Universidade Estadual de Santa Cruz
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Circunferência Trigonométrica Manipulável

por

Danilo Porto Rusciolelli †

sob orientação do

Prof$^{\text{a}}$. Dra. Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DCET - UESC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Danilo Porto Rusciolelli

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA MANIPULÁVEL

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 24 de abril de 2014.

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Profa. Dra. Mariana Pinheiro Gomes da Silva (UESC)

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa (UESC)

Fabíolo Moraes Amaral

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral

Ilhéus - 2014

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, minha grande força espiritual.

À minha amada esposa Mayala e minha filha Eduarda, que tanto compreenderam minhas ausências ao longo de todo este período de estudo, e que agora vencem comigo uma importante etapa.

Às minhas tias Lila, Lena e Kaina, a meus primos Adriano, Gabriel, Isly e Luã que juntos com minha avó Ana e meu avô Carlos me acolheram em Una-BA durante a minha graduação, etapa fundamental na minha caminhada.

Ao meu pai Kiko e minha madrasta Márcia que sempre me apoiaram e me ouviram dos momentos de angústia e desânimo.

À minha querida mãe Maria das Graças que muito se dedicou nesta vida para que eu me tornasse a pessoa que sou.

Aos meus irmãos Del, Patrícia, João, Duda, Luciano e Veronica pelo apoio, amor e confiança. Por tudo que representam para mim.

À minha sogra Lia que sempre esteve presente nos momentos de dificuldade.

Aos meus amigos que colaboraram com este trabalho, em especial Mário Sérgio e Gabriel Peres.

Aos amigos do PROFMAT pelos bons momentos de convivência e pela amizade que certamente ficará para o resto da vida, principalmente, Alexandre, Welton, Gedai e Ivanildo, companheiros de viagens, que tanto compartilharam seus conhecimentos.

Aos professores do PROFMAT que ministraram as aulas durante os quatro semestres pelas valiosas contribuições ao meu crescimento e amadurecimento.

À professora Doutora Mariana Pinheiro que me orientou neste trabalho, demonstrando muita paciência com minhas dificuldades, esclarecendo de maneira clara e objetiva todas as dúvidas.

As demais pessoas que de maneira direta e indireta sempre me ajudaram.

Muito Obrigado!

Dedicatória

Dedico esse trabalho à minha família, em especial, minha esposa Mayala e minha filha Eduarda por muito amá-las.

Resumo

O presente trabalho traz um estudo sobre os principais tópicos de Trigonometria, relatando a criação de um material denominado **Circunferência Trigonométrica Manipulável** para auxiliar professores e alunos nas aulas sobre este importante ramo da Matemática. Sua utilidade foi experimentada em uma turma do segundo ano do Ensino Médio numa escola da rede estadual na Bahia através da aplicação de sete atividades, sendo seis delas realizadas com e sem o uso do Material.

As atividades levaram os alunos a investigar as razões trigonométricas na circunferência e a deduzir geometricamente as principais relações. Baseado nas observações realizadas pelo professor e dos gráficos que mostram o percentual de acertos das atividades, foi feita uma análise das dificuldades, bem como as evoluções apresentadas pelos alunos durante o projeto.

O trabalho também mostra estudos sobre o uso dos materiais manipuláveis no processo de ensino-aprendizagem, explicando com qual verba as escolas públicas podem comprá-los.

Palavras Chaves: Trigonometria; Materiais manipuláveis; Circunferência Trigonométrica Manipulável.

Abstract

This paper presents a study on the main topics of Trigonometry, reporting on the creation of a material called **Manipulable Trigonometric Circumference** assist teachers and students in class on this important branch of Mathematics. Its usefulness was tested on a class of the second year of high school in a state school in Bahia through the application of seven activities, being six of them made with and without the material. Those activities made the students investigate the trigonometric reasons in the circumference and to deduce geometrically the main relations. Based on the observations made by the professor and graphs which show the percentual of correct answers in the activities, was made an analysis of the difficulties, as well as developments presented by the students during the project. The paper also shows studies about the use of manipulable materials in the teaching-learning process, explaining which funds the public schools can use to afford them.

Key words: Trigonometry; Manipulable Materials; Manipulable Trigonometric Circumference.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

A falta de incentivo, formação inadequada, sobrecarga de trabalho dos professores, juntamente com a ausência de motivação e de pré-requisitos dos alunos são alguns fatores que levam a baixa qualidade no ensino de Matemática na maioria das escolas brasileiras.

O uso de materiais manipuláveis pode ser um instrumento de grande importância na intervenção do professor de Matemática na sala de aula, visando maior eficácia no processo de ensino-aprendizagem dos seus alunos no que se refere às diversas possibilidades para construção de seu conhecimento. De acordo com o PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) de Matemática:

> *(...) Os Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e* ***outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem.*** *Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão. (...)* (BRASIL, 1998, pág. 57)

Trabalhando com materiais manipuláveis, o professor pode se tornar o mediador das discussões e investigações, fazendo com que os alunos consigam levantar hipóteses e consequentemente fazer demonstrações relevantes. Segundo o PCN do Ensino Médio:

> *(...) As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como um dos objetivos levar o aluno a compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral. (...)* (BRASIL, 2000, Pág 42)

Este trabalho apresenta um material chamado de **Circunferência Trigonométrica Manipulável** para ser usado no ensino de Trigonometria, um importante ramo da matemática, muito útil também no estudo de Óptica, Ondulatória, Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharia, Arquitetura, entre outros. É público e notório que os alunos e muitas vezes os professores apresentam deficiências em extrair informações importantes contidas na circunferência trigonométrica. Os educandos têm dificuldades em deduzir as relações trigonométricas a partir dos princípios básicos (teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos), acabando apenas memorizando fórmulas e "macetes" referentes ao conteúdo.

O objetivo deste estudo é mostrar que através do manuseio da Circunferência Trigonométrica Manipulável o aluno adquira interesse, motivação e seja capaz de desenvolver as seguintes habilidades matemáticas:

- Familiarizar com a circunferência trigonométrica;
- Identificar o seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente de arcos na circunferência trigonométrica;
- Estudar o comportamento das razões trigonométricas nos quadrantes;
- Relacionar as razões trigonométricas.

No capítulo 1, definiram-se com auxílio da figura de uma rampa as razões trigonométricas no triângulo retângulo e a Trigonometria num triângulo qualquer, deduzindo a lei dos Senos e dos Cossenos. O capítulo 2 traz conceitos e medidas dos arcos na circunferência, a definição da circunferência trigonométrica e um estudo detalhado sobre o comportamento das seis razões trigonométricas no ciclo. No terceiro capítulo é apresentada a simetria dos arcos, relacionando as razões trigonométricas de um arco em qualquer quadrante com os valores do 1º quadrante, apresentando também, as demonstrações geometricas das principais relações trigonométricas usando os conceitos de semelhança de triângulos e do teorema de Pitágoras. No quarto capítulo, trata das funções trigonométricas e suas características, mostrando as curvas que as representam. Ao longo dos quatro primeiros capítulos, o texto traz também algumas notas históricas importantes da Trigonometria.

O quinto capítulo aponta a importância dos materiais manipuláveis na educação, sobretudo nas aulas de Matemática, explica a motivação e como surgiu a ideia de construir um material manipulável para as aulas de trigonometria, mostra também detalhadamente como foi construído a Circunferência Trigonométrica Manipulável, mencionando os conceitos que podem ser explorados com o seu uso. Finalmente, o capítulo 6 relata a aplicação das atividades, os resultados e faz comentários sobre as dificuldades encontradas pelos alunos, mostra também que as escolas públicas recebem verbas destinadas para aquisição de materiais pedagógicos.

CAPÍTULO 1

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO

O ramo da Matemática que nos remete ao estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo é chamado de *Trigonometria* (do grego, *trigo*, triângulo, e *metron*, medida).

A Trigonometria é uma ferramenta importante para a resolução de problemas que envolvem grandes distâncias como os de engenharia, navegação e astronomia.

Faremos aqui uma breve abordagem da trigonometria e iniciaremos pelo estudo dos triângulos retângulos.

1.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Um triângulo retângulo é aquele que possui um de seus ângulos internos reto. Considere um triângulo BAC, retângulo em A (ver Figura 1.1).

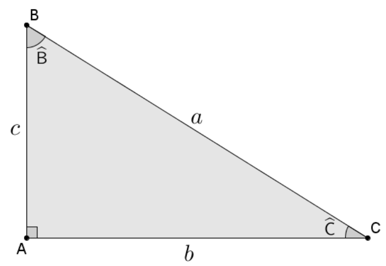


Figura 1.1: Triângulo ABC

O lado $\overline{BC}$, oposto ao vértice A, vamos chamar de a, o lado $\overline{AC}$, oposto ao vértice B, chamaremos de b e o lado $\overline{AB}$, oposto ao vértice C, chamaremos de c.

O lado oposto ao ângulo reto, o maior lado do triângulo retângulo, é denominado de hipotenusa, e os outros dois lados, opostos aos ângulos agudos, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são chamados de catetos.

Definiremos as *razões trigonométricas* num triângulo retângulo com auxílio da figura de uma rampa.

Rampas são uma alternativa às escadas quando se quer vencer um desnível e ao mesmo tempo assegurar o acesso de quem tem dificuldades de locomoção. Apesar de aparentemente simples, elas frequentemente acabam sendo um problema nos projetos, seja por dificuldade em calcular sua inclinação ou desconhecimento das normas de acessibilidade.

O fato é que, quanto maior a altura, menor tem de ser a inclinação para que alguém com dificuldades de locomoção possa subi-la, e por isso há a necessidade de muito espaço para implantação da mesma, o que nos leva a muitas rampas incorretas.

Segundo a norma de acessibilidade NBR 9050 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2004), a inclinação das rampas deve ser calculada através da equação:

$$i = \frac{h \cdot 100}{c}$$

Onde i é a inclinação da rampa, em porcentagem, h é a altura do desnível que a rampa vence, medida na vertical, e o comprimento c é a extensão horizontal (em planta) em que a rampa vence essa altura.

As rampas devem ter inclinação de acordo com os limites estabelecidos na Tabela 1.1.

Inclinação admissível em cada segmento de rampa *i* %	Desníveis máximos de cada segmento de rampa *h* m	Número máximo de segmentos de rampa
5,00 (1:20)	1,50	Sem limite
5,00 (1:20) < *i* ≤ 6,25 (1:16)	1,00	Sem limite
6,25 (1:16) < *i* ≤ 8,33 (1:12)	0,80	15

Tabela 1.1: Dimensionamento de Rampas

Para inclinação entre $6,25\%$ e $8,33\%$ devem ser previstas áreas de descanso nos patamares, a cada $50m$ de percurso. As áreas de descanso devem ser dimensionadas de modo a garantir a manobra de cadeiras de rodas.

Em reformas, quando esgotadas as possibilidades de soluções que atendam integralmente a Tabela 1.1, podem ser utilizadas inclinações superiores a $8,33\%(1:12)$ até $12,5\%(1:8)$, conforme Tabela 1.2.

Inclinação admissível em cada segmento de rampa *i* %	Desníveis máximos de cada segmento de rampa *h* m	Número máximo de segmentos de rampa
8,33 (1:12) ≤ *i* < 10,00 (1:10)	0,20	4
10,00 (1:10) ≤ *i* ≤ 12,5 (1:8)	0,075	1

Tabela 1.2: Dimensionamento de Rampas para situações excepcionais

A inclinação de uma rampa está relacionada ao seu ângulo de inclinação com a horizontal. A identificação dos catetos, segundo a posição que ocupa em relação aos ângulos agudos do triângulo retângulo é de fundamental importância para compreender os cálculos envolvidos na determinação da medida do ângulo de inclinação de uma rampa (ver Figura 1.2).

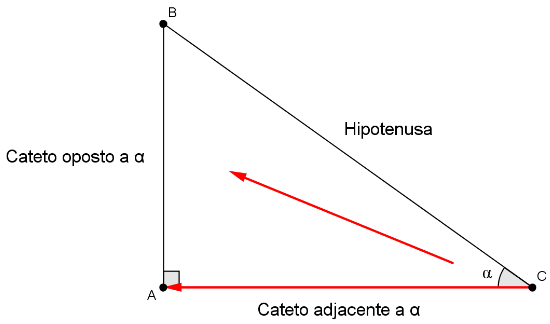


Figura 1.2: Lados de um triângulo retângulo

Observe que para o mesmo ângulo de inclinação α, a medida que o comprimento da rampa varia, a distância necessária na horizontal e a altura variam na mesma proporção (ver Figura 1.3).

Por exemplo, uma rampa com 8% de inclinação é aquela em que o valor da altura corresponde a 8% do valor do comprimento.

A Figura 1.3 mostra uma rampa dividida em triângulos e suas diferentes alturas $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{B''C''}$:

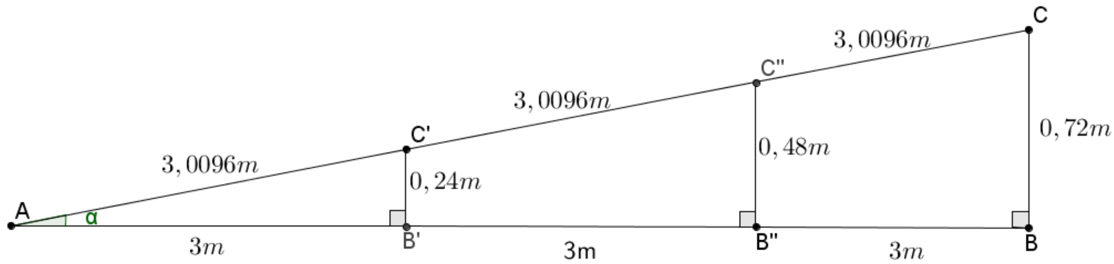


Figura 1.3: Rampa

Os três triângulos $AB'C'$, $AB"C"$ e ABC são semelhantes, então:

(1) $\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = \dfrac{\overline{B''C''}}{\overline{AC''}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cong 0,0797$

(2) $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \dfrac{\overline{AB''}}{\overline{AC''}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cong 0,9968$

(3) $\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{B''C''}}{\overline{AB''}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 0,08$

Verificamos que as relações acima não dependem da medida dos lados dos triângulos $ABC, AB'C', AB"C"$, mas apenas do valor do ângulo α.

Observe que:

$i)$ fixado um α, os catetos opostos a α e as hipotenusas são proporcionais. A razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa denomina-se de *Seno de* α (Representamos por $sen(\alpha)$);

$ii)$ fixado um α, os catetos adjacentes a α e as hipotenusas são proporcionais. A razão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa denomina-se de *Cosseno de* α (Representamos por $cos(\alpha)$);

$iii)$ fixado um α, os catetos opostos a α e os catetos adjacentes a α são proporcionais. A razão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente a α denomina-se de *Tangente de* α (Representamos por $tg(\alpha)$).

Estas razões são chamadas de *razões trigonométricas*. As razões inversas das três acima são chamadas, respectivamente, de *cossecante*, *secante* e *cotangente* de α (representamos por $cossec(\alpha)$, $sec(\alpha)$ e $cotg(\alpha)$ respectivamente).

É fácil verificar que a inclinação da rampa é $i = \frac{0{,}24 \cdot 100}{3} = \frac{0{,}48 \cdot 100}{6} = \frac{0{,}72 \cdot 100}{9} = 8\%$.

Daí, temos que a inclinação da reta corresponde a tangente de α multiplicado por 100. (De acordo com a equação em (3)).

Da Figura 1.1 podemos escrever:

$sen\ (\widehat{B}) = \dfrac{b}{a}$, $cos\ (\widehat{B}) = \dfrac{c}{a}$, $tg\ (\widehat{B}) = \dfrac{b}{c}$, $cossec\ (\widehat{B}) = \dfrac{a}{b}$, $sec\ (\widehat{B}) = \dfrac{a}{c}$ e $cotg\ (\widehat{B}) = \dfrac{c}{b}$.

Logo:

$$tg(\widehat{B}) = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow tg(\widehat{B}) = \frac{sen(\widehat{B})}{cos(\widehat{B})}.$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (asen(\widehat{B}))^2 + (acos(\widehat{B}))^2 \Rightarrow sen^2(\widehat{B}) + cos^2(\widehat{B}) = 1.$$

O mesmo ocorre para o outro ângulo agudo $\widehat{C}$. Esta relação é chamada de *Relação Trigonométrica Fundamental*.

Vamos agora obter as razões trigonométricas de alguns ângulos notáveis. Começaremos com os ângulos de 30° e 60°. Dado um triângulo equilátero ABC de lado l (Figura 1.4). Traçando a altura $\overline{AH}$, obtemos o segmento $HC = \dfrac{l}{2}$ (já que a altura de qualquer triângulo equilátero também é a mediana). Pelo Teorema de Pitágoras sabemos que, $l^2 = (\overline{AH})^2 + (\dfrac{l}{2})^2$, isto é, $(\overline{AH})^2 = l^2 - \dfrac{l^2}{4} = \dfrac{3l^2}{4}$, então $\overline{AH} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$. Do triângulo retângulo AHC com ângulos agudos $H\widehat{A}C = 30°$ e $H\widehat{C}A = 60°$, temos:

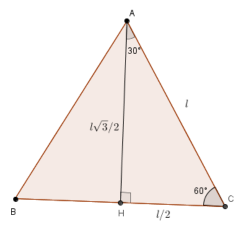


Figura 1.4: Triângulo Equilátero ABC

- $sen\ 30° = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{l}{2} \cdot \dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{2}$;

- $cos\ 30° = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $tg\ 30° = \dfrac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{l}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}l} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
- $cossec\ 30° = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$;
- $sec\ 30° = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;
- $cotg\ 30° = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

E ainda,

- $sen\ 60° = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $cos\ 60° = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{l}{2} \cdot \dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{2}$;
- $tg\ 60° = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{l} = \sqrt{3}$;
- $cossec\ 60° = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;
- $sec\ 60° = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$;
- $cotg\ 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Considere agora um triângulo retângulo isósceles ABC (Figura 1.5) com catetos iguais a l. Pelo teorema de Pitágoras a hipotenusa é igual a $l\sqrt{2}$, então:

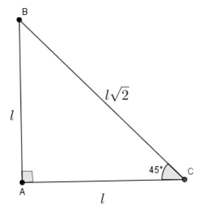


Figura 1.5: Triângulo Isósceles ABC

- $sen\ 45° = cos\ 45° = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

- $tg45° = \dfrac{l}{l} = 1$;
- $cossec\ 45° = sec\ 45° = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$;
- $cotg\ 45° = \frac{1}{1} = 1$.

(...)A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares ao redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela submetido. Se c é o comprimento da corda, α é o ângulo e r o raio da circunferência, então $c = 2rsen(\alpha/2)$. Esta é a origem da palavra seno, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo jiba (corda) com jaib (dobra, cavidade, sinus em latim).(...) (LIMA,CARVALHO, WAGNER, MORGADO, 2006, pág. 213)

(...)Quanto ao termo tangente, ele tem significado claro, pois, de acordo com a Figura 1.6, temos tg $x = t/r$, onde t é o segmento da tangente compreendido entre a extremidade do raio (um dos lados do ângulo x e o prolongamento do outro lado). A secante do ângulo x é definida pela fórmula sec $x = s/t$, onde s é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são o raio r e o segmento de tangente t. Como o segmento de reta s corta o círculo (secare = cortar em latim), a denominação ***secante*** *se justifica. Finalmente, cosseno, cotangente e cossecante são simplesmente o seno, a tangente e a secante do arco complementar.(...)* (LIMA, 1991, pág. 188)

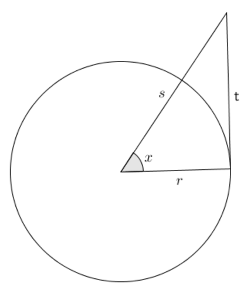


Figura 1.6: Origem da palavra tangente e secante

1.2 Trigonometria num Triângulo Qualquer

As seis razões trigonométricas que destacamos até o momento são válidas somente no triângulo retângulo, porém, podemos estabelecer algumas identidades trigonométricas para um triângulo qualquer, sendo ele acutângulo ou obtusângulo. Essas identidades são chamadas de *Lei dos Senos* e *Lei dos Cossenos*.

1.2.1 Lei dos Cossenos

> *(...) Poucas obras alcançaram tanto prestígio no meio científico como* ***Os Elementos****, de Euclides. Esse trabalho, composto de treze livros, trata de Geometria, Teoria os números e Álgebra elementar. Na livro II dessa obra pode ser encontrada a relação que hoje conhecemos como lei dos cossenos.(...)* (SOUZA, 2010, pág 291)

A Lei dos Cossenos diz que em qualquer triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Vamos demonstrar que a Lei dos Cossenos separando em dois casos:

i) Seja o triângulo ABC (Figura 1.7), acutângulo, e $\overline{AH} = h$ a altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Considere $\overline{BH} = x$. Como $\overline{BC} = a$, consequentemente, $\overline{CH} = a - x$. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos AHB e AHC, temos que $c^2 = h^2+x^2$, isto é, $h^2 = c^2 - x^2$ e ainda, $b^2 = h^2 + (a - x)^2$. Daí, $b^2 = c^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = c^2 + a^2 - 2ax$. Porém, $x = c \cdot cos(\widehat{B})$ e, portanto, $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\widehat{B})$. Analogamente, podemos escrever $a^2 = b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot cos(\widehat{A})$ e $c^2 = a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot cos(\widehat{C})$.

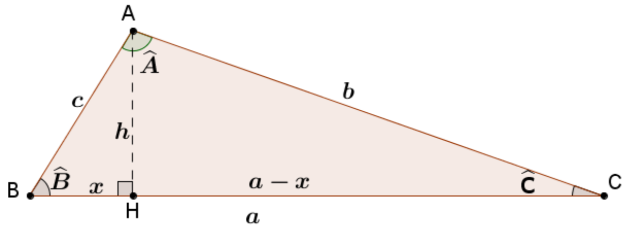


Figura 1.7: Triângulo acutângulo ABC

ii) Seja o triângulo ABC (Figura 1.8), obtusângulo em A, e $\overline{CH} = h$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$. Considere $\overline{AH} = x$. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos AHC e BHC, temos que $b^2 = h^2 + x^2$, isto é, $h^2 = b^2 - x^2$ e ainda, $a^2 = h^2 + (c+x)^2$. Daí, $a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 = b^2 + c^2 + 2bx$. Temos que $cos(180° - \widehat{A}) = -cos(\widehat{A})$. Esta relação será melhor explicada na seção 3.1. Logo $x = b \cdot cos(180° - \widehat{A}) = b \cdot (-cos\widehat{A}) = -b \cdot cos(\widehat{A})$ e, portanto, $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\widehat{A})$. Analogamente, podemos escrever $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\widehat{B})$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\widehat{C})$.

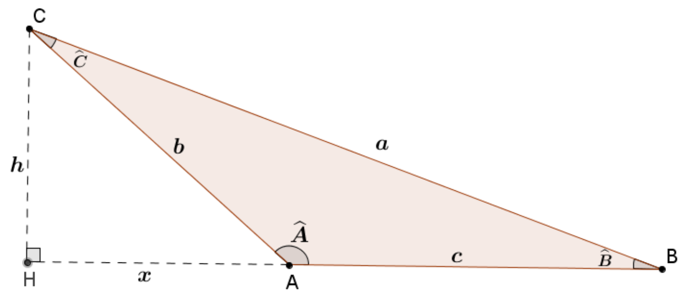


Figura 1.8: Triângulo obtusângulo ABC

1.2.2 Lei dos senos

> *(...) Os árabes conheciam a lei dos senos para triângulos, já demosntrada em um trabalho do matemático al-Biruni (973-1048). Mais tarde, Nascir-Eddin sistematizou os conhecimentos de Trigonometria então existentes em seu* ***Tratado sobre o Quadrilátero****. (...)* (CARMO, MORGADO,WAGNER, 2005, pág 143)

A Lei dos Senos diz que em qualquer triângulo, o quociente entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

De fato, da Figura 1.7, temos que $h = c \cdot sen(\widehat{B}) = b \cdot sen(\widehat{C})$, logo,

$$\frac{b}{sen(\widehat{B})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})}.$$

Da mesma maneira, considerando a altura relativa ao lado $\overline{AC}$, obteremos que:

$$\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})}.$$

Da Figura 1.8, observamos que $h = a \cdot sen(\widehat{B})$ e ainda, $h = b \cdot sen(180° - \widehat{A})$. Porém, sabemos que $sen(180° - \widehat{A}) = sen(\widehat{A})$. Esta relação será demonstrada na seção 3.1.1. Logo, $h = b \cdot sen(\widehat{A})$. E, portanto,

$$\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{b}{sen(\widehat{B})}$$

Novamente, se tomarmos a altura relativa ao lado AC, obteremos:

$$\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})}$$

Seja um triângulo qualquer ABC inscrito numa circunferência de raio r e centro O (Figura 1.9). Considere agora um triângulo A_1CB retângulo em C inscrito na mesma circunferência. Temos que $A_1B = 2r$ e $\widehat{A} = \widehat{A_1}$, pois são ângulos inscritos correspodentes ao mesmo arco BC. Então:

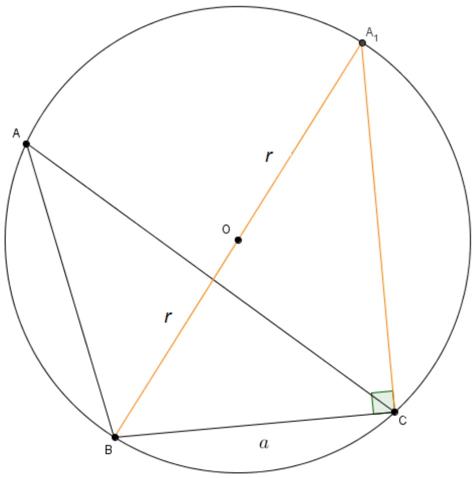


Figura 1.9: Triângulo ABC inscrito na circunferência

$$sen(\widehat{A_1}) = \frac{a}{2r} \Rightarrow sen(\widehat{A}) = \frac{a}{2r}$$

Logo,

$$\frac{a}{sen(\widehat{A})} = 2r$$

Analogamente, obtemos $\dfrac{b}{sen(\widehat{B})} = 2r$ e $\dfrac{c}{sen(\widehat{C})} = 2r$.
Daí, concluímos que:

$$\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{b}{sen(\widehat{B})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})} = \frac{a}{sen(\widehat{A})} = 2r$$

CAPÍTULO 2

A TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

O estudo da circunferência na trigonometria é de grande importância, pois ela proporciona a construção de um ciclo trigonométrico que facilita o trabalhado no estudo trigonométrico de ângulos que não são agudos, tornando o estudo da trigonometria mais completo.

2.1 Arcos de Circunferência

Dados dois pontos A e B de uma circunferência de centro O, esta fica dividida em duas partes, denominadas de *arcos da circunferência*, cujas extremidades são A e B (ver Figura 2.1). Caso os pontos forem coincidentes, teremos um arco nulo e outro de uma volta.

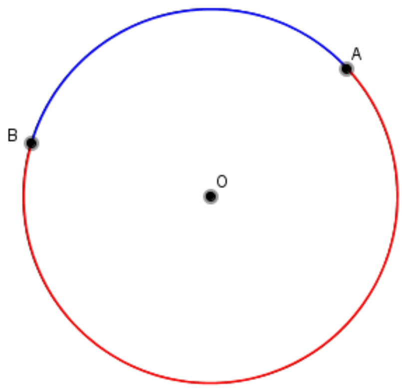


Figura 2.1: Arcos de circunferência

A medida de cada arco equivale à do ângulo central (ângulo cujo vértice é o centro da circunferência) correspondente, independente da medida do raio da circunferência. Observe que a medida de um arco não corresponde ao comprimento do arco. Note que na Figura 2.2, que os arcos AB e $A'B'$ possuem a mesma medida α, porém, possuem comprimentos diferentes, ℓ e ℓ' respectivamente.

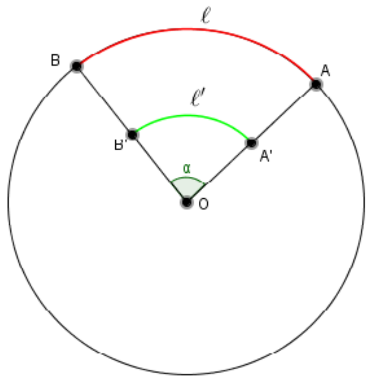


Figura 2.2: Arcos de circunferência

A medida de um arco é realizada comparando-o com outro arco unitário. Os arcos unitários mais utilizados são o grau e o radiano.

i) **O grau**: Corresponde a 1/360 da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido, isto é $1° = \frac{1}{360}$ da circunferência.

ii) **O radiano**: Corresponde a um arco que possui comprimento igual ao raio da circunferência (ver Figura 2.3) e representamos por rad.

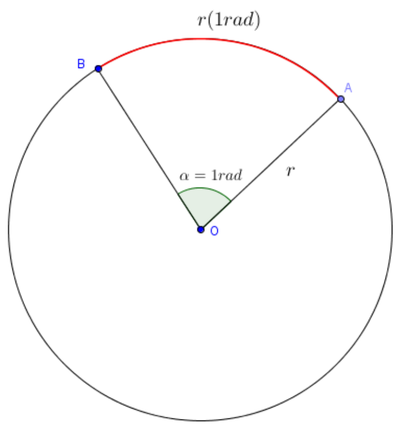


Figura 2.3: O radiano

Sabemos que o comprimento de uma circunferência é dado pela equação $C = 2\pi r$. Como $1rad$ equivale ao raio r, então o arco de uma volta de circunferência corresponde a 2π rad e, portanto, temos que $360° = 2\pi rad$, ou seja, $1\pi rad = 180°$. E ainda, $1rad = \frac{180°}{\pi} \simeq \frac{180°}{3,14} \simeq 57,3°$.

2.2 Circunferência Trigonométrica

Consideremos uma circunferência de raio igual a um, cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal (ver Figura 2.4). Vamos fazer algumas convenções:

I. O ponto $A(1,0)$ é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência;

II. Os arcos medidos no sentido anti-horário são positivos, e os arcos medidos no sentido horário são negativos;

III. A circunferência é dividida em quatro partes, denominadas de quadrantes, numeradas no sentido anti-horário;

IV. Os pontos dos eixos coordenados não pertecem a nenhum dos quadrantes.

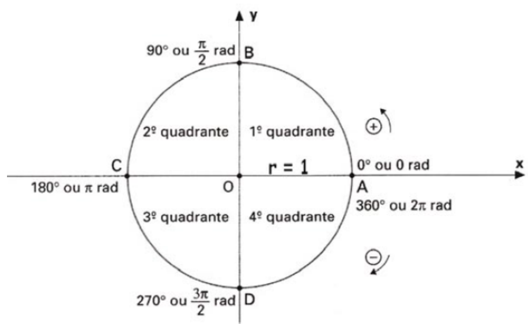


Figura 2.4: Circunferência Trigonométrica

Como a partir do ponto A cada arco trigonométrico tem como extremidade um único ponto na circunferência, é comum indicar o arco por esse ponto, ou seja, a cada número real x podemos associar um único ponto da circunferência.

Os arcos que têm a mesma extremidade e diferem apenas pelo número de voltas inteiras são chamados de *arcos côngruos*. Assim os arcos de $40°$, $400°$, $760°$ e $-320°$ são arcos côngruos (Representamos $40° \equiv 400° \equiv 760° \equiv -320°$). Podemos escrever uma expressão representa os arcos côngruos a α das seguintes maneiras:

- $\alpha + 360° \cdot k$ (quando α é medido em graus), para todo $k \in \mathbb{Z}$;

- $\alpha + 2\pi \cdot k$ (quando α é medidos em radianos), para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Seno de um Arco

Definição: Considere, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α. Define-se como seno do arco AP ou do ângulo α ($sen(\alpha)$) a ordenada do ponto P, ou seja, $sen(\alpha) = \overline{OP'}$ (ver Figura 2.5).

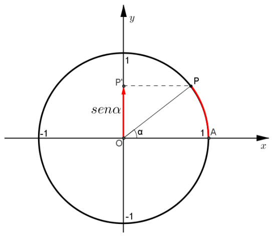
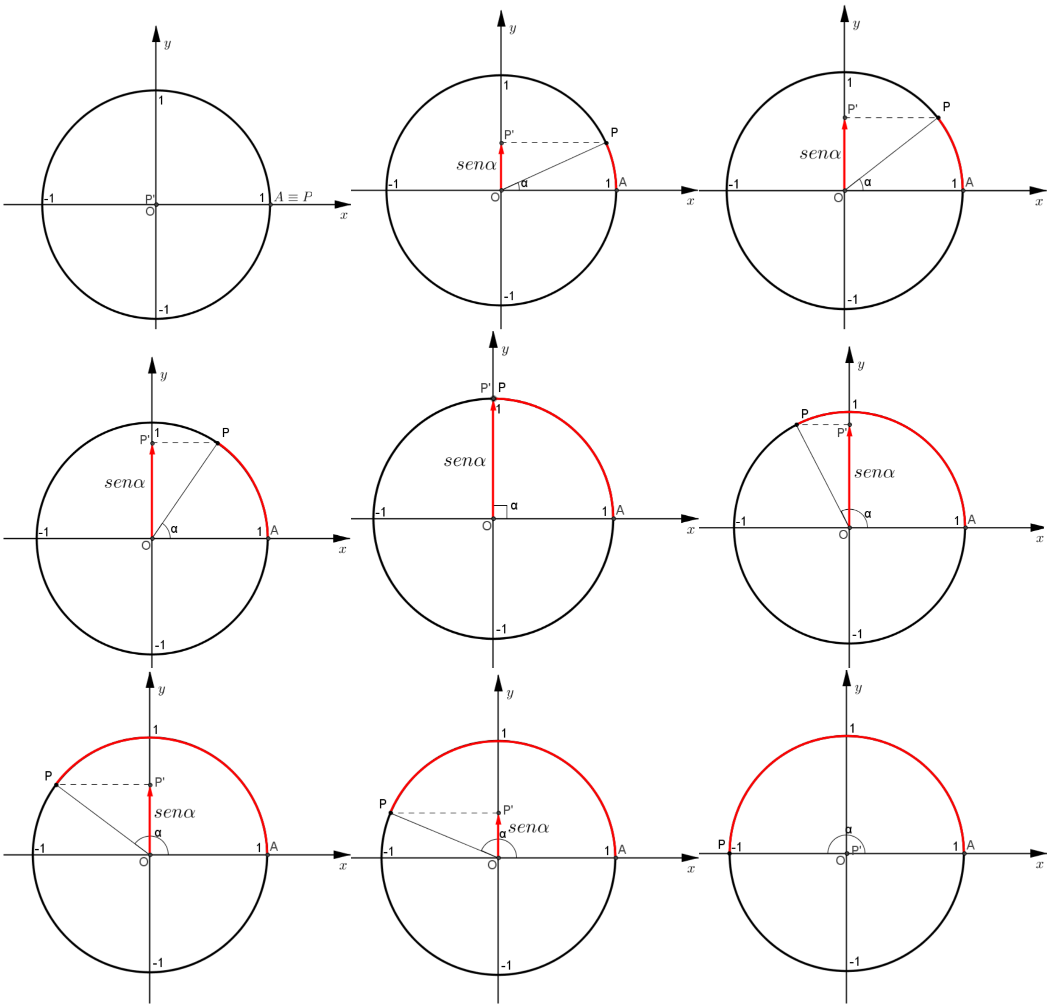


Figura 2.5: Seno de um Arco

Observe na Figura 2.6 que para cada $\alpha \in [0, 2\pi]$ existe apenas um único valor para $sen\ (\alpha) = \overline{OP'}$.



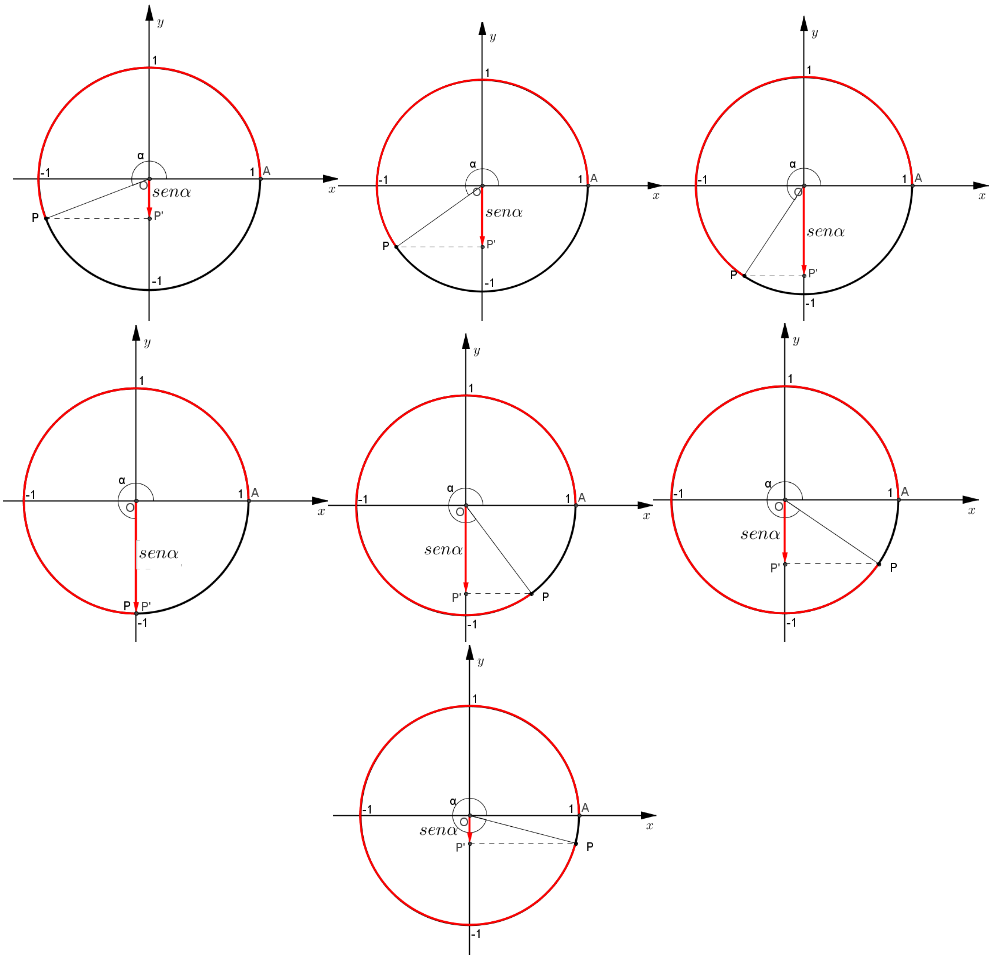


Figura 2.6: Comportamento do Seno de um Arco

Analisando a Figura 2.6, concluímos que:

- $sen(0) = 0$, $sen(\frac{\pi}{2}) = 1$, $sen(\pi) = 0$, $sen(\frac{3\pi}{2}) = -1$ e, finalmente $sen(2\pi) = 0$;
- Se α pertence ao primeiro ou segundo quadrante, então o seno de α é positivo ($sen\ (\alpha) > 0$);
- Se α pertence ao terceiro ou quarto quadrante, então o seno de α é negativo ($sen\ (\alpha) < 0$);
- A medida que α aumenta no primeiro ou no quarto quadrante, o seno de α cresce;
- A medida que α aumenta no segundo ou no terceiro quadrante, o seno de α decresce;
- O valor máximo para o seno de um arco é 1 e o mínimo é -1. Portanto, o seno varia de 1 a -1 ($-1 \leq sen\ (\alpha) \leq 1$).

2.4 Cosseno de um Arco

Definição: Considere, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α. Define-se como cosseno do arco AP ou do ângulo α ($cos(\alpha)$) a abscissa do ponto P, ou seja, $cos(\alpha) = \overline{OP''}$ (ver Figura 2.7).

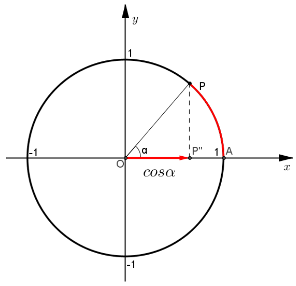
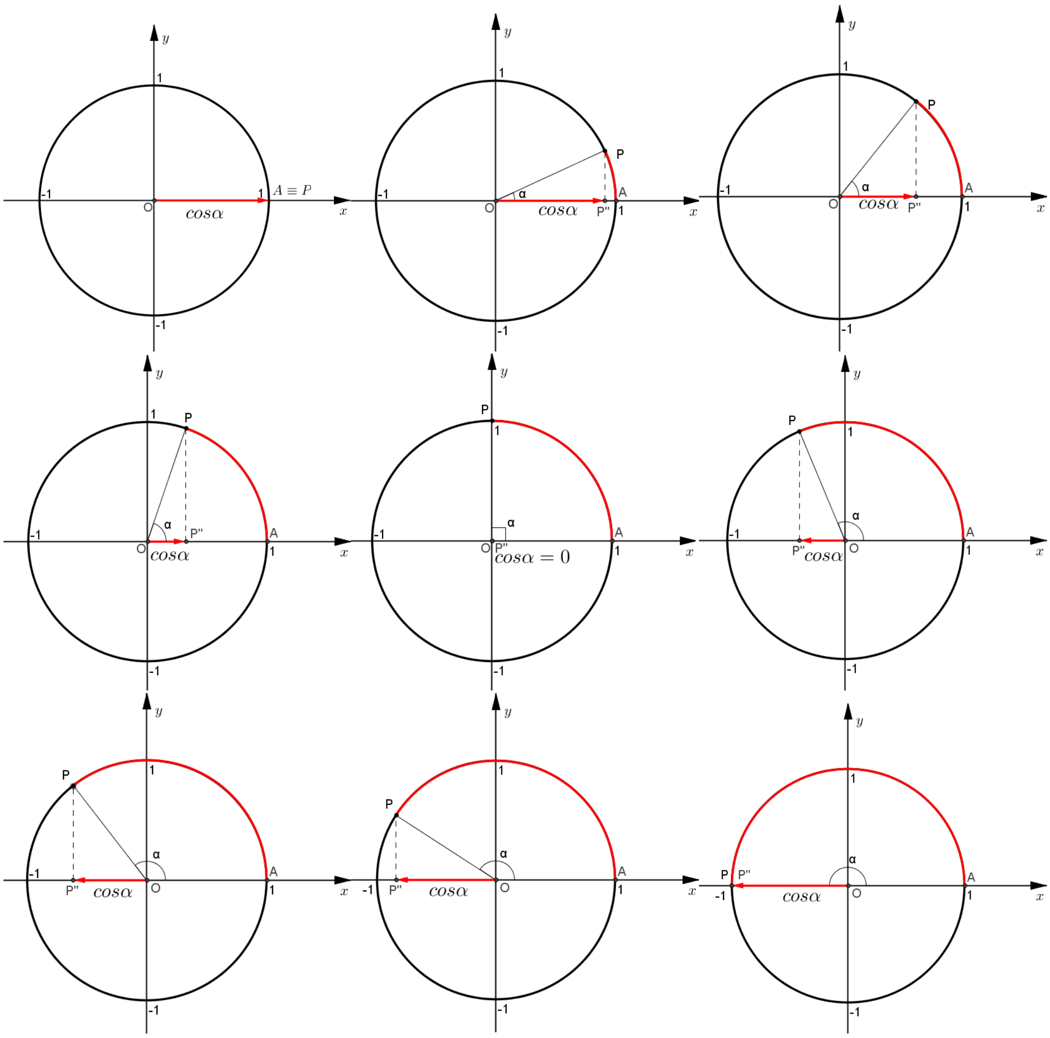


Figura 2.7: Cosseno de um Arco

Observe na Figura 2.8 que para cada $\alpha \in [0, 2\pi]$ existe apenas um único valor para $cos\ (\alpha) = \overline{OP''}$.



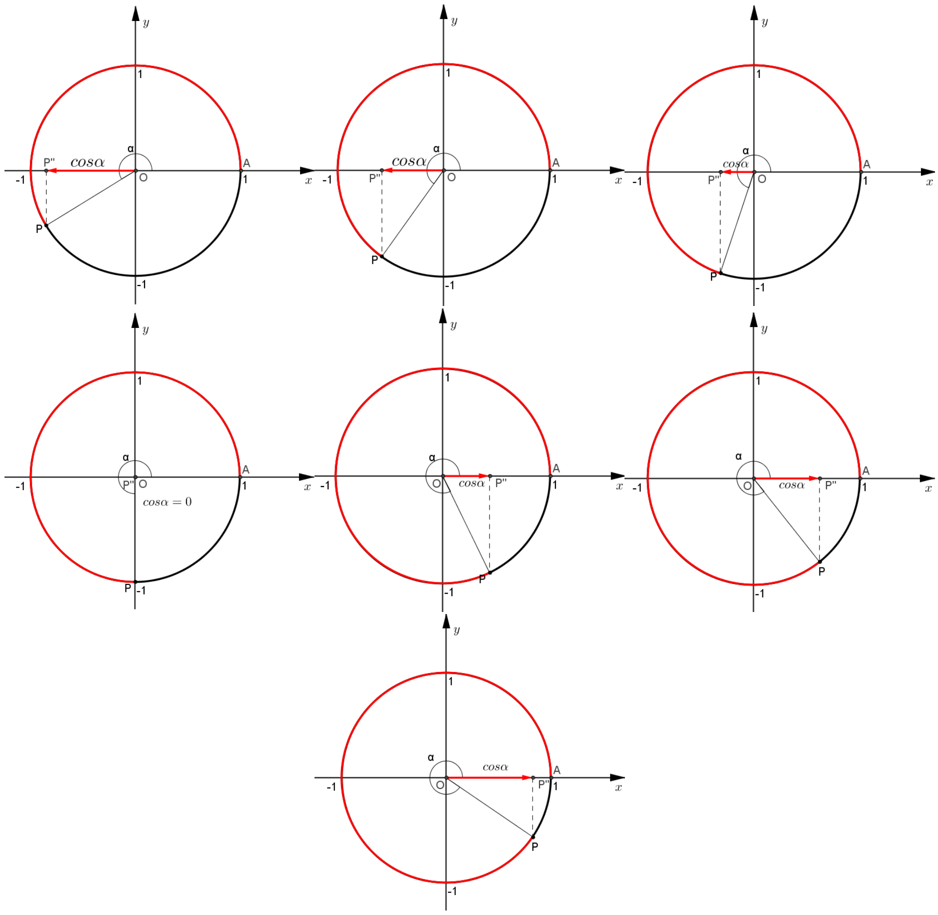


Figura 2.8: Comportamento do Cosseno de um Arco

Analisando a Figura 2.8, concluímos que:

- $cos(0) = 1$, $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $cos(\pi) = -1$, $cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ e, finalmente $cos(2\pi) = 1$;
- Se α pertence ao primeiro ou quarto quadrante, então o cosseno de α é positivo $(cos\ (\alpha) > 0)$;
- Se α pertence ao segundo ou terceiro quadrante, então o cosseno de α é negativo $(cos\ (\alpha) < 0)$;
- A medida que α aumenta no terceiro ou no quarto quadrante, o cosseno de α cresce;
- A medida que α aumenta no primeiro ou no segundo quadrante, o cosseno de α decresce;
- O valor máximo para o cosseno de um arco é 1 e o mínimo é -1. Portanto, o cosseno varia de 1 a -1 $(-1 \leq cos\ (\alpha) \leq 1)$.

2.5 Tangente de um Arco

Definição: Dado, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α. Para obter a tangente de um arco devemos traçar um novo eixo (chamaremos de eixo das tangentes) paralelo ao eixo das ordenadas e que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto A.

Consideremos a reta OP e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de α (para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$) e indicamos $tg(\alpha)$ a medida algébrica do segmento de reta AT (ver Figura 2.9).

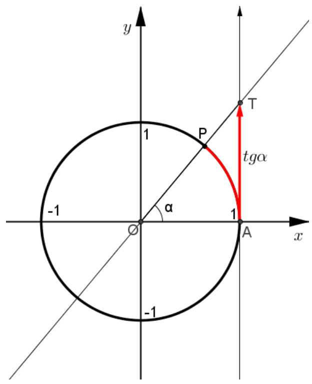
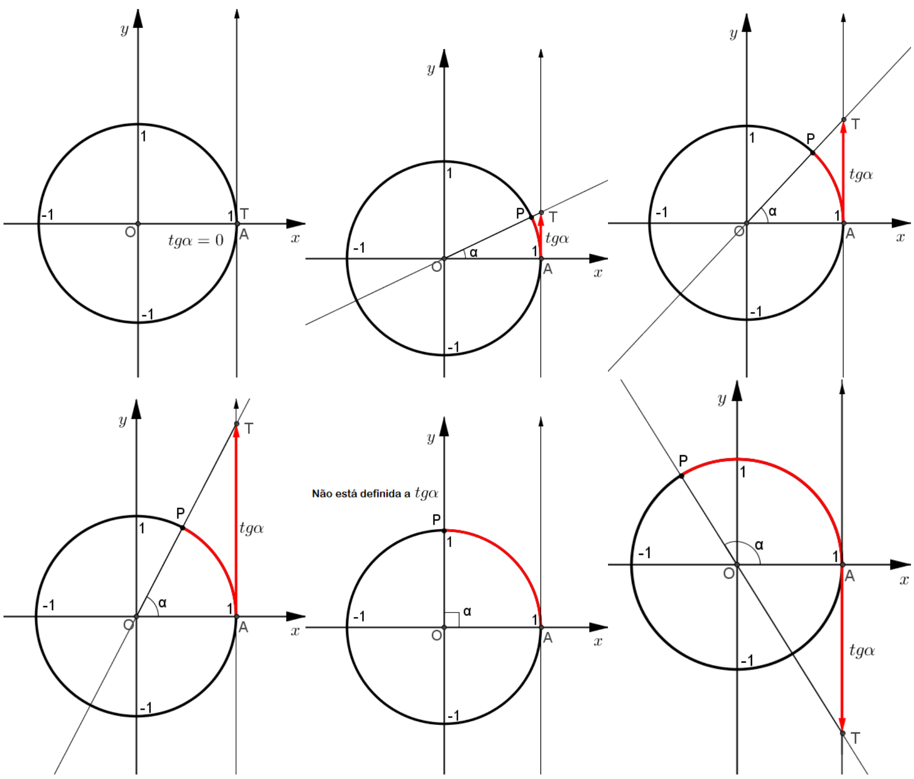


Figura 2.9: Tangente de um Arco

Analisando a Figura 2.10, concluímos que:



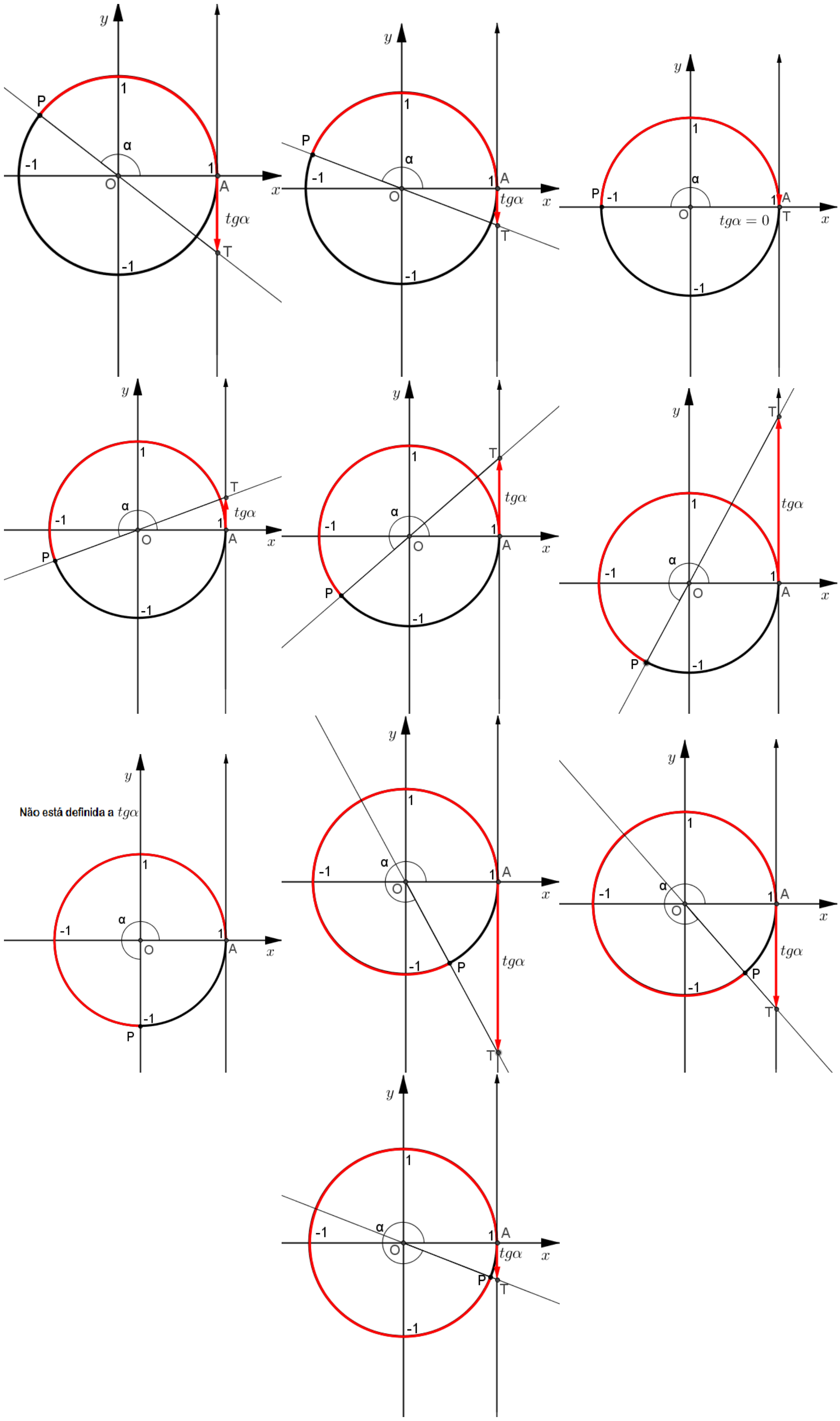


Figura 2.10: Comportamento da Tangente de um Arco

- $tg(0) = tg(\pi) = tg(2\pi) = 0$;

- Observe que quando $\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$, o ponto P pertence ao eixo das ordenadas. Logo, não existe o ponto de intersecção da reta OP com o eixo das tangentes e, portanto, a tangente de α não está definida nestes pontos;

- Se α pertence ao primeiro ou terceiro quadrante, então a tangente de α é positiva $(tg\ (\alpha) > 0)$;

- Se α pertence ao segundo ou quarto quadrante, então a tangente de α é negativa $(tg\ (\alpha) < 0)$;

- A medida que α cresce, a tangente de α também cresce;

- A tangente de α pode assumir qualquer valor real.

2.6 Secante de um Arco

Definição: Seja, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α.

Consideremos a reta tangente a circunferência trigonométrica passando pelo ponto P e seja S sua intersecção com o eixo das abscissas (eixo dos cossenos). Denominamos secante de α (para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$) e indicamos $sec(\alpha)$ a medida algébrica do segmento de reta OS (ver Figura 2.11).

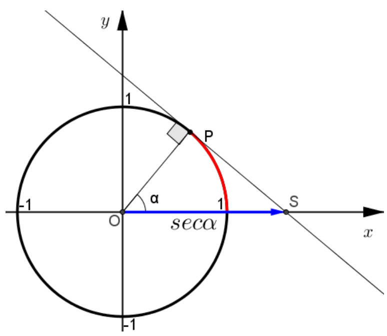
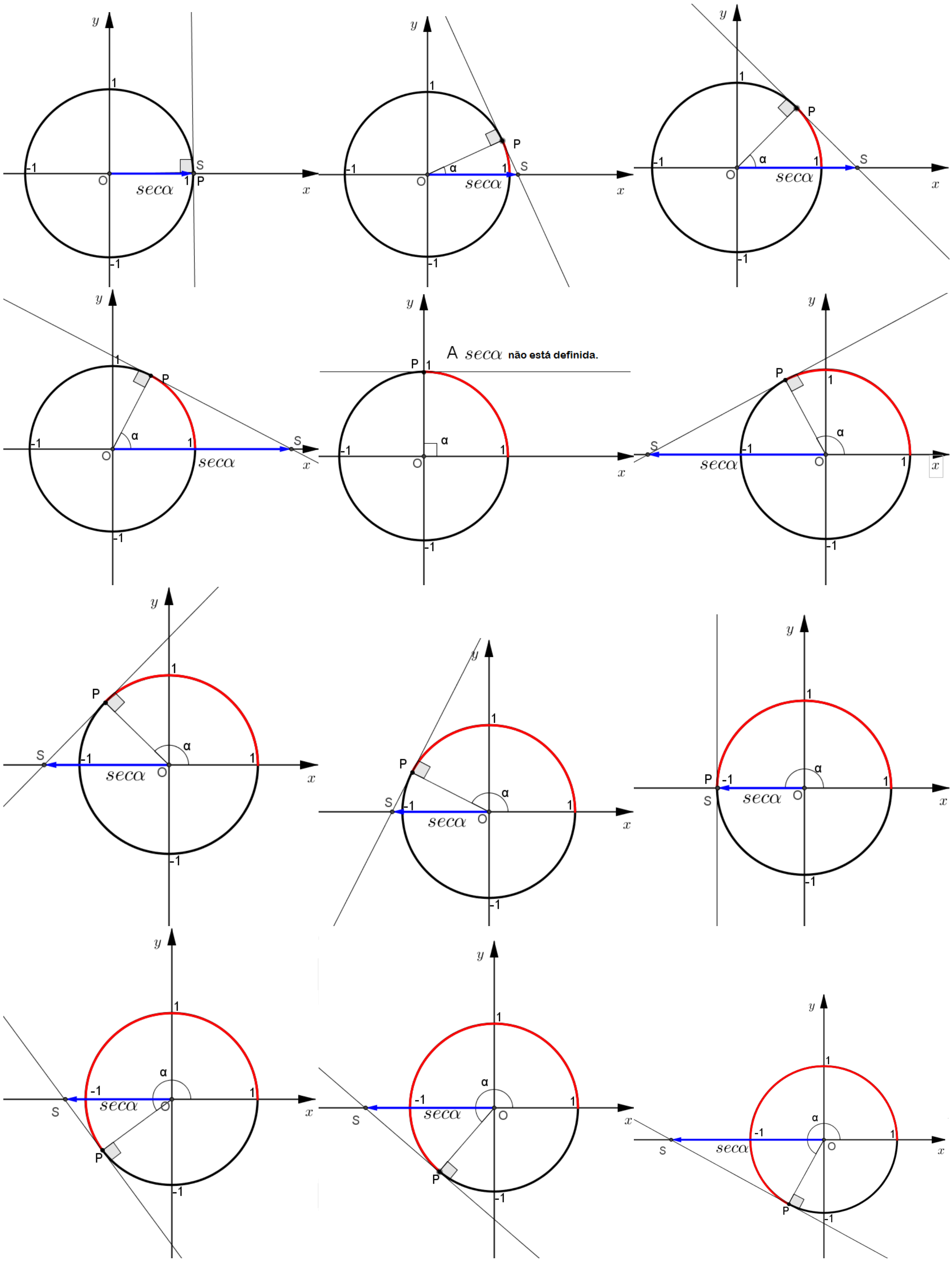


Figura 2.11: Secante de um Arco

Analisando o comportamento da secante dos arcos na Figura 2.12, concluímos que:


A secα não está definida.
secα
P
S
O
α
x
y
1
-1

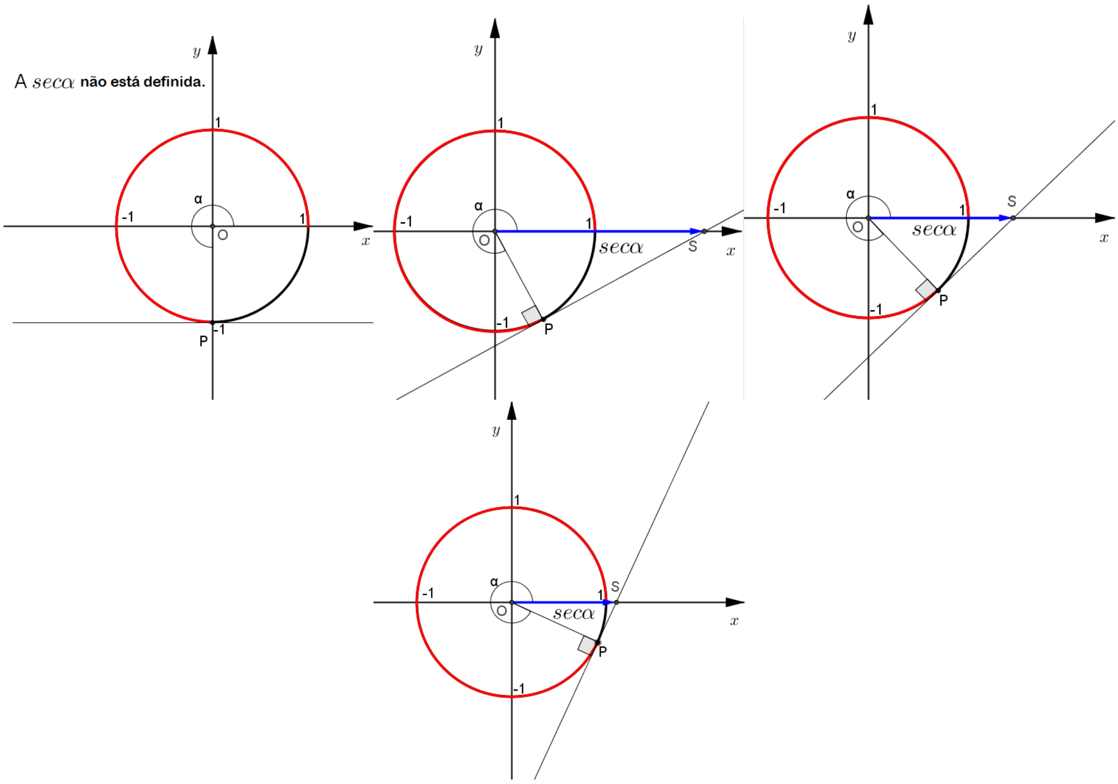


Figura 2.12: Comportamento da Secante de um Arco

- $sec(0) = 1$, $sec(\pi) = -1$ e $sec(2\pi) = 1$;

- Observe que quando $\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$, a reta tangente a circunferência trigonométrica que passa pelo ponto P é paralela ao eixo das abscissas, não existindo o ponto de intersecção S e, portanto, a secante de α não está definida nestes pontos;

- Se α pertence ao primeiro ou quarto quadrante, então a secante de α é positiva $(sec\ (\alpha) > 0)$;

- Se α pertence ao segundo ou terceiro quadrante, então a secante de α é negativa $(sec\ (\alpha) < 0)$;

- A medida que α aumenta no terceiro ou quarto quadrante, a secante de α decresce;

- A medida que α aumenta no primeiro ou segundo quadrante, a secante de α cresce;

- A secante de α pode assumir qualquer valor real que não pertença ao intervalo $]-1, 1[$.

2.7 Cossecante de um Arco

Definição: Dado, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α.

Consideremos a reta tangente a circunferência trigonométrica passando pelo ponto P e seja C sua intersecção com o eixo das ordenadas (eixo dos senos). Denominamos cossecante de α (para $\alpha \neq k \cdot \pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$) e indicamos $cossec(\alpha)$ a medida algébrica do segmento de reta OC (ver Figura 2.13).

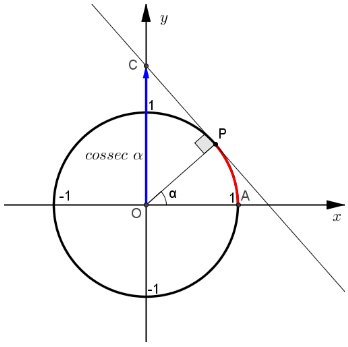
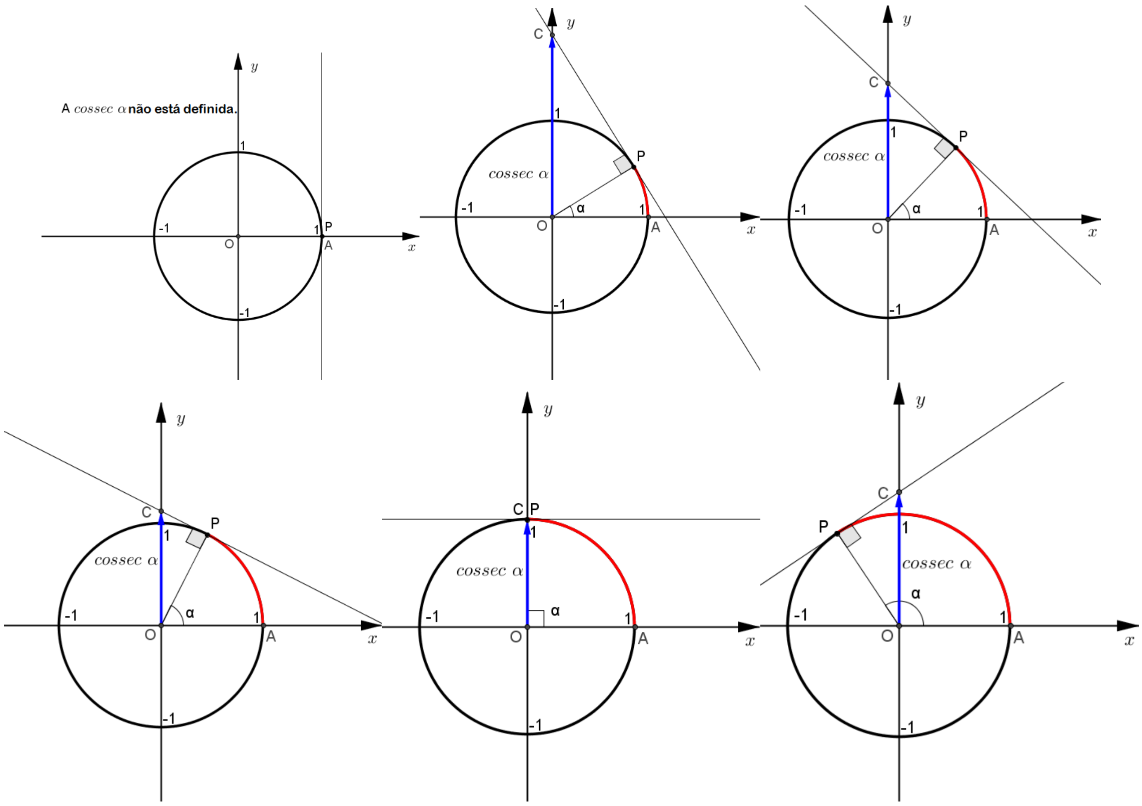


Figura 2.13: Cossecante de um Arco

Analisando o comportamento da cossecante dos arcos na Figura 2.14, concluímos que:



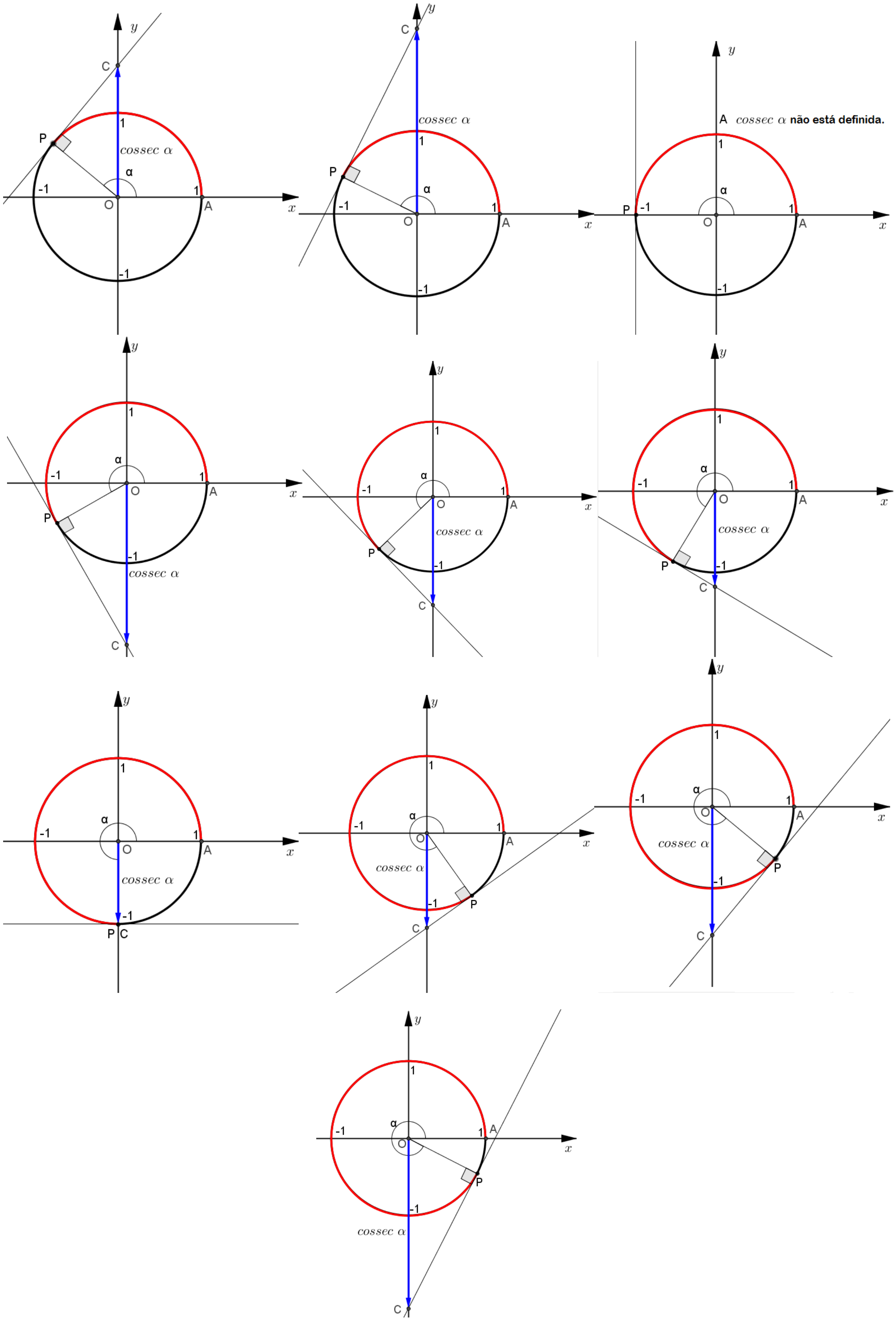


Figura 2.14: Comportamento da Cossecante de um Arco

- $cossec(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $cossec(\frac{3\pi}{2}) = -1$;
- Observe que quando $\alpha = k \cdot \pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$, a reta tangente a circunferência trigonométrica que passa pelo ponto P é paralela ao eixo das ordenadas, não existindo o ponto de intersecção C e, portanto, a cossecante de α não está definida nestes pontos;
- Se α pertence ao primeiro ou segundo quadrante, então a cossecante de α é positiva ($cossec\ (\alpha) > 0$);
- Se α pertence ao terceiro ou quarto quadrante, então a cossecante de α é negativa ($cossec\ (\alpha) < 0$);
- A medida que α aumenta no primeiro ou quarto quadrante, a cossecante de α decresce;
- A medida que α aumenta no segundo ou terceiro quadrante, a cossecante de α cresce;
- A cossecante de α pode assumir qualquer valor real que não pertença ao intervalo $]-1, 1[$.

2.8 Cotangente de um Arco

Definição: Dado, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α. Para obter a cotangente de um arco devemos traçar mais um eixo (chamaremos de eixo das cotangentes) paralelo ao eixo das abscissas e que tangencia a circunferência trigonométrica passando pelo ponto B.

Consideremos a reta OP e seja C sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de α (para $\alpha \neq k \cdot \pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$) e indicamos $cotg(\alpha)$ a medida algébrica do segmento de reta BC (ver Figura 2.15).

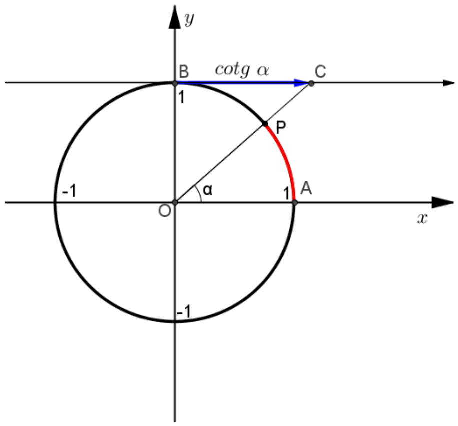
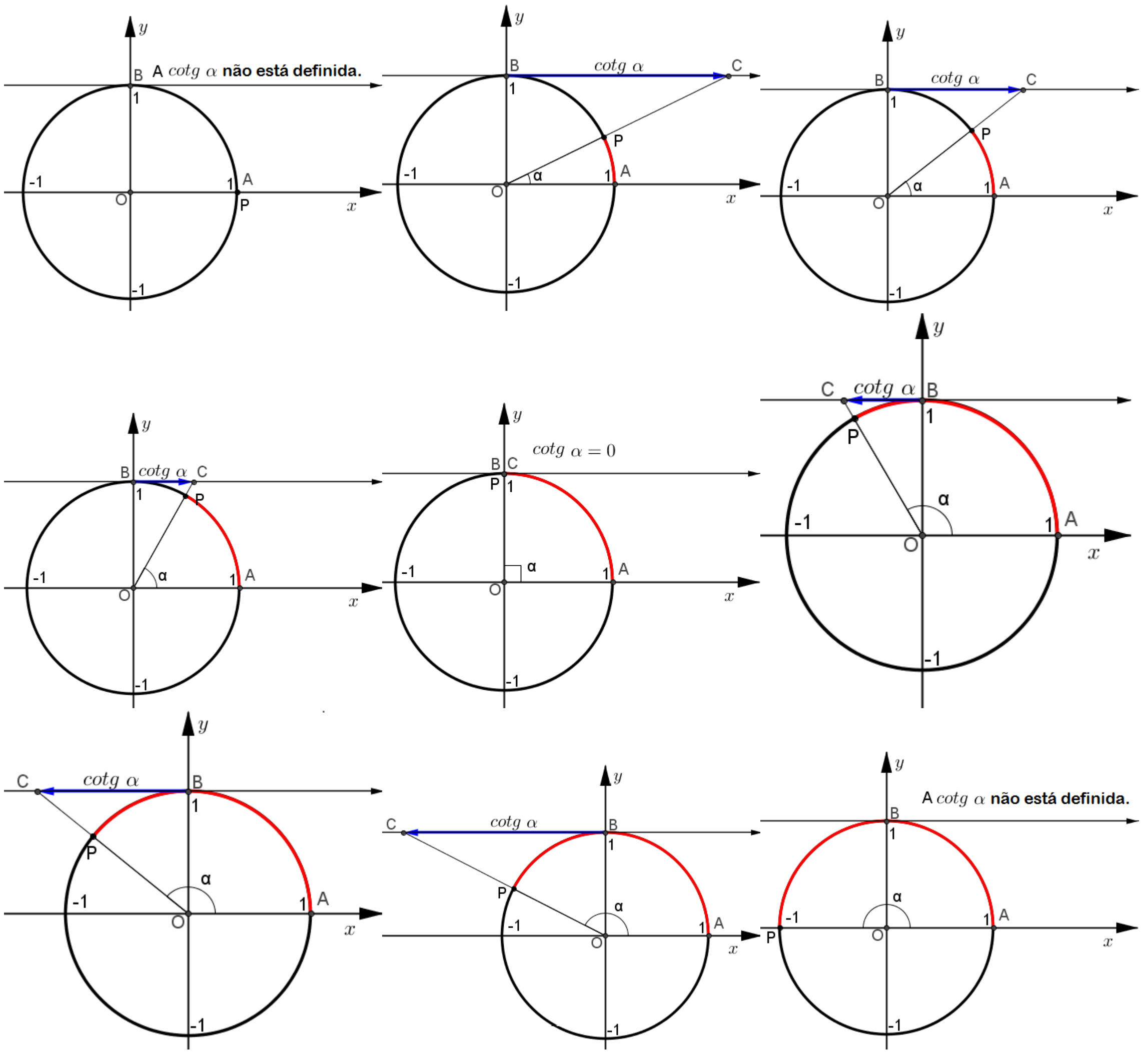


Figura 2.15: Cotangente de um Arco

Analisando o comportamento da cotagente dos arcos na Figura 2.16, concluímos que:



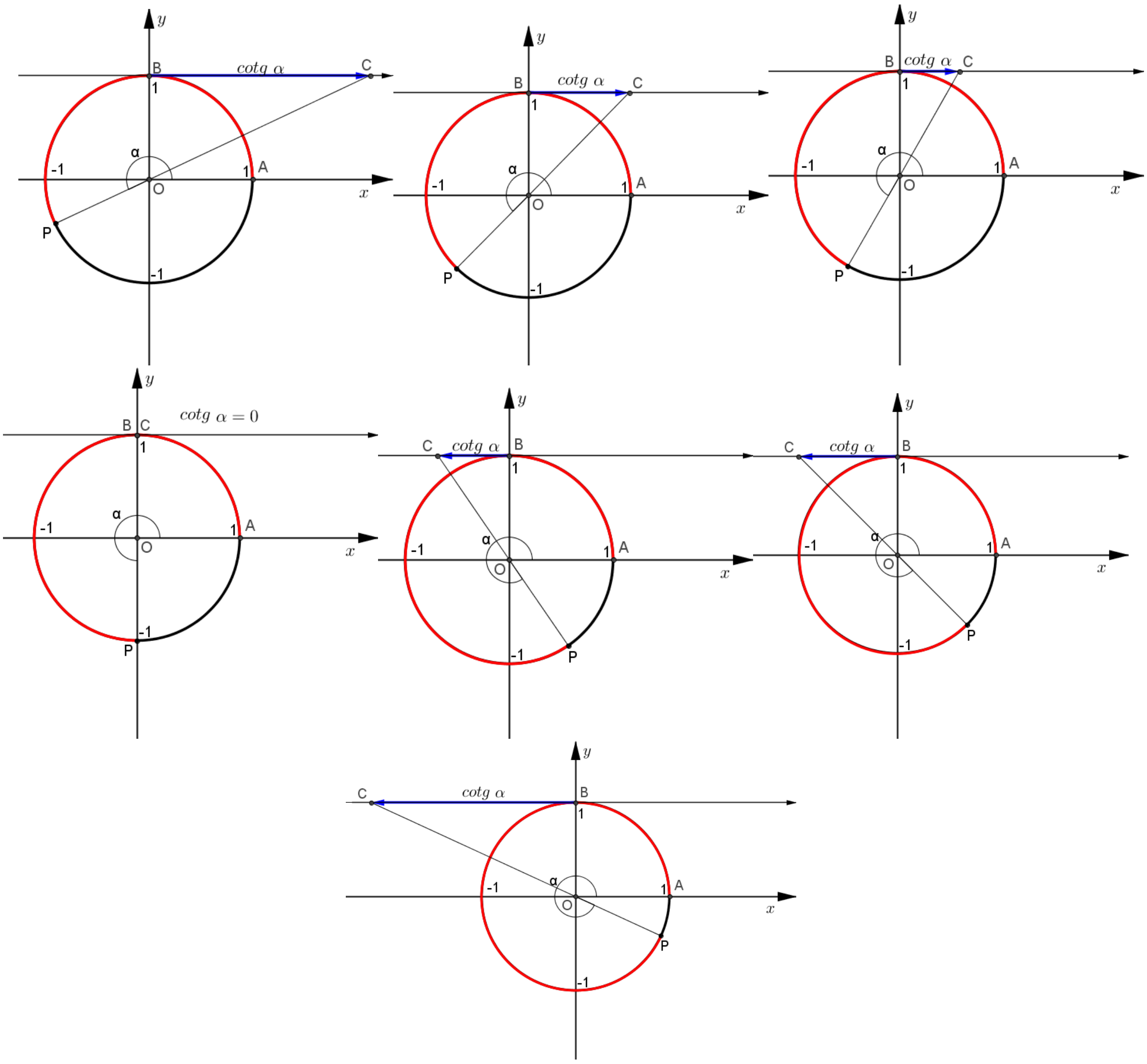


Figura 2.16: Comportamento da Cotangente de um Arco

- $cotg(\frac{\pi}{2}) = cotg(\frac{3\pi}{2}) = 0$;

- Observe que quando $\alpha = k \cdot \pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$, o ponto P pertence ao eixo das abscissas, logo, não existe o ponto de intersecção da reta OP com o eixo das cotangentes e, portanto a cotangente de α não está definida nestes pontos ;

- Se α pertence ao primeiro ou terceiro quadrante, então a cotangente de α é positiva ($cotg\ (\alpha) > 0$);

- Se α pertence ao segundo ou quarto quadrante, então a cotangente de α é negativa ($cotg\ (\alpha) < 0$);

- A medida que α cresce, a cotangente de α decresce;

- A cotangente de α pode assumir qualquer valor real.

(...) Foi Hiparco, ou talvez Hipsicles (c. 180 a.C.), quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360°; sabe-se ainda que Hiparco propugnava a localização de pontos sobre a superfície da Terra por meio de latitudes e longitudes. Como quase nenhum dos escritos de Hiparco chegou até nós, tudo que se sabe sobre suas realizações científicas provém de fontes indiretas.(...)(EVES, 1995, pág 202)

(...)Os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo, e sim trabalhavam com a corda do arco duplo. Além disso, devido à influência babilônica, os gregos tomavam o raio $\overline{OA}$ com comprimento 60 e dividiam o círculo em 360 partes iguais. Se $A\widehat{O}C = \alpha$, vemos então imediatamente que $sen(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}\frac{cordaAD}{\overline{OA}} = \frac{1}{120}cordaAD$ (ver Figura 2.17). (...)
(CARMO, MORGADO,WAGNER, 2005, pág 139)

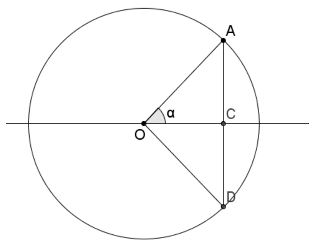


Figura 2.17: Corda do arco duplo

CAPÍTULO 3

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

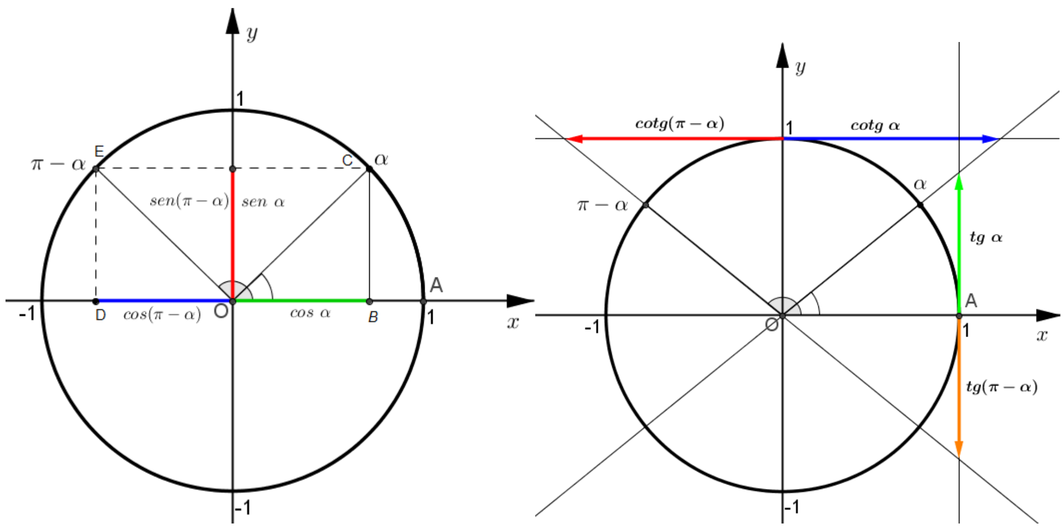
Ao estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, usamos apenas ângulos agudos. Estudaremos agora essas razões para ângulos maiores que 90°.

Usando a simetria, relacionaremos as razões trigonométricas de um arco em qualquer quadrante com os valores do 1° quadrante, ou seja, estaremos fazendo a redução ao 1° quadrante.

3.1 Simetria de Arcos

3.1.1 Redução do 2° para o 1° quadrante

Seja um arco α pertencente ao primeiro quadrante (ver Figura 3.1). Temos que:



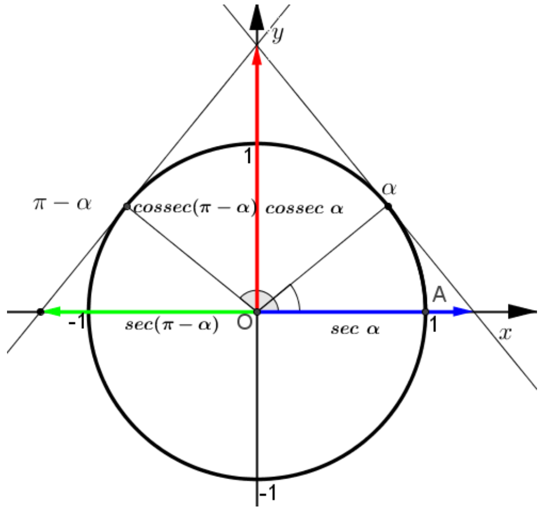


Figura 3.1: Redução do 2° para o 1° quadrante

- $sen(\pi - \alpha) = sen(\alpha)$;
- $cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$;
- $cotg(\pi - \alpha) = -cotg(\alpha)$;
- $tg(\pi - \alpha) = -tg(\alpha)$;
- $cossec(\pi - \alpha) = cossec(\alpha)$;
- $sec(\pi - \alpha) = -sec(\alpha)$.

Demonstraremos apenas a segunda relação $cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$. Os triângulos OBC e ODE (ver Figura 3.1) são retângulos em $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$, respectivamente. Além disso, $B\widehat{O}C = D\widehat{O}E = \alpha$, $O\widehat{C}B = O\widehat{E}D = \pi/2 - \alpha$ e $OC = OE = 1$. Logo, os triângulos OBC e ODE são congruentes (caso ALA) onde os lados $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$ possuem a mesma medida. Como, $cos(\pi - \alpha)$ e $cos(\alpha)$ são opostos, então, $cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$. As demais relações podem ser demonstradas de modo análogo.

3.1.2 Redução do 3° para o 1° quadrante

Seja um arco α pertencente ao primeiro quadrante (ver Figura 3.2). Temos que:

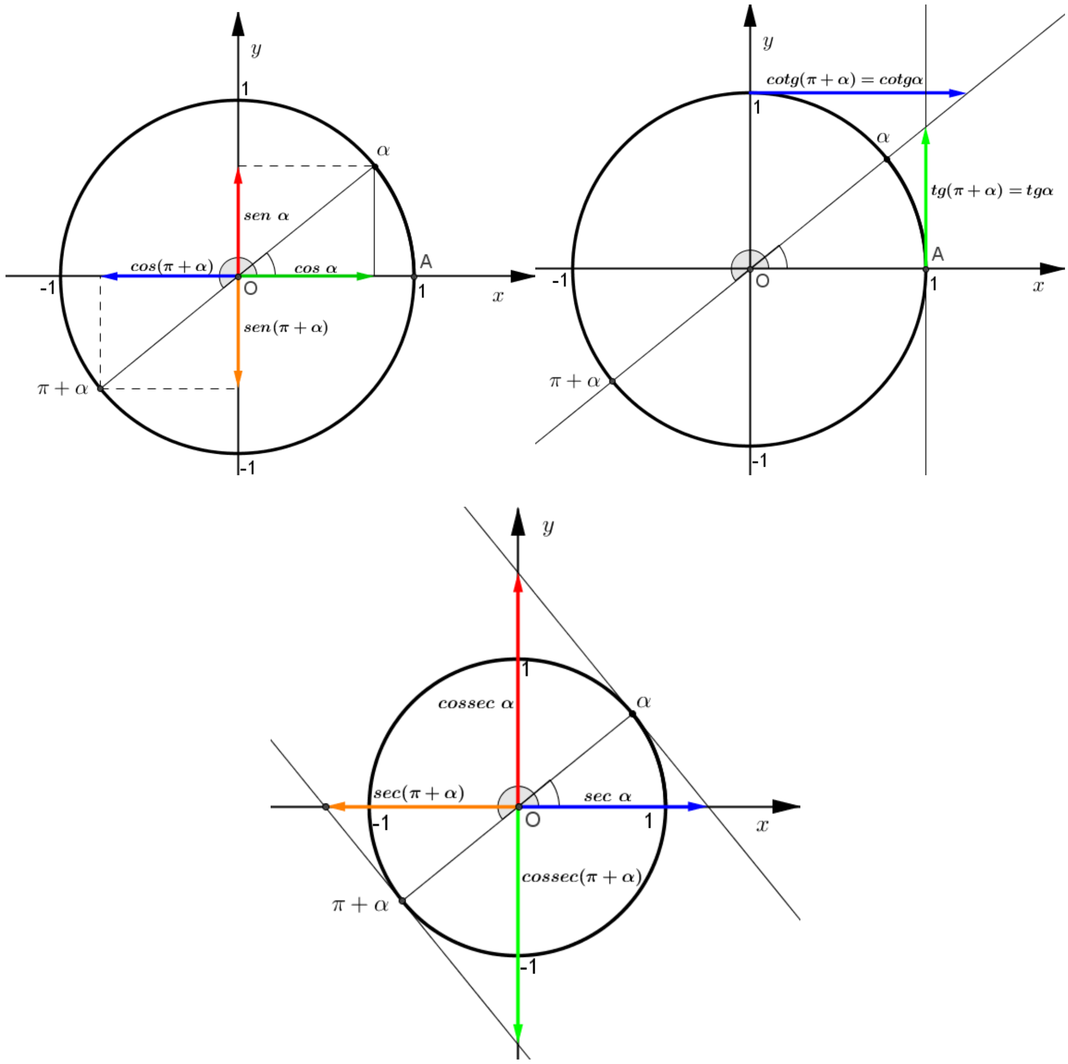


Figura 3.2: Redução do 3° para o 1° quadrante

- $sen(\pi + \alpha) = -sen(\alpha)$;
- $cos(\pi + \alpha) = -cos(\alpha)$;
- $cotg(\pi + \alpha) = cotg(\alpha)$;
- $tg(\pi + \alpha) = tg(\alpha)$;
- $cossec(\pi + \alpha) = -cossec(\alpha)$;
- $sec(\pi + \alpha) = -sec(\alpha)$.

3.1.3 Redução do 4° para o 1° quadrante

Seja um arco α pertencente ao primeiro quadrante (ver Figura 3.3). Temos que:

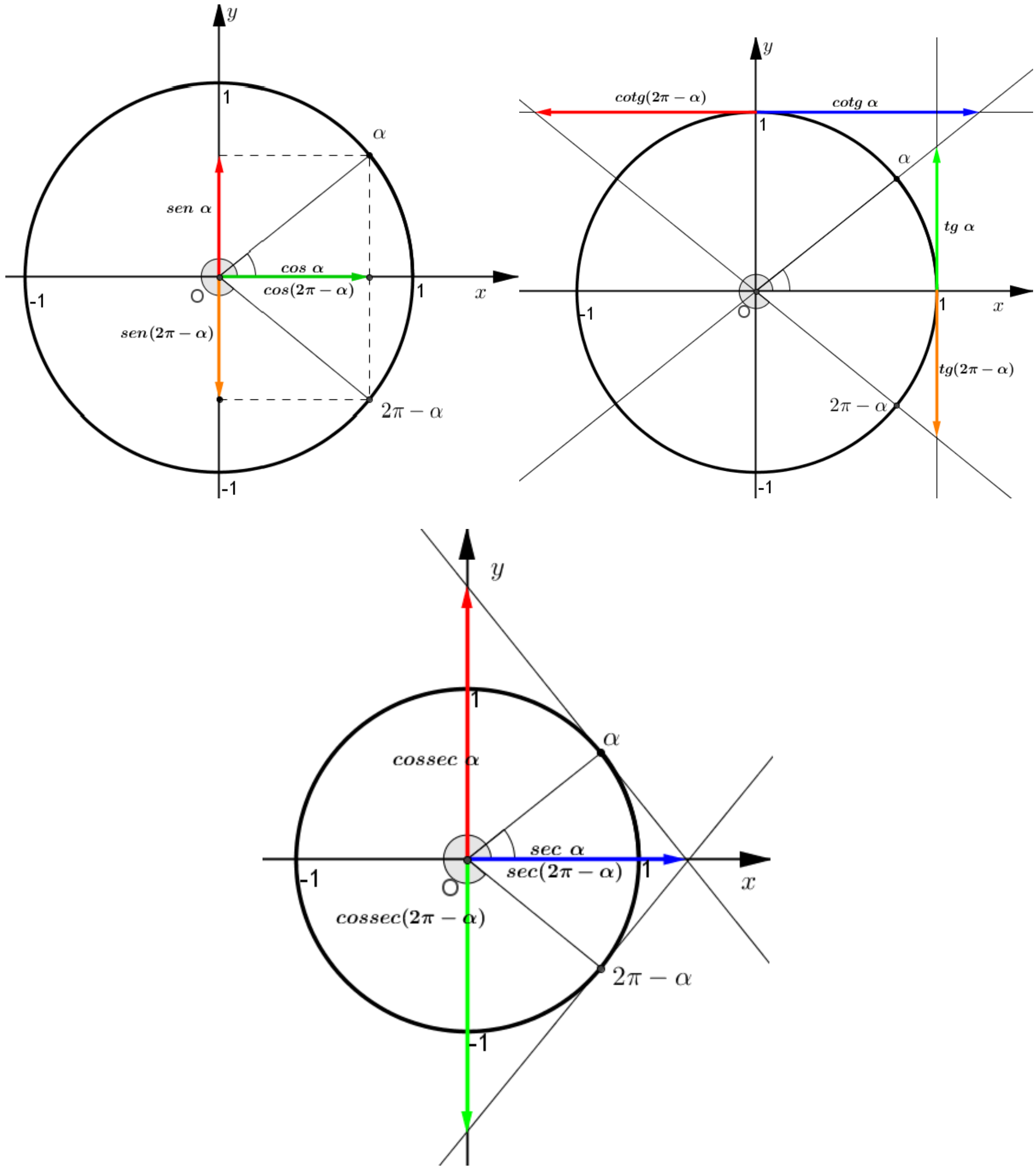


Figura 3.3: Redução do 4° para o 1° quadrante

- $sen(2\pi - \alpha) = -sen(\alpha)$;
- $cos(2\pi - \alpha) = cos(\alpha)$;
- $cotg(2\pi - \alpha) = -cotg(\alpha)$;
- $tg(2\pi - \alpha) = -tg(\alpha)$;
- $cossec(2\pi - \alpha) = -cossec(\alpha)$;
- $sec(2\pi - \alpha) = sec(\alpha)$.

Como $-\alpha$ e $2\pi - \alpha$ são arcos côngruos, então:

- $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$;
- $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$;
- $cotg(-\alpha) = -cotg(\alpha)$;
- $tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$;
- $cossec(-\alpha) = -cossec(\alpha)$;
- $sec(-\alpha) = sec(\alpha)$.

> *(...) Depois de estabelecidas as relações trigonométricas na circunferência, surgiu, entre os matemáticos, o interesse em representá-las graficamente. Em 1635, o matemático francês Gilles Persone de Roberval (1602-1675) fez o primeiro esboço de um arco da curva do seno. (...)* (SOUZA,2010, pág 25)

3.2 Relações Trigonométricas

No capítulo 2 definimos seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente de um arco na circunferência trigonométrica. Mostraremos neste capítulo algumas relações entre esses seis números.

Vimos no capítulo 1 que a relação trigonométrica fundamental $sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha) = 1$ é válida para todo ângulo agudo α. Demonstraremos agora que esta relação também é válida para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

De fato, quando $\alpha = k \cdot \pi$ ou $\alpha = \pi/2 + k \cdot \pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ teremos que $sen(\alpha) = 0$ e $cos(\alpha) = 1$ ou $sen(\alpha) = 1$ e $cos(\alpha) = 0$, respectivamente, logo $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$. Agora considere o triângulo $OP"P$ retângulo na circunferência trigonométrica (ver Figura 3.4).

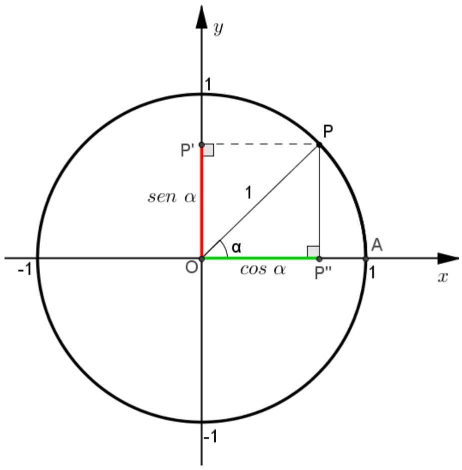


Figura 3.4: $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$

Observe que $\overline{OP''} = cos(\alpha)$, $\overline{OP'} = \overline{PP''} = sen(\alpha)$ e $\overline{OP} = 1$. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{PP''}^2 + \overline{OP''}^2 = 1^2 \Rightarrow (sen(\alpha))^2 + (cos(\alpha))^2 = 1 \Rightarrow sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Na figura 3.5, os triângulos $OP''P$ e OAT são semelhantes (caso AA). Então:

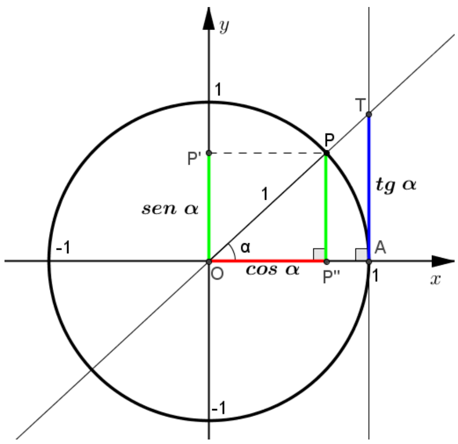


Figura 3.5: $tg(\alpha) = \dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{P''P}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP''}} \Rightarrow \frac{tg(\alpha)}{sen(\alpha)} = \frac{1}{cos(\alpha)} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}, (cos(\alpha) \neq 0)$$

Como o eixo das cotangentes é paralelo ao eixo das abscissas, observamos na Figura 3.6 que os ângulos $P''\widehat{O}P$ e $O\widehat{C}B$ são congruentes pois são ângulos alternos internos, ou seja, $O\widehat{C}B = \alpha$. Então os triângulos $OP''P$ e OBC são semelhantes (caso AA). Dessa forma:

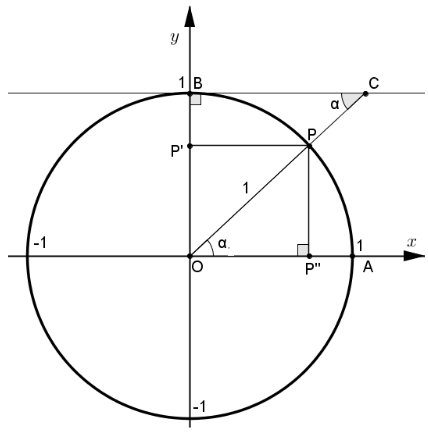


Figura 3.6: $cotg(\alpha) = \dfrac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OP''}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{PP''}} \Rightarrow \frac{cotg(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{1}{sen(\alpha)} \Rightarrow cotg(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}, (sen(\alpha) \neq 0)$$

Portanto, a tangente é a razão inversa da cotangente. Podemos comprovar esta relação geometricamente na Figura 3.7. Os triângulos OBC e OAT são semelhantes(caso AA). Então:

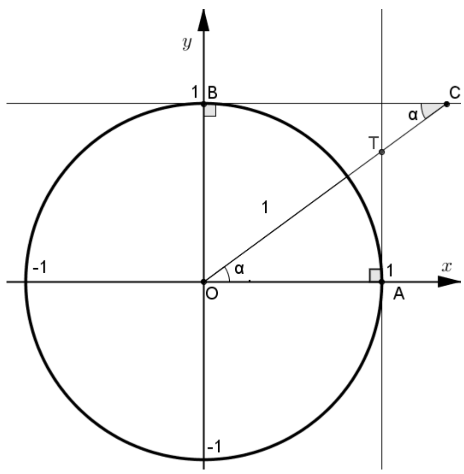


Figura 3.7: $tg(\alpha) = \dfrac{1}{cotg(\alpha)}$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{tg(\alpha)}{1} = \frac{1}{cotg(\alpha)} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{1}{cotg(\alpha)}, (cotg(\alpha) \neq 0)$$

Na Figura 3.8, os triângulos OPS e $OP''P$ são semelhantes(caso AA). Daí:

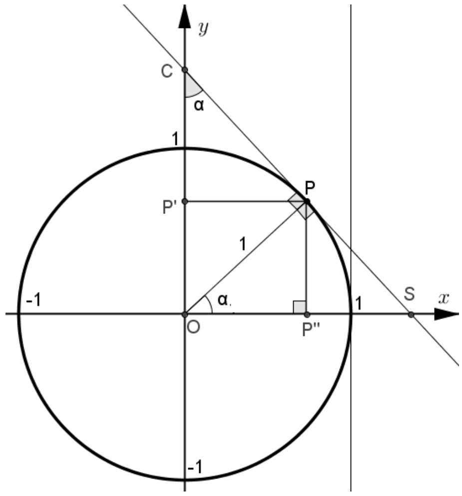


Figura 3.8: $sec(\alpha) = \dfrac{1}{cos(\alpha)}$ e $cossec(\alpha) = \dfrac{1}{sen(\alpha)}$

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OP''}} \Rightarrow \frac{sec(\alpha)}{1} = \frac{1}{cos(\alpha)} \Rightarrow sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}, (cos(\alpha) \neq 0)$$

Na mesma Figura, os triângulos OPC e $OP''P$ também são semelhantes(caso AA). Dessa forma:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PP''}} \Rightarrow \frac{cossec(\alpha)}{1} = \frac{1}{sen(\alpha)} \Rightarrow cossec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}, (sen(\alpha) \neq 0)$$

Na Figura 3.9, os triângulos OAT e OPS são semelhantes(caso AA). Logo:

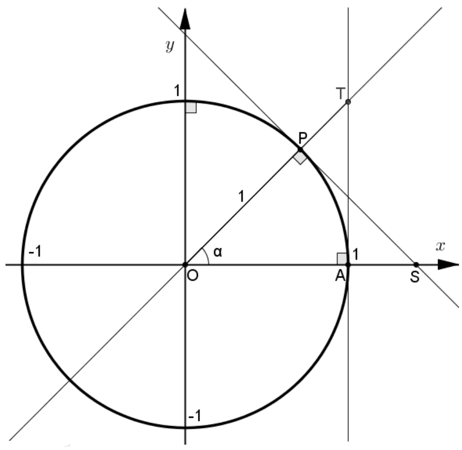


Figura 3.9: $sec^2(\alpha) = 1 + tg^2(\alpha)$

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{OT}}{sec(\alpha)} = \frac{1}{1} \Rightarrow \overline{OT} = sec(\alpha)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAT, temos que:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2 \Rightarrow sec^2(\alpha) = 1 + tg^2(\alpha) \text{ para } \alpha \neq \pi/2 + \pi \cdot k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Na Figura 3.10, os triângulos OBC e OPC' são semelhantes (caso AA). Dessa forma:

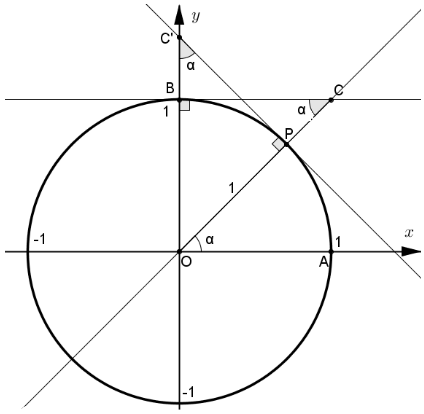


Figura 3.10: $cossec^2(\alpha) = 1 + cotg^2(\alpha)$

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{OC}}{cossec(\alpha)} = \frac{1}{1} \Rightarrow \overline{OC} = cossec(\alpha)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OBC, temos que:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow cossec^2(\alpha) = 1 + cotg^2(\alpha) \text{ para } \alpha \neq \pi \cdot k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

> *(...)Por volta de 500 d.C., o matemático hindu Aryabhata já calculava semi cordas e usava também o sistema decimal, desenvolvido aproximadamente em 600 d.C.*
>
> *Quando os hindus introduziram os conceitos de semi corda e de seno, demonstraram algumas identidades, e encontramos em Varahamihira, no ano 505 d.C., o equivalente verbal de* $sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha) = 1$*. (...)* (COSTA,2009,pág 10)

CAPÍTULO 4

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Esse capítulo aborda as funções trigonométricas que são caracterizadas por comportamentos cíclicos, ou seja, que se repetem após um período de tempo ou após completarem um ciclo. Dizemos que as funções trigonométricas são funções periódicas.

Uma função $f : A \to B$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição $f(x + p) = f(x)$ para qualquer x pertence a A. O menor valor de p que satisfaz esta condição é chamado de período.

4.1 Função Seno

Seja um número real x a medida do arco AP na circunferência trigonométrica, tal que a ordenada do ponto P é o seno de x, ou seja, $\overline{OP'} = sen(x)$. Dessa forma, denomina-se Função Seno, toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada x real, a $\overline{OP'}$ por meio da relação $f(x) = sen(x)$ (ver Figura 4.1).

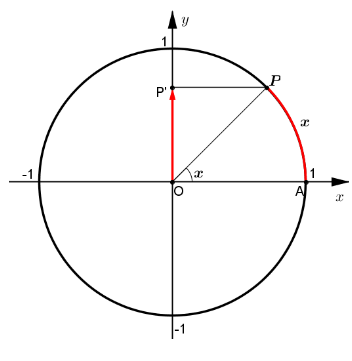


Figura 4.1: Função Seno

De acordo com o que foi visto na seção 2.3, o seno de x varia de -1 a 1, então a imagem da função seno é $Im(f) = [-1; 1]$ e o seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

A função seno assume valores positivos quando x pertence ao primeiro ou segundo quadrante e negativos quando pertence ao terceiro ou quarto quadrante. E ainda, $f(x) = sen(x)$ é crescente quando x percorre o primeiro ou o quarto quadrante e decrescente quando percorre o segundo ou o terceiro quadrante.

Como $sen(x) = sen(x + k \cdot 2\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$, a função seno é periódica com período igual a 2π.

$f(x) = sen(x)$ é função ímpar [1], pois $f(-x) = sen(-x) = -sen(x) = -f(x)$.

O gráfico da função seno é uma curva chamada *senoide* e seu esboço é mostrado na Figura 4.2.

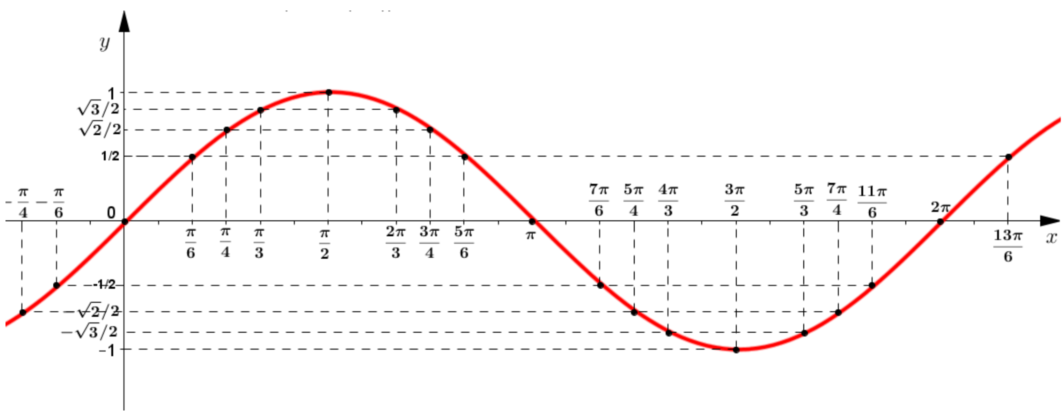


Figura 4.2: Senoide

4.2 Função Cosseno

Seja um número real x a medida do arco AP na circunferência trigonométrica, tal que a abscissa do ponto P é o cosseno de x, ou seja, $\overline{OP''} = cos(x)$. Dessa forma, denomina-se Função Cosseno, toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada x real, a $\overline{OP''}$ por meio da relação $f(x) = cos(x)$ (ver Figura 4.3).

[1] Uma função f é considerada ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, qualquer que seja o valor de $x \in \mathbb{D}(f)$.

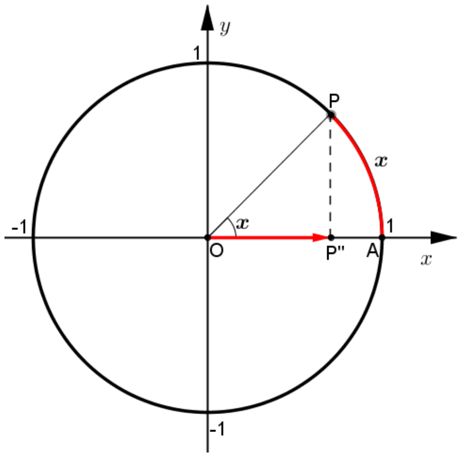


Figura 4.3: Função Cosseno

De acordo com o que foi visto na seção 2.4, o cosseno de x varia de -1 a 1, então a imagem da função cosseno é $Im(f) = [-1; 1]$ e o seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

A função cosseno assume valores positivos quando x pertence ao primeiro ou quarto quadrante e negativos quando pertence ao segundo ou terceiro quadrante. E ainda, $f(x) = cos(x)$ é crescente quando x percorre o terceiro ou o quarto quadrante e decrescente quando percorre o primeiro ou o segundo quadrante.

Como $cos(x) = cos(x + k \cdot 2\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$, a função cosseno é periódica com período igual a 2π.

$f(x) = cos(x)$ é função par [1], pois $f(-x) = cos(-x) = cos(x) = f(x)$.

O gráfico da função cosseno é uma curva chamada *cossenoide* e seu esboço é mostrado na Figura 4.4.

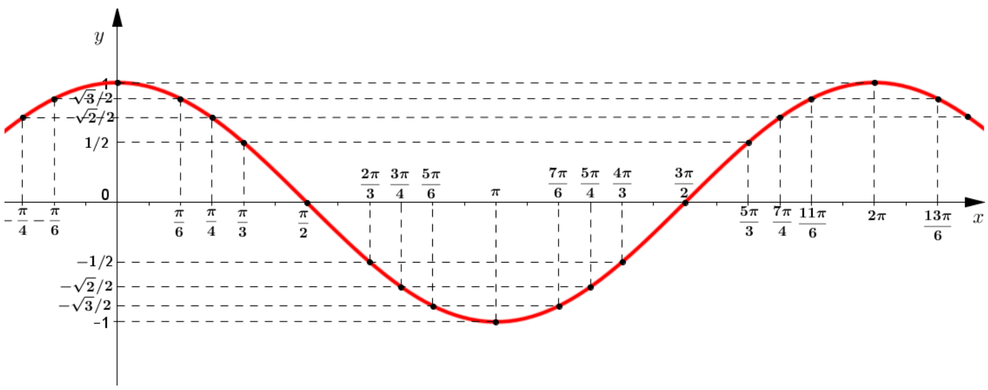


Figura 4.4: Cossenoide

[1] Uma função f é considerada par quando $f(-x) = f(x)$, qualquer que seja o valor de $x \in \mathbb{D}(f)$.

4.3 Função Tangente

Seja um número real x ($x \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$) a medida do arco AP na circunferência trigonométrica. Considere a reta OP sendo o ponto T sua intersecção com o eixo das tangentes, tal que a medida do segmento AT é a tangente de x, ou seja, $\overline{AT} = tg(x)$. Dessa forma, denomina-se função tangente toda função $f : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ que associa cada x real à medida de $\overline{AT}$, por meio da relação $f(x) = tg(x)$ (ver Figura 4.5).

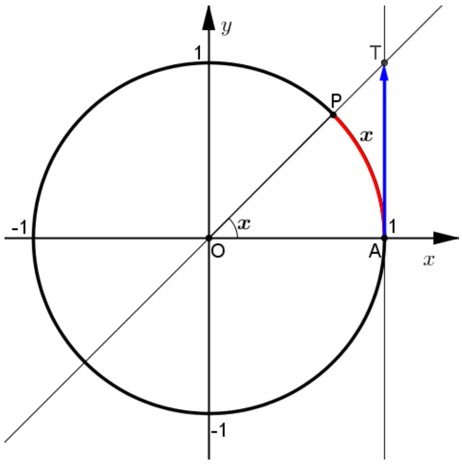


Figura 4.5: Função Tangente

De acordo com o que foi visto na seção 2.5, para todo número real y existe um real x tal que $tg(x) = y$. Então, a imagem da função tangente é $\mathbb{R}$ e o domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

A função tangente assume valores positivos quando x pertence ao primeiro ou terceiro quadrante e negativos quando pertence ao segundo ou quarto quadrante. E ainda, $f(x) = tg(x)$ é crescente quando x percorre a circunferência trigonométrica.

Como $tg(x) = tg(x+k\cdot\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$, a função tangente é periódica com período igual a π.

A função $f(x) = tg(x)$ é ímpar, pois $f(-x) = tg(-x) = -tg(x) = -f(x)$.

O gráfico da função tangente (chamado de *tangentoide*) tem seu esboço mostrado na Figura 4.6.

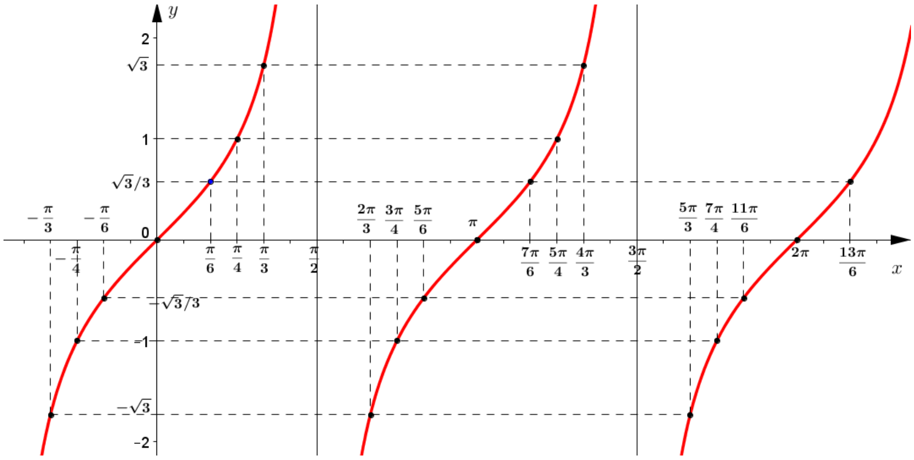


Figura 4.6: Tangentoide

As retas verticais que passam pelos pontos de abscissas $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi (k \in \mathbb{Z})$, não têm ponto comum com o gráfico, e quando x se aproxima indefinidamente de uma dessas retas, a distância entre ela e o gráfico tende a zero.

Essas retas são chamadas de **assíntotas verticais** do gráfico.

4.4 Função Cotangente

Seja um número real x $(x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z})$ a medida do arco AP na circunferência trigonométrica. Considere a reta OP sendo o ponto C sua intersecção com o eixo das cotangentes, tal que a medida do segmento BC é a cotangente de x, ou seja, $\overline{BC} = cotg(x)$. Dessa forma, denomina-se função cotangente toda função $f : \mathbb{R} - \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ que associa cada x real à medida de BC, por meio da relação $f(x) = cotg(x)$ (ver Figura 4.7).

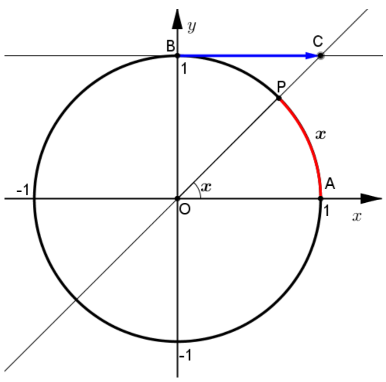


Figura 4.7: Função Cotangente

De acordo com o que foi visto na seção 2.8, para todo número real y existe um real x tal que $cotg(x) = y$. Então, a imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$ e o domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

A função cotangente assume valores positivos quando x pertence ao primeiro ou terceiro quadrante e negativos quando pertence ao segundo ou quarto quadrante. E ainda, $f(x) = cotg(x)$ é decrescente quando x percorre a circunferência trigonométrica.

Como $cotg(x) = cotg(x + k \cdot \pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$, a função cotangente é periódica com período igual a π.

A função $f(x) = cotg(x)$ é ímpar, pois $f(-x) = cotg(-x) = -cotg(x) = -f(x)$.

O gráfico da função cotangente tem seu esboço mostrado na Figura 4.8.

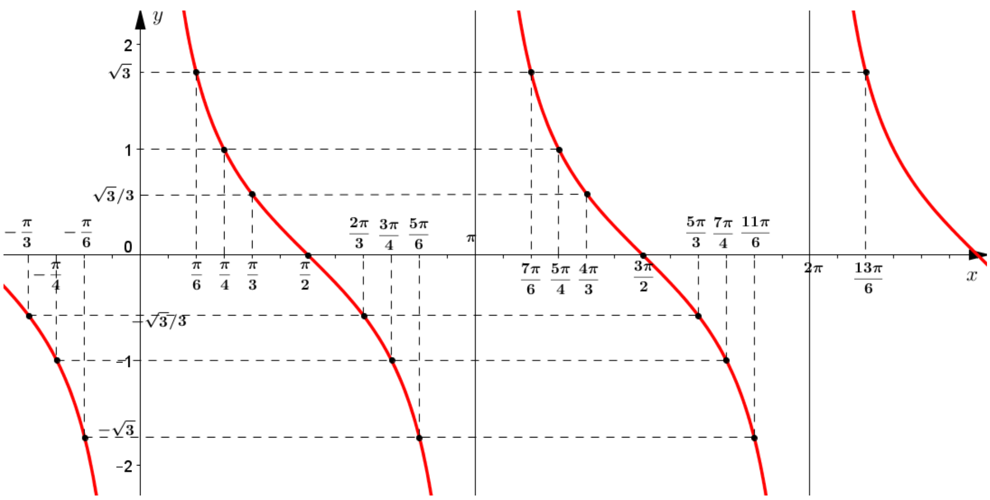


Figura 4.8: Gráfico da Função Cotangente

4.5 Função Secante

Seja um número real x ($x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$) a medida do arco AP na circunferência trigonométrica. Considere uma reta tangente a circunferência passando pelo ponto P e seja S sua intersecção com o eixo das abscissas, tal que a medida do segmento OS é a secante de x, ou seja, $\overline{OS} = sec(x)$. Dessa forma, denomina-se Função Secante toda função $f : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada x real à medida de $\overline{OS}$, por meio da relação $f(x) = sec(x)$(ver Figura 4.9).

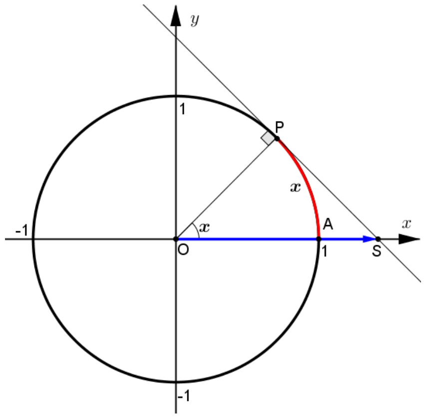


Figura 4.9: Função Secante

De acordo com o que foi visto na seção 2.6, para todo número real $y \leq -1$ ou $y \geq 1$ existe um real x tal que $sec(x) = y$. Então, a imagem da função secante é $\mathbb{R}-]-1;1[$ e o domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}\}$.

A função secante assume valores positivos quando x pertence ao primeiro ou quarto quadrante e negativos quando pertence ao segundo ou terceiro quadrante. E ainda, $f(x) = sec(x)$ é decrescente quando x percorre o terceiro ou o quarto quadrante e crescente quando percorre o primeiro ou o segundo quadrante.

Como $sec(x) = sec(x + k \cdot 2\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$, a função secante é periódica com período igual a 2π.

A função $f(x) = sec(x)$ é par, pois $f(-x) = sec(-x) = sec(x) = f(x)$.

O gráfico da função secante tem seu esboço mostrado na Figura 4.10.

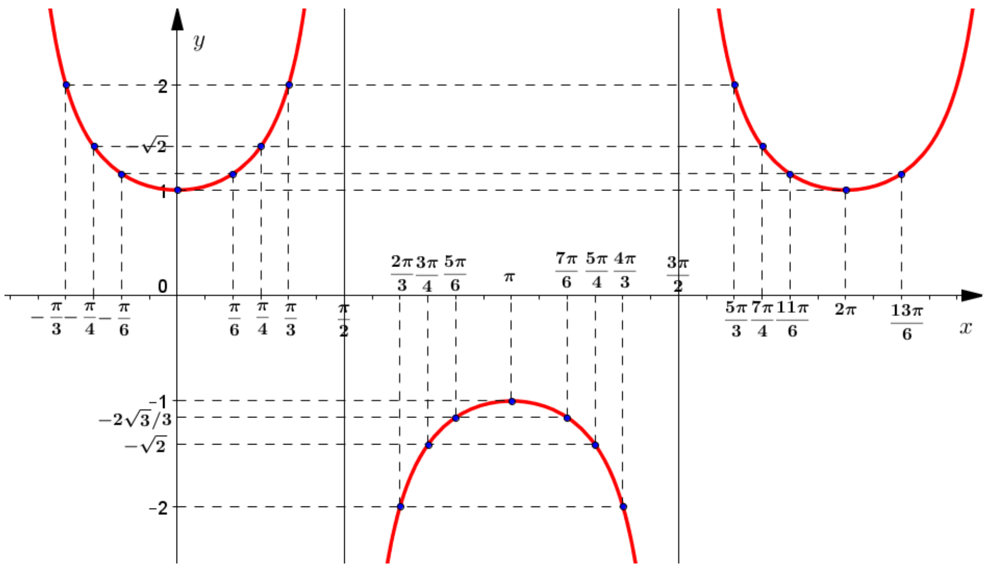


Figura 4.10: Gráfico da Função Secante

4.6 Função Cossecante

Seja um número real x $(x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z})$ a medida do arco AP na circunferência trigonométrica. Considere uma reta tangente a circunferência passando pelo ponto P e seja C sua intersecção com o eixo das ordenadas, tal que a medida do segmento OC é a cossecante de x, ou seja, $\overline{OC} = cossec(x)$. Dessa forma, denomina-se Função Cossecante toda função $f : \mathbb{R} - \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ que associa cada x real à medida de $\overline{OC}$, por meio da relação $f(x) = cossec(x)$ (ver Figura 4.11).

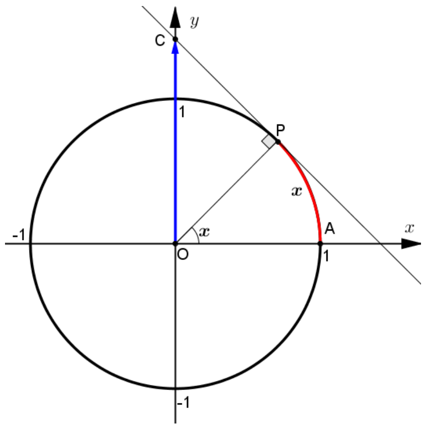


Figura 4.11: Função Cossecante

De acordo com o que foi visto na seção 2.7, para todo número real $y \leq -1$ ou $y \geq 1$ existe um real x tal que $cossec(x) = y$. Então, a imagem da função cossecante é $\mathbb{R} -]-1; 1[$ e o domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

A função cossecante assume valores positivos quando x pertence ao primeiro ou segundo quadrante e negativos quando pertence ao terceiro ou quarto quadrante. E ainda, $f(x) = cossec(x)$ é crescente quando x percorre o segundo ou o terceiro quadrante e decrescente quando percorre o primeiro ou o quarto quadrante.

Como $cossec(x) = cossec(x + k \cdot 2\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$, a função cossecante é periódica com período igual a 2π.

A função $f(x) = cossec(x)$ é ímpar, pois $f(-x) = cossec(-x) = -cossec x = -f(x)$.

O gráfico da função cossecante tem seu esboço mostrado na Figura 4.12.

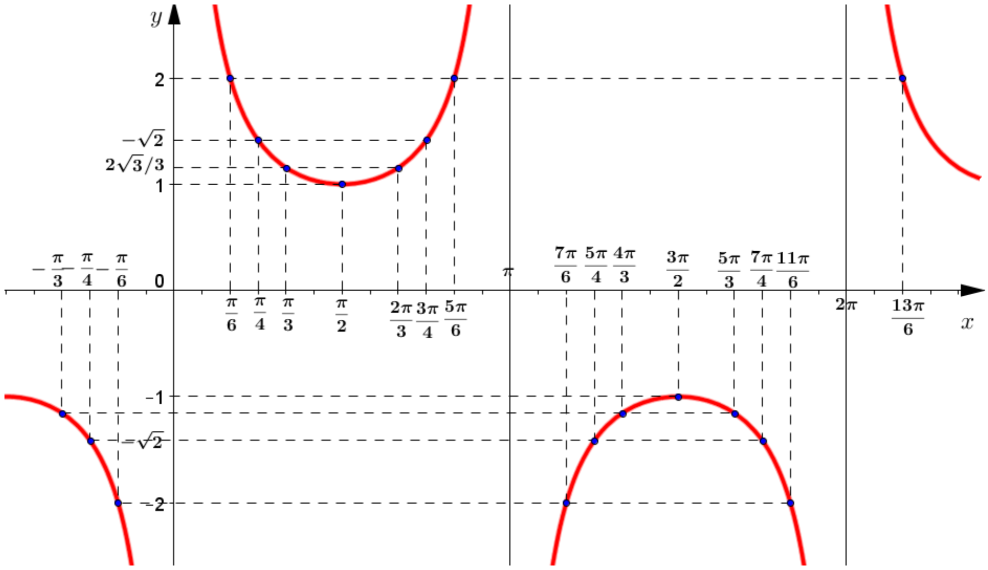


Figura 4.12: Gráfico da Função Cossecante

(...)A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.(...).(SOUZA, VICTER, LOPES, 2011,pág 63)

CAPÍTULO 5

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA MANIPULÁVEL

Com o avanço da inclusão digital, o número de pessoas presentes nas redes sociais aumenta a cada dia e manter o interesse, bem como a motivação dos alunos nos estudos é um grande desafio para os educadores. Uma ferramenta importante para o aprendizado e o aumento de interesse do aluno é o material manipulável.

REYS (1971 apud Lorenzato, 2006, pág 78) define os materiais manipuláveis como objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que tem aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia.

SANTOS (2011, pág 50) diz que a introdução de materiais manipuláveis no ensino se deve a Pestalozzi e Froebel, no século XIX, e a Montessori e Decroly, no começo do século XX. No Brasil, a utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920.

Segundo FREIRE (1996, pág 12) "Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou construção". O material manipulável pode criar condições para que aconteça a aprendizagem, propiciando aos discentes a participação no processo de construções e descobertas, não sendo apenas meros reprodutores de conhecimentos. Para LORENZATO (2006, pág 21) o material manipulável " pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático".

Para ocorrer efetivamente a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, o professor deve interceder no momento em que está ocorrendo o contato com o material manipulável, propondo questionamentos pertinentes que estimulem o aluno a formular hipóteses e conclusões sobre o conceito aprendido. De acordo com LORENZATO (2006, pag 18), conforme a intenção do professor e a forma com que são utilizados, os materiais manipuláveis podem desempenhar inúmeras funções em sala de aula e, por isso, o professor deve se perguntar para que vai utilizá-los e se realmente serão obtidos resultados positivos ao processo de ensino-aprendizagem com o seu uso.

5.1 Motivação para elaboração da Circunferência Trigonométrica Manipulável

Presente nos currículos do Ensino Médio, a trigonometria é um campo importante para a matemática que tem grande aplicabilidade na física, na engenharia e em diversas áreas de conhecimento.

Anos de experiência como professor permitem dizer da grande dificuldade encontrada tanto pelos alunos quanto para os professores no processo de ensino e aprendizagem em relação a trigonometria. Observa-se que parte dos professores de Matemática do Ensino Médio das escolas públicas estaduais substitui conteúdos como trigonometria, logaritmos, números complexos e geometria analítica, por considerá-los de difícil entendimento para os alunos, por uma revisão de temas já abordados anteriormente. Desse modo, o conteúdo de trigonometria fica relegado a um segundo plano. Quando não há uma aprendizagem efetiva da trigonometria, o futuro escolar e acadêmico dos estudantes fica prejudicado, como é possível verificar nos alunos de graduação, principalmente, nas disciplinas de Cálculo.

Diante das dificuldades citadas, o presente trabalho foi estruturado com aulas de trigonometria, em especial sobre a circunferência trigonométrica, no *software GeoGebra*, propiciando aos alunos investigações, facilitando o interesse pela construção de seus conhecimentos. Porém, os problemas enfrentados na informática foram desanimadores. Entre as dificuldades estruturais encontradas destaca-se: que a quantidade de computadores em condições de uso não era suficiente na escola; alguns computadores apresentaram problemas durante as aulas, atrasando consideravelmente o planejamento; alguns alunos não conseguiram operar as máquinas, sendo mais um empecilho na aprendizagem.

Ao pensar em um tema para dissertação do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, surgiu a ideia de confeccionar um material manipulável que pudesse ser trabalhado de maneira parecida com aquele usado na experiência com o *software GeoGebra* com os alunos de Ensino Médio. Ao efetuar uma pesquisa na Internet sobre os materiais manipuláveis de trigonometria já existentes, foi encontrado a **Prancha Trigonométrica**, desenvolvido pela empresa *MMP Materiais Pedagógicos*, para que o professor e aluno, possam desenvolver atividades no estudo do círculo trigonométrico sendo possível observar os valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo simultaneamente. A partir daí, foi elaborado a **Circunferência Trigonométrica Manipulável** que com seu uso, o aluno é capaz de verificar não só os valores do seno, cosseno e tangente, mas também os valores da secante, cossecante, cotangente e suas propriedades, bem como demonstrar as principais relações trigonométricas, evitando a memorização de fórmulas e tabelas.

5.2 A construção da Circunferência Trigonométrica Manipulável

Foram confeccionados dois materiais: um para o uso do aluno e outro para o uso do professor. Os itens usados para a construção da circunferência trigonométrica manipulável da versão aluno foram:

- Chapa aço retângular de $33cm$ X $35cm$;
- Barra de alumínio preta;
- Papel adesivo;
- Plástico adesivo transparente;
- Chapa de acetato transparente de $26cm$ X $29cm$;
- Parafuso, sem ponta;
- Folha imantada de 0,6 mm de espessura.

A construção do material do aluno foi realizada da seguinte maneira:

1º) Com a barra de alumínio preta, foi feito um suporte retangular onde a chapa de aço foi colada;

2º) Elaborou-se a figura da circunferência trigonométrica (ver Figura 5.2) com diâmetro real igual a 16*cm* no *software GeoGebra* e aperfeiçoado no *Corel Draw* sendo impressa em uma gráfica num papel adesivo;

3º) Após a impressão, colou-se o adesivo na chapa de aço, sendo plastificado com adesivo transparente;

4º) Foi impressa na chapa transparente uma circunferência (ver Figura 5.1) cujo diâmetro é igual ao raio da circunferência trigonométrica e duas retas perpendiculares: uma secante, passando pelo seu centro, e a outra tangente a circunferência;

5º) O ponto de intersecção da reta secante, não pertencente a reta tangente, com a circunferência da transparência e o centro da circunferência trigonométrica adesivada na chapa de aço foram furados com uma furadeira;

6º) Parafusou-se a folha transparente na chapa de aço;

7º) Por fim, foram cortados e adesivados cinco triângulos na folha imantada (ver Figura 5.3).

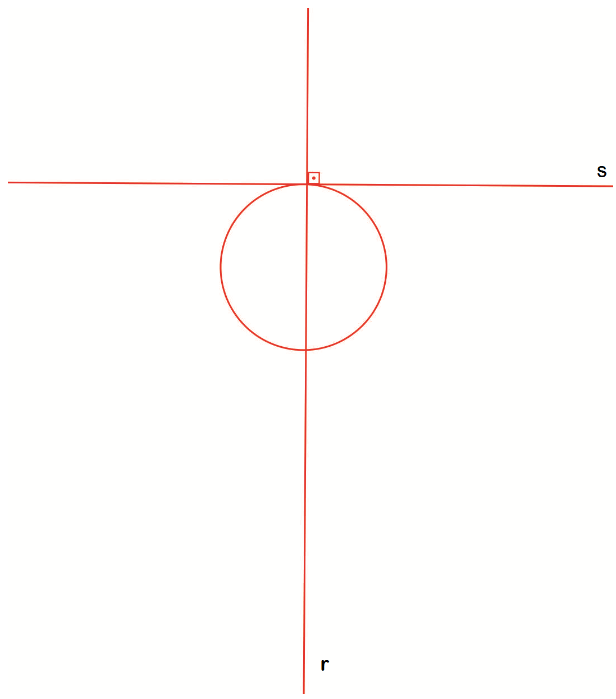


Figura 5.1: Impressão na folha transparente

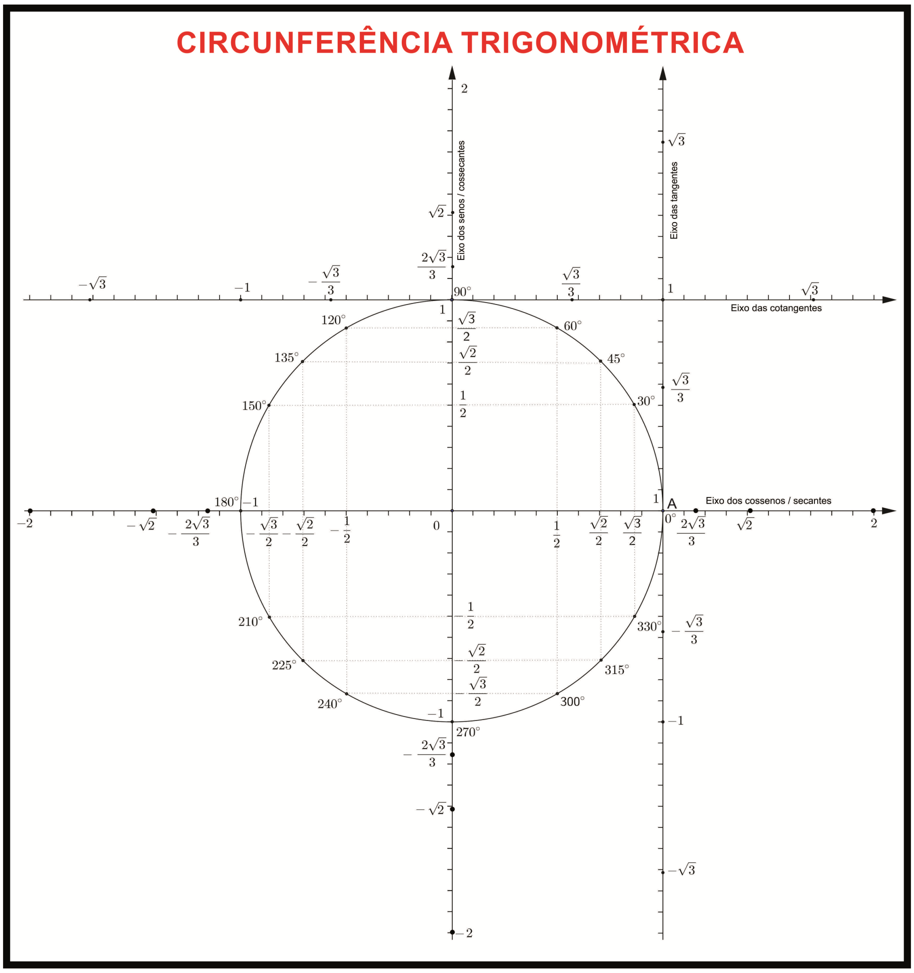


Figura 5.2: Circunferência trigonométrica colada na chapa de aço

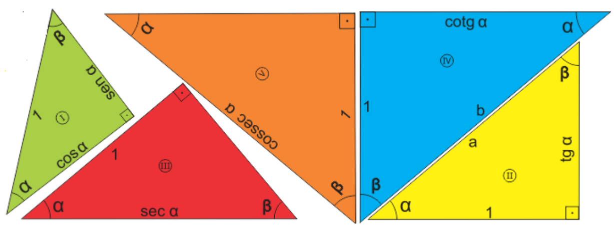


Figura 5.3: Triângulos imantados

A confecção do material do professor é similar ao do aluno, porém as dimensões da chapa de aço e da folha transparente são $90cm$ X $85cm$ e $75cm$ X $68cm$, respectivamente. O diâmetro real da figura com a circunferência trigonométrica é igual a $40cm$.

Os materiais foram confeccionados em uma gráfica que possui serralheria própria. O custo foi de $120,00$ reais no material do professor e $35,00$ reais para o material do aluno.

A circunferência trigonométrica manipulável é formada por três partes: uma chapa de aço fixa, uma transparência giratória e triângulos imantados. Na chapa de aço encontra-se a circunferência trigonométrica, com os eixos dos senos/cossecantes, cossenos/secantes, tangentes e cotangentes, divididos em décimos e também os valores irracionais de ângulos notáveis. Optou-se em usar os arcos em graus, pois é comum o entendimento de que os alunos têm mais facilidade para compreender os conceitos, utilizando essa unidade (grau). É importante, porém, durante o uso do material, destacar oralmente as medidas em radianos.

Na transparência giratória está uma circunferência (chamaremos de λ) de raio igual a $1/2$ (metade do raio da circunferência trigonométrica) e duas retas perpendiculares: uma passando pelo centro e a outra tangenciando a circunferência λ, denominadas de r e s, respectivamente.

Quando giramos a parte transparente, a reta r forma um ângulo α com o eixo das abscissas, determinando simultaneamente o valor do ângulo α, do seno, do cosseno, da tangente, da cotangente, da secante e da cossecante. A medida algébrica do segmento de reta formado:

- pelos pontos de intersecção da circunferência λ com o eixo das ordenadas (eixo dos senos) determina o seno de α;
- pelos pontos de intersecção da circunferência λ com o eixo das abscissas (eixo dos cossenos) corresponde ao cosseno de α;
- pelo ponto de intersecção da reta r com o eixo das tangentes e pelo o ponto A (origem dos arcos) equivale a tangente de α;
- pelo ponto de intersecção da reta r com o eixo das cotangentes e pelo o ponto de intersecção do eixo das cotangentes com o eixo das ordenadas determina a cotangente de α;
- pelo ponto O (origem do sistema cartesiano) e pelo ponto de intersecção da reta s com o eixo das abscissas corresponde a secante de α;
- pelo ponto O e pelo ponto de intersecção da reta s com o eixo das ordenadas equivale ao cossecante de α.

Para provar que $\overline{OP'} = sen(\alpha)$ e $\overline{OP''} = cos(\alpha)$ (ver Figura 5.4), basta verificar que $O\widehat{P'}P = O\widehat{P''}P = 90^o$. De fato, o triângulo $OP'P$ tem seus vértices sobre uma circunferência e o lado $\overline{OP}$ é o diâmetro desta circunferência, logo seu ângulo oposto é reto. O mesmo vale para o triângulo $OP''P$. Portanto, pela definição de Seno e de Cosseno conclui-se a afirmação.

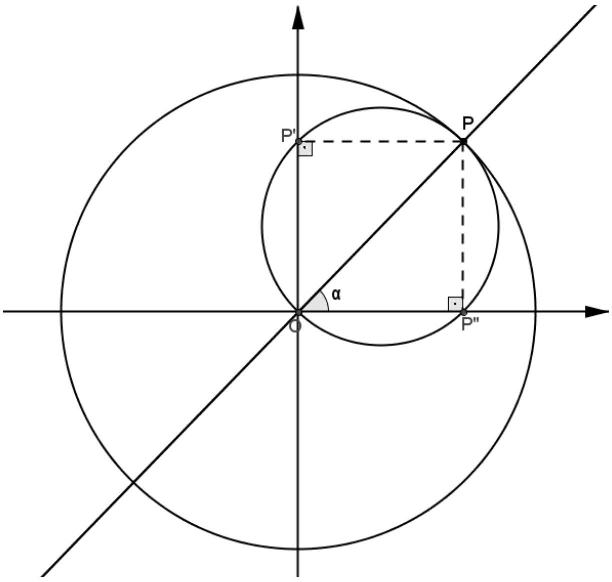


Figura 5.4: $\overline{OP'} = sen(\alpha)$ e $\overline{OP''} = cos(\alpha)$

Quando $\alpha = 60°$, por exemplo (ver Figura 5.5), temos que $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\ 60° = \frac{1}{2}$, $tg\ 60° = \sqrt{3}$, $cotg\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $sec\ 60° = 2$ e $cossec\ 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

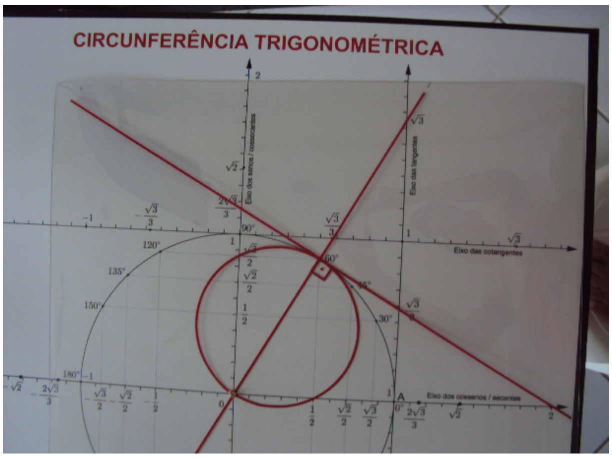


Figura 5.5: Exemplo

Observe que quando a reta r está na horizontal sendo $\alpha = 0°$ ou $\alpha = 180°$ (ver Figura 5.6), a circunferência λ intersecta o eixo das ordenadas apenas em um ponto e, portanto, *sen* $0° = $ *sen* $180° = 0$. Por outro lado, o *cos* $0° = 1$ e *cos* $180° = -1$, isso porque os pontos de intersecção da circunferência λ com o eixo das abscissas são $(0,0)$ e $(-1,0)$ ou $(0,0)$ e $(1,0)$, formando um segmento de reta com a mesma medida do raio da circunferência trigonométrica que é igual a 1. A cotangente e a cossecante não são definidas para arcos iguais a 0^o e 180^o, isso porque a reta r é paralela ao eixo das cotangentes e a reta s é paralela ao eixo das ordenadas.

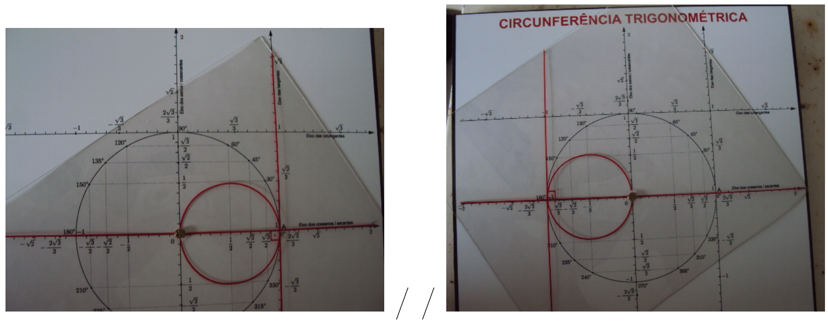


Figura 5.6: $\alpha = 0°$ e $\alpha = 180°$

Quando a reta r está na vertical sendo $\alpha = 90°$ ou $\alpha = 270°$ (ver Figura 5.7), a circunferência λ intersecta o eixo das abscissas em um ponto e, portanto, *cos* $90° = $ *cos* $270° = 0$, em contrapartida, o *sen* $90° = 1$ e *sen* $270° = -1$, isso porque os pontos de intersecção da circunferência λ com o eixo das ordenadas são $(0,0)$ e $(0,-1)$ ou $(0,0)$ e $(0,1)$, formando um segmento de reta com a mesma medida do raio da circunferência trigonométrica que é igual a 1. A tangente e a secante não são definidas para arcos iguais a 90^o e 270^o, isso porque a reta r é paralela ao eixo das tangentes e a reta s é paralela ao eixo das abscissas.

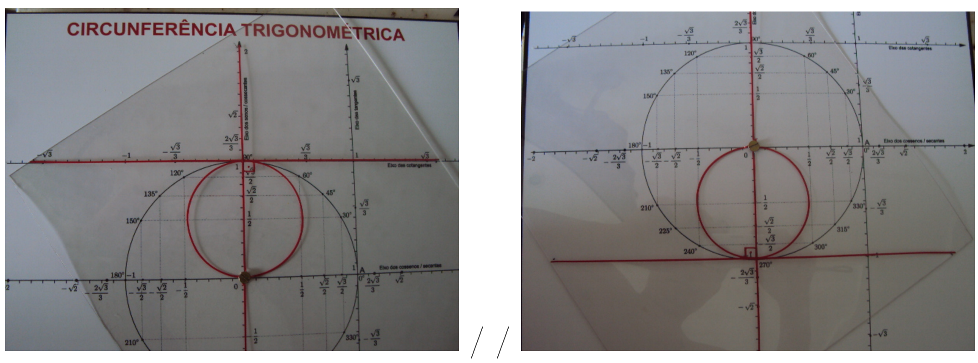


Figura 5.7: $\alpha = 90°$ e $\alpha = 270°$

Manipulando o material é possível através da determinação das razões trigonométricas estudar os intervalos de crescimento e decrescimento, máximos, mínimos, zeros, domínio, imagem, período e a paridade das funções trigonométricas visto no capítulo 4.

Outra visualização importante é quanto ao sinal das razões trigonométricas, de acordo com o quadrante em que se encontra o ângulo, entre outras considerações relevantes, como a redução dos arcos ao primeiro quadrante.

Com os triângulos imantados é possível demonstrar as principais relações trigonométricas usando os conceitos como o teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos como foi abordado no capítulo 3.

As Figuras 5.8 e 5.9 mostram as Circunferências Trigonométricas Manipuláveis.

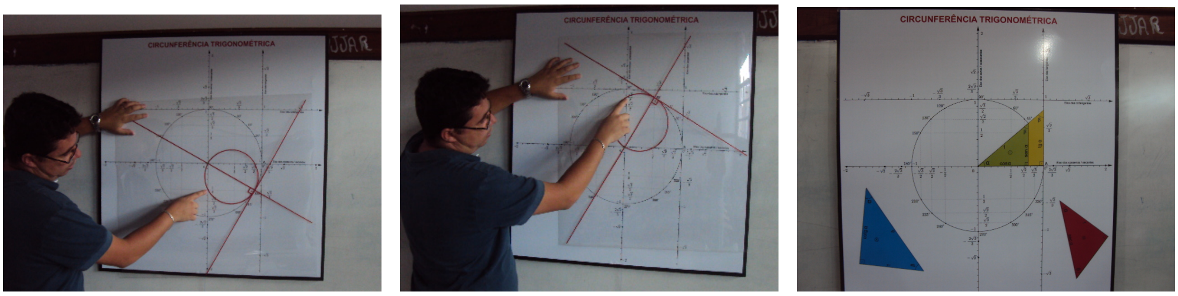


Figura 5.8: Material do professor

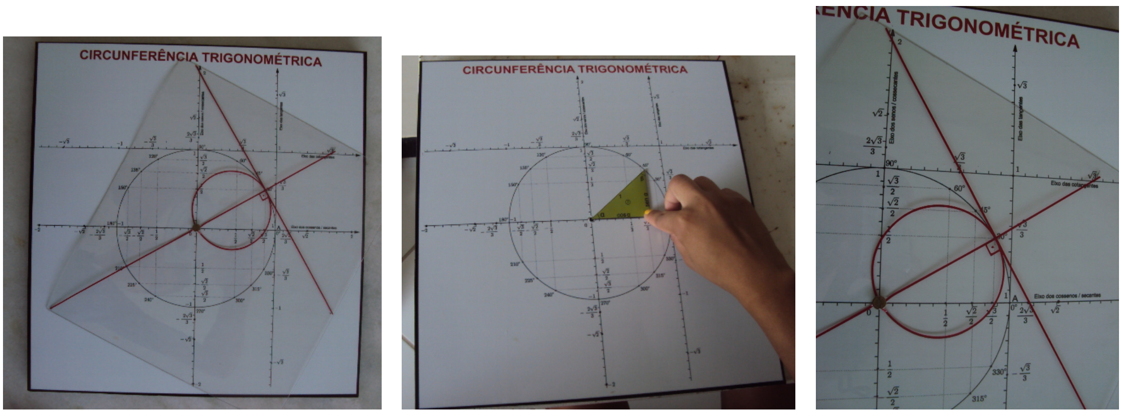


Figura 5.9: Material do aluno

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO DO MATERIAL MANIPULÁVEL

A circunferência trigonométrica manipulável foi aplicada para turma do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Integração com 1348 alunos matriculados em 2013 localizada em Itabatã, distrito do município de Mucuri, no extremo sul da Bahia, no período vespertino.

A turma era composta de 16 alunos, sendo 8 meninas e 8 meninos com idades entre quatorze e dezesseis anos. O projeto foi realizado nos meses de agosto e setembro de 2013, com carga horária de três aulas semanais.

Inicialmente, foram relembrados conceitos relacionados as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Abordou-se então, os arcos na circunferência, mostrando como transformar as medidas de grau para radiano, a circunferência trigonométrica e suas características. Em seguida, foram definidos as razões trigonométricas na circunferência trigonométrica.

Durante as aulas teóricas, ficou evidente a baixa estima da grande maioria dos alunos, sendo que a falta de pré-requisitos é o principal inimigo no processo de ensino aprendizagem. Foi comum verificar, entre várias dificuldades encontradas, que alguns discentes não sabiam: o que era uma circunferência, reconhecer retas verticais e horizontais, a sequência dos números na reta real, identificar uma reta tangente a uma circunferência.

Após as aulas mencionadas acima, os alunos fizeram seis atividades observando o desenho da circunferência trigonométrica da Figura 6.1 que foram distribuidas pelo professor.

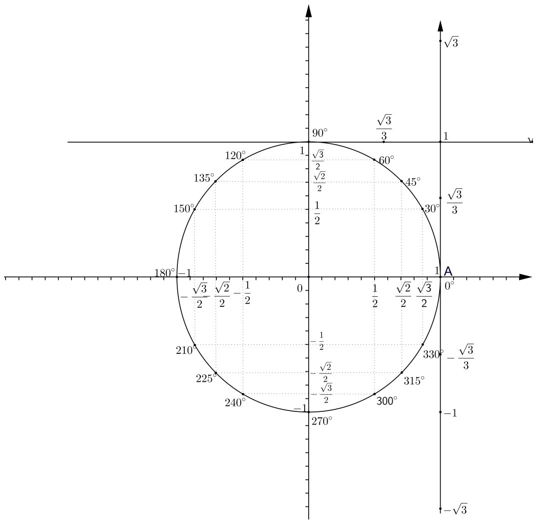


Figura 6.1: Figura entregue para os alunos

Atividade 1 - Investigando o Seno de um Arco

Questão 1

Observando a circunferência trigonométrica, complete a tabela:

α(em radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
α(em graus)	$0°$								$180°$
$sen\alpha$									

α(em radianos)	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
α(em graus)								$360°$	
$sen\alpha$									

Questão 2

a)Qual é o valor máximo do seno?____________________________

b)Qual é o valor mínimo do seno?____________________________

c)Podemos dizer que o seno pertence ao intervalo $[-1, 1]$?________________

d)Qual é a variação do seno no 1° quadrante?____________________

e)Qual é a variação do seno no 2° quadrante?____________________

f)Qual é a variação do seno no 3° quadrante?________________

g)Qual é a variação do seno no 4° quadrante?________________

Questão 3

Determine os sinais do seno no:

a)1° Quadrante:__________ b)2° Quadrante:__________

c)3° Quadrante:__________ d)4° Quadrante:__________

Questão 4

O seno é crescente ou decrescente no:

a)1° Quadrante?__________ b)2° Quadrante?__________

c)3° Quadrante?__________ d)4° Quadrante?__________

Atividade 2 - Investigando o Cosseno de um Arco

Questão 1

Complete a tabela abaixo:

α(em radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
α(em graus)	0°								180°
$cos\alpha$									

α(em radianos)	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
α(em graus)								360°	
$cos\alpha$									

Questão 2

a)Qual é o valor máximo do cosseno?________________

b)Qual é o valor mínimo do cosseno?________________

c)Podemos dizer que o cosseno pertence ao intervalo $[-1, 1]$?________

d)Qual é a variação do cosseno no 1° quadrante?____________________

e)Qual é a variação do cosseno no 2° quadrante?____________________

f)Qual é a variação do cosseno no 3° quadrante?____________________

g)Qual é a variação do cosseno no 4° quadrante?____________________

Questão 3

Determine os sinais do cosseno no:

a)1° Quadrante:_______________ b)2° Quadrante:_______________

c)3° Quadrante:_______________ d)4° Quadrante:_______________

Questão 4

O cosseno é crescente ou decrescente no:

a)1° Quadrante?_______________ b)2° Quadrante?_______________

c)3° Quadrante?_______________ d)4° Quadrante?_______________

Atividade 3 - Investigando a Tangente de um Arco

Questão 1

Complete a tabela:

α(em radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
α(em graus)	0°								180°
$tg\alpha$									
α(em radianos)	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
α(em graus)								360°	
$tg\alpha$									

Questão 2

a) Por que não está definido, ou seja, não existe $tg90°$ e $tg270°$?_______________

---

b) A tangente de um arco pode assumir qualquer valor real?________________

c) A tangente de um arco possui máximo? E mínimo?________________

Questão 3

Determine os sinais da tangente no:

a)1° Quadrante:________________ b)2° Quadrante:________________

c)3° Quadrante:________________ d)4° Quadrante:________________

Questão 4

A tangente é crescente ou decrescente no:

a)1° Quadrante?________________ b)2° Quadrante?________________

c)3° Quadrante?________________ d)4° Quadrante?________________

Atividade 4 - Investigando a Cotangente de um Arco

Questão 1

Complete a tabela:

α(em radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
α(em graus)	0°								180°
$cotg\alpha$									

α(em radianos)	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
α(em graus)								360°	
$cotg\alpha$									

Questão 2

a) Por que não está definido, ou seja, não existe $cotg0°$, $cotg180°$ e $cotg360°$?____

____

b) A cotangente de um arco pode assumir qualquer valor real?________________

c) A cotangente de um arco possui máximo? E mínimo?________________

Questão 3

Determine os sinais da cotangente no:

a)1° Quadrante:__________________ b)2° Quadrante:__________________

c)3° Quadrante:__________________ d)4° Quadrante:__________________

Questão 4

A cotangente é crescente ou decrescente no:

a)1° Quadrante?__________________ b)2° Quadrante?__________________

c)3° Quadrante?__________________ d)4° Quadrante?__________________

Atividade 5 - Investigando a Secante de um Arco

Questão 1 Analizando a circunferência trigonométrica, responda:

a)Determine o valor aproximado da sec 30º: ____________________________

b) Para quais valores de α temos a $sec\alpha = cos\alpha$?________________________

c) A secante de um arco pode assumir qualquer valor real?_________________

d)Por que não éstá definido, ou seja, não existe sec 90° e sec 270°?__________

Questão 2

Determine os sinais da secante no:

a)1° Quadrante:__________________ b)2° Quadrante:__________________

c)3° Quadrante:__________________ d)4° Quadrante:__________________

Questão 3

A secante é crescente ou decrescente no:

a)1° Quadrante?__________________ b)2° Quadrante?__________________

c)3° Quadrante?__________________ d)4° Quadrante?__________________

Atividade 6 - Investigando a Cossecante de um Arco

Questão 1

Analizando a circunferência trigonométrica, responda:

a) Determine o valor do *cossec* 60º: ____________________

b) Para quais valores de α temos a $cossec\alpha = sen\alpha$?____________________

c) A cossecante de um arco pode assumir qualquer valor real? ____________

d) Por que não está definido, ou seja, não existe *cossec* 0°, *cossec* 180° e *cossec* 360°?____

Questão 2

Determine os sinais da cossecante no:

a)1° Quadrante:________________ b)2° Quadrante:________________

c)3° Quadrante:________________ d)4° Quadrante:________________

Questão 3

A cossecante é crescente ou decrescente no:

a)1° Quadrante?________________ b)2° Quadrante?________________

c)3° Quadrante?________________ d)4° Quadrante?________________

Na aula seguinte foi apresentada a turma a **Circunferência Trigonométrica Manipulável**. O professor explicou como encontrar os valores das razões trigonométricas usando o material manipulável. Na sequência, os discentes foram solicitados que refizessem as seis atividades manipulando a circunferência. Após a distribuição do novo material, observou-se uma mudança radical na postura dos alunos, ficando claro o entusiasmo da turma ao tentar entender o seu funcionamento e a sua lógica, associando com as aulas teóricas, muito diferente da primeira etapa de atividades sem o uso do material, quando eles não demonstravam motivação e interesse em resolver as questões.

Os gráficos das Figuras 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7 apresentam os resultados das atividades realizadas sem e com o uso da Circunfência Trigonométrica Manipulável, mostrando o percentual de acertos em cada questão.

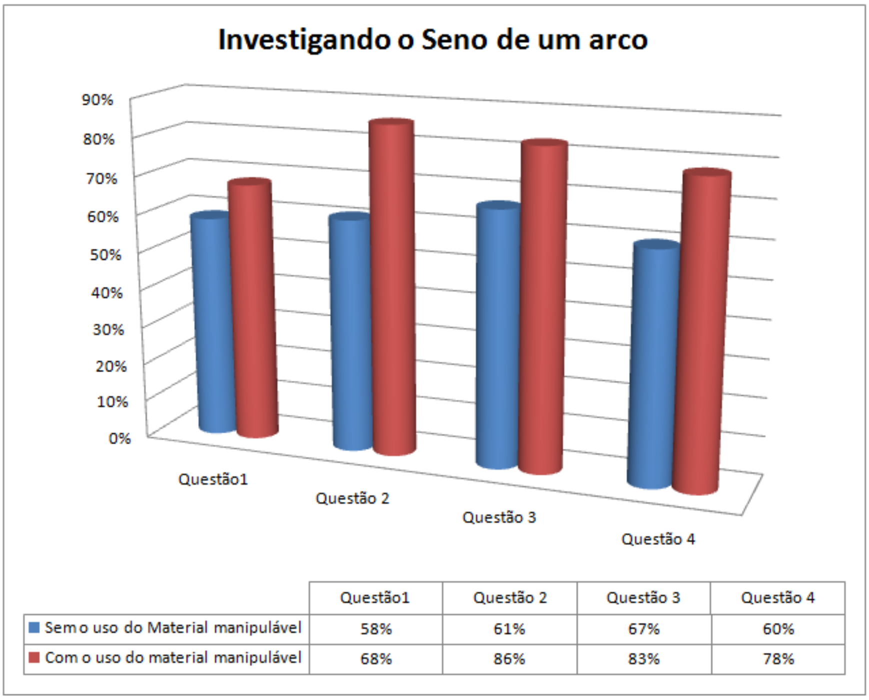


Figura 6.2: Resultados da atividade 1

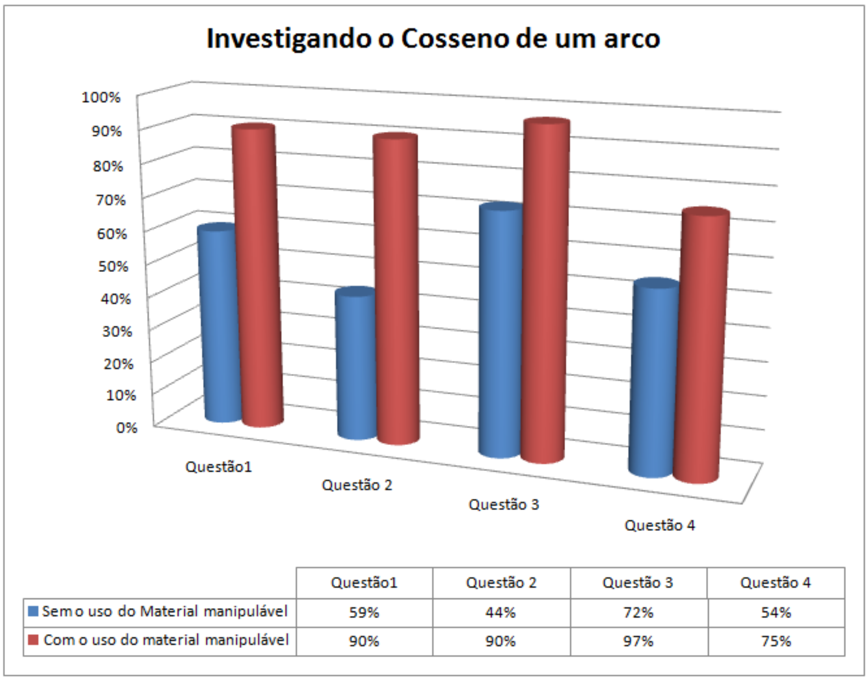
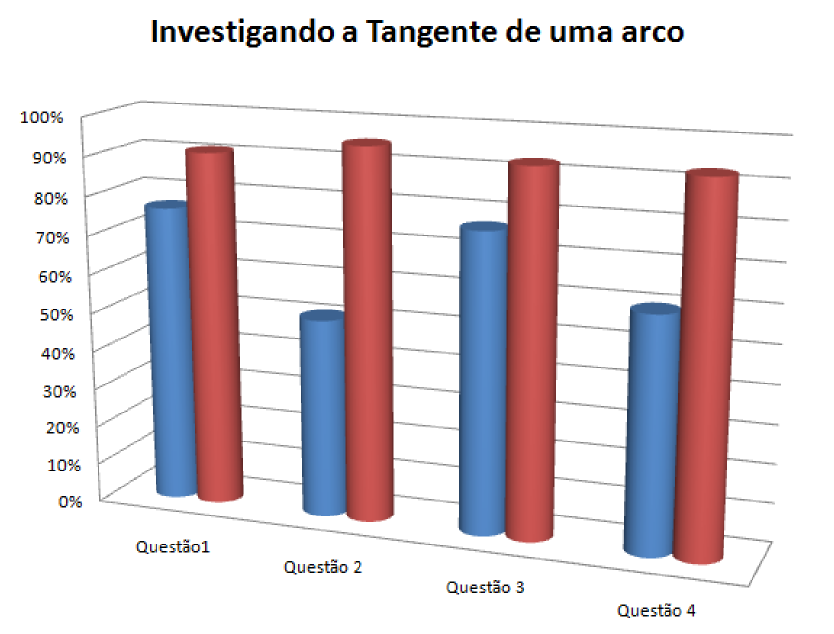
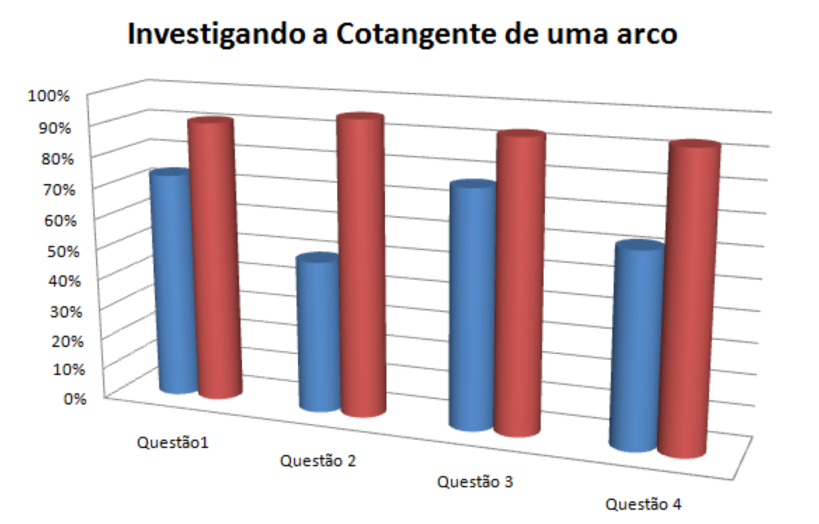


Figura 6.3: Resultados da atividade 2



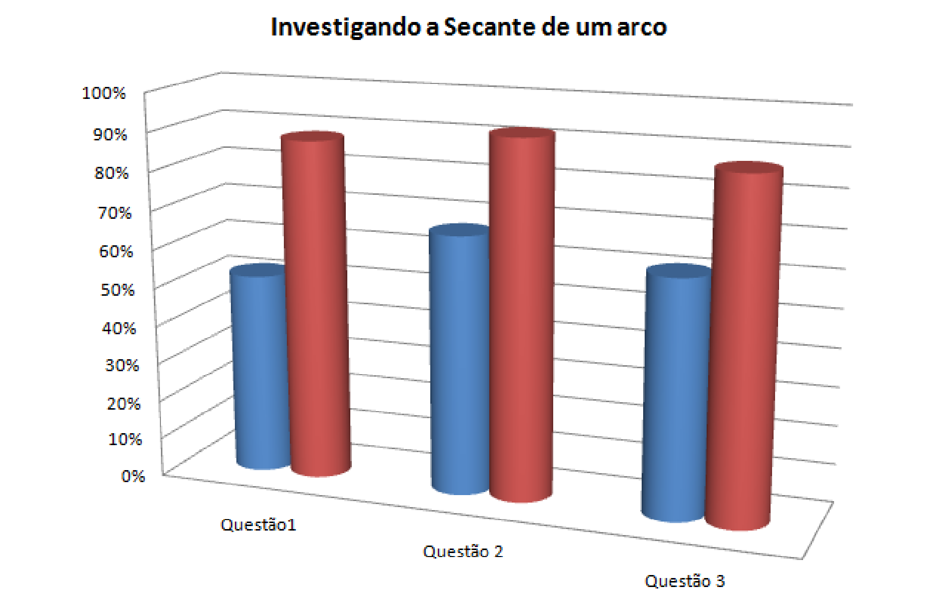
	Questão1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Sem o uso do Material manipulável	76%	51%	77%	60%
Com o uso do material manipulável	91%	95%	93%	93%

Figura 6.4: Resultados da atividade 3



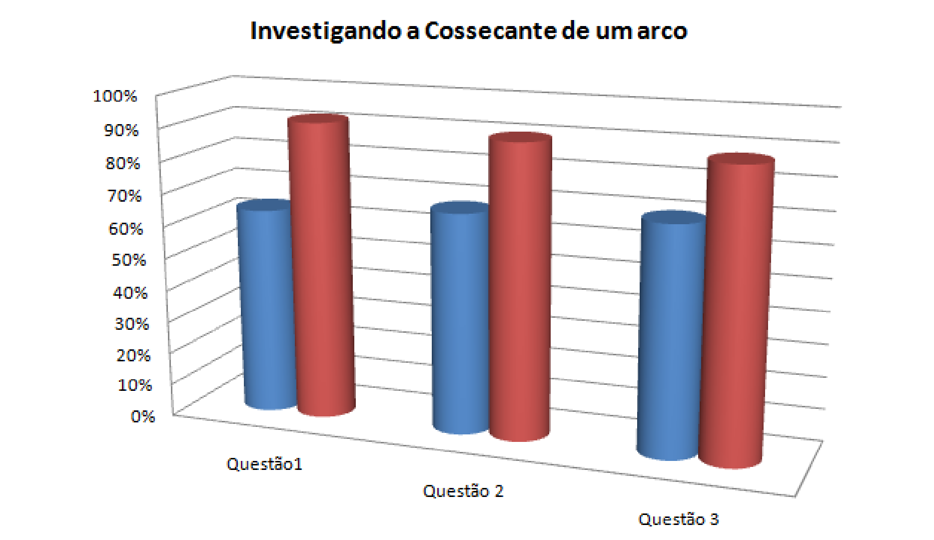
	Questão1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Sem o uso do Material manipulável	73%	49%	77%	62%
Com o uso do material manipulável	91%	95%	93%	93%

Figura 6.5: Resultados da atividade 4



	Questão1	Questão 2	Questão 3
Sem o uso do Material manipulável	52%	67%	61%
Com o uso do material manipulável	88%	92%	87%

Figura 6.6: Resultados da atividade 5



	Questão1	Questão 2	Questão 3
Sem o uso do Material manipulável	64%	68%	70%
Com o uso do material manipulável	92%	90%	88%

Figura 6.7: Resultados da atividade 6

Analizando os resultados, percebe-se uma melhora significativa nas atividades realizadas com o material manipulável. Entre os itens que apresentaram evolução, estão:

- Identificação das razões trigonométricas, principalmente para os arcos de 0º, 90º, 180º, 270º e 360º;
- Verificação das variações das razões trigonométricas na circunferência e nos quadrantes;
- Explicação do porque a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante não são definidos para alguns arcos;
- Análise do crescimento e do decrescimento das razões trigonométricas, principalmente para o cosseno, a cotangente e a secante que são analizados em eixos horizontais, quando os alunos têm dificuldade para enteder que o crescimento dos números reais ocorre da esquerda para a direita na reta real;
- No estudo dos sinais das razões trigonométricas nos quatro quadrantes.

Na sequência, após uma breve revisão de semelhança de triângulos e do Teorema de Pitágoras, os alunos usaram a circunferência trigonométrica manipulável para realizar a atividade 7 com o objetivo de demonstrar as principais relações trigonométricas.

Atividade 7 - Relações Trigonométricas

Questão 1

Posicione o triângulo I sobreposto ao triângulo II na circunferência trigonométrica e responda:

a) Sabemos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°. Se um triângulo possui um ângulo igual a α e outro igual a 90°, qual é a medida do terceiro ângulo?____

b) Escreva β em função de α:______________________________

c) Os triângulos I e II são semelhantes? Justifique:____________________

d) Mostre que $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$:

Questão 2

Aplique o teorema de Pitágoras no triângulo I para mostrar a relação fundamental da trigonometria:

Questão 3

Posicione os triângulos I e III na circunferência trigonométrica. Observe que eles são semelhantes e mostre que $sec\alpha = \dfrac{1}{cos\alpha}$:

Questão 4

Posicione os triângulos II e III na circunferência trionométrica e responda:

a) O valor de a corresponde a qual razão trigométrica?__________________

b) Aplique o teorema de Pitágoras no triângulo II. Qual relação você encontrou?

Questão 5

Posicione os triângulos I e IV na circunferência trigonométrica e responda:

a) Observe que o ângulo entre os lados b e 1 do triângulo IV vale $90° - \alpha = \beta$. Logo, o ângulo entre os lados b e $cotg\alpha$ é igual a α e, portanto, os triângulos I e IV são semelhantes. Mostre que $cotg\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sen\alpha}$:

b) Agora substitua o triângulo I pelo triângulo II. Mostre que $tg\alpha = \dfrac{1}{cotg\alpha}$:

Questão 6

Posicione os triângulos I e V na circunferência trigonométrica. Observe que eles são semelhantes e mostre que $cossec\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$:

Questão 7

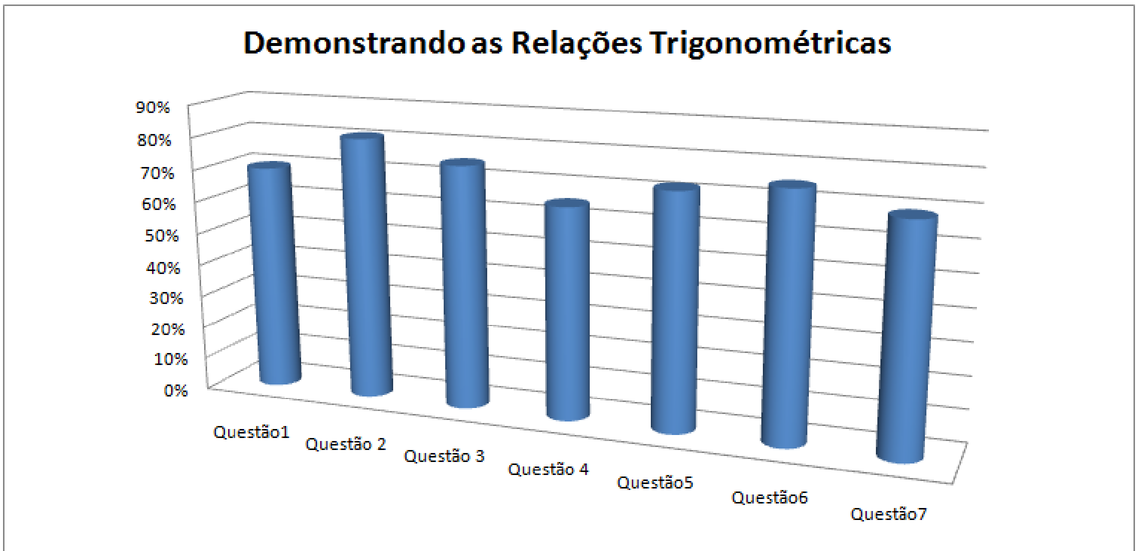
Posicione os triângulos IV e V na circunferência trionométrica e responda:

a) O valor de b corresponde a qual razão trigométrica?________________________

b) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo IV. Qual relação você encontrou?

____

O gráfico da Figura 6.8 apresentam os resultados com o percentual de acertos da atividade 7.



	Questão1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão5	Questão6	Questão7
Acertos	70%	81%	75%	65%	72%	75%	69%

Figura 6.8: Resultados da atividade 7

Nesta atividade 7 os alunos sentiram mais dificuldade devido a falta de pré-requisitos e de prática em realizar demonstrações. No entanto, os resultados foram satisfatórios.

Finalmente, com a familiarização dos alunos com a teoria, o professor trabalhou com mais três listas de exercícios com o propósito de aprofundar os conteúdos.

6.1 Como a escola pode comprar materiais manipuláveis?

As escolas públicas podem comprar os materiais pedagógicos manipuláveis através da verba do PDDE (Programa Dinheiro Direto na Escola). Criado em 1995 pelo

Ministério da Educação (MEC) e executado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), o PDDE tem a finalidade de prestar assistência financeira, em caráter suplementar, às escolas da rede pública de educação básica, às escolas privadas de educação especial mantidas por entidades sem fins lucrativos e aos pólos presencias do sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB). O objetivo é promover melhorias na infraestrutura física e pedagógica das unidades de ensino e incentivar a autogestão escolar.

De acordo com a Resolução/CD/FNDE nº 10, de 18 de abril de 2013, o valor total de cada unidade de ensino é calculado pela soma de dois valores: o valor fixo – conforme o tipo de estabelecimento – e o valor variável – conforme o número de alunos.

O valor fixo anual segue a regra abaixo:

- Escola pública urbana com UEx [1] – R$ 1.000,00
- Escola pública rural com UEx – R$ 2.000,00
- Escola privada de educação especial – R$ 1.000,00
- Polo presencial da UAB – R$ 3.000,00

Já o valor variável anual é calculado multiplicando-se o número de alunos pelos valores per capita indicados a seguir:

- Aluno de escola urbana ou rural com UEx – R$ 20,00
- Aluno de escola urbana sem UEx – R$ 40,00
- Aluno de escola rural sem UEx – R$ 60,00
- Aluno da educação especial em escola pública – R$ 80,00
- Aluno da educação especial em escola privada – R$ 60,00

[1] Unidade Executora Própria (UEx)– entidade privada sem fins lucrativos, representativa das escolas públicas e dos pólos presenciais da UAB, integrada por membros da comunidade escolar, comumente denominada de caixa escolar, conselho escolar, colegiado escolar, associação de pais e mestres, círculo de pais e mestres, dentre outras entidades, responsáveis pela formalização dos procedimentos necessários ao recebimento dos repasses do programa, destinados às referidas escolas e pólos, bem como pela execução e prestação de contas desses recursos.

- Aluno de polo presencial da UAB – R$ $20,00$

As escolas públicas com mais de 50 alunos matriculados na educação básica, para serem beneficiadas com recursos do PDDE deverão, obrigatoriamente, constituir suas respectivas UEx. As escolas com menos de 50 alunos que não possuem UEx receberão apenas o valor variável. Desse modo, para receberem mais recursos, devem constituir suas respectivas UEx, o que se torna perfeitamente viável a implementação destes materiais nas unidades públicas de ensino devido ao seu baixo custo. Observe na Figura 6.9 os registros fotográficos dos alunos manipulando a circunfência trigonométrica durante a realização das atividade.

Figura 6.9: Alunos manipulando o material

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar matemática no ensino médio, sobretudo no Brasil, é um grande desafio para os educadores. Um dos problemas encontrados é a falta de pré-requisitos dos discentes faz com que conteúdos como trigonometria seja um verdadeiro "bicho-papão", causando baixa autoestima e dificultando a evolução da aprendizagem. A Circunferência Trigonométrica Manipulável dá ao professor mais uma opção para superar esses obstáculos e gerar a motivação necessária para fazer com que o aluno busque construir os conceitos importantes para a resolução de problemas, criando o prazer de deduzir fórmulas. Levando em consideração que a maioria dos docentes tem resistência em usar materiais manipuláveis por causa da dificuldade de montagem, de lugar para guardar e de transporte, o kit do professor, além da riqueza pedagógica, tem a vantagem de ser prático, leve, podendo ser pendurada na sala dos professores e levada para aula. O kit do aluno pode ser trabalhado em grupos de três ou quatro pessoas, favorecendo a interatividade e a troca de informações entre os estudantes.

Analisando os resultados das aulas e das atividades aplicadas foi possível observar que a Circunferência Trigonométrica Manipulável, enquanto recurso mediador no processo de ensino e aprendizagem se mostrou fundamental para conquistar o interesse dos alunos pelo "querer aprender". O uso do material tornou as aulas mais envolventes, dinâmicas, significativas e prazerosas, facilitando a visualização das propriedades referentes as razões trigonométricas e as demonstrações das relações trigonométricas. Dessa forma, o aluno participou ativamente na construção do conhecimento e não apenas “decorou” macetes e as intermináveis fórmulas como acontece nas aulas tradicionais. Após a realização das sete atividades os alunos se familiarizaram com a circunferência trigonométrica, sendo capazes de criar imagens metais ou esboços de figuras que os ajudaram nas resoluções dos exercícios de aprofundamento, como foi possível perceber em uma das questões que solicitava-os a colocar $sen(\pi/5)$, $cos(\pi/5)$, $tg(\pi/5)$, $sec(\pi/5)$, $cossec(\pi/5)$ e $cotg(\pi/5)$ em ordem crescente.

Os investimentos na educação estão aumentando nos últimos anos. As escolas recebem verbas que viabilizam a compra de materiais pedagógicos. Com isso, o próximo passo para dar continuidade a esse trabalho é estudar os custos da fabricação em maior escala dos kits e tentar realizar um projeto que possibilite disponibilizá-los para as unidades escolares da região.

BIBLIOGRAFIA

[1] EVES, Howard Whitley. Introdução da história da matemática. 5ª ed. Campinas, São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2011.

[2] LIMA, Elon Lages.CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. A matemática do ensino medio, vol. 1, 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do professor de matemática).

[3] CARMO, Manfredo Perdigão. MORGADO, Augusto César. WAGNER, Eduardo. Trigonometria Números Complexos, 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do professor de matemática).

[4] SOUZA, Joamir. Coleção Novo olhar matmática, vol 1, 1ª ed. São Paulo: FTD, 2010.

[5] SOUZA, Joamir. Coleção Novo olhar matmática, vol 2, 1ª ed. São Paulo: FTD, 2010.

[6] GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. GIOVANNI, José Ruy. Terceirão Matemática, Vol 2, 1ª ed. São Paulo: FTD, 2009.

[7] PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática, vol 2, 1ª ed Sao Paulo: Moderna, 2009.

[8] IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, vol 3, 8ª ed.São Paulo: Atual. 2004.

[9] ROSA, Rosana Camilo. DARELA, Eliane. RUFINO, Paulo Henrique. Trigonometria e Números Complexos, 2ª ed. Palhoça : UnisulVirtual, 2007.

[10] SOUZA, Carlos Antônio. VICTER, Eline das Flores. Lopes, Jurema Rosa. Uma Breve História da Trigonometria e seus Conceitos Fundamentais, 1ª ed. Mesquita, RJ: Ed. Entorno, 2011.

[11] COSTA, Nielce M. Lobo. A história da trigonométria. Disponível em: *www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf /historia_triogono.pdf*. Acesso: Janeiro de 2014.

[12] ABNT NBR 9050. Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Disponível em: http:*//www.pessoacomdeficiencia.gov.br/app/sites/default/files/arquivos /%5Bfield_generico_imagens−filefield−description%5D_24.pdf*. Acesso em: Janeiro de 2014.

[13] LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras histórias, 5ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do professor de matemática).

[14] LORENZATO, Sérgio. O laboratório de matemática na formação de professores. Campinas: Autores associados, 2006

[15] SANTOS, Darcson Capa. CURY, Helena Noronha. O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos. Vidya, v. 31, n. 1, p. 49-61, 2011.

[16] FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa, 25ª ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996)

[17] REYS, R. Considerations for teaching using manipulative materials. [s.l.]: Aritmétic teacher, 1971

[18] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais. Brasília: MEC, 1998. Disponível em $ftp : //ftp.fnde.gov.br/web/pcn/05_08_matematica.pdf$ Acesso em: Fevereiro de 2014.

[19] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Parte IV. Brasília: SEMT/MEC, 2000. Disponí-

vel em $< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >$ Acesso em: Fevereiro de 2014.