UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

NILO PINHEIRO LANDIM

RAZÃO ÁUREA: EXPRESSANDO A BELEZA DESSE NÚMERO PARA O ENSINO MÉDIO

MOSSORÓ/RN
2014

NILO PINHEIRO LANDIM

RAZÃO ÁUREA: EXPRESSANDO A BELEZA DESSE NÚMERO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Profº. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central Orlando Teixeira (BCOT)
Setor de Informação e Referência

L257r Landim, Nilo Pinheiro.
Razão áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio. / Nilo Pinheiro Landim. -- Mossoró, 2014
70f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Ronaldo Garcia Gomes.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pós-Graduação.

1. Geometria. 2.Razão áurea. 3. Número de Ouro. 4. GeoGebra. I.Titulo.

RN/UFERSA/BCOT CDD: 516

Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB-15/120

NILO PINHEIRO LANDIM

RAZÃO ÁUREA: EXPRESSANDO A BELEZA DESSE NÚMERO PARA O ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM : 25 de abril de 2014

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA
Presidente

Profº. Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA
Primeiro Membro

Profº. Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 25 de Abril de 2014.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, carinhosamente, aos meus pais, Antônio Carlos Pinheiro Landim e Lucia Inês Pinheiro Landim, pelo amor incondicional, pela dedicação, pelos ensinamentos e pelo apoio em todos os momentos de minha vida.

Agradeço ao meu Orientador, Professor e Coordenador Antônio Ronaldo Gomes Garcia, por ter me ajudado e acreditado que este trabalho era pertinente e possível de se realizar. Obrigado pela paciência, pelos “puxões de orelha” nas horas de maior desespero, pelas anotações de grande valia. Tenho certeza de que não poderia ter percorrido este caminho em melhor companhia.

Agradeço a todos os Professores que eu tive durante esse Mestrado, cada um dando a sua contribuição.

Agradeço aos meus irmãos, Camila Aparecida Pinheiro Landim e Nicárcio Pinheiro Landim, por toda ajuda e paciência que tiveram comigo nestes dois anos de Mestrado.

Agradeço aos meus companheiros de Mestrado, em especial Osiel Gomes da Silva e Francisco Diego Moreira, por esses dois anos de aprendizagens e companheirismo. Foram dois anos bem cansativos, mas no final, todos nós conseguimos.

Agradeço ao amigo Daniel Brandão, por toda a sua ajuda no mestrado, por vários dias de estudos para as disciplinas, como pela ajuda fornecida na produção desse trabalho.

"Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo." (Zeizing)

RESUMO

A motivação deste trabalho revela-se na preocupação em discutir assuntos relacionados ao cotidiano do aluno e explicá-los de uma forma atraente para que o mesmo possa absorver as informações necessárias para seu aprendizado do conteúdo estudado. O objetivo deste trabalho é mostrar a importância da Razão Áurea para o estudo da Geometria e das sequências numéricas nas escolas de Ensino Médio, entender como os matemáticos fizeram para chegar à razão áurea utilizando conceitos algébricos e geométricos e mostrar situações que usaram ou não do número de ouro, também assim conhecido, como a questão envolvendo as pirâmides egípcias, a utilização da razão áurea por Leonardo da Vinci, a relação deste numero com a sequência de Fibonacci, a aplicação na botânica e etc. A metodologia utilizada foi a realização de levantamento bibliográfico em livros e observando trabalhos realizados nessa área. Fizemos também uma aplicação com atividade envolvendo o uso do software Geogebra e outra relacionada a sequências com alunos do ensino médio. Os resultados observados foram um pouco de dificuldade no manuseio inicial com o software, porém um alto nível de concentração e empolgação após a transmissão da história da construção do número de ouro e como pode ser observado na natureza.

Palavras-Chaves: Razão Áurea, Geometria, Número de Ouro, GeoGebra

ABSTRACT

The motivation of this work is revealed in concern to discuss issues related to daily life and explain them in an attractive manner so that the student can absorb the information necessary for learning content more appealing as possible, thereby facilitating their learning. The objective of this work is to show the importance of the Golden Ratio to the study of geometry and number sequences in high schools, to understand how mathematicians have made to reach the golden ratio using algebraic and geometric concepts and situations that used to show whether or not the number gold, as the issue involving the Egyptian pyramids, the use of the golden ratio by Leonardo da Vinci, the relationship of this number to the Fibonacci sequence, the application in botany and so on. The methodology was used to conduct literature surveys on books and works done in this area and applying an activity involving the use of GeoGebra software and other related sequences with high school students addressing the content. Results were a little difficulty in the initial handling with the software, but a high level of concentration and excitement after the transmission of the history of building the number of gold and as can be observed in nature.

Keys-Words: Golden Ratio, Geometric, Number Gold, GeoGebra

SUMARIO

LISTA DE FIGURAS

Capítulo

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que se relaciona com as demais áreas de estudos, como: humanas e exatas. A Matemática está presente em áreas que muitas pessoas desconhecem, não por culpa delas, mas por falta de informação. Ela está presente no nosso cotidiano, nas artes, na natureza, na história antiga, entre outros.

É muito comum ouvirmos dos alunos ao lecionarmos assuntos da matemática do ensino fundamental ou médio, perguntas como: “Professor, onde vou utilizar isso na minha vida?”, “Qual a importância disso para meu futuro?”, “Professor, isso é aplicado em algum lugar?”. Foram perguntas como essas que motivaram a realização deste trabalho, tratando de um assunto que dificilmente é lecionado nas escolas de ensino médio, mas que tem uma grande aplicação em várias áreas de ensino, que é a Razão Áurea.

A Razão Áurea, que também é conhecido por Número de Ouro ou Número Áureo ou Proporção Divina é uma constante irracional com o valor 1,6180339..., esta constante é representada pelo símbolo Φ (Phi). Esta constante também recebe outras definições como: Seção Áurea, Razão Áurea, Razão de Ouro, Divina Proporção, Proporção em Extrema Razão, Divisão de Extrema Razão. Todas essas expressões possuem o mesmo significado, mas dependendo do Matemático ou Filósofo ou qualquer pessoa que venha a abordar esse assunto, pode utilizar uma expressão diferente.

Alguns estudos indicam que a Razão Áurea vem sendo aplicado há muito tempo, principalmente na área das Artes, onde este número representa uma proporção muito utilizada em esculturas, pinturas e na arquitetura. Estudos mostram que alguns artistas, entre eles destacam-se Lê Corbusier, mais conhecido como o Modulor, e Leonardo da Vinci, utilizaram dessa proporção para realizar seus trabalhos.

Com base nas referencias estudadas, este trabalho tem como objetivos, mostrar a importância da Razão Áurea para o estudo da Geometria nas escolas de Ensino Médio, pesquisar os mais importantes aspectos que se relacionam a Razão Áurea, entender como os Matemáticos fizeram para chegar a Razão Áurea, utilizando principalmente conceitos geométricos, indicar situações que possam utilizar a Razão Áurea no ensino da Matemática e mostrar as mais importantes propriedades relacionadas ao Número de Ouro.

Com este trabalho, temos a pretensão de estimular o estudo de assuntos que vem sendo discutidos por grandes matemáticos, inclusive antes de Cristo. No capítulo um, mostraremos os conceitos relacionados a Razão Áurea, como sua definição geométrica e algébrica. No capítulo dois e três definiremos a Razão Áurea e algumas aplicações na Geometria. No capítulo quatro mostraremos que se pode encontrar o Numero de Ouro em situações nunca imaginadas, como em medições no corpo humano, na botânica, na reprodução de animais, na arquitetura, entre outros. E a sequência de Fibonacci tem importante relação de seus termos com a Razão Áurea. No capítulo cinco veremos sobre a história da Razão Áurea, mostraremos as Pirâmides de Quéops e Quéfren e mostrar relatos sobre a dúvida se elas foram ou não construídas baseado no Número de Ouro e além das Pirâmides, existe outra grande construção que possui relação das medidas relacionadas ao Número de Ouro, que é o Tempo de Parthenon, construída por Fídeas em Atenas na Grécia. Nos capítulos seis e sete mostraremos algumas atividades aplicadas ao aluno e mostrando como foram aplicadas. Finalmente, no capítulo oito mostraremos as conclusões que foram obtidas neste trabalho.

Capítulo

1. RAZÃO ÁUREA

1.1 – MOTIVAÇÕES PARA O TEMA RAZÃO ÁUREA

Para a realização desse trabalho, buscamos um tema que não é muito comentado nas escolas de Ensino Médio. Esse tema com certeza da margem a uma pergunta: “Por que esse tema?” Afinal, existem temas mais fáceis para serem trabalhados do que a Razão Áurea.

Esse assunto foi o escolhido por apresentar uma grande aplicação em outras áreas, ou seja, possui uma grande variedade interdisciplinar, além de toda sua beleza e perfeição, não é a toa que é considerado um símbolo de harmonia.

Como esse tema é pouco, ou não é trabalhado nas escolas, os alunos a primeira vista irão ter dificuldade. Nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) (1998) onde trata sobre influencia da Historia da matemática no currículo escolar, é defendido que o professor tem que conhecer a dificuldade de como esse assunto foi descoberto e produzido na época, para melhor compreender as dificuldades que o aluno terá para entender o assunto, pois o professor analisando e observando todo o trabalho que tiveram os grandes matemáticos para desenvolver esse tema, fica mais sensibilizado com as dificuldades apresentadas pelo aluno.

Consideramos esse assunto bastante rico, pois além de trabalhar um pouco da História da Matemática e claro a Razão Áurea, acaba por trabalhar também assuntos como:

- Razão e Proporção
- Noções de Geometria
- Equação do 2º grau
- Sequências Numéricas
- Aproximação de Números

1.2 – Definição de Razão Áurea

Veremos mais adiante que a Razão Áurea representa um símbolo de harmonia e beleza para os Matemáticos, Filósofos e Pintores. Veremos também que essa Razão Áurea pode estar presente em várias áreas, como: Botânica, Reprodução dos Animais, Medidas do Corpo Humano, Construções Antigas, Quadros e etc.

Mas podemos fazer algumas perguntas, como:

- “O que é a Razão Áurea?”
- “Quanto vale a Razão Áurea?”
- “Como fazer para encontrá-la?”

1.2.1 - Definição Geométrica:

Se quiséssemos dividir um segmento AB em duas partes, teríamos uma infinidade de maneiras de fazê-lo. Existe, no entanto, uma para a qual o matemático alemão Zeizing, formulou, em 1855, o seguinte principio, relativamente a esta divisão: "Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar entre a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo.“

O grande matemático Euclides, também definiu geometricamente o conceito de Razão Áurea, no famoso livro intitulado por “Elementos”, onde consta: “Para que um segmento seja dividido em Seção Áurea, a razão entre o segmento e a parte maior deve ser igual a razão entre a parte maior e a parte menor”

A definição geométrica de Razão Áurea é que seja um segmento $\overline{AB}$, dizemos que esse segmento está dividido pela Razão Áurea, quando colocamos sobre este segmento um ponto C entre os pontos A e B, sendo $\overline{AC} > \overline{BC}$, de tal forma que $\overline{AC}$ dividido por $\overline{BC}$ seja igual a $\overline{AB}$ dividido por $\overline{AC}$, de acordo com a figura abaixo:

Figura 1 - Segmento de reta $\overline{\mathbf{AB}}$

De onde tiramos a relação Matemática:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

1.2.2 - Definição Algébrica:

Considerando o segmento $\overline{AC}$ = x e $\overline{BC}$ = y e substituindo os valores na definição geométrica, teremos:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

Fixando y, vamos encontrar o valor de x em função de y, para que possamos encontrar o valor de $\frac{x}{y}$. Então, teremos:

$$x^2 = xy + y^2 \rightarrow x^2 - xy - y^2 = 0$$

Aplicando "Bháskara", teremos:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-y)^2 - 4.1.(-y^2) = y^2 + 4y^2 = 5y^2$$

Concluí-se:

$$x = \frac{-(-y)\pm\sqrt{5y^2}}{2.1} \rightarrow x = \frac{y \pm y.\sqrt{5}}{2} \rightarrow x = \frac{y(1 \pm \sqrt{5})}{2} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x e y são segmentos de retas, então não podem assumir valor negativo, então podemos concluir que:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887...$$

Portanto, o valor algébrico do Número de Ouro (Φ) é 1,6180339887... Vale lembrar que alguns autores, ao invés de considerar a Razão Áurea como sendo $\frac{x}{y}$, consideram $\frac{y}{x}$, nesse caso o valor da razão será o inverso do valor encontrado, que será 0,6180339887...

1.3 – PROPRIEDADES DO NÚMERO DE OURO

Existem duas propriedades interessantes que diz respeito ao Número de Ouro, que é a que trata do seu quadrado e seu inverso. Isto é $\Phi^2 = \Phi + 1$. Já no caso do inverso de Número de Ouro, também encontraremos uma propriedade interessante, pois $\Phi^{-1} = \Phi - 1$

Em 1997, foi publicado um poema de Paul S. Bruckman, no periódico The Fibonacci Quarterly, com o nome de "Constantemente Médio", onde ele se refere ao Número de Ouro como "Razão Média". Esse poema relata justamente essas duas propriedades citadas anteriormente. A primeira estrofe desse poema é:

A média áurea é algo absurdo,
Não é um irracional comum.
Se você o inverte (isso é divertido!),
Você a obtém de novo, reduzida de um.
Mas se pela unidade for somado,
Acredite, isso dá seu quadrado.

2. NÚMERO DE OURO NA GEOMETRIA

2.1 - PENTÁGONO REGULAR E O TRIANGULO ÁUREO

Um Pentágono é chamado de regular quando possui os cinco lados e ângulos iguais. Para sabermos o valor de cada ângulo interno de um pentágono regular, é necessário que saibamos primeiro o valor da soma dos ângulos internos, onde pode ser encontrado através da formula 180. (n – 2), para um polígono qualquer, onde n é o numero de lados. Como o pentágono tem cinco lados iguais, então para n = 5, teremos que a soma dos ângulos internos será 540 graus. Portanto o valor de cada ângulo interno do pentágono será 540/5 = 108 graus. Seja um pentágono regular ABCDE e nele traçamos as duas diagonais partindo de A, formando assim três triângulos isósceles. Os dois primeiros isósceles são os triângulos ADE e ABC, pois os dois lados iguais desses triângulos são os lados do pentágono e o outro triângulo isósceles é o ACD, pois os lados iguais desse triangulo são as duas diagonais do pentágono. Sabemos que em um triangulo isósceles os ângulos da base são iguais, então nos dois triângulos ADE e ABC os ângulos da base irão medir 36 graus, pois é justamente a metade de 180 – 108. Sendo assim o triangulo ACD irá possuir os ângulos da base medindo 72 graus e o outro medindo 36 graus. Observe o passo a passo desse raciocínio na figura abaixo.

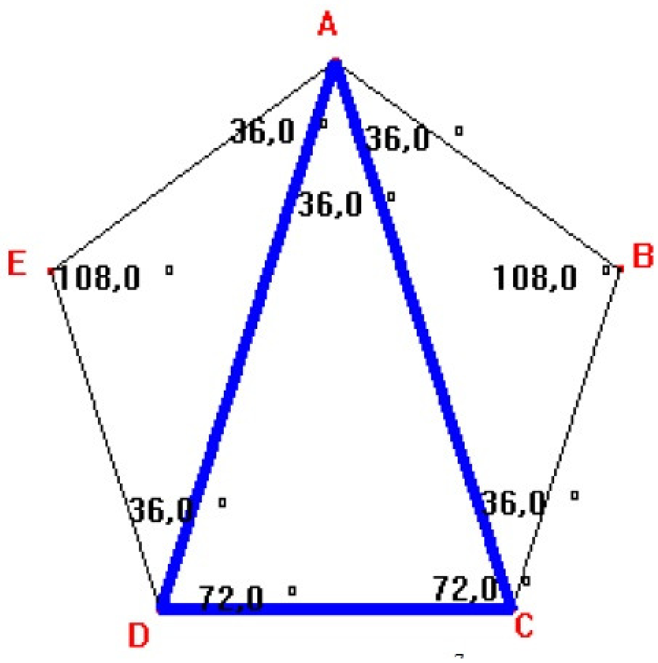

Figura 2 - Pentágono ABCDE

Considerando agora somente o triangulo isósceles ACD e traçando a bissetriz interna do ângulo D desse triangulo, onde essa bissetriz vai interceptar o lado AC no ponto F.

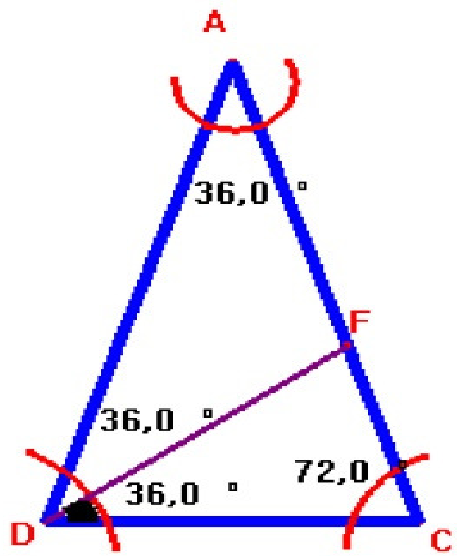

Figura 3 - Triangulo Isósceles ACD

Observe que o triangulo CDF também é isósceles, pois como $\overline{DF}$ é bissetriz, então o ângulo D interno nesse triangulo mede 36 graus e como o ângulo interno C desse triangulo mede 72 graus, logo o ângulo interno F desse triangulo também medirá 72 graus, pois a soma dos ângulos internos de um triângulos tem que medir 180 graus. Então, o triangulo CDF também é isósceles, com os lados iguais sendo $\overline{CD}$ e $\overline{DF}$.

Observando agora os triângulos ACD e CDF, notamos que eles possuem os três ângulos iguais, pois o ângulo C é comum aos dois triângulos, o ângulo D interno ao triangulo CDF é igual ao ângulo A interno a ACD, logo os três ângulos são iguais, então concluímos que esses dois triângulos são semelhantes.

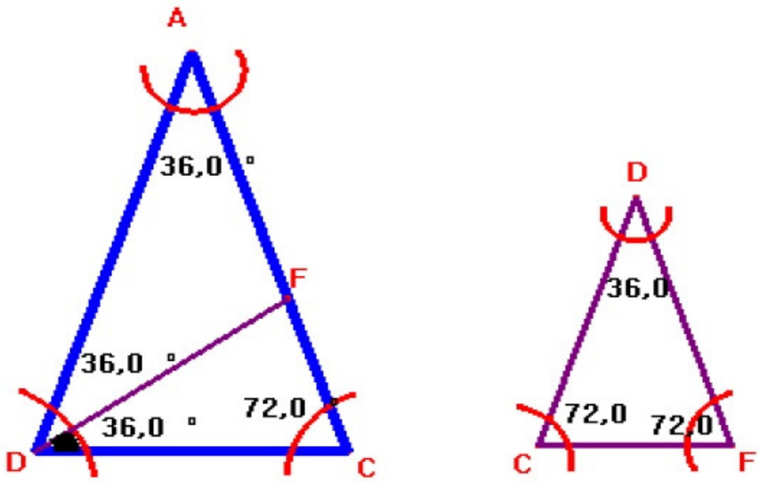

Figura 4 - Triângulos Isósceles ACD e CDF

Como esses dois triângulos são semelhantes, então podemos atribuir a relação de semelhança:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \quad [1]$$

Como os dois triângulos ADF e CDF são isósceles, então $\overline{CD}$ = $\overline{DF}$ = $\overline{AF}$ [2]. Portanto, a partir das duas igualdades, [1] e [2], encontramos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} \quad [3]$$

Se observarmos a relação [3], ela significa que o ponto F divide a linha $\overline{AC}$ pela Razão Áurea, pois esta relação [3] nada mais é do que a definição geométrica da Razão Áurea no lado $\overline{AC}$. Portanto o triangulo ADC é chamado de Triangulo Áureo.

Como o triangulo ADC é Áureo, então a Razão entre $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$ é justamente o Numero de Ouro. Mas $\overline{AD}$ é a diagonal do Pentágono inicial ABCDE e $\overline{CD}$ é a medida do lado do Pentágono, e como a razão entre ele é o numero de ouro, podemos constatar a presença de Φ também no pentágono, através da razão entre a diagonal e o lado.

Uma grande influência do pentágono regular na História da Matemática, é com relação aos Pitagóricos, pois o pentagrama (estrela de cinco pontas) formada a partir da conexão de todos os vertices do pentágono com as diagonais, representa irmandade.

Vimos que o pentagrama é formado pelas diagonais do pentágono regular, que tambem forma outro pentágono menor no seu interior, e continuando o raciocinio, as diagonais desse pentágono menor, formam em seu interior outro pentagrama e outro pentágono menor ainda (Figura 5). Essa progressão prossegue ao infinito.

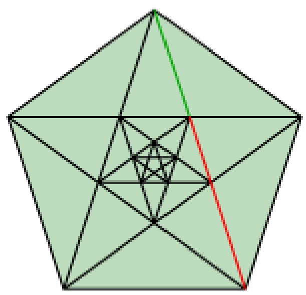

Figura 5 - Formação do Pentagrama

Mas qual a relaçao dessa progressão de pentagonos e pentagramas com o numero de ouro? A razão entre o lado do pentágono maior com o do pentágono imediatamente menor é justamente o Número de Ouro, e essa razão se conserva para toda a sequência.

2.2 - RETÂNGULO DE OURO

Podemos definir um retângulo como um paralelogramo, onde seus lados formam ângulos retos entre si, então ele possui dois lados paralelos entre si verticalmente e dois lados paralelos horizontalmente. Mas o que vem a ser um Retângulo de Ouro ou Retângulo Áureo? Um retângulo é chamado de Áureo, quando a razão entre o lado maior e o lado menor é justamente o Φ, ou seja, 1,6180...

Mas como fazer para construir um retângulo que pode ser considerado como Áureo a partir de um segmento qualquer $\overline{AB}$? Observe os passos abaixo.

<u>1º Passo:</u>

Com a medida do segmento $\overline{AB}$ determinado, construa um quadrado ABCD de lado medindo $\overline{AB}$.

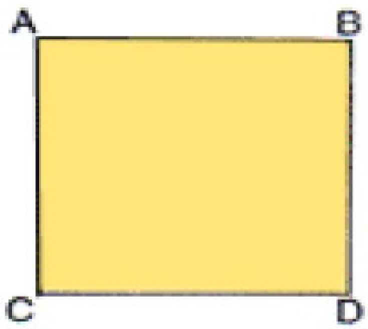

Figura 6 - Quadrado ABCD

<u>2º Passo:</u>

Marcar os pontos E e F, nos lados AB e CD respectivamente, onde E e F sejam os pontos médios desses segmentos, formando o segmento tracejado $\overline{EF}$.

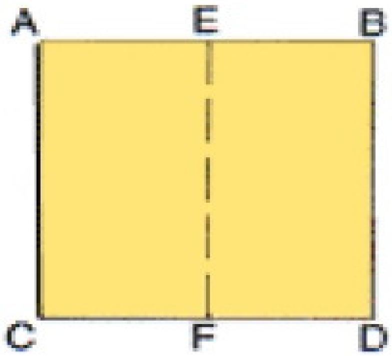

Figura 7 - Quadrado ABCD com os pontos médios E e F

<u>3º Passo:</u>

Traçar a diagonal $\overline{FB}$ do retângulo EBDF

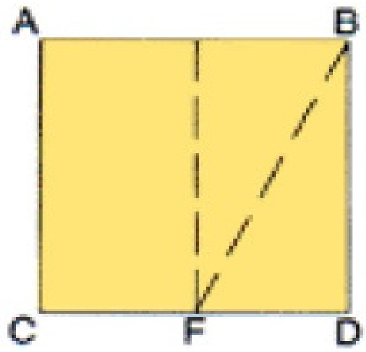

Figura 8 - Diagonal $\overline{\mathbf{FB}}$ do retângulo EBDF

<u>4º Passo:</u>

Prolongando o lado CD e usando um compasso com centro em B, traçar o arco com raio $\overline{BF}$, onde esse arco encontre o prolongamento do lado CD, esse ponto de encontro chamará de G.

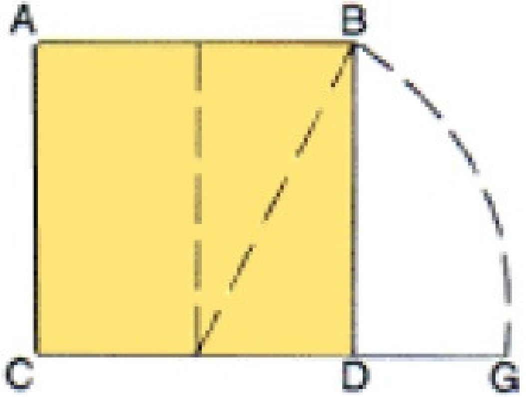

Figura 9 - Prolongamento $\overline{\mathbf{DG}}$ do lado $\overline{\mathbf{CD}}$

<u>5º Passo:</u>

Forme o retângulo BDGH junto ao quadrado ABCD, formando o retângulo ACGH. Esse ultimo retângulo, é um Retângulo Áureo.

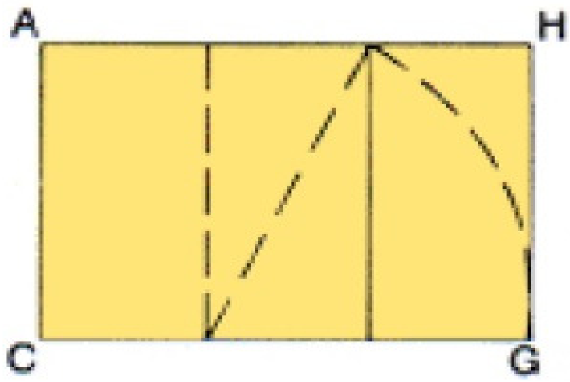

Figura 10 - Retângulo ACGH

Mas por quê esse retângulo pode ser considerado um Retângulo Áureo? Chamando o lado do quadrado ABCD de x, e como o ângulo D é ângulo interno de um quadrado, então ele vale 90º, daí posso afirmar que o triângulo FBD é retângulo. Usando o Teorema de Pitágoras, podemos concluir que o segmento $\overline{BF}$ mede:

$$\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2$$

$$\overline{BF}^2 = x^2 + (x/2)^2$$

$$\overline{BF}^2 = x^2 + x^2/4$$

$$\overline{BF}^2 = 5x^2/4$$

$$\overline{BF} = x\sqrt{5} / 2$$

Mas vimos que $\overline{BF} = \overline{FG}$ e $\overline{CG} = \overline{CF} + \overline{FG}$, então $\overline{CG}$ será igual á:

$$\overline{CG} = \overline{CF} + \overline{FG}$$

$$\overline{CG} = x/2 + x\sqrt{5}/2$$

$$\overline{CG} = x.\ (1 + \sqrt{5})/2$$

Foi visto que a definição de Retângulo Áureo é quando a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo, é justamente o Número de Ouro. Então, calculando a medida dessa razão no retângulo ACGH, teremos:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{x.(1+\sqrt{5})/2}{x} = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}6180...$$

Então, está justificado que o Retângulo ACGH é um Retângulo de Ouro, por construção.

2.3 - ESPIRAL DE OURO

Existem na natureza várias evidências, que se encontram formas de espirais em movimentos ocasionados por animais, no crescimento das plantas, em alguns objetos. Mas existe uma espiral em particular que chamou a atenção de Jacques Bernoulli, que é conhecida como Espiral Logarítmica, pois ela possui uma propriedade conhecida como auto-similaridade, onde nessa espiral, à medida que aumentamos seu raio no sentido horário, a curva não altera seu formato. Entusiasmado com essa propriedade, Jaques escreveu que a Espiral Logarítmica:

> "pode ser usada como um símbolo tanto de vigor e constância na adversidade quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser"

Mas por que essa Espiral Logarítmica é chamada de Espiral de Ouro? Na verdade, a Espiral Logarítmica e o Número de Ouro são relacionados entre si, pois essa Espiral é encontrada tanto no Retângulo de Ouro, como no Triângulo de ouro.

Vimos que o retângulo é chamado de Áureo, quando a razão entre o seu lado maior e o menor é justamente a Razão Áurea. No interior desse retângulo, forma-se um quadrado utilizando o lado menor do retângulo como sendo o lado do quadrado, forma-se também um retângulo ao lado do quadrado com as mesmas características do Retângulo Áureo. Repetindo o mesmo processo indefinidamente, nesse novo retângulo menor formado obteremos a chamada Série de Retângulos Áureos, conforme a figura abaixo.

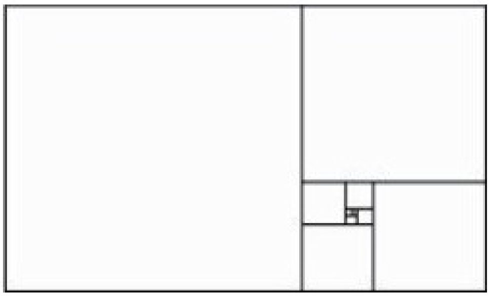

Figura 11 - Série de Retângulos Áureos

Considerando os quadrados formados dentro de retângulo áureo inicial, e unindo os arcos dentro desses quadrados, formamos a Espiral Logarítmica, também conhecida como Espiral de Ouro. Observe a figura abaixo:

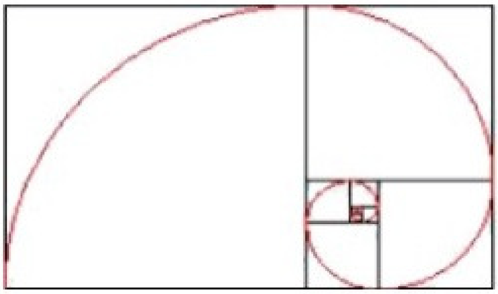

Figura 12 - Espiral de Ouro dentro da Série de Retângulos

Vimos que para um triângulo ser considerado Áureo é necessário primeiro que ele seja isósceles e que a razão entre um de seus lados iguais, e sua base, seja a Razão Áurea. Vimos que a demonstração desse Triângulo Áureo vem da utilização da bissetriz do ângulo da base, onde formará outro triângulo menor semelhante ao triangulo inicial, ou seja, esse triângulo menor também será Áureo. Repetindo o processo indefinidamente, encontraremos a chamada Série de Triângulos Áureos, conforme a figura abaixo:

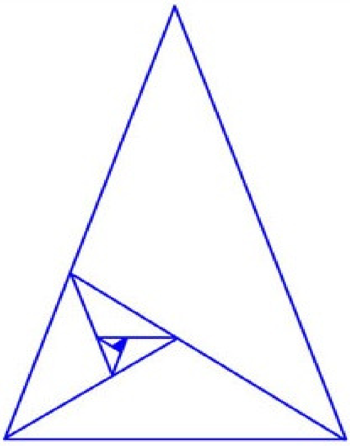

Figura 13 - Série de Triângulos Áureos

A Espiral de ouro pode ser encontrada nessa Série de Triangulo, unindo os vértices desses triângulos com uma curva continua, de acordo com a figura abaixo:

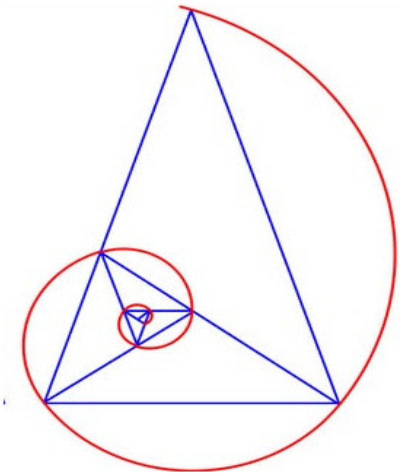

Figura 14 - Espiral de Ouro a partir da Série dos Triângulos Áureos

2.4 – OUTRAS FIGURAS GEOMÉTRICAS RELACIONADA À RAZÃO ÁUREA

O Número de Ouro também esta presente em outras figuras geométricas, como o Decágono regular (Polígono regular de dez lados), Dodecaedro regular (Poliedro de 12 faces) e o Icosaedro (Poliedro de vinte faces).

O Decágono regular é uma figura plana inscritível em uma circunferência, então se dividirmos o raio dessa circunferência pelo lado do Decágono, encontraremos justamente o Número de Ouro.

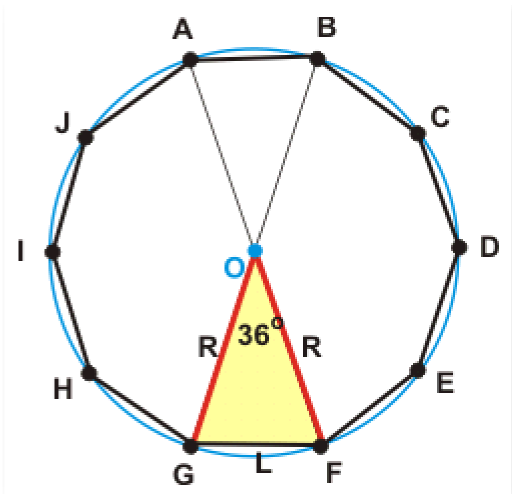

Figura 15 - Decágono regular

De acordo com Mário Lívio:

> "O Dodecaedro regular é um poliedro composto por doze faces, sendo todos pentágonos regulares, o centro dessas doze faces podem ser divididos em três grupos de quatro, e cada um desses grupos formam um Retângulo Áureo."

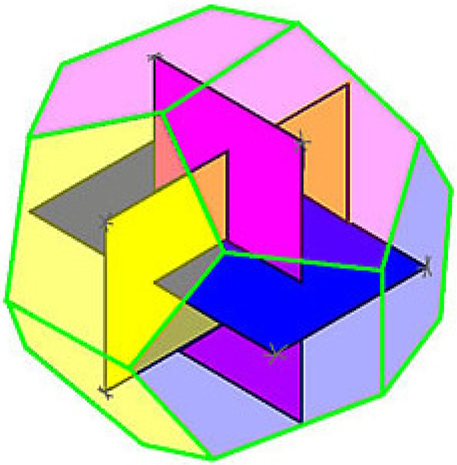

Figura 16 - Dodecaedro regular com os Retângulos Áureos

A Razão Áurea influência, também, nas dimensões e propriedades de simetria de alguns sólidos. Considerando um Dodecaedro regular com aresta de comprimento um, encontramos que sua Área total de sua superfície igual a $15\Phi\sqrt{3 - \Phi}$ e o volume é $5\Phi^3/(6 - 2\Phi)$

Mário Lívio, no livro Razão Áurea, usa um raciocínio semelhante ao Dodecaedro, agora para o Icosaedro regular, onde:

> *[...]se caracteriza por ser um poliedro composto de 20 faces, 12 vértices e 30 arestas. Podemos dividir os dozes vértices de qualquer icosaedro regular e dividir em 3 grupos de quatro, onde encontraremos que os vértices de cada grupo formará um Retângulo Áureo."*

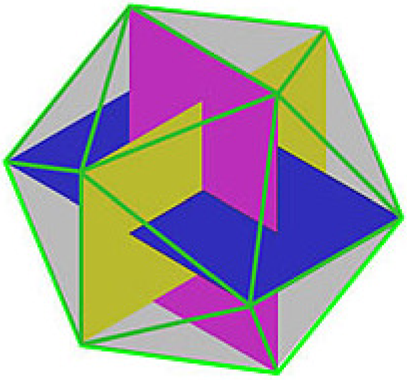

Figura 17 - Icosaedro regular com os Retângulos Áureos

Da mesma forma que o Dodecaedro tem dimensões e propriedades de simetria em função do Número de Ouro, o mesmo caso vale para o Icosaedro regular, pois considerando este sólido com comprimento de aresta igual a um, teremos seu volume valendo $5\Phi^5/6$.

O Dodecaedro e o Icosaedro ainda têm outra propriedade bastante interessante com a influência do Número de Ouro, pois se observarmos um Dodecaedro inscrito em um Icosaedro (Figura 18) ou um Icosaedro inscrito em um Dodecaedro (Figura 19), em ambos os casos, a razão entre os comprimentos das arestas dos dois sólidos tem medida de $\Phi^2/\sqrt{5}$

Figura 18 - Dodecaedro inscrito em um Icosaedro

Figura 19 - Icosaedro inscrito em um Dodecaedro

Percebemos que o Número de Ouro tem uma maior utilização e aplicação na Geometria Plana, mesmo assim observamos alguns casos relacionados a Geometria Espacial.

Capítulo

3. NÚMERO DE OURO E FIBONACCI

3.1 - RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE OURO E FIBONACCI.

Leonardo Fibonacci nasceu na década de 1170, filho de um homem de negócios e funcionário do governo chamado Guglielmo. O apelido Fibonacci foi provavelmente introduzido pelo historiador de Matemática Guillaume Libri, em 1938, embora alguns pesquisadores atribuam o primeiro uso do nome Fibonacci a Matemáticos italianos do fim do século XVIII.

Mas qual a relação entre Fibonacci e o Número de Ouro? Fibonacci foi o responsável por responder a um problema famoso na área da Matemática, o problema está no Capitulo 12 do Liber Abaci, e diz o seguinte:

> *"Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês."*

No primeiro mês temos apenas o par de coelhos inicial. No segundo mês, como o par de coelhos ainda não é fértil, então continuou apenas com um par de coelhos. No terceiro mês, o par de coelhos dá a luz a outro par de coelhos, então teremos dois pares de coelhos. No quarto mês o primeiro par de coelhos dá a luz a outro par, mas o segundo par de coelhos ainda não é fértil, totalizando três pares de coelhos nesse mês. No quinto mês, o primeiro casal de coelhos gera outro casal, o segundo casal também dá a luz a outro casal de coelho, mas o terceiro casal ainda não é fértil, totalizando então cinco pares de coelhos. No sexto mês, o primeiro casal gera o sexto casal de coelhos, o segundo casal gera o sétimo casal de coelhos, o terceiro casal, agora fértil, gera o oitavo casal de coelhos e o quarto e quinto casais ainda não são férteis.

Então, no sexto mês, temos exatamente oito pares de coelhos. Sendo assim temos a seguinte sequência até o momento 1, 1, 2, 3, 5, 8 ... onde cada número representa a quantidade de coelhos que existem no determinado mês.

Observe a figura abaixo para visualizar melhor.

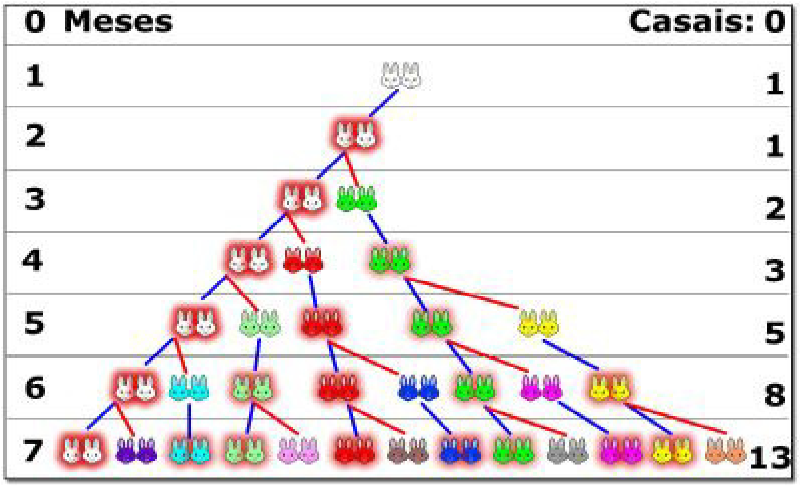

Figura 20 - Reprodução dos Coelhos

Verificando a sequência dada, percebe-se que a partir do terceiro termo, um termo qualquer é sempre a soma dos dois termos imediatamente anteriores a ele. Daí surge à famosa Sequência de Fibonacci, onde a sequência é definida recursivamente, onde podemos definir o f_n como o n-ésimo termo da sequência, sendo $f_1 = 1$ e $f_2 = 1$, então $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n > 2$. Aplicando essa fórmula recursiva, temos então a sequência, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Então, como cada mês da sequência representa os números de par de coelhos existentes, podemos concluir que após 12 meses, teremos exatamente 144 pares de coelhos.

O Matemático Kepler foi muito importante no estudo da Razão Áurea. Em 1608, ele escreveu uma carta para um professor em Leipzing, onde percebemos que ele havia descoberto a relação entre o Número de Ouro e os Números de Fibonacci. Kepler escreveu:

> "[...]É arranjada de tal maneira que os dois termos menores de uma série progressiva constituem juntos o terceiro, e destes, os últimos dois, quando somados, resultam no termo imediatamente subseqüente, e assim por diante, até o infinito, enquanto a mesma proporção continua intacta...quanto mais avançarmos a partir do

> primeiro número, mais perfeito fica o exemplo. Sejam os menores números 1 e 1...some-os, e a soma será 2; some esse com o ultimo dos uns, resultando 3. Some 2 a isso, e tenha 5. Some 3, e tenha 8; 5 e 8, 13; 8 e 13, 21. Assim como 5 está para 8, 8 está para 13, aproximadamente, e 8 está para 13, assim como 13 está para 21, aproximadamente."

Se considerarmos a sequência definida pela razão entre um termo de Fibonacci e o seu antecessor, iremos perceber que essa sequência converge para o Número de Ouro. Considera-se u_n como essa sequência, então $u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Então, $u_1 = 1/1 = 1$; $u_2 = 2/1 = 2$; $u_3 = 3/2 = 1,5$; $u_4 = 5/3 = 1,666...$; $u_5 = 8/5 = 1,6$; $u_6 = 13/8 = 1,625$; $u_7 = 21/13 = 1,6153$; convergindo realmente para o Número de Ouro, então:

$$u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$$

Logo, como desejamos saber o limite dessa sequência definida por u_n, aplicamos o limite tendendo ao infinito nos dois lados da igualdade acima:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{u_{n-1}}\right)$$

Aplicando a definição de limite, teremos:

$$u = \frac{1}{u} + 1$$

Resolvendo esta equação, encontraremos que:

$$u^2 - u - 1 = 0$$

Aplicando "Bháskara" encontraremos sua raiz sendo:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como u_n é uma sequência positiva, então:

$$u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Então, esta demonstrada que a razão entre dois termos consecutivos (u_n) da Sequência de Fibonacci vai convergir para o Número de Ouro.

Podemos ilustrar isso através do gráfico abaixo, onde o eixo vertical seria o índice u_n e o eixo horizontal seria o termo de da sequência de Fibonacci.

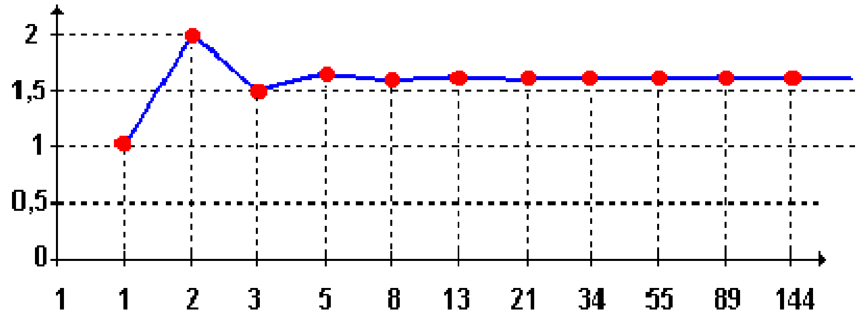

Figura 21 - Gráfico que indica a convergência para o Número de Ouro

Outro caso que aparece o Número de Ouro na Natureza é na arvore genealógica do zangão, o macho da abelha. Para efeito de informação, os ovos da abelha operária que não são fertilizados se tornam zangões, já os que são fertizados pelos zangões se tornam abelhas (fêmeas). Portanto, um zangão não possui "pai", apenas "mãe". Já a abelha possui "pai" e "mãe". Observe a figura abaixo que diz respeito à árvore genealógica do zangão.

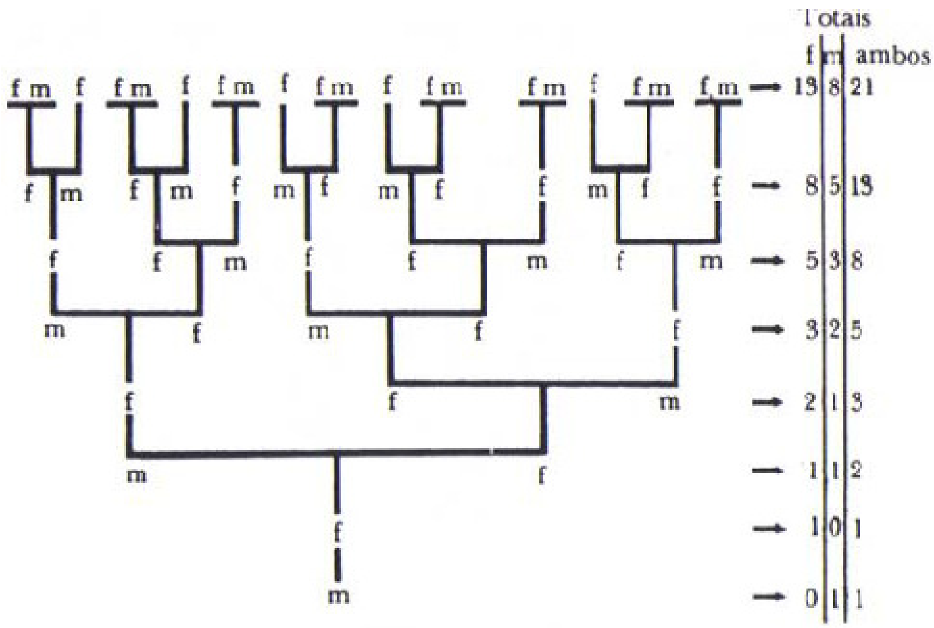

Figura 22 - Reprodução das Abelhas

Observe que, um zangão tem uma mãe, dois avós (pais de sua mãe), três bisavós (dois pais da avó mais a mãe do avô), cinco trisavós (dois para cada bisavó e um para seu bisavô) e assim sucessivamente.

Nas três colunas da direta da figura acima, que diz respeito respectivamente a quantidade fêmeas, machos e os dois juntos, é possível perceber que a sequência dos números diz respeito à Sequência de Fibonacci.

Após observarmos os dois fenômenos da reprodução dos coelhos e a árvore genealógica de um zangão, a sequência de Fibonacci também pode ser encontrada no campo da Física, sendo mais específico na óptica dos raios de luz. Suponhamos uma situação em que se sobreponha duas placas de vidros com índices de refração diferentes. Ao colocarmos essas placas a exposição da luz, esta pode passar pela placa sem sofrer nenhuma reflexão, pode sofrer uma reflexão, duas reflexões, três reflexões, quatro reflexões e assim sucessivamente. A sequência de Fibonacci vai aparecer nesse caso, quando formos contar o numero de raios que emergiram desse sistema. Na figura abaixo, no caso de nenhuma reflexão, observe que somente existirá um raio emergido. No caso de sofrer uma reflexão interna, temos duas possibilidades de raios de luz emergentes. Na próxima parte, no caso de duas reflexões internas, teremos três possibilidades de raios emergidos. Continuando o raciocínio, na parte de três reflexões internas, teremos cinco raios emergidos.

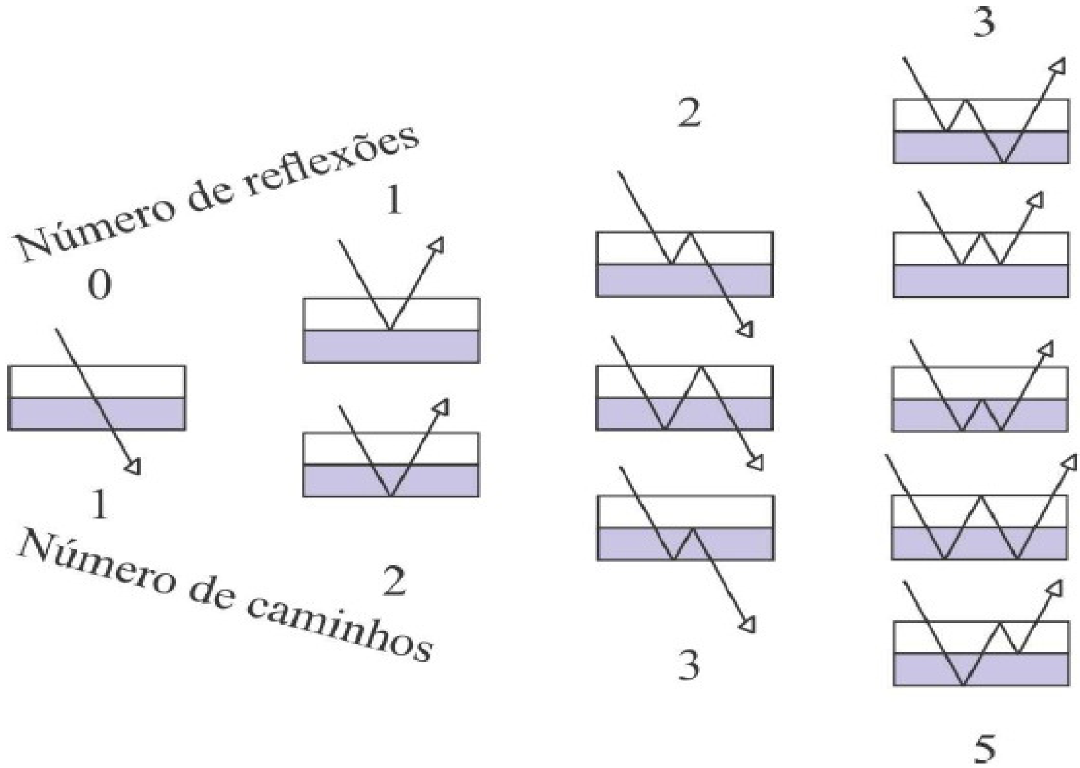

Figura 23 - Número de reflexões dos espelhos

Observe que a sequência dos números de raios emergidos desde o caso em que não tem nenhuma reflexão forma uma Sequência de Fibonacci (1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) de acordo com a tabela abaixo:

Reflexões	Numero de raios emergidos
0	1
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13

Figura 24 - Relação entre o numero de reflexões com os raios emergidos

3.2 - SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA BOTÂNICA

Nesta seção vamos nos inspirar no trabalho desenvolvido por Mário Lívio, no livro Razão Áurea.

Foi visto a relação da Sequência de Fibonacci na Física, através dos raios refletidos nas lentes, mostramos também a relação dos números dessa sequência com a árvore genealógica dos coelhos e das abelhas. Será que existe alguma relação dessa sequência na Botânica?

Nas plantas que crescem verticalmente, as maneiras como as folhas e os ramos se dispõem nas plantas tem grande importância inclusive para sua sobrevivência. Todas as plantas precisam da luz do sol e de água para sua sobrevivência, pois através desses dois elementos é que as plantas realizam a fotossíntese. E qual a importância da maneira como as folhas e os ramos se dispõem com a fotossíntese? Primeiro, as folhas não podem crescer de maneira regular, pois caso ocorresse isso, ou seja, crescessem uma sobre a outra, as folhas que ficassem na parte de baixo não seria iluminada de maneira correta pela luz do sol, da mesma forma ocorreria com a água, pois as folhas na parte de cima iriam receber toda a água, impedindo que ela chegasse às folhas abaixo.

Existe um ramo da Botânica que estuda exatamente isso, se chama de Filotaxia, onde pode ser definido como um padrão da disposição das folhas ao longo do caule. A razão $\frac{a}{b}$ é considerada pelos botânicos como razão filotática, onde a será o numero de voltas dada pela espiral e b é o número de folhas que essa espiral passou.

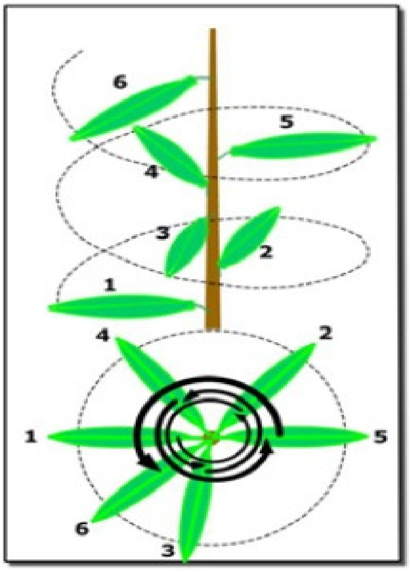

Figura 25 - Sequência de Fibonacci na Botânica

Mas qual a relação das plantas com a Sequência de Fibonacci? É justamente na razão filotática que aparecem os números da sequência, pois tanto o numerador como o denominador tendem a serem números da Sequência de Fibonacci. È normal vermos razões filotática como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{21}$, ... Essas razões são importantíssimas, pois algumas espécies de plantas podem ser identificadas apenas pela razão filotática. Observe a tabela abaixo:

ESPÉCIE	RAZÃO FILOTÁTICA
Gramíneas	$1/2$
Ciperáceas	$1/3$
Macieiras	$2/5$
Tanchagens	$3/8$

Figura 26 - Tabela da Razão Filotática

Os números de Fibonacci além de aparecerem relacionadas às folhas das plantas, como foi visto acima, também podem aparecer no crescimento dos ramos. Observe a figura abaixo:

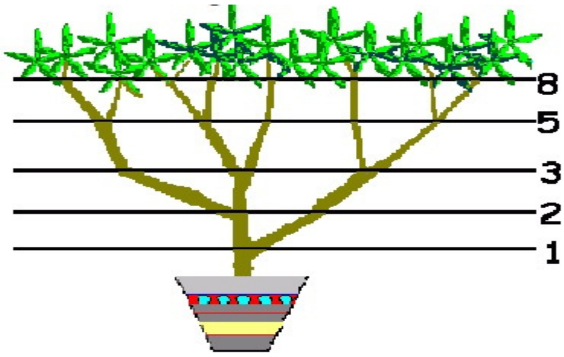

Figura 27 - Números de Fibonacci no crescimento dos ramos

Alem das folhas e dos ramos, algumas plantas possuem o números de pétalas das flores relacionados com os números pertencentes a sequência de Fibonacci. Nas figuras abaixo, a primeira corresponde a uma Jasmim Manga com 5 pétalas e na do lado trata-se de um Girassol com 34 pétalas.

Figura 28 - Jasmim Manga

Figura 29 - Girassol

Nesta seção, vimos então à relação existente entre a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, mostrando a existências desses números em situações relacionada ao cotidiano do aluno, como na Botânica.

3.3 – PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

3.3.1 – SOMA DOS "N" PRIMEIROS TERMOS

A soma dos n primeiros termos da Sequência de Fibonacci sempre pode ser encontrada pela expressão:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$

Prova: Partindo da definição dos termos da Sequência de Fibonacci, onde cada termo é definido como a soma dos dois termos imediatamente anteriores a ele, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2 \\ f_2 &= f_4 - f_3 \\ f_3 &= f_5 - f_4 \\ f_4 &= f_6 - f_5 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1} \end{aligned}$$

Somando os dois lados das igualdades acima, teremos:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \ldots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - 1$$

Ex.: Soma dos 6 primeiros termos da sequência.

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$
$$f_{n+2} - 1 = f_8 - 1 = 21 - 1 = 20$$

3.3.2 – Soma dos "n" primeiros termos de ordem ímpar

A soma dos n primeiros termos de ordem ímpar da Sequência de Fibonacci sempre pode ser encontrada pela expressão:

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

Prova: Observando a Sequência de Fibonacci, podemos notar que:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \\ f_3 &= f_4 - f_2 \\ f_5 &= f_6 - f_4 \\ f_7 &= f_8 - f_6 \\ &\vdots \\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \end{aligned}$$

Somando os dois lados das igualdades acima, teremos:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \ldots f_{2n-1} = f_{2n}$$

Ex.: Soma dos 4 primeiros termos de ordem impar da Sequência de Fibonacci

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = 1 + 2 + 5 + 13 = 21$$

$$f_{2n} = f_8 = 21$$

3.3.3 – Soma dos "n" primeiros termos de ordem par

A soma dos n primeiros termos de ordem par da Sequência de Fibonacci sempre pode ser encontrada pela expressão:

$$f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10} + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

<u>Prova:</u> Para demonstrar a soma dos "n" primeiros termos de ordem par, iremos efetuar a soma dos termos ate o termo que desejamos (f_{2n}) menos a soma dos termos de ordem impar ($f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + ... + f_{2n-1}$).

No item 4.3.1, foi demonstrada a expressão para a soma dos "n" primeiros termos da Sequência de Fibonacci, adaptando essa fórmula para a soma dos "2n" primeiros termos, teremos:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + ... f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n+2} - 1 \quad [1]$$

No item **3.3.2**, foi demonstrada a expressão para a soma dos "n" primeiros termos de ordem ímpar da Sequência de Fibonacci que chamaremos de [2]. Efetuando a operação [1] – [2] dos dois lados das igualdades, teremos:

$$f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10} + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

Ex.: Soma dos 5 primeiros termos de ordem par da Sequência de Fibonacci

$$f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10} = 1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 88$$

$$f_{2n+1} - 1 = f_{11} - 1 = 89 - 1 = 88$$

3.3.4 – Soma dos quadrados dos "n" primeiros termos

A soma dos quadrados "n" primeiros termos da Sequência de Fibonacci sempre pode ser encontrada pela expressão:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_n^2 = f_n.f_{n+1}$$

<u>Prova:</u> Sabemos que pela definição da Sequência de Fibonacci, teremos:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \rightarrow f_k = f_{k+1} - f_{k-1}$$

Multiplicando a equação acima por f_k, teremos:

$$f_k^2 = f_k.f_{k+1} - f_k.f_{k-1}$$

Substituindo na expressão acima, os valores para K = 1,2,3,4,...,n, teremos:

$$K = 1 \rightarrow f_1^2 = f_1.f_2$$
$$K = 2 \rightarrow f_2^2 = f_2.f_3 - f_2.f_1$$
$$K = 3 \rightarrow f_3^2 = f_3.f_4 - f_3.f_2$$
$$K = 4 \rightarrow f_4^2 = f_4.f_5 - f_4.f_3$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$K = n \rightarrow f_n^2 = f_n.f_{n+1} - f_n.f_{n-1}$$

Somando os dois lados das igualdades acima, teremos:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \ldots + f_n^2 = f_n.f_{n+1}$$

Ex.: Soma dos quadrados dos 4 primeiros termos da Sequência de Fibonacci

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 1 + 4 + 9 = 15$$
$$f_n.f_{n+1} = f_4.f_5 = 3.5 = 15$$

3.4 – Sequência de Fibonacci na Geometria

Vale ressaltar também, que os quadrados contidos nessa Série de Retângulos Áureos indicado na figura abaixo, sempre irão possuir lados medindo de acordo com a sequência de Fibonacci:

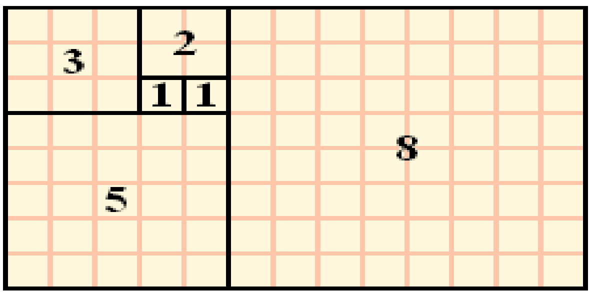

Figura 30 - Relação da Série de Retângulos Áureos com Fibonacci

Foi visto então neste capítulo toda influência de Fibonacci para o Número de Ouro, desde a sua relação, até a aplicação dos números pertencentes a sequência de Fibonacci e do Número de Ouro em algumas áreas

Capítulo

4. NÚMERO DE OURO NO COTIDIANO

4.1 – ESPIRAL DE OURO NA NATUREZA

A Espiral de Ouro também pode ser chamada de Espiral Equiangular. Segundo Mário Lívio:

> "O nome Equiangular, reflete outra propriedade única da espiral Logarítmica. Se desenharmos uma linha reta do pólo até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente o mesmo ângulo." (Lívio, p 141)

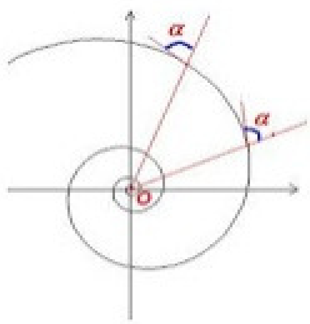

Figura 31 - Espiral Equiangular

Essa propriedade Equiangular vista acima, é encontrada na espiral de Ouro. Os falcões-peregrinos usam essa propriedade para atacar suas presas, pelo fato de eles possuírem os olhos nas laterais de sua cabeça, então eles precisam inclinar sua cabeça aproximadamente em 40 graus para um lado ou para o outro para não perder o alvo de vista e ele desce em rota de espiral logarítmica, pois ele manterá esse ângulo constante, através da propriedade Equiangular.

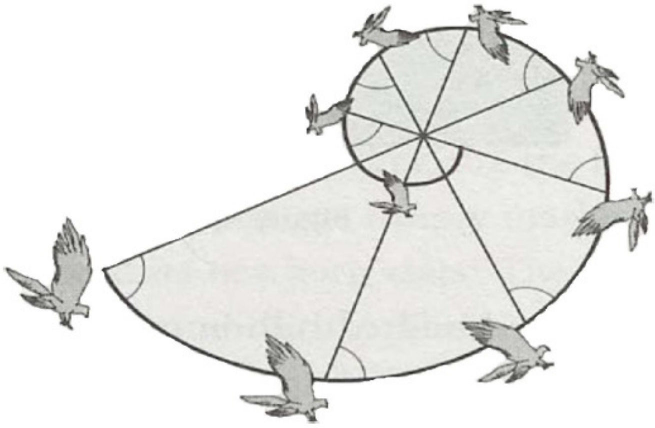

Figura 32 - Vôo dos Falcões-Peregrinos em formato de Espiral

No ramo da Botânica, existem duas flores que apresentam a espiral logarítmica no que diz respeito à distribuição das sementes. As figuram abaixo visualizam esses espirais, a primeira é a conhecida Girassol e a segunda é a Equinácea Púrpura. Em alguns casos, essa Espiral Logarítmica presente no crescimento das sementes é a Espiral de Ouro, mas não é sempre que ocorre.

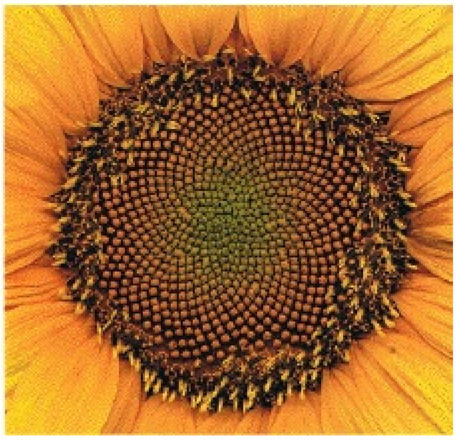

Figura 33 - Girassol

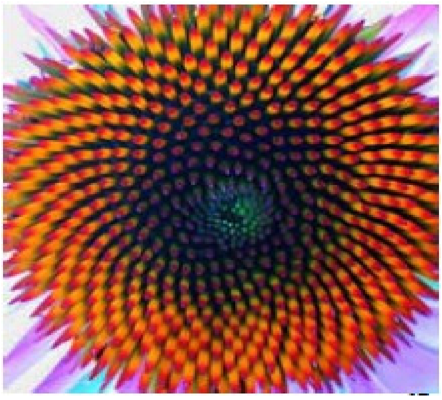

Figura 34 - Equinácea Púrpuras

É muito comum vermos em artigos ou até mesmo em livros relacionados ao Número de Ouro, a relação entre o crescimento da concha dos Náutilus com a Espiral de Ouro. Só que isso é um grande equívoco que se cometem, para forçar uma imagem que realmente não acontece como a figura abaixo:

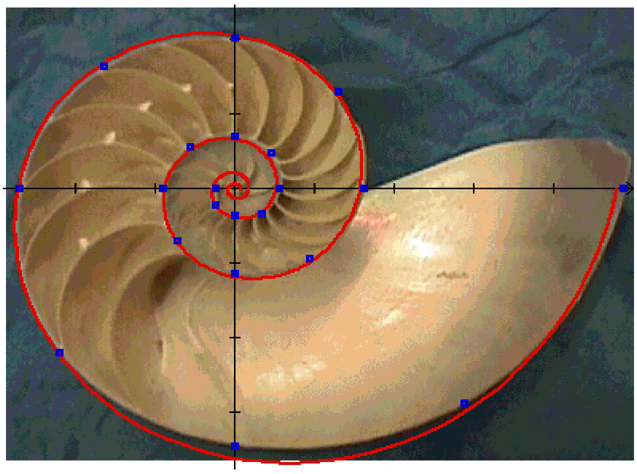

Figura 35 - Concha dos Náutilus

Uma Espiral Logarítmica é uma curva onde possui uma propriedade chamada de autosimilaridade, pois ela não altera seu formato à medida que aumenta. A Espiral de Ouro é uma Espiral Logarítmica específica, ou seja, toda Espiral de Ouro é Logarítmica, mas nem toda Espiral Logarítmica é uma Espiral de Ouro.

Então a concha do Náutilus cresce em uma Espiral Logarítmica, mas que essa espiral não é uma Espiral de Ouro. A figura abaixo mostra as duas curvas, onde a vermelha é a Espiral dos Náutilus e a verde é a Espiral Áurea. Observe que como dizemos antes, essas curvas não se sobrepõe.

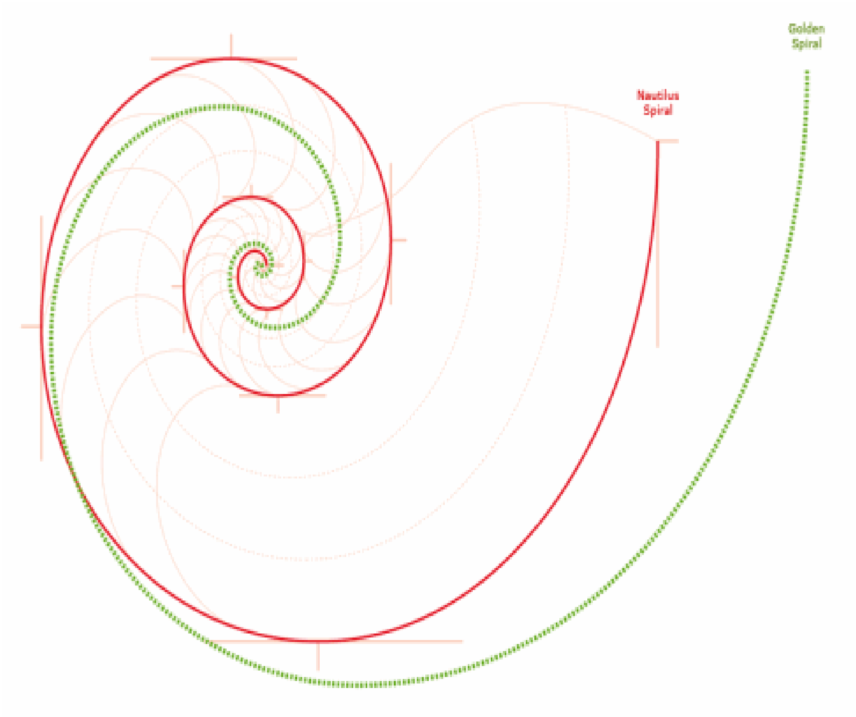

Figura 36 - Espiral dos Náutilus e Espiral de Ouro

Encontramos um site na Universidade Federal de Fluminense, onde mostra uma animação feita no Software GeoGebra, que visualiza muito bem essa situação do crescimento da concha dos Náutilus. A figura abaixo (Figura 37) mostra que a animação citada, onde para cada ângulo θ, marque o ponto P sobre a semirreta que passa por A e faz ângulo θ com o eixo-x, de tal forma que a distância r de P a A seja igual a

$$r = a\, e^{b.\theta},$$

onde a e b são constantes não-negativas. O lugar geométrico do ponto P quando θ varia nos reais é denominado Espiral Logarítmica plana de centro no ponto A, fator de escala a e fator de crescimento b.

Como foi dito anteriormente, toda Espiral Áurea é Logarítmica, mas nem toda Espiral Logarítmica é Áurea. Analisando a fórmula acima citada, essa Espiral Logarítmica será Áurea, quando o seu fator de crescimento for igual a:

$$b = \frac{\ln(\Phi)}{90}, \text{ se } \theta \text{ é medido em graus.}$$

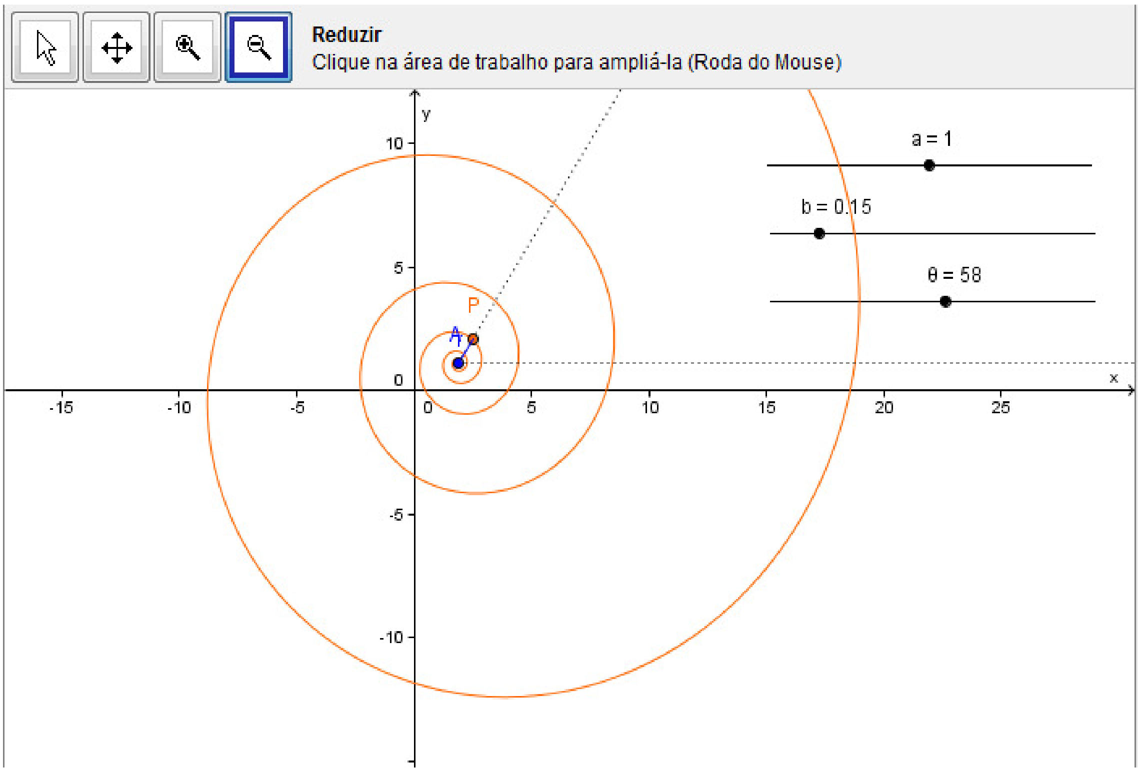

Figura 37 - Animação da Espiral Logarítmica

O mesmo site contém outra animação semelhante à Figura 36, só que esta foi construída novamente no GeoGebra, onde mostra que a Espiral Áurea (espiral laranja) não consegue se ajustar ao formato da concha. Como tratamos de uma animação podemos alterar o formato desse espiral, mas nunca conseguiremos ajustar perfeitamente a concha.

Figura 38 - Espiral Áurea e a concha do Náutilus

4.2 – Razão Áurea na arte e no corpo humano

Além da presença do Número de Ouro nos animais e nas plantas, também podemos encontrar essa Razão Áurea no nosso próprio corpo humano, através de medições. Alguns artistas estudaram e publicaram obras referentes a esse quesito, como Leonardo da Vinci e Le Corbusier.

Apesar de existirem vários trabalhos indicando que Leonardo da Vinci produziu várias obras baseadas na Razão Áurea, como a “Virgem dos Rochedos”, “Mona Lisa”, “Uma cabeça de Ancião”, entre outros, não existe nenhuma constatação que mostre realmente que Leonardo da Vinci produziu essas obras utilizando a Razão Áurea como instrumento de medida, inclusive existem trabalhos mostrando falhas nessas possíveis utilizações, como a utilização do retângulo de ouro e da espiral de ouro em “Mona Lisa”.

Mario Lívio relata no seu livro Razão Áurea, sobre a possível influência da Razão Áurea no quadro “Mona Lisa”:

> “E supõe-se que a Razão Áurea deveria ser encontrada nas dimensões de um retângulo em torno do rosto da Mona Lisa. Na falta de qualquer indicação clara e documentada do lugar exato onde esse retângulo deveria ser desenhado, essa idéia representa apenas outra oportunidade para malabarismos numéricos” (Lívio, p. 187)

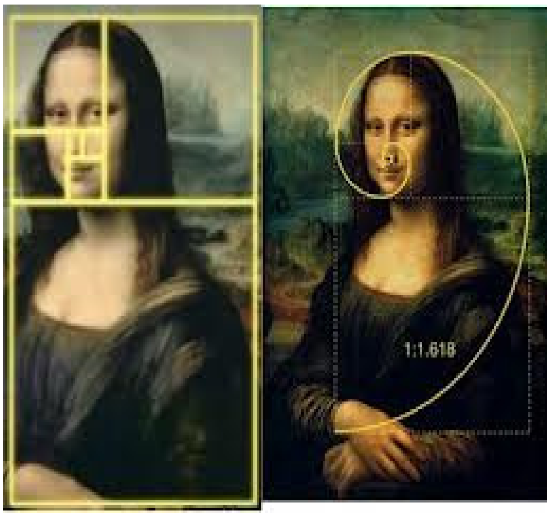

Figura 39 - Mona Lisa

No caso da obra “Virgem dos Rochedos”, existem duas versões para essa obra. As duas versões estão ilustradas na figura abaixo, onde a da esquerda está em Louvre, Paris e a da direita está na National Gallery, em Londres.

Figura 40 - Virgem dos Rochedos

Sobre as dimensões das duas versões desse quadro, Mario Lívio relata:

> “A razão entre a altura e a largura da pintura que se pensa que foi executada primeiro, que é o da esquerda, é de cerca de 1,64, e a da outra, de 1,58, ambas razoavelmente próximas do Numero de Ouro, mas próximas também da razão simples 1,6.” (Lívio, p. 187)

O Artista que realmente utilizou a Razão Áurea na confecção de suas obras foi Charles-Édouard Jeanneret, 1887-1965, mais conhecido como Le Corbusier (cooptado de ancestrais do seu lado materno chamados Lecorbesier). No começo, Le Corbusier não via com bons olhos a utilização de Razão Áurea nas obras artística, alertando contra o que ele chamava de: “troca do misticismo da sensibilidade pela Seção Áurea”

Antes de 1927 não existia nenhuma obra dele que utilizasse a Razão Áurea. Isso mudou após a publicação do livro de Matila Ghyka, *Esthétique des proportions dans la nature et dans les Artes* (A estética de proporções na natureza e nas artes), e seu *Número Áureo, Ritos e ritmos pitagóricos* (1931). Segundo Mário Lívio, na obra Razão Áurea, a fascinação de Le Corbusier pela Razão Áurea, tinha duas origens:

> “Por um lado era consequência de seu interesse pelas formas e estruturas básicas por trás dos fenômenos naturais. Por outro lado, vindo de uma família que incentivava a educação familiar, Le Corbusier podia apreciar a ânsia pitagórica por uma harmonia alcançada por razões de números.” (Lívio, p 197)

No livro Razão Áurea, de Mário Lívio:

> “A busca de Le Corbusier por uma proporção padronizada culminou na introdução de um novo sistema proporcional chamado “Modulor”. Suponha-se que o Modulor forneceria “uma medida harmônica para escala humana, universalmente aplicável na arquitetura e na mecânica.” (Lívio, p 197)

Mario Lívio, ainda relata no mesmo livro que:

> *“Conseqüentemente, no espírito do homem vitruviano e do compromisso geral de descobrir um sistema de proporções equivalente ao da criação natural, o Modulor era baseado nas proporções humanas.”* (Lívio, p 198)

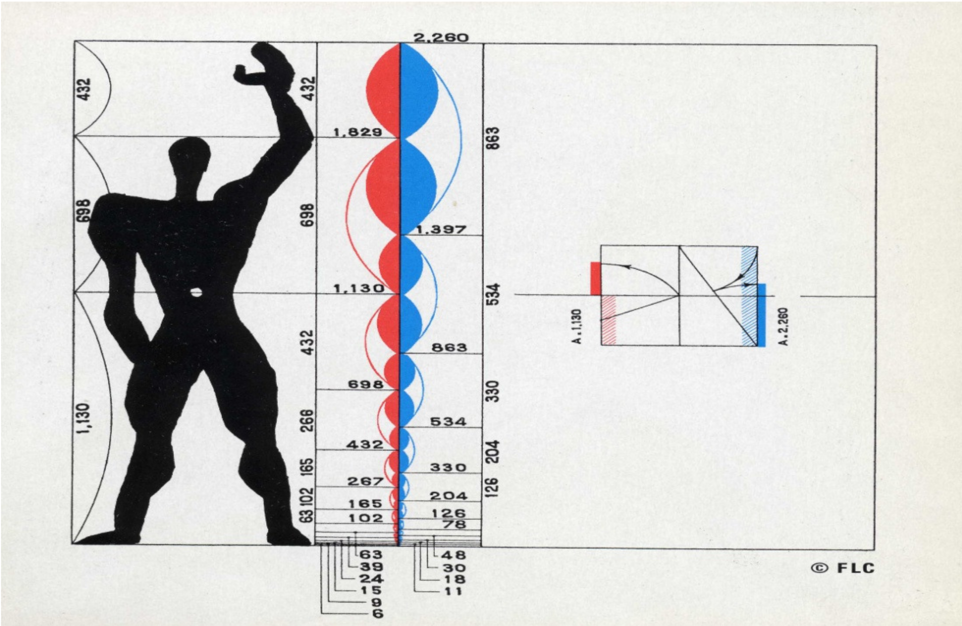

Figura 41 - Modulor

Nessa obra do Modulor podemos observar que tratamos de um homem medindo 183 centímetros, onde as medições do desenho foram realizadas de acordo com a Razão Áurea. Vejamos algumas razões:

- A razão entre a sua altura e a altura do umbigo ate o chão: 1,826/1,13 = 1,618...
- A altura total de 2,260 metros (medida obtida com o braço levantado), também estava dividida em uma razão áurea (1,397 m e 0,863 m) no nível de um pulso de um braço solto para baixo: 1,397/0,863 = 1,618...

  Existem outras medidas no corpo humano que tendem a ser *Áureas,* como:
- Razão entre a medida que vai do ombro até a ponta do dedo médio pela medida do cotovelo até a ponta do dedo médio.
- Razão da altura dos quadris pela altura dos joelhos.
- Razão da medida da cintura até a cabeça pela medida da cintura até o tórax.

4.3 – TEMPLO DE PATHERNON

O conteúdo desta seção foi inspirado no Livro do Mário Lívio, intitulado por Razão Áurea. O templo de Parthenon foi uma construção projetada pelos arquitetos Íctino e Calícrates, onde foi construída com o objetivo de ser um templo sagrado para o culto de Atenas Partenos. Apesar da sua aparente simplicidade, este templo é uma das expressões arquitetônicas mais refinadas do ideal de pureza e unidade.

Figura 42 - Templo de Parthenon

Em 26 de Setembro de 1697, o Templo de Parthenon por ser considerado um paiol de pólvora pelo Turcos Otomanos, que dominavam Atenas naquela época, foi atacado pelo venezianos. Apesar de ser atingido diretamente e ter sofrido um grande dano, sua estrutura básica continuou intacta.

Figura 43 - Templo de Parthenon após ataque

A maioria dos livros ou artigos que falam sobre Razão Áurea, afirmam que no Parthenon encontram-se varias dimensões relacionadas ao numero de Ouro, daí estaria a explicação para a grande perfeição que aparenta o desenho. Esse templo enquanto antes de ser atacado, ou seja, quando o seu frontão triangular estava intacto, ajustava-se em um Retângulo Áureo.

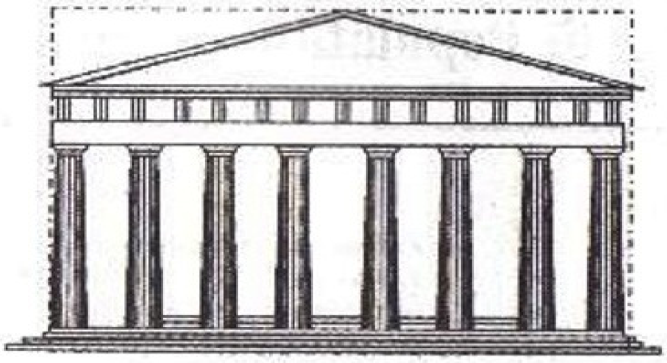

Figura 44 - Frente do Templo de Parthenon

No trabalho titulado por "A Seção Áurea", de Adolfo Zeising, publicado em 1884, o autor mostra que a dimensão da altura da fachada dividida pela parte de cima das colunas, é justamente o Número de Ouro. Muitos livros repetem essa informação, inclusive trazendo outras razões envolvendo dimensões desse templo relacionadas à Razão Áurea.

Figura 45 - Série de Retângulos Áureos no Templo de Parthenon

Um dos primeiros autores a questionar a presença ou não do Número de Ouro na construção do Templo de Parthenon, foi George Markowsky, matemático da Universidade de Maine em 1992. Este realizou um trabalho intitulado por *"Conceitos equivocados sobre a Razão Áurea"*, onde relatou que na verdade os valores das dimensões do Templo de Parthenon ultrapassam as dimensões de um esboço de um Retângulo Áureo, onde esse fato foi ignorado pela maioria dos autores, pela razão de estarem empolgados com o Número de Ouro. Inclusive, se observarmos os diferentes trabalhos realizados sobre a Razão Áurea, é possível encontrar varias medições diferentes relacionadas ao Parthenon, possivelmente porque foram usadas diferentes referencia para essas medições.

Tomando como base o livro *Arquitetura: da Pré-história ao pós-modernismo*, de Marvim Trachtenberg, este cita que as dimensões do templo são 13,75 metros de altura e 30,9 metros de comprimento, se efetuar a divisão do comprimento pela altura encontraremos 2,25, valor muito distante da Razão Áurea. Se considerarmos a altura dele como sendo a altura do ápice acima do pedestal sobre a qual a serie de coluna se assenta, segundo Stuart Rossiter no livro intitulado por Grécia, esse valor seria 18 metros e calculando novamente a razão de comprimento pela altura, essa Razão seria agora de 1,72, bem mais próxima do verdadeiro Numero de Ouro do que a primeira medição, mas ainda um pouco distante do valor real.

Segundo Mario Lívio:

> "[...]os dois principais pontos fracos acerca da presença da Razão Áurea na arquitetura ou em obras com base somente nas dimensões: (1) eles envolvem malabarismos numéricos, e (2) eles ignoram as inexatidões nas mensurações." (Lívio, p. 62)

O que realmente pode ter ocorrido é que procuraram medidas no templo para considerar que ele foi construído de acordo com a Razão Áurea. Sem contar que a maioria dos Teoremas relacionados ao Número de Ouro foram formulados depois da construção do Templo, apesar de existir um conhecimento considerável dos chamados pitagóricos sobre esse assunto.

Então, será que o Número de Ouro foi utilizado na construção do Parthenon? Essa é uma pergunta considerada de difícil resposta. Mas não existe nenhum documento onde se possa afirmar que a construção do Templo foi baseada na Razão Áurea.

4.4 – RAZÃO ÁUREA E PIRÂMIDES

Após o impasse envolvendo a construção do Templo de Parthenon e a Razão Áurea, existe outra grande construção que alguns autores relacionam com a Razão Áurea, que são as Pirâmides do Egito.

Em 1999, no Livro *Gnomo: Dos faraós aos fractais*, o Frances Midhat J. Gazalé faz o seguinte relato: "Disseram que o historiador grego Heródoto aprendeu com os sacerdotes egípcios que o quadrado da altura da grande Pirâmide é igual á área de sua face lateral triangular"

Mas qual a importância dessa informação do grego Heródoto? Segundo Mário Lívio:

> *"Por que essa afirmação é tão crucial? Pela simples razão de que é equivalente dizer que as Grandes Pirâmides foram projetadas de tal maneira que a razão entre a altura de sua face triangular e metade do lado da base fosse igual a Razão Áurea!" (Lívio, p. 72)*

De acordo com a figura 46 e explicando matematicamente o que Heródoto quis dizer, temos:

$$h^2 = g.m \quad [1]$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo pontilhado dentro da pirâmide abaixo, teremos:

$$g^2 = h^2 + m^2 \quad [2]$$

Substituindo [1] em [2], teremos:

$$g^2 = g.m + m^2$$

Dividindo os dois lados da igualdade acima por m^2, teremos:

$$\left(\frac{g}{m}\right)^2 = \frac{g}{m} + 1$$

Considerando $\frac{g}{m}$ de x, teremos:

$$x^2 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Esta equação do segundo grau acima é bastante conhecida nesse trabalho, pois é ela que possui a raiz positiva igual ao Número de Ouro. Então, concluímos que realmente $\frac{g}{m}$ vai ser igual Número de Ouro.

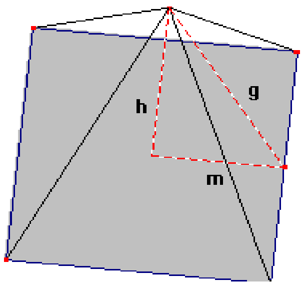

Figura 46 - Vista de cima da Pirâmide

Segundo Heródoto, levando em consideração a Pirâmide acima, para que a construção da Pirâmide tenha sido feita relacionado com a Razão Áurea, é necessário que g/m = 1,618... A tabela abaixo fornece os dados de duas Pirâmides do Egito, a Quéops e a Quéfren.

	Quéops	*Quéfren*
Altura da pirâmide	146,59	143,50
Dimensões da base	230,33 × 230,33	215,20 × 215,20

Figura 47 - Tabela com dimensões das Pirâmides

Pegando os dados da Pirâmide de Quéops, e aplicando o Teorema de Pitágoras encontraremos que o valor da altura da face triangular será 186,41 e verificando se existe a relação entre ela e a Razão Áurea, ao dividirmos e a altura da face triangular pela metade do lado da base, teremos:

$$\frac{186{,}41}{115{,}165} = 1{,}6186...$$

Então, na pirâmide de Quéops, ao dividirmos e a altura da face triangular pela metade do lado da base, o resultado é justamente o Número de Ouro.

Aplicando o mesmo raciocínio acima nos dados da segunda Pirâmide, a de Quéfren, encontraremos que a altura da face triangular será igual a 179,36 e verificando, se existe a relação entre ela e a Razão Áurea, ao dividirmos pela altura da face triangular pela metade do lado da base, temos:

$$\frac{179{,}36}{107{,}60} = 1{,}6669... \neq \Phi$$

Nessa segunda pirâmide então, ao dividirmos e a altura da face triangular pela metade do lado da base, o resultado não é o numero de Ouro.

Mas será que essa informação de Heródoto é verdadeira? Ou será que estamos diante do que o matemático Roger Herz-Fisher chamou de: "Uma das mais engenhosas prestidigitações da história 'científicas'"

Alguns matemáticos foram investigar se o que Heródoto disse é realmente verdade, como Herz-Fischler e George Markowsky. O texto verdadeiro de Heródoto está no livro II, chamado *Euterpe* e nas traduções tradicionais tem: "Sua base é quadrada, cada lado tem oito plethra de comprimento e sua altura é a mesma"

Um plethron corresponde a aproximadamente 31 metros, ou seja, segundo Heródoto a pirâmide é quadrada de lado aproximadamente 244 metros. Só que o lado da base original da Pirâmide, mede cerca de 230 metros e não os 244 mencionado por Heródoto. Então fica a dúvida, de onde veio essa "citação" de Heródoto?

Segundo Mário Lívio:

> *"A primeira pista vem do artigo de sir John Herschel em The Athenaeum. Segundo Herschel, foi John Taylor, no seu livro 'A grande pirâmide: Por que foi construída e quem a construiu?', que teve o "mérito de apontar" essa propriedade da pirâmide e a citação de Heródoto. Herz-Fischer seguiu a pista do equívoco até o que parece ser nada mais do que uma interpretação errada de Heródoto no livro, hoje vergonhoso, de John Taylor." (Lívio, p. 74)*

Para finalizarmos, Mario Lívio ainda acrescenta que:

> *"A conclusão de tudo isso é que o texto de Heródoto dificilmente pode ser considerado como algo que documente a presença da Razão Áurea nas Grandes Pirâmides. A interpretação totalmente infundada do texto, instigada pelo livro de Taylor (e depois repetida inúmeras vezes), não faz sentido de fato e representa apenas mais um caso de prestidigitação numérica" (Lívio, p.75)*

Para nosso objetivo, temos que concluir que é bastante improvável que os antigos babilônicos ou os antigos egípcios tenham descoberto a Razão Áurea.

Capítulo

5. ATIVIDADES

Conforme foi relatado no inicio deste trabalho, o tema Razão Áurea dificilmente é trabalhado no Ensino Médio e, em alguns casos, é pouco trabalhado no ensino superior, inclusive alguns graduados em Matemática nunca estudaram algo sobre este número na graduação. Alguns assuntos que podem ser trabalhados com os alunos do Ensino Médio com este número são Proporções, Equações do 2º grau, Sequências Numéricas e Geometria, com o auxílio de um Laboratório de Matemática.

Escolhemos trabalhar duas atividades com os alunos na área da geometria com a utilização do *Software* GeoGebra, tanto para diferenciar das aulas “tradicionais” como para proporcionar, uma melhor visualização das figuras geométricas por parte dos alunos.

De início, iremos abordar um pouco sobre a Razão Áurea, trabalhando a parte teórica, como definição e aplicações deste número em várias outras áreas. Levando para a parte prática, iremos fazer um passo a passo da construção do Retângulo de Ouro e do Triângulo de Ouro através das ferramentas do GeoGebra.

Outra atividade a ser trabalhada com o aluno é o problema clássico da Sequência de Fibonacci, o problema está no Capitulo 12 do Liber Abaci, conhecido como o famoso *“Problema dos coelhos”*, onde primeiro apresentaremos o problema para eles tentarem resolver, e após algum tempo, solucionaremos, mostrando e comentando a influência com a Sequência de Fibonacci.

<u>Problema 1 – Construção do Retângulo Áureo no GeoGebra.</u>

<u>Observação:</u> *Lembrando que Retângulo Áureo é todo retângulo que possui a importante propriedade, onde a razão entre o lado maior e o lado menor resulta no Número Áureo.*

<u>1º Passo:</u> Construir um Quadrado ABCD

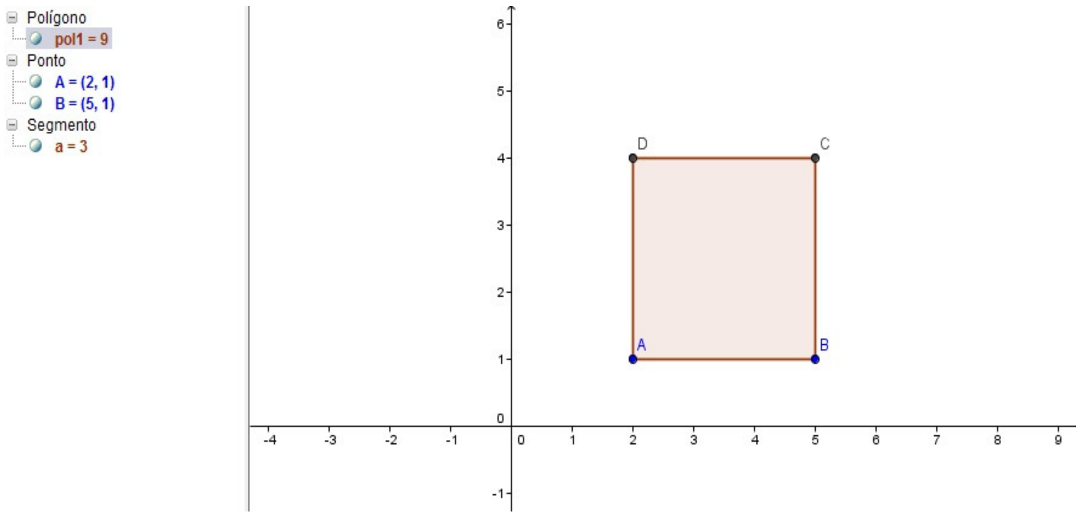

Figura 48 - Quadrado ABCD no GeoGebra

<u>2º Passo:</u> Marque os Pontos E e F no quadrado, onde esses pontos serão o Ponto Médio de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

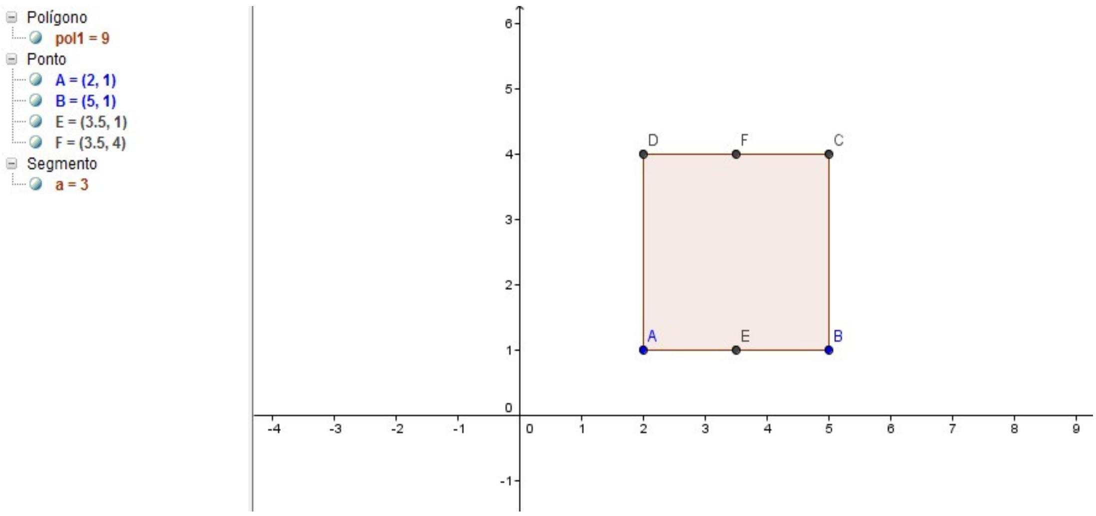

Figura 49 - Quadrado ABCD com os Pontos Médios E e F no GeoGebra

<u>3º Passo:</u> Ligar os pontos C e F encontrando o segmento $\overline{CE}$

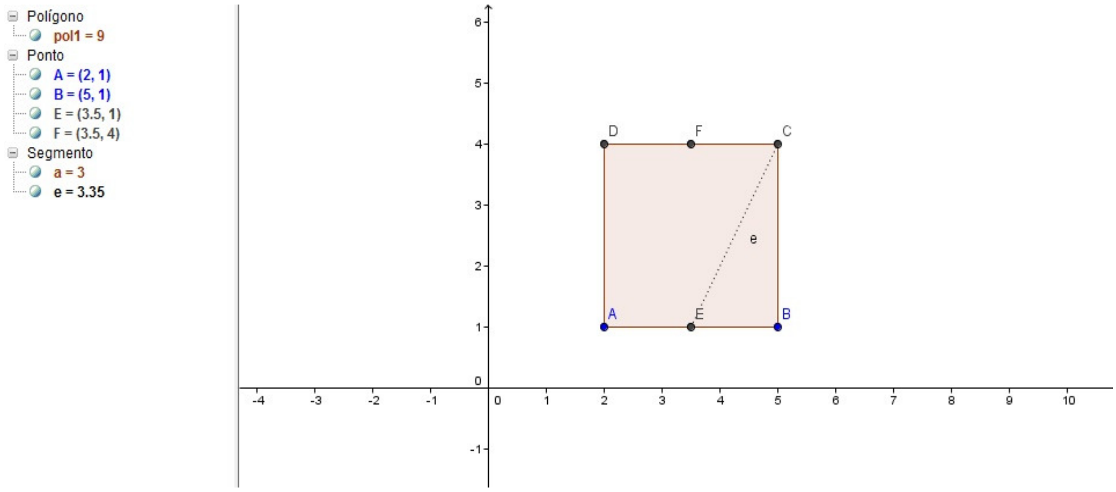

Figura 50 - Construção do Segmento $\overline{\mathbf{CE}}$ no GeoGebra

<u>4º Passo:</u> Traçar a circunferência de centro em E e raio $\overline{CE}$

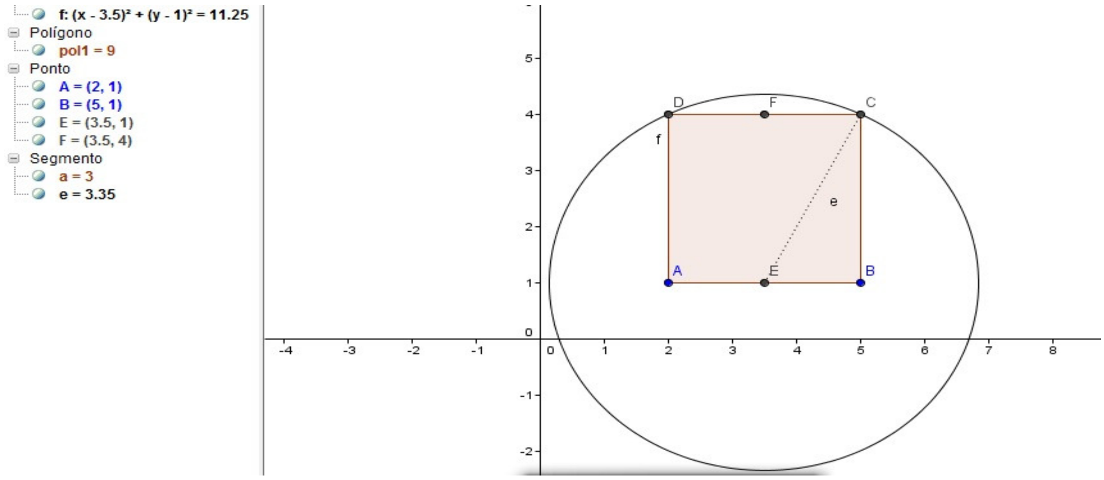

Figura 51 - Circunferência de Centro E no GeoGebra

5º Passo: Prolongue o lado $\overline{AB}$ até encontrar a circunferência, encontrando o Ponto G

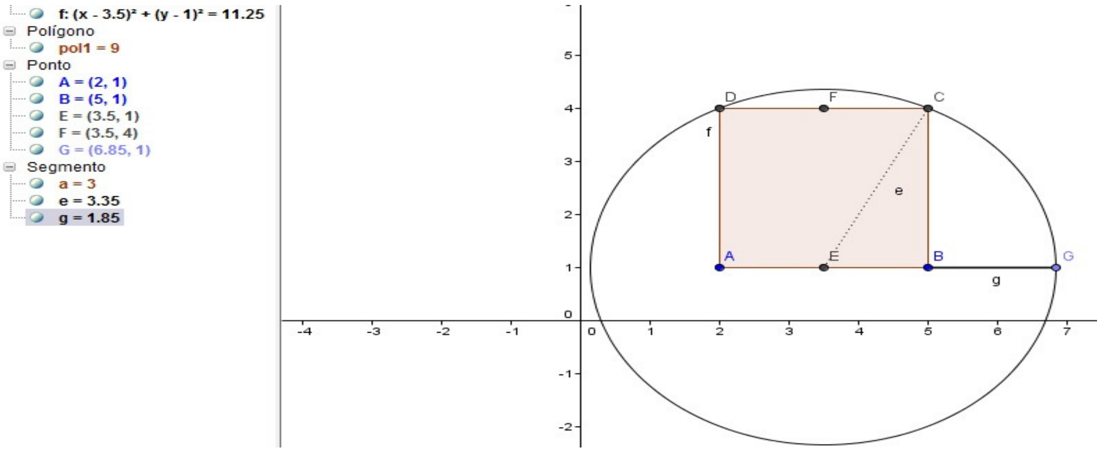

Figura 52 - Prolongamento do lado $\overline{\mathbf{AB}}$, no GeoGebra

6º Passo: Sendo $\overline{BC}$ e $\overline{BG}$ os lados de um retângulo, desenhe o retângulo BCGH.

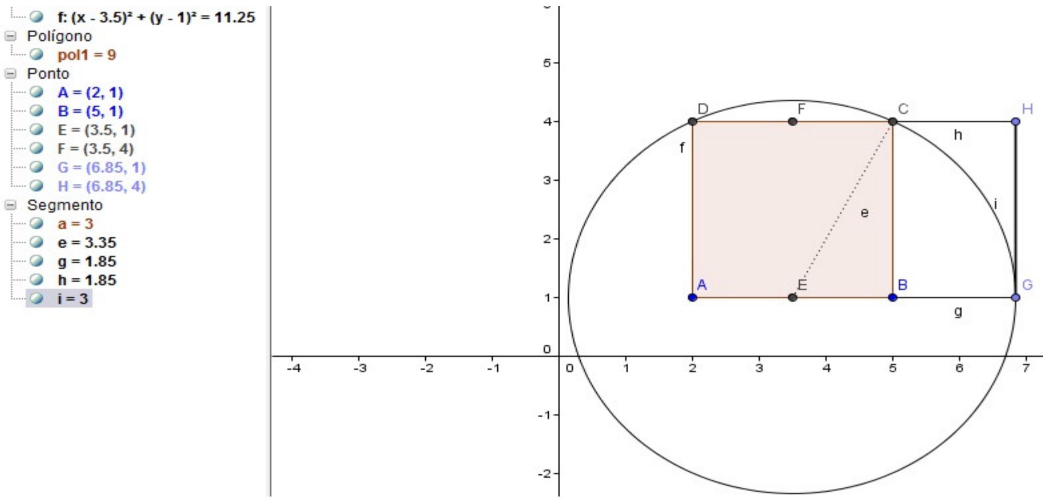

Figura 53 - Formando o Retângulo BCGH, no GeoGebra

7º Passo: Observar que o retângulo ADGH é um Retângulo Áureo, pois:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GH}} \approx \Phi$$

Problema 2 – Construção do Triângulo Áureo no GeoGebra.

Observação: *Lembrando que o Triângulo Áureo é todo triângulo Isósceles que possui os ângulos da base medindo 72 graus e outro ângulo medindo 36 graus e possui a importante propriedade de que a razão entre um dos lados iguais e o lado da base, resulta no Número Áureo.*

1º Passo: Traçar um segmento de reta $\overline{AB}$.

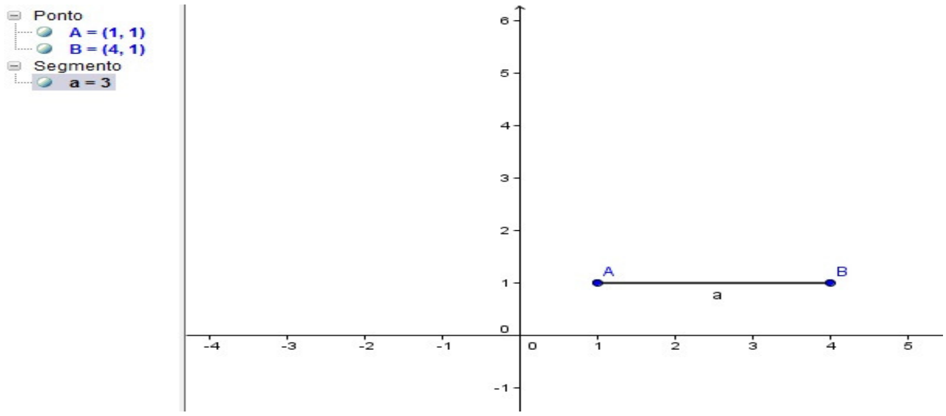

Figura 54 – Segmento $\overline{\mathbf{AB}}$, no GeoGebra.

2º Passo: Traçar a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$.

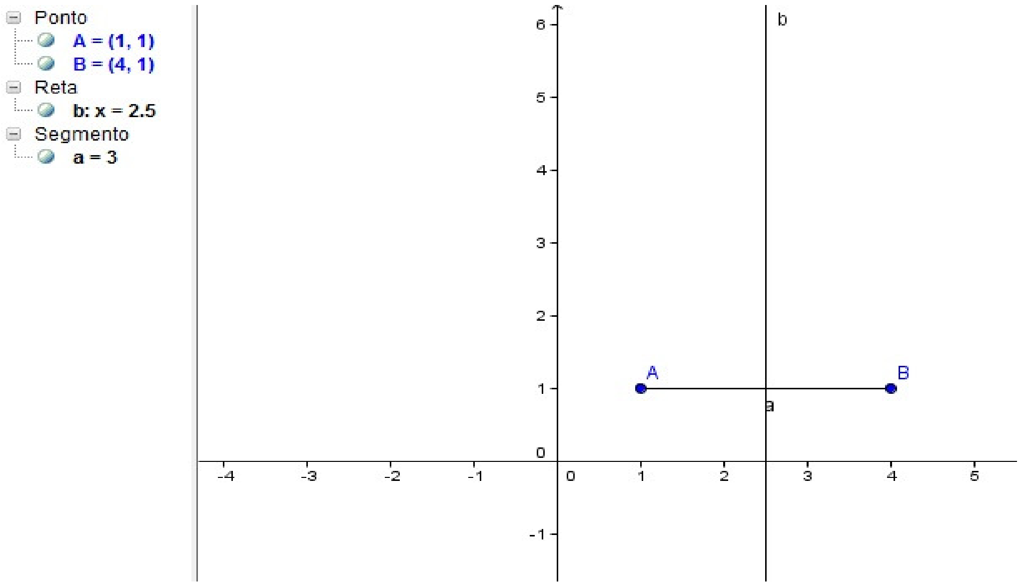

Figura 55 - Mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{AB}}$, no GeoGebra.

3º Passo: Marcar os dois ângulos de 72 graus no segmento de reta $\overline{AB}$ conforme a figura abaixo.

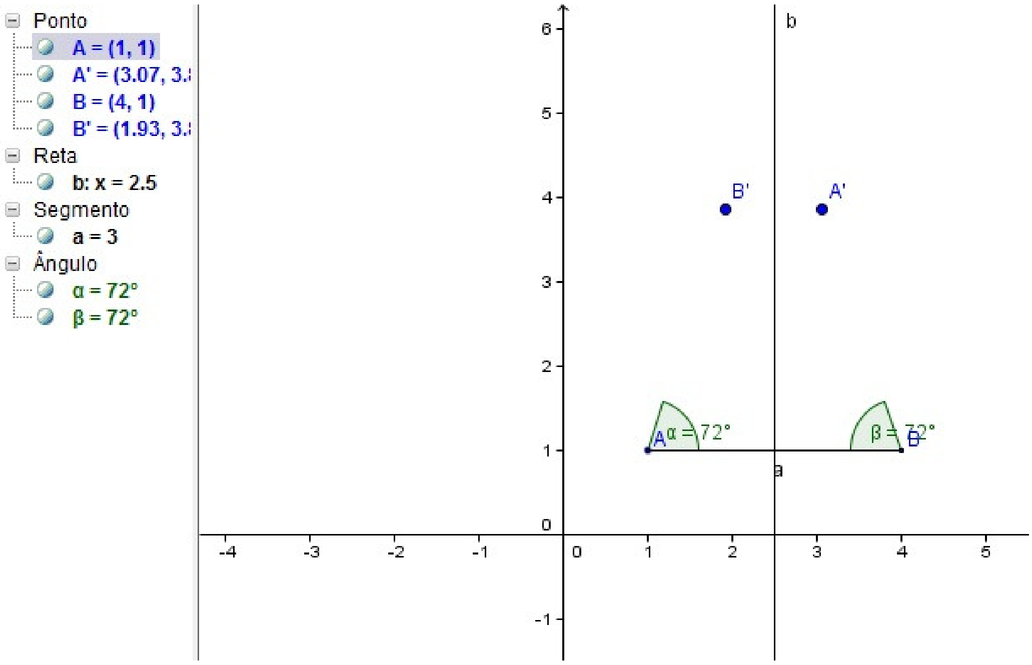

Figura 56 - Construção dos ângulos de 72°, no GeoGebra

4º Passo: Traçar o segmento de reta partindo de A e passando por B' até encontrar a mediatriz e traçar o segmento de reta partindo de B e passando por A' até encontrar a mediatriz, o ponto de encontro desses dois segmentos com a mediatriz será o ponto C, formando o triangulo isósceles ABC.

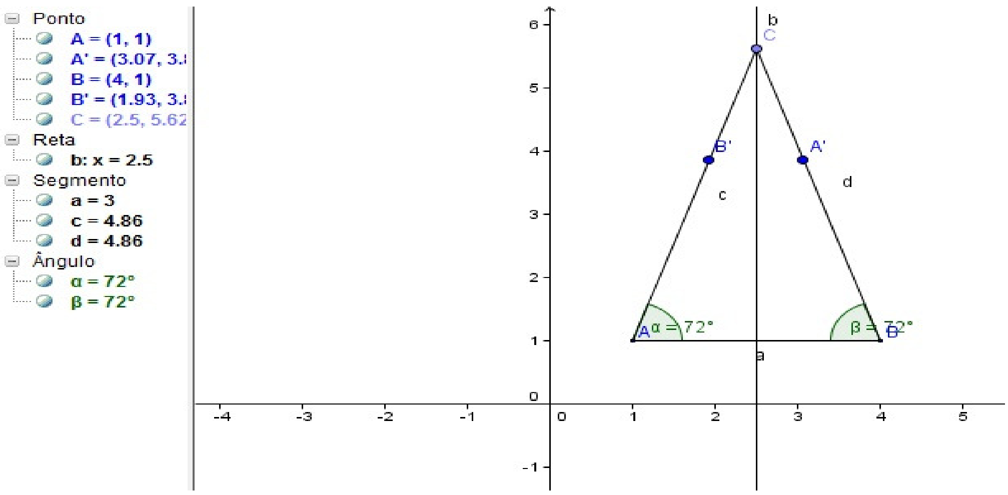

Figura 57 - Construção do Triângulo Isósceles ABC

5º Passo: Observar que o triangulo ABC é um Triangulo Áureo, pois:

$$\frac{\overline{BC}}{AB} \approx \Phi$$

6º Passo: Como o triangulo ABC é Áureo, então ao traçarmos a bissetriz do ângulo interno A e marcando o ponto D como a interseção dessa bissetriz com o lado $\overline{BC}$. Trace os segmentos de retas $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$. Observar que:

$$\frac{\overline{CD}}{BD} \approx \Phi$$

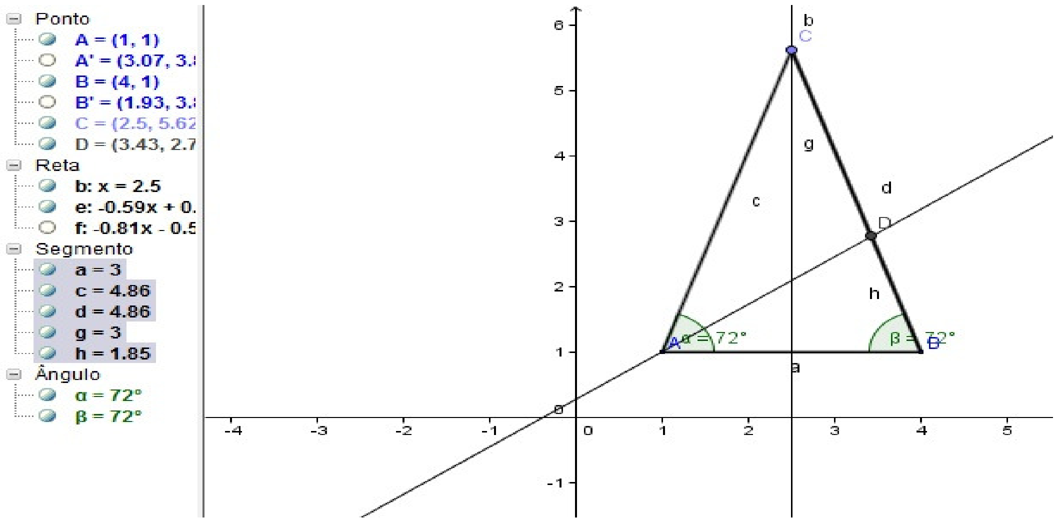

Figura 58 - Verificar que o Triângulo ABC é Áureo.

Problema 3 – Problema dos Coelhos.

"Sabendo que um casal de coelho se torna adulto após dois meses e que a cada mês o casal de coelho dá a luz a somente um novo par de coelhos, que é fértil a partir do segundo mês. Após 12 meses, haverá quantos pares de coelhos?" Construa a árvore genealógica para esse problema.

Capítulo

6. PROJETO

Foi visto que o tema Razão Áurea pode ser trabalhado com alunos no Ensino Médio atrelado a alguns temas como:

- Equações de 2º grau
- Razões e Proporções
- Números Irracionais
- Geometria

Porém, acreditamos que a melhor forma de se trabalhar com os alunos é dentro de um Laboratório de Matemática. Então, decidimos formar 2 equipes de 5 alunos do 2º ano do Ensino Médio da Escola de Ensino Médio (E.E.M.) Professor Clodoaldo Pinto, para abordar um pouco sobre esse tema com eles, onde a escolha desses alunos foi voluntária. Recebemos todo apoio possível do Núcleo Gestor dessa escola, onde eles colocaram a disposição todo material possível para que as atividades fossem aplicadas. As atividades foram aplicadas no contra turno dos alunos. Dividimos as atividades em dois dias, onde no primeiro fizemos uma abordagem teórica sobre o Número de Ouro, mostrando:

- Definição,
- Algumas propriedades,
- Aplicações nas áreas de Geometria, Botânica, Arte e etc.
- Sequência de Fibonacci

No segundo dia, resolvemos aplicar as três atividades propostas no tópico anterior (Construção do Retângulo e do Triângulo de Ouro no Geogebra e o "Problema dos coelhos").

Nas duas primeiras atividades utilizamos o *"Software"* Geogebra com o intuito de obter uma melhor visualização dos alunos. Primeiro fizemos a construção do Retângulo e do Triângulo de Ouro, ensinando simultaneamente as principais ferramentas do programa, pois como era de se esperar, nenhum deles tinha prática e nem conhecimento do programa.

Após realizarmos as construções, separamos cada equipe para ficar com um computador para que eles mesmos fizessem a construção das figuras geométricas propostas, auxiliando-os quando necessário. Após terminarem as duas construções, passamos a terceira atividade para eles ("Problema dos Coelhos"), onde primeiro mostramos o problema e fornecemos um tempo para que eles resolvessem, somente depois de tentarem é que mostramos a relação desse problema com a Sequência de Fibonacci, a construção da árvore genealógica ate a 13ª geração foi feitas pelos alunos como atividade complementar.

Este foi o projeto por nós desenvolvidos com o apoio dos alunos e da direção da escola, consideramos atividades como estas fundamentais no ambiente escolar para motivar o aluno e promover um melhor aprendizado por parte dele.

7. CONCLUSÃO

O Número de Ouro é uma razão importante na Matemática onde raramente se estuda algo relacionado a ela no Ensino Médio e inclusive em algumas Universidades, pouco se estuda, sobre ela, nos cursos de graduações em Matemática ou cursos afins. Este é um tema bom para se trabalhar com os alunos no Ensino Médio, mas em um Laboratório de Matemática.

Após a abordagem teórica que apresentamos aos alunos, reparamos que eles gostaram da parte relacionada a aplicações do Número de Ouro nas diversas áreas (Enigma das Pirâmides, Templo de Parthenon, Botânica, Corpo Humano, Artes e etc) e principalmente da Sequência de Fibonacci, onde mostramos alguns problemas relacionados a essa sequência, inclusive colocando como atividade para eles resolverem, antes de citar sobre a sequência.

Vale ressaltar a importância de se fazer uma pesquisa a fundo sobre o tema, pois em alguns artigos ou livros possui informações que não são corretas relacionadas ao Número de Ouro, ocorre o que Mário Lívio no livro Razão Áurea, chama de malabarismo numérico, onde alguns resultados são forçados a darem o que o pesquisador deseja, é o que ocorre na questão das Pirâmides, no Templo de Parthenon, no quadro da Mona Lisa e no crescimento da concha dos Náutilus.

A parte que identificamos uma maior dificuldade da parte dos alunos, como já esperávamos, foi à parte da demonstração do valor do Número de Ouro, principalmente na parte relacionada à Razão e Proporção, pois eles tiveram bastante dificuldade de visualizar as proporções.

Considero o uso do *Software* GeoGebra como uma ótima alternativa para atrair a atenção dos alunos e também como uma forma de modificar o estilo da aula. É normal eles terem um pouco de dificuldade para manusear o programa, pois notemos que foi o primeiro contato deles com essa ferramenta computacional, mas de modo geral considero positiva a experiência desse programa.

Trabalhos como esses são interessantes para mostrar outras atribuições da Matemática, diferente daquela tradicional conhecida pelos alunos, onde de certa forma acaba se tornando uma “mesmice” para a maioria deles, ocasionando uma grande rejeição pela disciplina. Por isso é muito importante a presença dos Laboratórios de Matemática na utilização de aulas como essas.

De acordo com os objetivos propostos, considero o trabalho com avaliação positiva, pois conseguimos expor todo conteúdo teórico que desejávamos e ouvimos comentários positivos dos alunos que participaram do projeto, como: “Professor gostei bastante dessa aula”, “Terão outras aulas como essa professor?”.

Consideramos a parte das atividades como rendimento apenas razoável, pois nas duas primeiras, onde se utilizou o *Software* GeoGebra, acreditamos que a maneira como foi trabalhada com eles não seja a ideal, a melhor maneira seria fazer uma espécie de mini curso ou um tutoria com eles, para que aprendam as ferramentas básicas para manusear o programa, para daí aplicarmos as atividades.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. Retângulo Áureo, divisão áurea e Sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**. – São Paulo, v. 6, p. 9-14, 1985.

AZEVEDO, A. Sequências de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática.** – São Paulo, v. 45, p. 44-47, 2001.

AZEVEDO, Natália de Carvalho. **O Número de Ouro e Construções.** Universidade Federal de Goiás. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/538/2011_00439_NATALIA_DE_CARVALHO_DE_AZEVEDO.pdf?sequence=1> Acessado em 20/01/2014

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Número de Ouro e secção áurea: Considerações e sugestões para a sala de aula.** Blumenau/SC: Ed. da FURB, 1996.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza Gomide. São Paulo. Edgard Blucher, 1974.

CARVALHO, Lucas Santos. **Número Áureo e o Ensino Básico.** Universidade Estadual de Santa Cruz. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/266/2011_00114_LUCAS_SANTOS_DE_CARVALHO.pdf?sequence=1> Acessado em 18/01/2014

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção: um ensaio sobre a beleza na matemática.** Tradução: Luís Carlos Ascêncio Nunes. – Brasília: Editora da UNB, 1985.

KFOURI, Viviane de Oliveira. **O Número de Ouro.** Universidade Federal de Goiás. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/550/2011_00454_VIVIANE_DE_OLIVEIRA_KFOURI.pdf?sequence=1> Acessado em 10/01/2014

LÍVIO, Mário. **Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente.** Tradução: Marco Shinobu Matsumura. – 6. ed. – Rio de Janeiro: Record, 2011.

OLIVEIRA, E.; FERREIRA, T. E. O **Número de Ouro e suas manifestações na Natureza e na Arte.** Revista Complexus. – Instituto Superior de Engenharia Arquitetura e Design – Ceunsp, Salto-SP, Ano. 1, n_ 2, p. 64-81, Janeiro/2014.