são de enorme importância em toda essa caminhada: minha esposa Natália e meu filho Orlandino, que por meio de sentimentos inestimáveis, escreveram comigo essa notável página da minha vida.

AGRADECIMENTOS

A minha Mãe, a quem eu devo toda educação ética-informal, que me foi transmitida desde a infância.

A todos os meus alunos, sem restrições, com quem tive o privilégio de me apresentar como professor, pois sem a menor dúvida, foram eles o combustível intelectual que me levou às primeiras reflexões acerca desse material.

A todos os meus colegas do PROFMAT, com quem tive a honra de aprender lições que não se limitaram apenas aos objetos da Matemática.

Aos meus colegas professores do IFRN, Campus Ipangaçu, que testemunharam de muito perto meus primeiros passos nesse programa, e que em certos momentos, foram amigos inseparáveis.

Aos meus mestres da UFERSA, que tanto me instruíram, em especial ao professor Antonio Ronaldo Gomes Garcia, coordenador do curso e co-orientador, que não mediu esforços quando buscou trazer o melhor para nossa turma e para todo o curso.

A servidora Maria Lúcia, que sempre nos presenteava aos sábados com aquele delicioso lanche acompanhado de um bom café.

Não podemos deixar de agradecer à iniciativa da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) em criar o PROFMAT, e a CAPES, que abraçou a ideia, oferecendo o suporte financeiro tão necessário ao seu desenvolvimento.

A todos os meus irmãos maternos, os quais tenho o maior carinho, e respeito.

Ao meu irmão paterno, o qual sou bastante grato, afinal de contas devo a ele toda confiança em mim depositada há exatos 20 anos.

Ao meu cunpadre e amigo, o professor Ricardo César, com quem compartilhei inúmeros saberes, sendo o principal deles o de que ensinar requer além de certo saber, afeto.

Especialmente a duas pessoas raríssimas que hoje me preenchem a vida, minha esposa Natália e meu filho Orlandino, por estarem presentes em todo o processo, desde o exame de ingresso, em 19 de fevereiro de 2011, até os dias de hoje, como companheiros pacientes e compreensíveis da minha escolha. A esses eu devo muito.

Em memória, a meu pai, a quem presto agora homenagem sentida, Francisco Orlandino, que ainda em vida, afirmava que um dia veria seu filho mais jovem formado. Hoje digo e escrevo, suas palavras ecoaram todo esse trabalho.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre”.

(Paulo Freire)

RESUMO

Nos últimos anos têm sido costumeiro as discussões entre os profissionais que fazem o ensino de Matemática acerca dos problemas enfrentados por professores e alunos no que tange ao ensino e aprendizagem de certos conteúdos. As razões que geram essa problemática em sala de aula são as mais diversas, que vão desde a ausência de conhecimentos prévios, que traz danosas consequências já que a dependência cumulativa de saberes é uma das peculiaridades da Matemática, até o desinteresse pelos estudos por falta de alguma motivação prática ou teórica. O presente trabalho discorrerá sobre a possibilidade de conexão entre dois temas de grande destaque na grade curricular de Matemática do ensino básico, a saber, Probabilidade e Geometria, em que serão ressaltados tópicos de cunho histórico, conceitual e de aplicações, provocando uma reflexão entre professores e alunos, com análise das grades curriculares do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), de escolas públicas do Estado do Ceará (CREDE 16) e de escolas públicas do Rio Grande do Norte (12ª DIREC), sobre o momento propício em que podemos introduzir problemas de Probabilidade Geométrica com potencial de resolução, que em paralelo possam servir de subsídios para os professores que tenham a pretensão de trabalhar com esse tema.

Palavras-chave: Ensino, Probabilidade, Geometria e Currículo.

ABSTRACT

Recent years have been customary discussions among professionals that make the teaching of Mathematics of the problems faced by teachers and students regarding the teaching and learning of certain content. The reasons that cause this problem in the classroom are the most diverse, ranging from the absence of prior knowledge, which brings harmful consequences since the dependence of cumulative knowledge is one of the peculiarities of mathematics, to the lack of interest in studies due to lack of any practical or theoretical motivation. This paper will discuss the possibility of connection between two topics of great prominence in the curriculum of primary school mathematics, namely, Geometry and Probability, which will be highlighted topics of historical, conceptual and applications, causing a reflection among teachers and students, with analysis of the curricula of the Federal Institute of Science and Technology of the State of Ceará (IFCE), public schools in the state of Ceará (CREDE 16) and public schools in Rio Grande do Norte (12th DIREN) on propitious moment in which we can introduce problems with Geometric Probability potential resolution, which in parallel to serve as a support for teachers who have the desire to work with this theme.

Key Words: Teaching, Probability, Geometry and Curriculum.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ilustração de um segmento de reta	15
Figura 2: Ilustração de uma circunferência	16
Figura 3: Quadrado com círculo em seu interior	20
Figura 4: Ilustração de um círculo e alguns de seus pontos	21
Figura 5: Circunferências concêntricas	22
Figura 6: Segmento dividido em três partes iguais	23
Figura 7: Segmento unitário dividido em três partes	24
Figura 8: Regiões do plano cartesiano limitadas por retas	25
Figura 9: Quadrado de lado fixo representado no plano cartesiano	26
Figura 10: Retângulo com dimensões fixas representado no plano cartesiano	27
Figura 11: Regiões do plano cartesiano determinadas por inequações	28
Figura 12: Quadrado RSTQ	29
Figura 13: Quadrado, círculo e triângulo	29
Figura 14: Hexágono inscrito	31
Figura 15: Pentágono inscrito	31
Figura 16: Polígono regular de $n = 2k$ vértices	32
Figura 17: Polígono regular de $n = 2k - 1$ vértices	33

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 1 - HISTÓRIA DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA	12
1.1 As primeiras ideias sobre a Probabilidade	12
1.2 Relato histórico acerca do Conde de Buffon	13
CAPÍTULO 2: PRELIMINARES TEÓRICAS	15
2.1 Definições de entes da Geometria	15
2.2 Conceitos básicos de Probabilidade	17
CAPÍTULO 3: PROBABILIDADE GEOMÉTRICA	18
3.1 Problemas e soluções de Probabilidade Geométrica	19
3.1.1 O problema dos ladrilhos	19
3.1.1.1 Desdobramentos para reflexão	20
3.1.2 Proximidade do centro	20
3.1.2.1 Desdobramentos para reflexão	22
3.1.3 Seccionando um segmento	23
3.1.3.1 Desdobramentos para reflexão	23
3.1.4 Seccionando um segmento em três partes para obtenção, ou não, de um triângulo.	24
3.1.4.1 Desdobramentos para reflexão	25
3.1.5 A probabilidade do desencontro	26
3.1.5.1 Desdobramentos para reflexão	27
3.1.6 A distância entre pontos na reta real	27
3.1.7 A exclusão de uma região bem conhecida	28
3.1.7.1 Desdobramentos para reflexão	30
3.1.8 Formando triângulos obtusângulos	30
3.1.8.1 Desdobramentos para reflexão	33
CAPÍTULO 4: SITUAÇÕES-PROBLEMA	35
4.1 Situação-problema 1	35
4.2 Situação-problema 2	35
4.3 Situação-problema 3	35
4.4 Situação-problema 4	36
4.5 Situação-problema 5	36
CAPÍTULO 5: CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	37
REFERÊNCIAS	40
APÊNDICE	41

INTRODUÇÃO

Este trabalho discorrerá sobre o estudo de Probabilidade Geométrica, tema que propõe uma interação entre dois relevantes tópicos do currículo de Matemática do ensino básico, que são Probabilidade e Geometria. A concepção por parte de muitos professores e educadores matemáticos é de que o ensino e aprendizagem de Probabilidade e Geometria, quando esses temas são ministrados separadamente, têm se tornado um desafio bastante árduo. Entretanto, nosso desejo é que este trabalho possa oferecer subsídios para que estudantes compreendam plenamente as noções de Probabilidade, acrescidas neste caso de problemas que relacionem entes da Geometria, como segmentos de reta, área e volume. A concepção dos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) é que: “Não existe um caminho único e melhor para o ensino de Matemática. Conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (BRASIL, 2000, p. 42).

Conduziremos o presente trabalho sequenciando os escritos da seguinte forma: No Capítulo 1, iremos apresentar um apanhado histórico da Probabilidade Geométrica, sua origem, as personalidades que protagonizaram o prelúdio teórico e problemas que motivaram o aparecimento da teoria. No Capítulo 2, apresentaremos algumas definições e conceitos inerentes à teoria de probabilidade e geometria que serão utilizados como alicerce para uma boa compreensão do tema proposto.

No Capítulo 3, introduziremos o nosso objeto de estudo por meio de um prelúdio teórico seguido de problemas, resultados e aplicações, com suas respectivas soluções e demonstrações em riqueza de detalhes, que contarão com o auxílio metodológico do software livre Geogebra. No Capítulo 4, apresentaremos algumas situações-problema que terão fim auto-avaliativo, em que os leitores poderão aplicar conhecimentos assimilados em todo o trabalho. No Capítulo 5, faremos as considerações finais descrevendo a razão pela qual nos sentimos motivados em escrever esse trabalho, tendo como elemento inspirador o depoimento de estudantes que participaram de um mini-curso que ministramos, cujo tema era Probabilidade Geométrica. Além disso, verificamos a partir do estudo das grades curriculares da Rede Pública de Ensino dos Estados do Ceará e Rio Grande do Norte e do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, ambientes vivenciados pelo professor elaborador desta proposta, em que momento do ensino básico seria propício a apresentação de problemas relacionados com a Probabilidade Geométrica, levando-se em consideração os conhecimentos prévios necessários à compreensão do assunto.

CAPÍTULO 1 - HISTÓRIA DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Concebendo o ensino de Matemática como sendo plenamente pautado pelas componentes fundamentais, chamadas de conceituação, manipulação, aplicação e historicidade, é que veremos no capítulo que segue um pouco da origem e evolução do tema acima citado, protagonizado por grandes personalidades que tanto contribuíram para o desenvolvimento e consolidação dessa importante disciplina do saber. Com respeito às três primeiras componentes, LIMA destaca:

Da dosagem adequada de cada uma dessas três componentes depende o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar futuramente, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas, sobretudo o discernimento, a clareza das ideias, o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtudes que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento de três componentes básicas (2007, p.140).

A quarta componente vem oportunizar o exercício do diálogo no processo de ensino/aprendizagem, em que serão questionados os motivos e razões que levaram, à custa de muito talento e perseverança, à descoberta e consolidação de importantes áreas do saber matemático. Em consonância com CONTADOR, quando afirma que:

O Homem, como ser pensante que é, tem a capacidade de, ao receber conhecimento, absorver, acumular, transmitir e usar, não só se transformando como também transformando o ambiente em que vive (2008, p.444).

1.1 As primeiras ideias sobre a Probabilidade

O termo Probabilidade tem origem latina e deriva de *probare*, significando provar ou testar. Segundo MORGADO, “A Teoria das probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios” (1991, p.119).

A civilização grega, tão lembrada pelas literaturas, como realizadora de grandes feitos

em campos da matemática, não abordou o assunto probabilidades, que só viria a ter seu primeiro estudo no século XV, com o italiano Cardano, autor de *Liber de Ludo Aleae*, onde lançara noções preliminares de probabilidade, ligadas ao cálculo ao cálculo das chances de ocorrência em certos jogos de azar.

Um estudo mais rigoroso do tema se deu por meio de uma troca de correspondências entre o Cavaleiro de Meré e Pascal, quando submetera ao segundo dois problemas, a saber:

“Ao jogar dois dados, qual a chance de se obter um duplo seis? e ainda, como se deveria dividir o dinheiro, se certo jogo de azar tivesse que ser interrompido antes do tempo, conhecendo-se a contagem de pontos no momento da interrupção e a quantidade de pontos restantes para o término do jogo?”.

A partir dessas perguntas, surge a motivação para o despertar de um novo ramo da Matemática: *o Cálculo das Probabilidades*, que mais tarde seria de enorme valor em aplicações das mais diversas, em Matemática, ou em áreas afins.

O problema das agulhas de Buffon, que data do século XVIII, foi o primeiro a utilizar noções conjuntas de Geometria e Probabilidade, cujo enunciado dizia:

“ *Considere um plano com retas paralelas com espaçamento d . Lança-se uma agulha de comprimento l nesse plano, qual é a probabilidade da agulha cruzar uma dessas retas?*”

A solução deste problema faz apelo ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, o que foge do escopo desse trabalho. O leitor curioso em estudá-la, poderá encontrar no endereço elet

1.2 Relato histórico acerca do Conde de Buffon

O naturalista Conde de Buffon (1707-1788) nasceu em Montbard, na França e teve sua fama de naturalista ampliada a partir da divulgação de sua *Histoire Naturelle* (1749), obra que influenciou cientistas como Lamarck (1744-1829) e Darwin (1809-1882), famosos por suas teorias evolucionistas. Em 1777, Buffon incluiu no volume IV do Suplemento à *Historie Naturelle* seu trabalho *Essai d'Arithmetique Morale*, em que adapta a matemática com a realidade humana, com o objetivo de medir seus medos, emoções e esperanças. Nesse estudo, Buffon relaciona o dinheiro com os jogos de azar e sua influência no comportamento das pessoas, razão pelo qual deu o nome *Morale* ao título desse artigo.

Buffon introduziu o cálculo diferencial e integral na Teoria das Probabilidades, tendo

como principal ferramenta a análise, e o Problema das Agulhas, que veio a ser o primeiro escrito sobre o que hoje se conhece por Probabilidade Geométrica: problemas de probabilidades que têm espaços amostrais equivalentes a pontos representados por figuras geométricas, mais tarde convertida em Geometria Integral e Estocástica.

CAPÍTULO 2: PRELIMINARES TEÓRICAS

Neste capítulo daremos um apanhado teórico necessário a discussão de um curso de Probabilidade Geométrica. Apresentaremos algumas definições de entes da Geometria e da Probabilidade, indispensáveis ao tema, e, sobretudo, consistentes, pois conforme MORGADO:

“Toda definição deve ser suficientemente precisa para que, definido um conceito, possamos afirmar com segurança se um elemento está ou não contido na definição” (1990, p.2).

Os componentes que integram essa teoria fazem alusão às primeiras discussões dos assuntos de Geometria e Probabilidade, durante o ensino básico, o que vem reforçar noções não apreendidas pelos estudantes.

Para ilustrarmos certos objetos da geometria, utilizaremos o software livre GEOGEBRA, ferramenta computacional de importante valia, e que pode ser explorada como suporte pedagógico para o enriquecimento de nossas aulas.

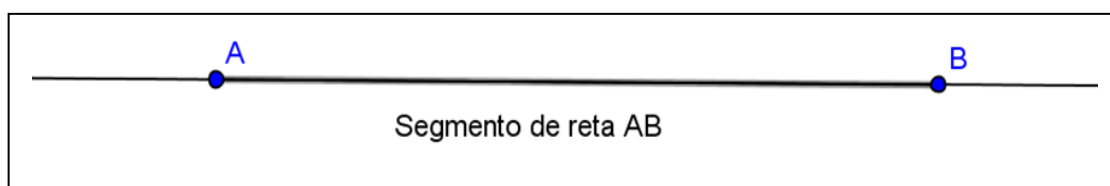
2.1 Definições de entes da Geometria

Adotando os entes ponto, reta e plano como conceitos primitivos, definiremos os conceitos de segmento de reta, medida de um segmento, circunferência, círculo e medida de uma superfície, na sequência a seguir.

Definição 1: Dados dois pontos A e B em uma reta r , chama-se segmento de reta \overline{AB} ao conjunto de pontos de r entre A e B, inclusive, que são os extremos do segmento.

Vejamos uma ilustração na figura a seguir.

Figura 1: Ilustração de um segmento de reta



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

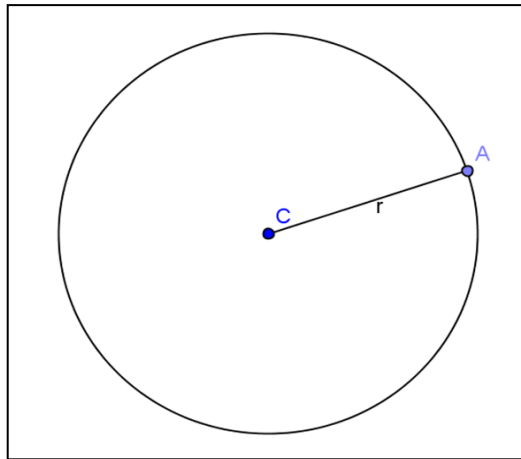
A reta que contém o segmento é dita reta suporte de \overline{AB} .

Definição 2 : Medir um segmento significa compará-lo com outro tomado como unidade de medida, em que resultará um número que chamaremos de medida do segmento \overline{AB} , na unidade de medida utilizada. Denotaremos a medida do segmento \overline{AB} por AB .

Definição 3 : Sejam r a medida de um segmento dado e C e A pontos fixo e variável, respectivamente. Chamamos de circunferência ao conjunto de pontos A que distam r de C .

Ilustramos por meio da figura abaixo.

Figura 2: Ilustração de uma circunferência de raio r



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

A região dos pontos P cuja distância a C é menor, ou igual a r , é chamada de círculo. Em síntese, temos:

$$\text{CIRCUNFERÊNCIA} \leftrightarrow \{P / d_{PC} = r\}$$

$$\text{CÍRCULO} \leftrightarrow \{P / d_{PC} \leq r\}$$

Definição 4 : A toda superfície limitada A faremos corresponder um número real positivo S que será chamado de área de A , isto é, indicará a medida da superfície de A . Denotamos simbolicamente por:

$$A \leftrightarrow S(A)$$

$$\text{Superfície } A \leftrightarrow \text{Medida da Superfície}$$

Essa correspondência adotará os seguintes axiomas:

A₁: Duas figuras que são ditas equivalentes (com igual extensão) possuem áreas iguais, ou seja, se A e B são figuras equivalentes, então $S(A) = S(B)$;

A₂: A área de uma figura que pode ser decomposta em várias partes é igual à soma das áreas dessas partes, isto é, se $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$, então $S(A) = S(A_1) + S(A_2) + \dots + S(A_n)$.

2.2 Conceitos básicos de Probabilidade

A sistematização da teoria das Probabilidades é atribuída pelas literaturas da História de Matemática ao matemático francês Pierre Simon Laplace (1749 - 1827). Em sua obra “Théorie Analytique des Probabilités”, ou “Teoria Analítica das Probabilidades”, publicada em 1812, surge a definição clássica de Probabilidade, conhecida como Regra de Laplace, que tem o seguinte enunciado:

“Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento A e o número de casos possíveis”.

O número obtido acima traduzirá nossa confiança na maior ou menor chance de ocorrência desse acontecimento.

Denotamos esse quociente por:

$$P(A) = \frac{p}{q},$$

em que p indica o número de casos favoráveis ao evento e q indica o número de todos os casos possíveis ao evento.

A definição escrita anteriormente, considerada por muitos como clássica, baseia-se no conceito primitivo de eventos igualmente possíveis.

Outra definição denominada frequentista, ou estatística, considera o limite de frequências relativas como o valor da probabilidade. Dessa forma, considere o número de ocorrências de A em repetições independentes do experimento em questão. Teremos então a chance de ocorrência do evento quantizada por:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}.$$

CAPÍTULO 3: PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

O conceito de Probabilidade visto no Capítulo 2 pode ser utilizado na resolução de inúmeros problemas que discorram sobre fenômenos aleatórios cujos resultados dependerão do acaso. A busca por avaliar as diversas probabilidades de ocorrência é um dos objetivos do estudo desses fenômenos. Citamos como exemplo o simples lançamento de uma moeda, no qual teremos dois possíveis resultados, que são cara {C} ou coroa {K}. Nesse caso dizemos que o modelo é discreto, isto é, podemos enumerar o conjunto dos possíveis resultados.

Em problemas de Probabilidade que remeterão à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas, teremos caracterizado um modelo contínuo, no qual o conjunto de resultados possíveis será dito não enumerável. Nesse caso, a probabilidade de um determinado evento será dada pela razão entre as medidas geométricas, tais como: comprimento, área, ou volume. Desse modo, a Probabilidade Geométrica pode ser compreendida como o ramo da Probabilidade que utiliza entes de geometria em seus cálculos.

Observemos a seguir quatro problemas de probabilidade.

- Uma criança procura, com os olhos vendados, atingir um alvo circular de 50 cm de raio que contém em seu interior um disco de 5 cm de raio, concêntrico ao alvo. Se num determinado arremesso a criança acerta o alvo, qual a probabilidade de que tenha atingido o disco central?
- Sejam quatro pontos A, B, C e D (nesta ordem) igualmente espaçados sobre uma reta. Um ponto P é escolhido aleatoriamente sobre o segmento de reta AD. Qual a probabilidade que pertença ao segmento de reta BC?
- Três pontos quaisquer são escolhidos dentre os seis vértices de um hexágono regular. Qual a probabilidade de que os mesmos formem um triângulo acutângulo?
- O piso de uma sala de aula é revestido por cerâmicas quadradas de lado l . Um aluno escolhe uma cerâmica e solta uma moeda. Qual a probabilidade da moeda de raio r cair inteiramente dentro dessa cerâmica?

Em cada um dos enunciados apresentados anteriormente, destacamos a presença de entes da geometria, o que vem caracterizar a Probabilidade Geométrica. Apenas no terceiro, o espaço amostral é discreto, enumerável, isto é, a probabilidade será dada pelo quociente entre dois números naturais, enquanto que nos outros três o espaço de possibilidades é contínuo, não enumerável, sendo a probabilidade quantizada pelo quociente entre medidas de segmento, ou medidas de superfície.

3.1 Problemas e soluções de Probabilidade Geométrica

Considerando os conhecimentos prévios discutidos no Capítulo 2 , enunciaremos algumas Proposições e Teoremas acompanhados, respectivamente, de suas demonstrações, escritas de maneira compreensível por meio de princípios lógicos, conforme afirma GARBI:

A demonstração de uma afirmação referente a um ou mais entes matemáticos é o processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, evidencia-se a veracidade da afirmação por meio de uma sequência de conclusões (inferências) lógicas válidas (2010, p.33).

Após a apresentação e dedução desses resultados, que tratarão de Probabilidade em contexto geométrico, exporemos alguns desdobramentos de caráter reflexivo que nortearão professores na busca por uma melhor compreensão por parte dos estudantes.

3.1.1 O problema dos ladrilhos

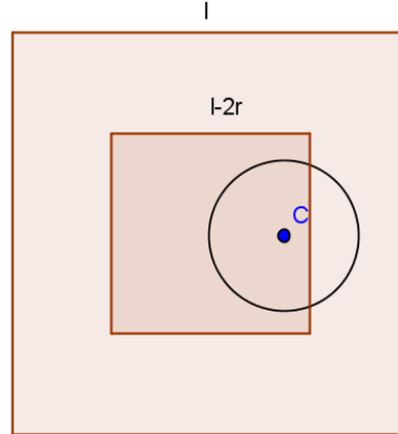
Considerando uma moeda de raio r e uma superfície pavimentada de ladrilhos de lado l , com $l > 2r$. Então, a probabilidade da mesma cair inteiramente dentro de um ladrilho, quando lançada ao acaso, será igual a $\frac{(l-2r)^2}{l^2}$.

Antes de iniciar a discussão da solução, o professor em sala de aula poderia solicitar dos seus alunos uma maior interação por meio do exercício de conjecturas, isto é, convidaria os alunos para a realização do experimento de posse de uma moeda e de um simples tabuleiro de xadrez, cujos valores do raio e do lado pudessem satisfazer tal desigualdade. Desse modo, os alunos estariam estimulados a descobrir qual seria a região interior ao quadrado que seria favorável ao evento. Notemos, portanto, que até então o estudante estaria demonstrando competências de cunho geométrico, quantizando em seguida, a chance associada ao evento calculando a probabilidade desejada. Vejamos então a demonstração:

DEMONSTRAÇÃO: Observamos na figura a seguir que a moeda cairá no interior de um ladrilho de lado l na condição do centro da moeda pertencer a um quadrado de lado $(l - 2r)$,

portanto a probabilidade de ocorrência desse evento será dada pelo número $p = \frac{(l-2r)^2}{l^2}$, isto é, será o quociente entre as áreas dos quadrados de lados $(l - 2r)$ e l , respectivamente.

Figura 3: Quadrado com círculo em seu interior



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

3.1.1.1 Desdobramentos para reflexão

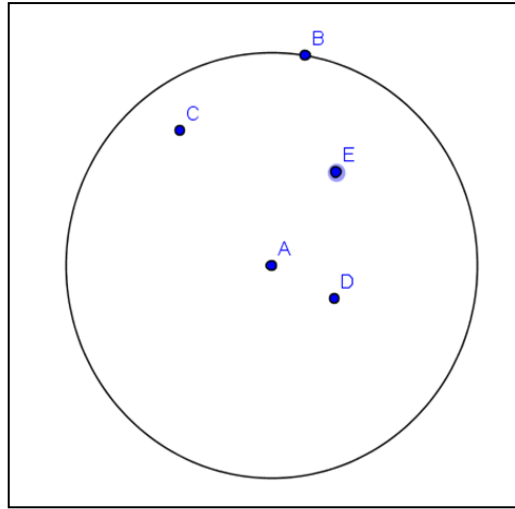
No problema apresentado acima, exploramos dois conceitos bastante relevantes no ensino de Geometria, a saber, Círculo e Quadrado, além da utilização da fórmula que nos fornece a medida das superfícies de cada uma das figuras. A utilização do software Geogebra seria uma ferramenta pedagógica de grande valia nesse problema, já que alunos e professores simulariam valores para a probabilidade conhecidos raio da moeda e lado do quadrado.

3.1.2 Proximidade do centro

Selecionando aleatoriamente um ponto A em um círculo α de raio r e centro C , temos que a probabilidade P de o ponto estar mais próximo do centro do círculo do que da sua circunferência, será exatamente igual a $\frac{1}{4}$.

De posse de recursos computacionais, como por exemplo, o Geogebra, o professor poderia ilustrar situações em que certas escolhas de pontos fossem favoráveis, ou não, ao evento do problema. Vejamos a seguir ilustrações possíveis oriundas do diálogo entre professor e alunos.

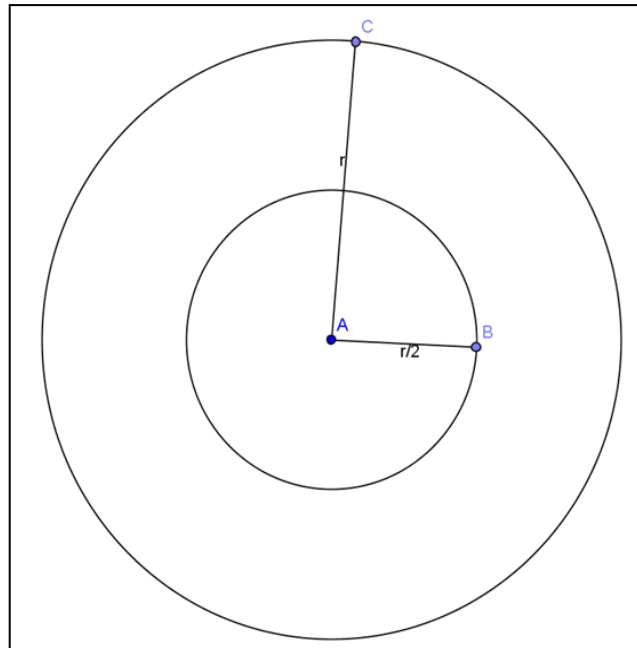
Figura 4: Ilustração de um círculo e alguns de seus pontos



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

Nessa ilustração, percebemos que os alunos teriam bastante segurança em afirmar que o ponto *D*, pertencente ao círculo, estaria bem mais próximo do centro *A* feita com o auxílio do centro *A*, do que da circunferência, isto é, o ponto *D* pertenceria à região favorável, enquanto que o ponto *C* estaria em uma região desfavorável ao evento. No entanto, com respeito ao ponto *E*, não teria tanta confiança, a menos que pudesse medir as distâncias. Observamos então que esse problema oferece amplas oportunidades de interação entre professor e alunos, sejam por meio do Geogebra, ou por meio da tradicional lousa. Enfim, após todo esse processo dialético, professores e alunos estariam investigando no problema que pontos seriam favoráveis, até que se pudesse constituir uma região notável. Observemos, portanto, a solução a seguir.

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos no interior do círculo citado pontos que equidistam do centro *C* e de sua circunferência. Encontraremos, por definição, uma circunferência concêntrica ao círculo, cujo raio será $\frac{r}{2}$, conforme a figura a seguir.

Figura 5: Circunferências concêntricas

Fonte: Autor utilizando o Geogebra

Observamos desse modo que os pontos pertencentes ao círculo de raio $\frac{r}{2}$ estarão mais próximos do centro C, portanto a probabilidade de ocorrência desse evento será dada pelo quociente entre as áreas dos círculos de raios $\frac{r}{2}$ e r , respectivamente, dada pelo número

$$P = \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi \cdot r^2} \rightarrow P = \frac{1}{4}.$$

3.1.2.1 Desdobramentos para reflexão

Após a resolução desse problema, o professor poderá sugerir aos seus alunos a brincadeira do lançamento de dardos, em que serão fixados na parede da sala alvos formados por círculos concêntricos de raios distintos e conhecidos. Além de proporcionar uma interatividade maior, junto à turma, ele poderá comparar os valores obtidos no experimento, ressaltando a diferença entre os modelos equiprobabilísticos e de frequência.

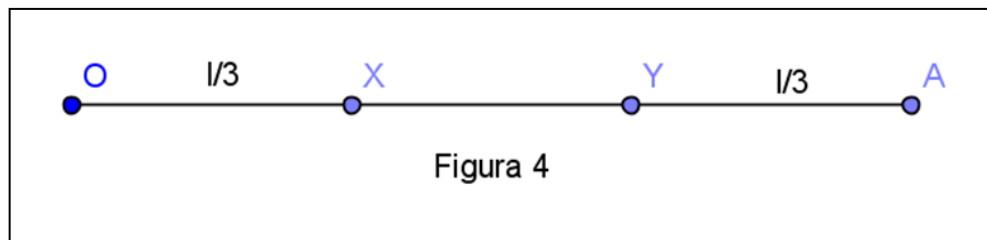
3.1.3 Seccionando um segmento

Seja OA um segmento de comprimento l . Se escolhermos em OA um ponto B ao acaso, então a probabilidade P de que o comprimento do menor dos segmentos, OB ou BA , seja superior a $\frac{l}{3}$, é exatamente igual a $\frac{1}{3}$.

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos inicialmente em OA , conforme a Figura 4, dois pontos divisores X e Y , tais que $m(OX) = m(XY) = m(YA) = \frac{l}{3}$, como vemos na Figura 6. Desse modo, observamos que qualquer ponto B pertencente ao segmento XY nos dará o menor dos segmentos OB ou BA , com medida superior à terça parte de OA , portanto a região favorável ao evento mencionado é todo o segmento XY . Resulta então que a probabilidade de ocorrência desse evento será o número

$$P = \frac{m(XY)}{m(OA)} = \frac{\frac{l}{3}}{l} \rightarrow P = \frac{1}{3}.$$

Figura 6: Segmento dividido em três partes iguais



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

3.1.3.1 Desdobramentos para reflexão

Ao discutir a solução anterior em sala, com os seus alunos, o professor problematizaria levantando questionamentos do tipo:

- Considerando a divisão do segmento em 4 partes iguais, a probabilidade seria $\frac{1}{4}$?
- Considerando a divisão do segmento em n partes iguais, a probabilidade seria $\frac{1}{n}$?

As perguntas acima trariam uma reflexão acerca do significado do termo conjecturar em um contexto matemático, em que muitos alunos poderiam ser tentados a responder condicionados ao resultado obtido anteriormente, antes mesmo de pensarem com a devida atenção.

3.1.4 Seccionando um segmento em três partes para obtenção, ou não, de um triângulo.

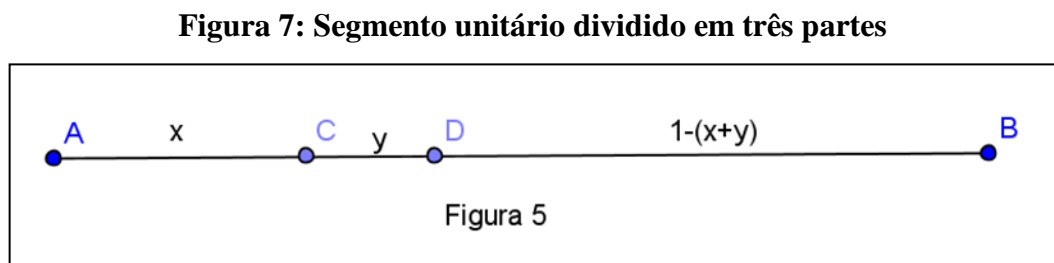
Se dois pontos distintos são escolhidos aleatoriamente em um segmento AB unitário, então a probabilidade de se formar um triângulo com as três partes obtidas será exatamente igual ao número $\frac{1}{4}$.

Nesse problema é notória e indispensável uma reflexão acerca do objeto triângulo, figur de bastante destaque na geometria do ensino básico. O professor poderia iniciar a discussão com perguntas do tipo:

- Quaisquer três segmentos podem formar um triângulo?
- Quais condições devem ser satisfeitas?
- A probabilidade nesse caso é de 100%?

Feito esse prelúdio, o professor estaria mais confortável em resolver o problema impondo à figura por ele ilustrada, condições estabelecidas na teoria que abrange os triângulos.

DEMONSTRAÇÃO: Ao tomarmos dois pontos distintos C e D em um segmento unitário AB , encontramos os segmentos AC , CD e DB de medidas, x , y e $1 - (x + y)$ respectivamente, conforme a Figura 5. Essas medidas formarão um triângulo se forem satisfeitas as desigualdades:



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

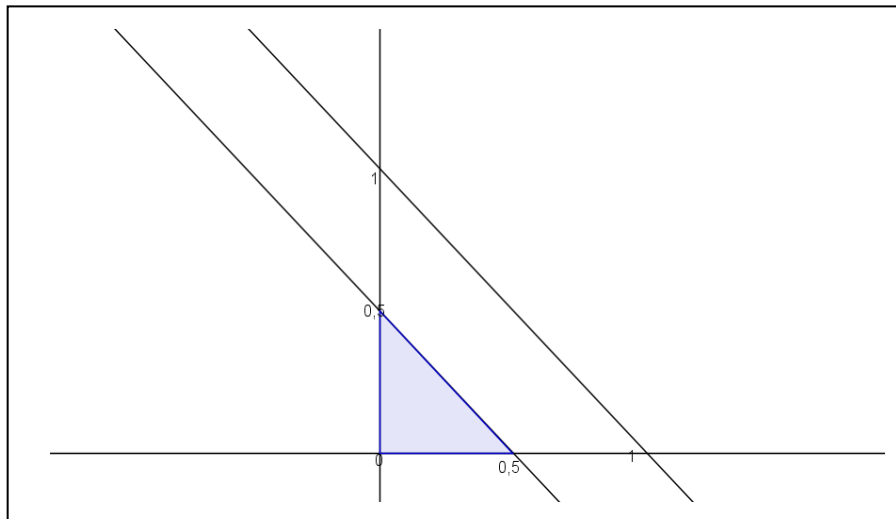
$$i) x < y + 1 - (x + y) \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$ii) y < x + 1 - (x + y) \rightarrow y < \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} & 1 - (x + y) < x + y \rightarrow x + y < \frac{1}{2} \\ \text{iv)} & x > 0 \\ & y > 0 \end{aligned}$$

Afirmamos, portanto, que a condição favorável ao problema será a região comum a todas as cinco desigualdades acima, ilustrada geometricamente e hachurada no plano a seguir.

Figura 8: Regiões do plano cartesiano limitadas por retas



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

Finalmente, associaremos ao evento formar um triângulo a probabilidade obtida do quociente entre as áreas do triângulo retângulo em destaque e o triângulo retângulo de catetos iguais a 1, respectivamente, resultando no número

$$P = \frac{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}}{\frac{1 \cdot 1}{2}} \rightarrow P = \frac{1}{4}.$$

3.1.4.1 Desdobramentos para reflexão

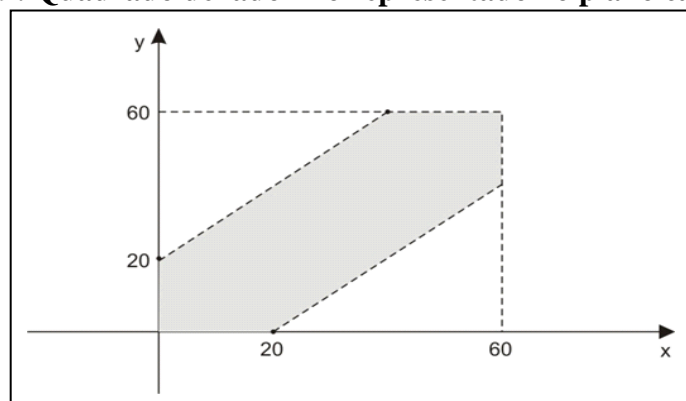
Buscando um envolvimento maior dos alunos diante do problema enunciado anteriormente, o professor poderia entregar a cada um deles um pedaço de macarrão, ilustrando assim um segmento de reta. Em seguida pediria que todos dividissem o macarrão, aleatoriamente, em três partes. Feito isso, anunciaria a turma: formem um triângulo. Esse experimento denunciaria que alguns poderiam fracassar, pois alguns pedaços não obedeceriam às desigualdades triangulares, condição indispensável para que três medidas possam formar um triângulo. Além da constatação geométrica, discutiria o valor da probabilidade encontrada naquele universo limitado.

3.1.5 A probabilidade do desencontro

Considere dois professores de Matemática de uma instituição pública, que conversam por meio de uma rede social, e combinam um encontro em que serão elaborados problemas para o processo seletivo do ano de 2013. Se ambos se comprometem a chegar ao local entre 19h e 20h e esperar o outro durante 20 minutos, indo embora caso o outro não apareça neste intervalo de tempo, então a probabilidade de não haver tal encontro é exatamente igual a $\frac{4}{9}$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam x e y os tempos (em minutos), após as 19 horas, que os professores estarão chegando ao local combinado. O espaço de possibilidades a esse evento será delimitado pelas seguintes desigualdades: $0 \leq x \leq 60$ e $0 \leq y \leq 60$. O evento que consiste no encontro dos professores, complementar ao evento do problema, será associado às desigualdades: $x \geq 0, y \geq 0$ e $|x - y| \leq 20$, cuja solução do sistema será dada pela região em destaque no diagrama cartesiano a seguir.

Figura 9: Quadrado de lado fixo representado no plano cartesiano



Fonte: Autor utilizando o Paintbrush

Segue então que a probabilidade de não haver o encontro será igual à razão entre a soma das áreas dos triângulos retângulos isósceles não hachurados, de catetos com medida 40, contidos no quadrado de lado 60, e a área total do quadrado, dada por:

$$P = \frac{\frac{2 \cdot 40 \cdot 40}{2}}{60 \cdot 60} \rightarrow P = \frac{4}{9}$$

3.1.5.1 Desdobramentos para reflexão

Diversos questionamentos poderiam ser levantados após a resolução desse problema. Dentre eles, teríamos: qual a probabilidade de que haja tal encontro?. Nesse caso, o professor poderia discutir o conceito de eventos complementares em um espaço amostral, isto é, evento que cujas probabilidades têm soma igual a 1 e que são disjuntos, além de exercitar com os seus alunos o cálculo de área de figuras planas não notáveis, por meio dos axiomas que compreendem a teoria de áreas.

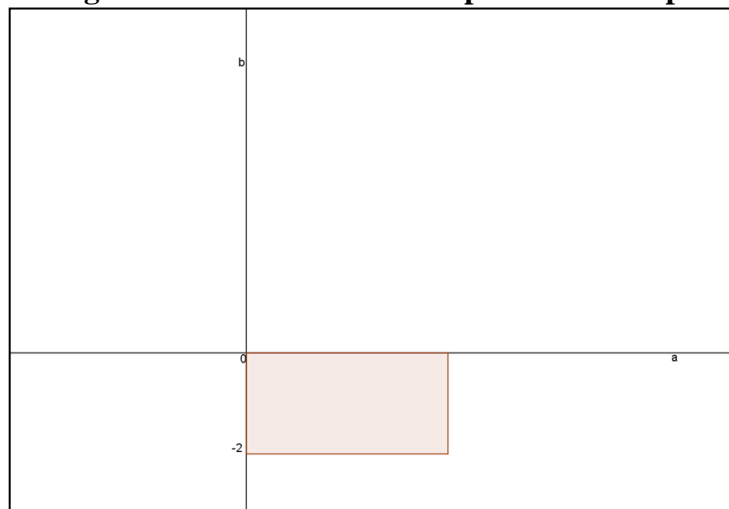
3.1.6 A distância entre pontos na reta real

Considere dois pontos A e B na reta real, de abscissas a e b , respectivamente. Se $0 \leq a \leq 3$ e $-2 \leq b \leq 0$, então a probabilidade de que a distância entre eles seja maior do que três será exatamente igual a $\frac{1}{3}$.

Como pré-requisito indispensável, destacamos nesse problema a Teoria que discorre sobre os números reais, explorando o conceito de pares ordenados, representação geométrica desses objetos e distância na reta real por meio da representação de módulo. Feito esse resgate, o professor trabalharia a demonstração da seguinte forma:

DEMONSTRAÇÃO: As escolhas aleatórias desses pontos A e B em cada um desses subconjuntos reais nos darão pares ordenados do tipo (a, b) , cujo espaço amostral será a região do plano representada por um retângulo de dimensões 2 e 3, conforme a figura a seguir.

Figura 10: Retângulo com dimensões fixas representado no plano cartesiano



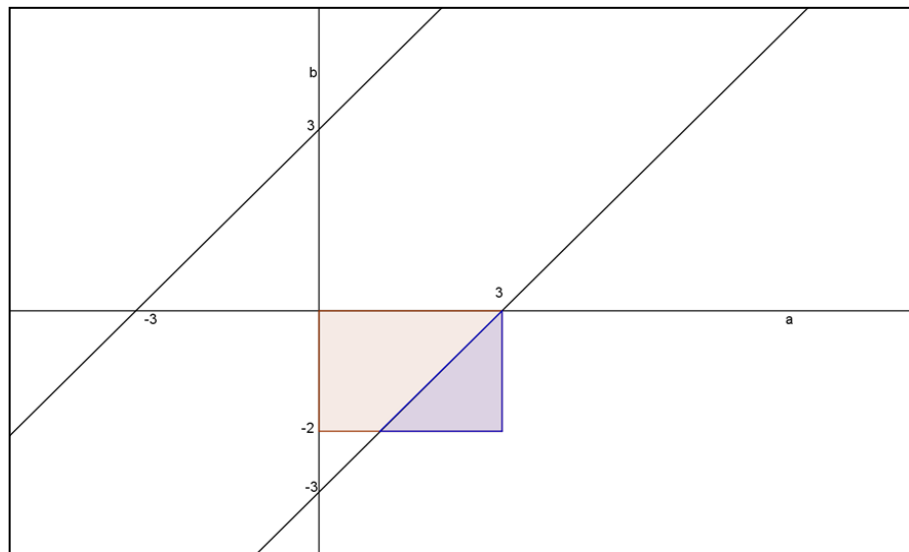
Fonte: Autor utilizando o Geogebra

As condições favoráveis ao evento implicarão na desigualdade modular $|a - b| > 3$, de sistema de inequações:

$$\begin{cases} a - b > 3 \\ a - b < -3 \end{cases}$$

A solução desse sistema será dada pelas regiões do plano, destacadas a seguir:

Figura 11: Regiões do plano cartesiano determinadas por inequações



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

Desse modo, observamos que a região comum ao espaço de possibilidades ao evento será representada por um triângulo retângulo isósceles de catetos iguais a 2, hachurado na Figura 10. Portanto, a probabilidade de que a distância entre os pontos seja maior do que 3 será igual ao quociente entre as áreas do triângulo e do retângulo, respectivamente, que resultará no número

$$P = \frac{\frac{2 \cdot 2}{2}}{2 \cdot 3} \rightarrow P = \frac{1}{3}.$$

3.1.7 A exclusão de uma região bem conhecida

O problema que enunciaremos e discutiremos a seguir, submetido aos participantes da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), remeterá a uma proposição Geométrica que diz:

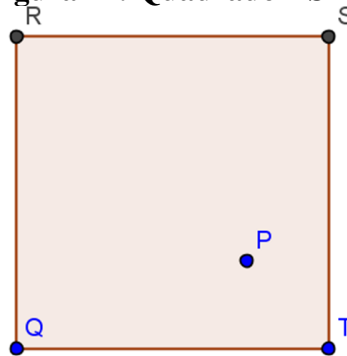
“Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo”.

Recomendamos então que o leitor, antes mesmo de discutir a solução com os seus alunos, retome essa proposição para que o estudante amadureça e possa dar os primeiros passos rumo à demonstração.

Vejamos, portanto, o problema:

Dado um quadrado $QRST$ e um ponto P , escolhido aleatoriamente em seu interior, temos que a probabilidade do ângulo $R\hat{P}Q$ ser agudo é de $\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$.

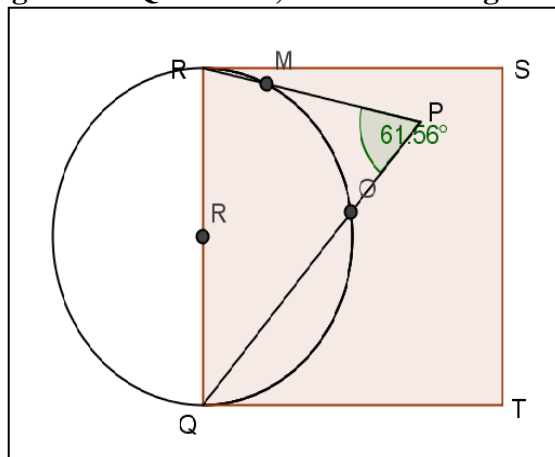
Figura 12: Quadrado RSTQ



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos no interior do quadrado $RSQT$ um arco de circunferência \widehat{RQ} de tal sorte que tenhamos um semicírculo de diâmetro \overline{RQ} . Em seguida, vemos que qualquer escolha que façamos de P fora desse semicírculo nos dará o ângulo de medida $R\hat{P}Q$ menor do que um ângulo reto, isto é, agudo, já que o mesmo será a semidiferença entre os arcos por ele determinados, conforme a ilustração a seguir.

Figura 13: Quadrado, círculo e triângulo.



Fonte: Autor utilizando o Geogebra

Notemos que $R\hat{P}Q = \frac{\widehat{RQ}}{2} - \frac{\widehat{MO}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{MO}}{2} < 90^\circ$ sempre que P for escolhido no interior do quadrado e fora do semicírculo de diâmetro \overline{RQ} . Portanto, a probabilidade de encontrarmos $R\hat{P}Q$ agudo será igual ao quociente entre a área da região externa à circunferência (e interna ao quadrado) e a área total do quadrado. Sendo $2l$ o lado do quadrado, obteremos como probabilidade o número

$$P = \frac{(2l)^2 - \pi \cdot \frac{l^2}{2}}{(2l)^2} \rightarrow P = 1 - \frac{\pi}{8}.$$

3.1.7.1 Desdobramentos para reflexão

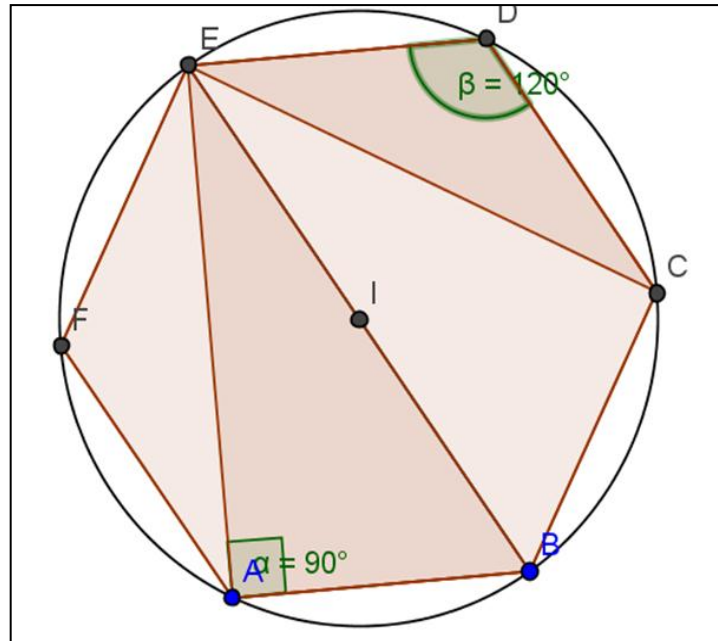
O auxílio do recurso Geogebra será importante, pois denuncia toda região do quadrado considerada favorável ao problema, ou seja, regiões em que $R\hat{P}Q$ tem medida menor do que um ângulo reto, bem como a região que não favorece, já que indicará um valor maior do que 90° para $R\hat{P}Q$.

3.1.8 Formando triângulos obtusângulos

No problema que segue será dada uma atenção especial a triângulos que têm um ângulo obtuso, portanto o professor terá uma oportunidade real de retomar junto aos seus alunos conceitos que compreendem Geometria. O enunciado diz:

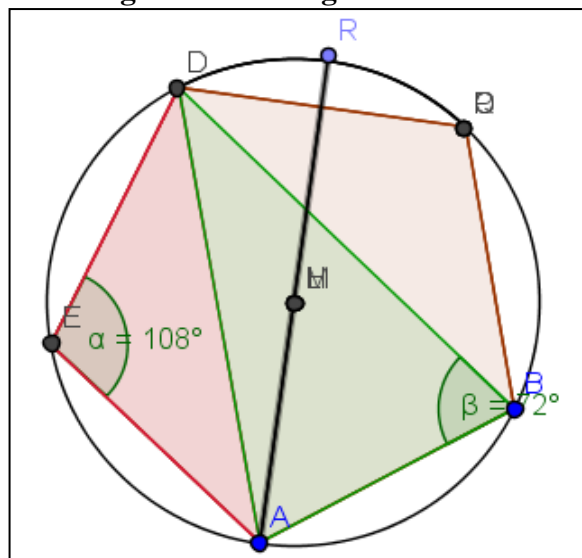
Sejam P_1, P_2, \dots, P_n , com $n \geq 3$, vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência. Três pontos P_i, P_j e P_k são escolhidos aleatoriamente, em que i, j e k são inteiros distintos entre 1 e n , inclusive. Qual a probabilidade do triângulo de vértices $P_i P_j P_k$ ser obtusângulo?

Verifiquemos a seguir algumas ilustrações obtidas com o apoio do Geogebra, que nos faz refletir sobre que condições teremos a garantia de fazermos uma escolha favorável ao evento, isto é, que estratégias devemos utilizar na certeza de obtermos um triângulo obtusângulo.

Figura 14: Hexágono inscrito.

Fonte: Autor utilizando o Geogebra

No Hexágono regular acima, traçamos a diagonal BE, em que suas extremidades são diametralmente opostas, e em seguida traçamos dois triângulos, a saber, CDE e ABE, onde apenas o primeiro satisfaz ao evento, conforme Figura 13.

Figura 15: Pentágono inscrito.

Fonte: Autor utilizando o Geogebra

Se pensarmos no pentágono, $n = 5$, percebemos, conforme a Figura 14, que, traçado o diâmetro do círculo e fixado uma de suas extremidades como primeira escolha, teremos como escolha favorável aquela em que os demais pontos (dois que precisamos), estiverem em uma

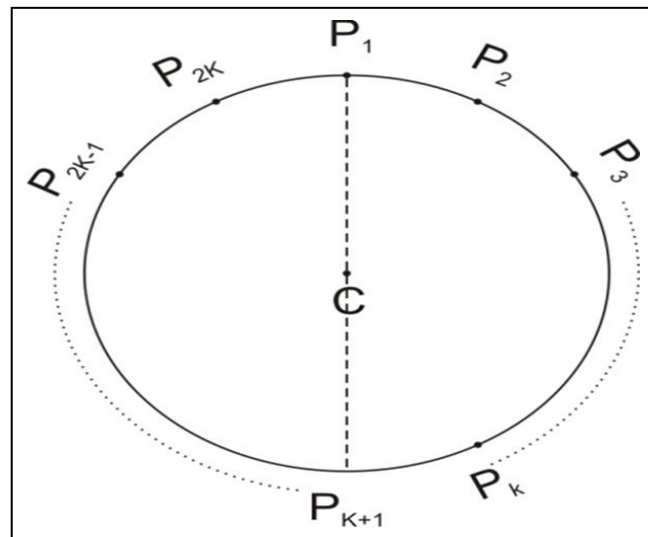
mesma semicircunferência. A diferença que notamos nas duas ilustrações diz respeito à paridade de n , isto é, se ele é par, então o diâmetro terá como extremidade dois vértices do polígono que sejam diametralmente opostos. No entanto, se ele é ímpar, então o diâmetro terá apenas um vértice do polígono como extremidade, já que a outro será o ponto médio de um arco formado por vértices consecutivos do polígono.

Feitas essas considerações, vejamos como se apresenta a solução.

SOLUÇÃO: Analisemos o problema em dois casos distintos:

1º caso: n é par, ou seja, $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$

Figura 16: Polígono regular de $n=2k$ vértices



Fonte: Autor utilizando o Paint

Considere a diagonal P_1P_{k+1} em que suas extremidades são vértices diametralmente opostos. Como os vértices são igualmente espaçados, temos $(k - 1)$ vértices em cada uma das semicircunferências obtidas. Fixado P_1 teremos um triângulo obtusângulo na condição de escolhermos os outros dois vértices em uma das semicircunferências citadas. Como se pode raciocinar desse modo para cada um dos $n = 2k$ vértices, então o número de possibilidades para o evento é de

$$n(A) = \frac{2 \cdot C_{(k-1),2} \cdot 2k}{2}$$

e simplificando, obtemos,

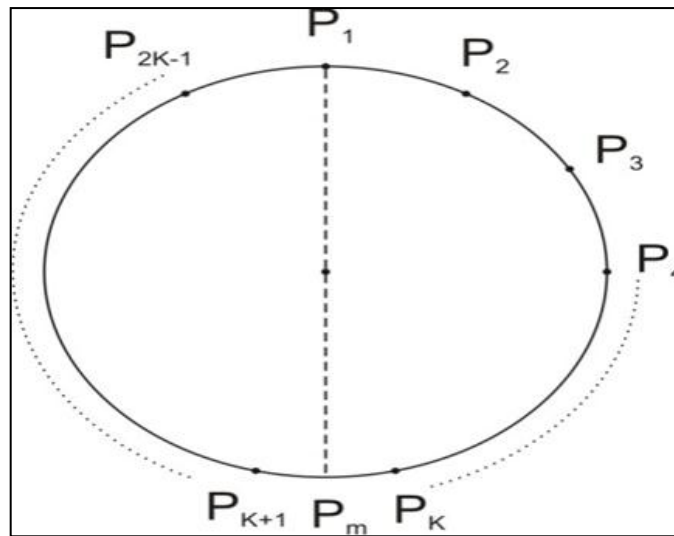
$$n(A) = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2).$$

Fazendo $k = \frac{n}{2}$, chegamos a uma probabilidade igual a

$$P = \frac{\frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-4)}{8}}{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}} \rightarrow P = \frac{3 \cdot (n-4)}{4 \cdot (n-1)}$$

2º caso: n é ímpar, ou seja, $n = 2k - 1$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$.

Figura 17: Polígono regular de $n=2k-1$ vértices



Fonte: Autor utilizando o Paint

Para garantirmos a simetria análoga ao 1º caso, traçamos o diâmetro P_1P_m em que P_m é ponto médio do arco $\widehat{P_kP_{k+1}}$. Desse modo, teremos $(k-1)$ vértices em cada uma das semicircunferências obtidas, o que resultará na contagem de:

$$n(A) = \frac{2 \cdot C_{(k-1),2} \cdot (2k-1)}{2} \rightarrow n(A) = \frac{(k-1) \cdot (k-2) \cdot (2k-1)}{2}$$

casos favoráveis ao evento.

Como $k = \frac{n+1}{2}$, obteremos como probabilidade o número:

$$P = \frac{\frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdot n}{4}}{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}} \rightarrow P = \frac{3 \cdot (n-3)}{2 \cdot (n-2)}$$

3.1.8.1 Desdobramentos para reflexão

Uma prática bastante salutar em problemas desse tipo, no qual se pede uma expressão geral que possa responder por cada um dos polígonos regulares, seria iniciar a discussão por

meio de casos particulares, ou seja, um estudo sobre a probabilidade considerando polígonos em que $n = 3, n = 4, n = 5, \dots$.

Os dois primeiros casos dispensam noções de probabilidade, já que para um triângulo regular (equilátero), a probabilidade é notavelmente nula, pois os três ângulos internos do triângulo são iguais a 60° . Fato semelhante ocorre em um quadrado, pois quaisquer escolhas que façamos dos três vértices, estaríamos formando um triângulo retângulo, mas nunca obtusângulo, acarretando, portanto em uma probabilidade nula. Notemos, então, que a discussão inicial é puramente geométrica, e a resolutividade do problemas vem apenas ratificar aquilo essas primeiras análises, pois se percebermos, temos nos dois casos, respectivamente:

$$n = 3 \rightarrow p = 0$$

$$n = 4 \rightarrow p = 0$$

CAPÍTULO 4: SITUAÇÕES-PROBLEMA

Em posse da teoria anteriormente apresentada, e dos problemas previamente discutidos, enunciaremos cinco situações-problema que terão o caráter de auto-avaliação, isto é, servirão como instrumento de aferição de aprendizagem. Duas delas serão solucionadas no apêndice, mas julgamos ser imprescindível que o leitor reflita bastante, e em seguida busque solucioná-las, pois essa estratégia se revelará exitosa quando aplicadas por estudantes que são submetidos a problemas de Matemática.

4.1 Situação-problema 1

Dois estudantes caminhavam no pátio da escola, durante o intervalo de aula, quando observaram que todo aquele espaço de entretenimento era pavimento por cerâmicas quadradas de lado 5 cm. Um deles retirou uma moeda do bolso, cujo raio da superfície circular era de 2 cm. Se um deles lançar ao acaso essa moeda no pátio, qual a probabilidade da mesma vir a cair inteiramente dentro de um dos quadrados?

4.2 Situação-problema 2

Durante o recesso de dezembro, pai e filho resolveram descansar da rotina da cidade grande em uma fazenda da família. Chegando lá, buscaram entretenimento em jogos que potencializam a concentração e criatividade, dentre eles, o xadrez e o lançamento de dardos. Em se tratando desse último, havia um alvo representado por um disco vermelho de raio 9 cm, e no seu interior um disco preto de raio igual a $\frac{2}{3}$ do anterior. Admitindo que o dardo lançado pelo filho atinja o alvo, qual a probabilidade do lançamento acertar o disco preto?

4.3 Situação-problema 3

Suponha dois números, x e y , escolhidos aleatoriamente em cada um dos intervalos reais $0 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 6$. Qual a probabilidade de que a soma desses números seja menor do que, ou igual a 2?

4.4 Situação-problema 4

Considere um polígono regular de vértices P_1, P_2, \dots, P_n , com $n \geq 3$, inscrito em uma circunferência. Escolhendo três pontos P_i, P_j e P_k , aleatoriamente, em que i, j e k são inteiros distintos entre 1 e n , inclusive, qual a probabilidade do triângulo de vértices $P_i P_j P_k$ ser acutângulo?

4.5 Situação-problema 5

Dois estudantes de uma licenciatura em Matemática planejam um encontro na biblioteca universitária para os estudos de um problema em Teoria dos Números. Combinam chegar à biblioteca entre 18hs e 19hs, e aguardar um ao outro durante 15 minutos, indo embora caso um deles não apareça neste intervalo pré-determinado. Nesse caso, qual a probabilidade de que haja tal encontro?

CAPÍTULO 5: CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

As primeiras motivações para a elaboração deste trabalho se deram durante o estudo da disciplina de Matemática Discreta (MA12), que ocorrera no primeiro semestre de 2011, em que pudemos observar problemas de Probabilidade relacionados a elementos da Geometria, contidos no livro texto “A Matemática do Ensino Médio, Volume 2”, dentre os quais ressaltamos:

“Selecionam-se ao acaso dois pontos em uma circunferência. Qual a probabilidade da corda determinada por esses pontos ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência”?

Após esse contato, iniciamos nossa pesquisa em busca de mais problemas dessa natureza, e o que percebemos foi uma tímida presença em livros textos que são referência no currículo do ensino básico. Quando eram abordados, surgiam apenas como apêndice ao estudo das probabilidades, ausentes, no entanto, de um prelúdio teórico que pudesse servir como suporte à resolução e compreensão dos mesmos. Do pouco que encontramos, elaboramos uma miscelânea de problemas que, a princípio, poderiam ser discutidos entre alunos que participavam de estudos para competições de Matemática, como OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática).

Nossa primeira experiência em sala de aula, relacionada a esse trabalho, ocorreu no IFRN (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte), Campus Ipanguaçu, com um público de alunos do ensino médio que se preparavam para a participação da OBMEP, no ano de 2011. Além de discutirmos problemas dessa envergadura, refletíamos também sobre a possibilidade desse tópico estar presente no currículo do ensino básico, por se tratar de assuntos tão desafiadores. Em outra oportunidade, fomos desafiados a ministrar um minicurso na UECE (Universidade Estadual do Ceará), Campus Iguatu, durante a programação da Semana de Matemática daquela instituição, realizada no mês de maio do ano de 2012. Nesse curso estiveram presentes alunos e professores da região que nos fizeram refletir sobre alguns questionamentos, como por exemplo: Qual a razão deste tão importante tema não ser tratado no ensino básico, e se tratado, em que momento poderíamos fazê-lo? O que os colegas professores acreditam ser possível? Qual a receptividade dos alunos participantes do minicurso?

Após a realização desse evento, colhemos depoimentos de um professor do IFCE, Campus Jaguaribe, e de uma aluna do IFCE, Campus Iguatu, participantes do minicurso, transcritos seguir.

Para mim, foi bastante intrigante descobrir que podemos relacionar dois temas tão interessantes como Probabilidade e Geometria, ainda no ensino básico. Um fato que me chamou bastante atenção foi o caráter contínuo e limitado do espaço amostral, de quase todos os problemas, haja vista que a probabilidade abordada nos livros de ensino médio, que circula em nossas escolas, só compreende problemas cujo espaço amostral é discreto. Outro ponto que gostaria de destacar está relacionado com a “visão utilitarista” que se instalou nas nossas salas de aula: sempre que vamos apresentar um tópico de Matemática surge a pergunta da moda: Onde vou aplicar isto? Como se na História da Ciência não houvesse inúmeros exemplos de descobertas científicas que num primeiro momento não tiveram aplicação imediata, mas nos anos seguintes tiveram uma larga aplicação nos mais diferentes ramos da Ciência. Como exemplo, cito os números complexos, já que sem eles a linguagem Matemática da Mecânica Quântica desmoronaria, tamanho é o papel central deles no arcabouço da teoria Quântica que foi responsável direta pela revolução tecnológica, nos aparelhos eletrônicos, depois de 1950. Portanto, ênfase: Matemática também serve para Matemática e isto não deve ser menos importante! **(Ricardo César – Professor)**.

Durante a semana de Matemática realizada na UECE (Universidade estadual do Ceará), Campus Iguatu, tive o privilégio de assistir ao minicurso ministrado pelo Professor Francisco Heber da Silva, sobre um assunto o qual não havia tido a oportunidade de ver anteriormente em sala de aula, que foi Probabilidade Geométrica.

Inicialmente foi algo que me causou espanto, por se tratar de dois temas que até então só tivera contato de forma disjunta, e, além disso, precária. No decorrer do curso foram utilizadas algumas noções e definições da geometria que ainda estavam sendo explanadas em sala de aula, já outras, sobre probabilidade, já havia estudado, mas sem um maior aprofundamento no assunto, o que dificultou ainda mais o entendimento.

Ficou perceptível que a inclusão da Probabilidade e da Geometria em fases iniciais do processo de aprendizagem proporcionaria o embasamento teórico necessário para a melhor compreensão da Probabilidade Geométrica no ensino médio. Portanto, vejo como salutar a inclusão desse assunto à grade curricular, considerando que são de extrema importância para o desenvolvimento cognitivo dos discentes. **(Francisca Tainan Pereira Jesuita – Aluna)**.

Em nosso trabalho, acreditamos ser possível a apresentação do tema Probabilidade Geométrica, durante os anos do ensino médio, desde que seja observada a disposição dos

conteúdos de Probabilidade e Geometria nos currículos do ensino básico. A aprendizagem das atividades dependerá do conhecimento prévio que os alunos detêm destes conteúdos, pois em problemas desta envergadura é necessário saber não apenas sobre Probabilidade, bem como Geometria, pelo menos no que tange a conhecimentos básicos.

Este material buscará oferecer suporte aqueles professores que desejem implementar tais conteúdos, uma vez que compreende um apanhado de resultados e problemas, devidamente solucionados, que os ajudarão a desenvolver suas aulas com segurança e motivação. É possível também que este trabalho seja publicado em revistas especializadas em ensino de Matemática, com ênfase à Matemática pura, discutindo problemas atuais de estatística, ou por meio da utilização desta ferramenta, Probabilidade Geométrica, em situações problemas que remetam às demais áreas afins.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, Titu. 102 Combinatorial Problems. Springer Verlag. Nova York, 2002.

DISPONÍVEL em http://www.obm.org.br/opencms/provas_gabaritos/2010 (ACESSO EM 08/03/2013).

GARBI, Gilberto Geraldo. A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. Editora Livraria da Física. São Paulo, 2006.

GNEDENKO, Boris Vladimirov. A Teoria da Probabilidade. Editora Ciência Moderna, 1.ed. Rio de Janeiro, 2008.

HAMMING, Richard W. A arte da Probabilidade. Westview Imprensa, 1994.

LIMA, Elon Lages. Matemática e Ensino. Sociedade Brasileira de Matemática. 3.ed. Rio de Janeiro, 2007.

MACHADO, Nilson José. Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da Matemática. Cortez, 7.ed. São Paulo, 2009.

MORGADO, Augusto César de Oliveira. Análise Combinatória e Probabilidade. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de. Coleção Elementos de Matemática 3: sequências, análise combinatória, matriz. GTR, 2 ed, Belém 2009.

SANTANNA, Adonai S. O que é um axioma. Editora Manole LTDA, 1.ed. Barueri-SP, 2003.

WILLIAM, Feller. Uma introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações. Editora Wiley, 3.ed. 1968.

APÊNDICE

Solução da Situação-problema 4.1:

Análogo ao problema 3.1.1, encontraremos como região favorável ao evento um quadrado de lado ($5 - 2 \cdot 2 = 1 \text{ cm}$), contido no quadrado de lado 5 cm . Portanto, a probabilidade da moeda cair inteiramente dentro de uma cerâmica quadrada será o quociente:

$$P = \frac{1^2}{5^2} \rightarrow P = \frac{1}{25}.$$

Solução da Situação-problema 4.2:

Similar ao que fizemos na demonstração da proposição 2, teremos como região favorável ao evento um círculo de raio igual a $\frac{2}{3} \cdot 9$, então a probabilidade de ocorrência do acerto será igual à razão entre as áreas dos círculos de raios 6 cm e 9 cm , respectivamente, dada por

$$P = \frac{\pi \cdot 6^2}{\pi \cdot 9^2} \rightarrow P = \frac{4}{9}.$$

Recomendamos aos leitores em geral o manuseio do software Geogebra em cada uma das situações-problema, pois além de potencializar a compreensão por meio da ilustração de figuras, ele oportunizará questionamentos diversos implícitos em cada enunciado.