Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O USO DE DOBRADURAS NO PROCESSO DE ENSINO DAS CÔNICAS NO ENSINO BÁSICO

por

Flavio de Oliveira Ribeiro†

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Ilhéus - BA

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes
obtido através da SBM.

Flavio de Oliveira Ribeiro

O USO DE DOBRADURAS NO PROCESSO DE ENSINO DAS CÔNICAS NO ENSINO BÁSICO

Ilhéus
2014

Flavio de Oliveira Ribeiro

O USO DE DOBRADURAS NO PROCESSO DE ENSINO DAS CÔNICAS NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Pós-graduação stricto sensu nível mestrado profissional em matemática do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET da Universidade Estadual de Santa Cruz-UESC , como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr.Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

FLÁVIO DE OLIVEIRA RIBEIRO

O Uso de dobraduras no processo de ensino das Cônicas no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 24 de abril de 2014.

Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa – Orientador, UESC

Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva, UESC

Fabíolo Moraes Amaral

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral, IFBA - Campus Eunápolis

Ilhéus - 2014

DEDICATÓRIA

À minha família, em especial, pelo apoio dado, pelo incentivo, dedicação e amor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por oportunizar este mestrado e também me capacitar para fazê-lo.

À minha esposa Vilma pelo incentivo e compreensão.

À coordenação e aos professores do PROFMAT-UESC pelos ensinamentos e incentivo.

Ao professor Vinicius Arakawa pela orientação deste trabalho.

Aos colegas de curso, pelo companheirismo. Em especial aos de viagem, Cediglês, Jackson e Emanoel.

RESUMO

Este trabalho relata acerca de um ramo da matemática que une a geometria à algebra(a geometria analítica), com enfoque especial na contrução das cônicas pelo processo de dobraduras. Mencionamos aqui seus principais teóricos, fatos históricos, e outros fatos importantes que consideramos relevantes para o ensino e aprendizagem das cônicas, bem como as equações da elipse, hipérbole e parábola. No caso específico das dobraduras, é feito passo a passo como se constrói cada uma das cônicas e acompanhada das suas respectivas figuras ilustrativas . O trabalho também traz aguns exercícios de aplicação com construções, sendo contemplada as três cônicas.

A finalidade do trabalho é mostrar as definições e demosntrações de modo simples e prático, sendo as dobraduras um processo de construção que pode e deve ser aplicado no pocesso de ensino e aprendizado de geometria analítica. A essência do estudo é tentar explicar a organização e diferença entre as cônicas, mostrando seus principais elementos e fundamentando cada um, de modo que as dobraduras e as construções facilitem o entendimento de todo o processo e análises acerca da elipse, hipérbole e parábola. Imaginando que depois da leitura desse trabalho um aluno do ensino medio seja capaz de ter argumentos para responder perguntas do tipo:

-O que são cônicas?

-Quem foram os precursores do estudo das cônicas?

-Quais seus principais elementos?

-Qual a diferença entre elipse, hipérbole e parábola?

-Como se constrói as cônicas com dobraduras?

-Pra que servem as dobraduras no ensino de Cônicas?

ABSTRACT

This paper reports on a branch of mathematics that unites algebra to geometry (analytic geometry) , with special focus on the construction of conic by the folding process. We mention its major theoretical , historical facts , and other important facts that we consider relevant to the teaching and learning of conic , and the equations of the ellipse , parabola and hyperbola . In the specific case of the folding is done step by step how to build each of the conical and accompanied by their respective illustrative figures . The work also brings aguns application exercises with buildings being contemplated three conics.

The purpose of the study is to show the settings and Statements of simple and practical way , with the folding process of construction that can and should be applied in pocesso teaching and learning of analytical geometry. The essence of the study is to try to explain the difference between the organization and conical , showing its main components and basing each, so that the folding and buildings facilitate the understanding of the whole process and analysis about the ellipse, parabola and hyperbola . Imagining that after reading this work a student teaching medium is able to have arguments to answer questions like:

- What are conical ?
- Who were the forerunners of the study of conic ?
- What are its key elements ?
- What is the difference between ellipse, parabola and hyperbola ?
- How do you build with the conical folds ?
- serving the folding in teaching Conical ?

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa do Tema

Baseando-se no fato de que a maioria dos nossos alunos do ensino médio tem dificuldade no aprendizado das demostrações e propriedades que circundam as cônicas, e nos professores do ensino médio na sua maioria não termos costume de trabalhar construções em sala de aula e às vezes alguns de nós professores termos dificuldades em trabalhar de modo sistemático com este assunto é que desenvolvemos este trabalho. Ele servirá como fonte de pesquisa sobre construções de cônicas através de dobraduras.
A motivação do trabalho foi a necessidade de implementação de novas práticas para o ensino de cônicas no ensino médio, que tratem o assunto de modo amplo e com técnicas que busquem melhorar a qualidade do ensino aprendizado desta parte da geometria analítica. Por isso escrevemos aqui sobre precursores do estudo, fatos históricos, definições, demonstrações e passos na construção das cônicas utilizando dobraduras. Foram aqui também relatados outros fatos importantes que consideramos relevantes para o ensino e aprendizagem das cônicas, utilizando a dobradura como fonte para o melhor entendimento do conteúdo em estudo.

Capítulo 2

HISTÓRIA DAS CÔNICAS

2.1 ORIGEM

Do grego - **konikós**(que tem a forma de cone). As curvas cônicas são obtidas pela interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas. Fazendo a interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas podemos obter: um ponto, uma reta, um par de retas ou as curvas cônicas: circunferência, elipse, parábola e hipérbole. A elipse, a parábola, a hipérbole e a circunferência eram obtidas como seções de cones circulares retos com planos perpendiculares a um dos elementos do cone, conforme variação do ângulo no vértice (agudo, reto ou obtuso).

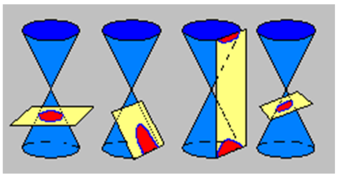


Figura 2.1: cônicas

2.1.1 HISTÓRIA

Tratados sobre as seções cônicas são conhecidos antes da época de Euclides, (325 a 265 a.C.). E, associado à história dessas curvas, temos Apolônio que nasceu na cidade de Perga, região da Panfília (atualmente Turquia) por volta de 262 a.C. e viveu, aproximadamente, até 190 a.C. Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes que viveu, aproximadamente, entre 287 a.C. e 212 a.C. e, juntamente com Euclides, formam a tríade considerada como sendo a dos maiores matemáticos gregos da antiguidade.

Apolônio estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria e foi astrônomo notável. A maior parte das obras de Apolônio desapareceu. O que sabemos dessas obras perdidas devemos a Pappus de Alexandria (Séc. IV a.C.). A obra prima de Apolônio é Seções Cônicas, composta por 8 volumes (aproximadamente 400 proposições). Da obra original sobreviveram 7 volumes, sendo 4 escritos em grego e 3 traduzidos para o árabe por Thabit Ibn Qurra, no século IX. Os três primeiros volumes são baseados em trabalhos de Euclides e o oitavo volume foi, infelizmente, perdido.

Os precursores de Apolônio no estudo das cônicas foram Manaecmo, Aristeu e o próprio Euclides. Nesse período, elas eram obtidas seccionando um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular a uma geratriz do cone, obtendo três tipos distintos de curvas, conforme a seção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso.

Apolônio foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas na antiguidade. Suas contribuições foram: ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção; ter introduzido os nomes elipse e hipérbole e ter estudado as retas tangentes e normais a uma cônica.

As Cônicas foram estudadas por Menecmo, Euclides e Arquimedes. Menecmo descobriu a elipse pesquisando sobre a parábola e a hipérbole, pois ofereciam as propriedades necessárias para a solução da duplicação do cubo. O tratado sobre as cônicas estava entre algumas das mais importantes obras de Euclides, porém se perdeu pelo fato do trabalho escrito por Apolônio ser mais extenso.

A obra de nível mais avançado foi precisamente àquela feita por Apolônio de Perga, que substituiu qualquer estudo anterior. O tratado sobre as Cônicas certamente foi uma obra-prima de Apolônio e teve grande influência no desenvolvimento da matemática. Devido fundamentalmente a este estudo sobre as cônicas ele era conhecido como o "Geômetra Magno".

Ao longo dos tempos a família das cônicas ia sendo vista de diferentes perspectivas e através destas eram descobertas algumas relações entre a matemática e a realidade. Estamos perante uma grandiosa e magnífica obra, considerada por muitos, como o ponto máximo da matemática grega.

Termos adaptados dos pitagóricos o termo elipse era usado quando um retângulo de área dada era aplicado a um quadrado. O termo hipérbole era usado quando a área excedia o segmento. O termo parábola era usado quando não havia excesso nem falta. O cone não precisa ser reto (pode ser obliquo ou escaleno) e que um cone obliquo tem, não só uma afinidade de conjunto secções circulares que chamou secções subcontrárias.

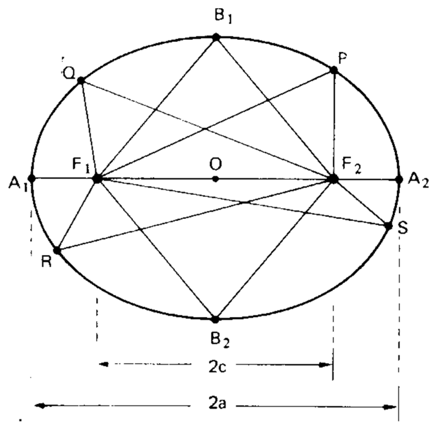
Capítulo 3

EQUAÇÕES DAS CÔNICAS

3.1 Elipse

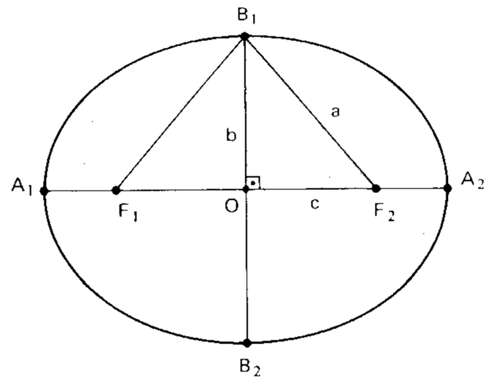
3.1.1 Definição

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles.
Elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$(sendo $2a > 2c$).
elipse $= \{ P \in \alpha \mid PF_1 + PF_2 = 2a\}$
Assim, temos:
$QF_1 + QF_2 = 2a$
$RF_1 + RF_2 = 2a$
$SF_1 + SF_2 = 2a$
$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$
$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$
$A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$
$B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$



Considere que $A_1F_1 = x$ e $A_2F_2 = y$.
Notemos que $A_1A_2 = 2a$, pois $A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_1 + A_2F_2$, então:
$x + (x + 2c) = (y + 2c) + y$, portanto $x = y$.
$A_1A_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 \Rightarrow A_1A_2 = x + 2c + y = 2(x + c) = 2a$

3.1.2 Elementos principais



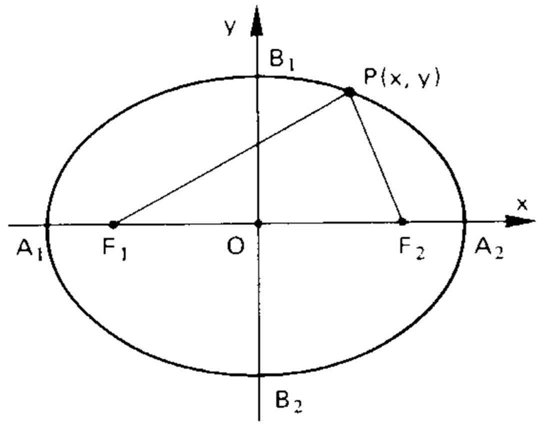
- F_1 e F_2 são focos
- O é o centro
- A_1A_2 é o eixo maior
- B_1B_2 é o eixo menor
- $2c$ é a distância focal
- $2a$ é a distância do eixo maior
- $2b$ é a distância do eixo menor
- $\dfrac{c}{a}$ é a excentricidade[1]

relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$

3.1.3 Equação reduzida

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que $A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$.

É evidente que os focos são os pontos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ e nestas condições, chama-se equação reduzida da elipse a equação que $P(x,y)$, ponto genérico da curva, verifica. A dedução é imediata:



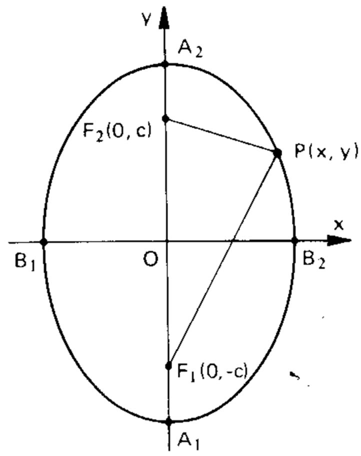
P pertence à elipse se e somente se $PF_1 + PF_2 = 2a$, então:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

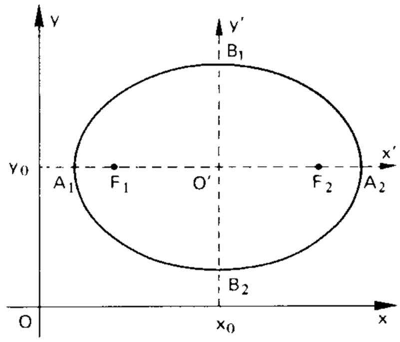
[1]excentricidade é a relação que mostra o quanto uma cônica se aproxima de um segmento ou uma circunferência de raio R, conforme seu valor se aproxima de 1 ou 0, respectivamente.

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$
$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$
a$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \Longrightarrow a^2\ (x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2-xc)^2$
$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - c^2x^2$
$(a^2-c^2)\ x^2 + a^2y^2 = a^2\ (a^2-c^2)$
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Analogamente ao que vimos acima, se a elipse apresenta $A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$, temos :
$PF_1 + PF_2 = 2a$
$\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = 2a$



notemos que esta relação é a mesma que se obtém permutando x com y na relação inicial vista na demonstração anterior e, daí, decorre a equação da elipse:
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

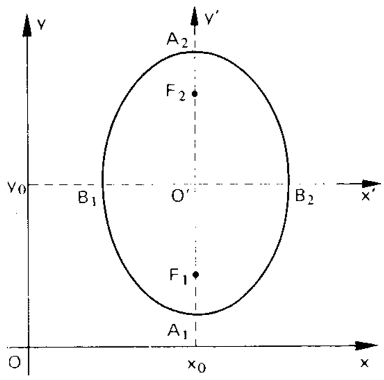
Se uma elipse tem centro no ponto O'(x_0, y_0) e $A_1A_2 \parallel x$, sua equação em relação ao sistema auxiliar x'O'y'é:



$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

e utilizando translação de sistema, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



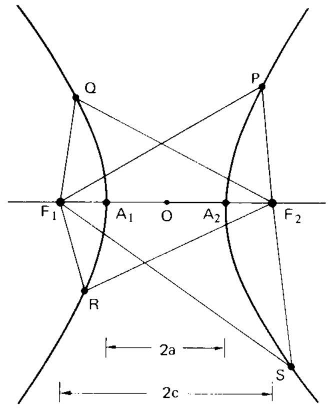
Analogamente, se uma elipse tem centro no ponto O'(x_0, y_0) e $A_1A_2 \parallel y$ sua equação em relação ao sistema xOy é

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

3.2 Hipérbole

3.2.1 Definição

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles.
Hipérbole é o conjunto dos pontos de α cuja diferença das distâncias(em valor absoluto) a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$(sendo $0< 2a < 2c$).
hipérbole = $\{ P \in \alpha \mid | PF_1 - PF_2 | = 2a\}$
Assim, temos:

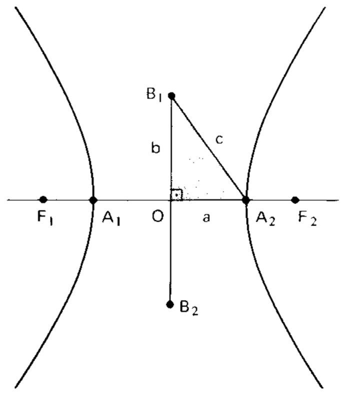


$QF_1 - QF_2 = 2a$
$RF_1 - RF_2 = 2a$
$SF_1 - SF_2 = 2a$
$A_1F_1 - A_1F_2 = 2a$
$A_2F_1 - A_2F_2 = 2a$
Notemos que o módulo é abolido desde que façamos a diferença entre a maior e a menor distância. Se um ponto X está no ramo da direita, temos que:
$XF_1 - XF_2 = 2a$, pois $XF_1 > XF_2$

Se X está no ramo da esquerda, $XF_2 - XF_1 = 2a$, pois $XF_2 > XF_1$

3.2.2 Elementos principais

- F_1 e F_2 são focos
- O é o centro
- A_1A_2 é o eixo real ou transverso
- B_1B_2 é o eixo imaginário
- $2c$ é a distância focal
- $2a$ é a medida do eixo real
- $2b$ é a medida do eixo imaginário
- $\dfrac{c}{a}$ é a excentricidade [2]

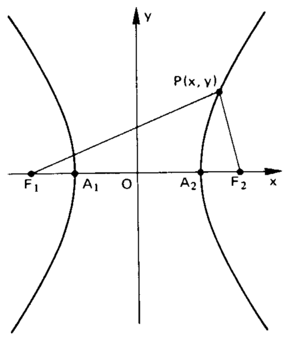


relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$
Notemos que, sendo a hipérbole uma curva aberta, o significado geométrico do eixo imaginário B_1B_2 é abstrato.

3.2.3 Equação reduzida

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que

$A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$. É evidente que os focos são os pontos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ e nestas condições, chama-se equação reduzida da hipérbole a equação que $P(x, y)$, ponto genérico da curva, verifica.



[2] excentricidade é a relação que mostra o quanto uma hipérbole se aproxima de duas retas paralelas, perpendiculares ao eixo real, quando a excentricidade for próxima de 1, e o quanto ela se aproxima de duas semi-retas opostas com origem em $A_1 e A_2$ quando a excentricidade tende ao infinito

A dedução é imediata:

P pertence à hipérbole se e somente se | PF_1 - PF_2 | $= 2a$, então:

$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$ - $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$

$4cx$ - $4a^2 = \pm\ 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Longrightarrow cx$ - $a^2 = \pm$ a$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$(cx-a^2)^2 = a^2\ (x-c)^2 + a^2\ y^2$

$c^2\ x^2$ - $2a^2cx + a^4 = a^2\ x^2$ - $2a^2cx + a^2\ c^2 + a^2\ y^2$

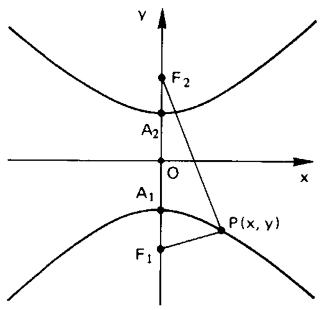
$(c^2-a^2)\ x^2$ - $a^2y^2 = a^2\ (c^2-a^2) \Longrightarrow b^2x^2$ - $a^2y^2 = a^2b^2$

$\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2} = 1$

Analogamente ao que vimos acima, se a hipérbole apresenta $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ contido no eixo x e $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ contido no eixo y, temos :

PF_1 - $\mathrm{PF}_2 = \pm\ 2a$

$\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}$ - $\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = \pm 2a$



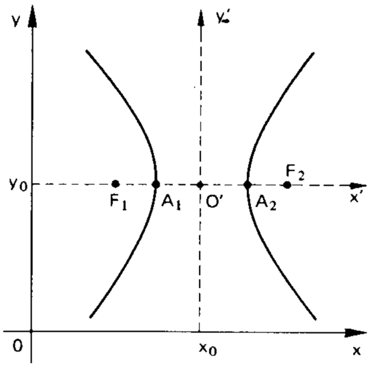
Notemos que esta relação é a mesma que se obtém permutando x com y na relação inicial vista na demonstração anterior e, daí, decorre a equação da hipérbole:

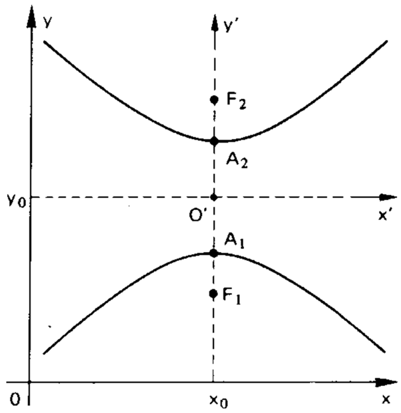
$\frac{y^2}{a^2}$ - $\frac{x^2}{b^2} = 1$

Se uma hipérbole tem centro no ponto O'(x_0, y_0) e $A_1A_2 \parallel x$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'O'y'$é:

$\dfrac{(x')^2}{a^2}$ - $\dfrac{(y')^2}{b^2} = 1$ e utilizando translação de sistema, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}$ - $\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$





Analogamente, se uma hipérbole tem centro no ponto O'(x_0, y_0) e $A_1A_2 \parallel y$ sua equação em relação ao sistema xOy é:

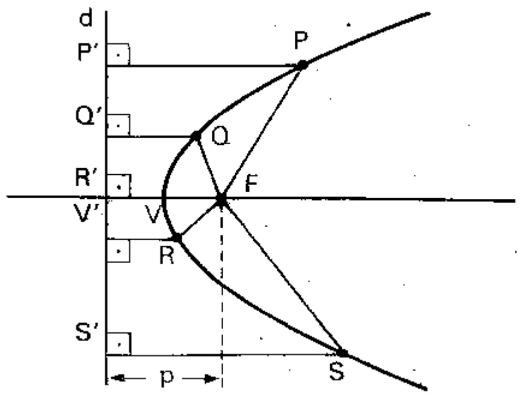
$\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}$ - $\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

3.3 Parábola

3.3.1 Definição

Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com F $\notin d$, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e d.

Parábola = { P$\in \alpha$ | PF = Pd}



assim temos:

VF = VV'

PF = PP'

QF = QQ'

RF = RR'

SF = SS'

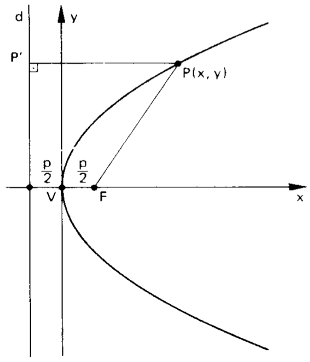
3.3.2 Elementos principais

- F é o foco
- d é a diretriz
- p é o parâmetro
- V é o vértice
- VF é o eixo de simetria

relação notável: VF = $\dfrac{p}{2}$

3.3.3 Equação reduzida

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. É evidente que o foco é F($\frac{p}{2}$, 0)e a diretriz d tem equação x = $\frac{-p}{2}$
Nestas condições, chama-se equação reduzida da parábola a equação que P(x, y), no ponto genérico da curva, verifica.



A dedução é imediata:
P pertence à parábola se e somente se
PF = PP', então:

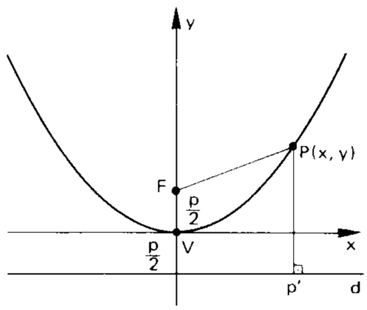
$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2}$

$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$

x^2 - $px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$

$y^2 = 2px$

analogamente ao que vimos acima, se a parábola apresenta vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, teremos:
PF = PP'



$\sqrt{(x-0)+(y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+\frac{p}{2})^2}$

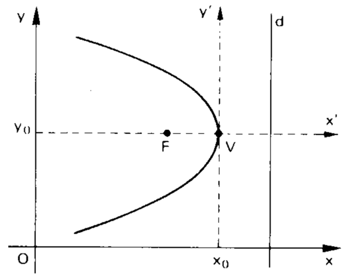
notemos que esta relação é a mesma que se obtém permutando x com y na relação inicial da demonstração anterior, e , daí decorre a equação da parábola:

$x^2 = 2py$

Se uma parábola tem vértice no ponto $\mathrm{V}(x_0, y_0)$ e VF $\parallel$ x, sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'Vy'$ é:

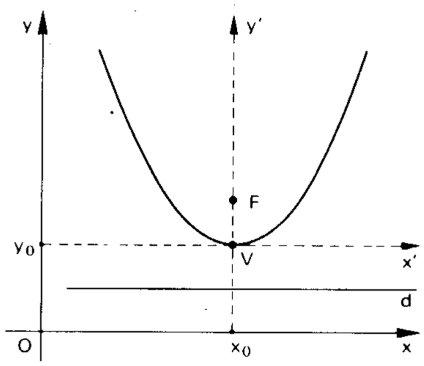
$(y')^2 = 2px'$ e portanto sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$



Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $\mathrm{V}(x_0, y_0)$ e VF $\parallel$ y, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$



Capítulo 4

CONSTRUÇÃO DAS CÔNICAS COM DOBRADURAS

4.1 PARÁBOLA

1º passo:

Trace uma reta d e marque um ponto F fora da mesma, como mostra a figura 4.1.

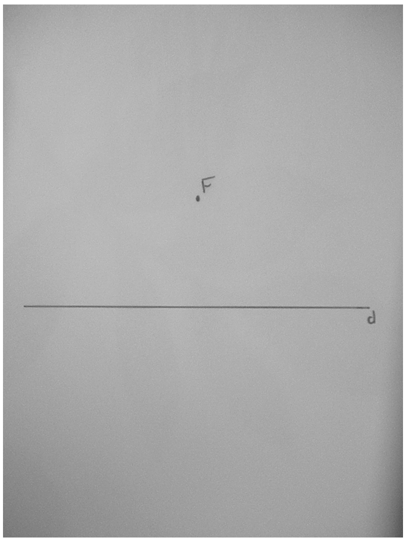


Figura 4.1: Diretriz d e foco F

2º passo: Marque n pontos P_n sobre a reta d, como mostra a figura 4.2.

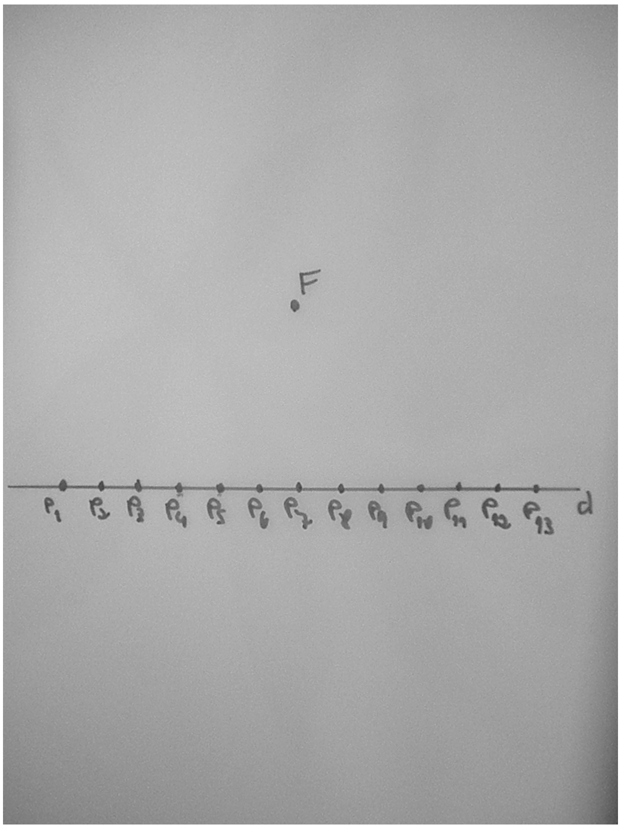


Figura 4.2: Pontos P_n sobre a reta d

3º passo:

Faça a primeira dobra de maneira que o ponto F coincida com o ponto P_1, como mostra a figura 4.3.

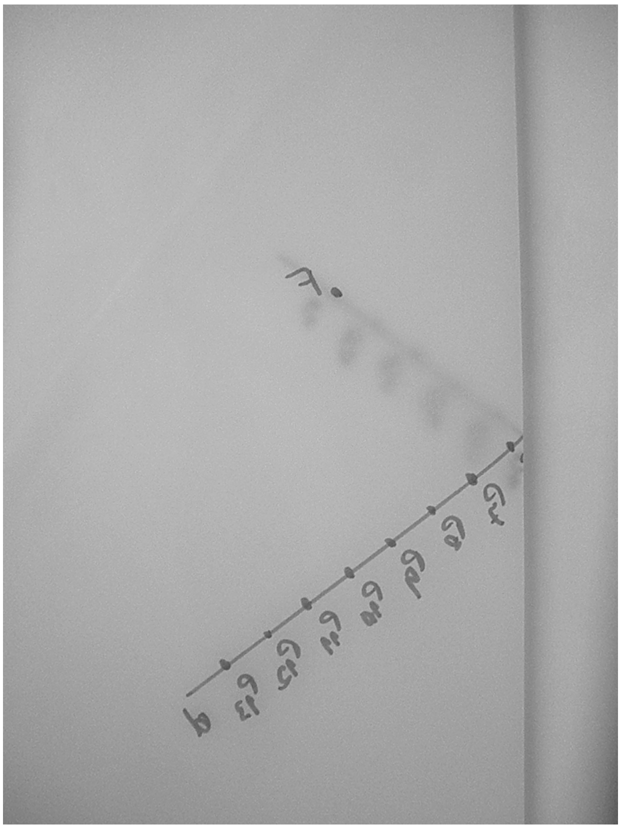


Figura 4.3: Primeira dobra

4º passo:

Desdobre a folha, voltando-a para a posição inicial. Temos assim o primeiro vinco, como mostra a figura 4.4.

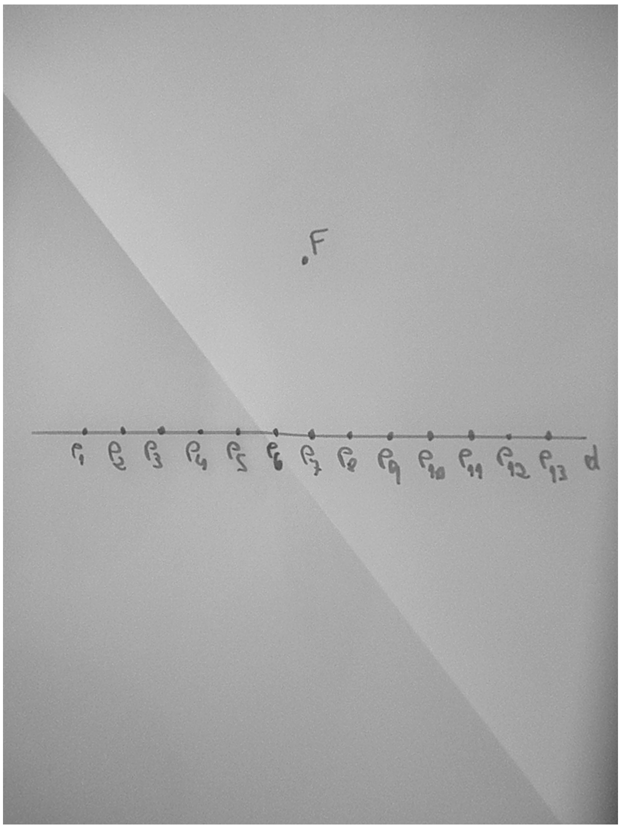


Figura 4.4: Primeiro vinco

5º passo:

Sobre o primeiro vinco traça-se a reta m_1 que é a mediatriz do segmento FP_1, como mostra a figura 4.5.

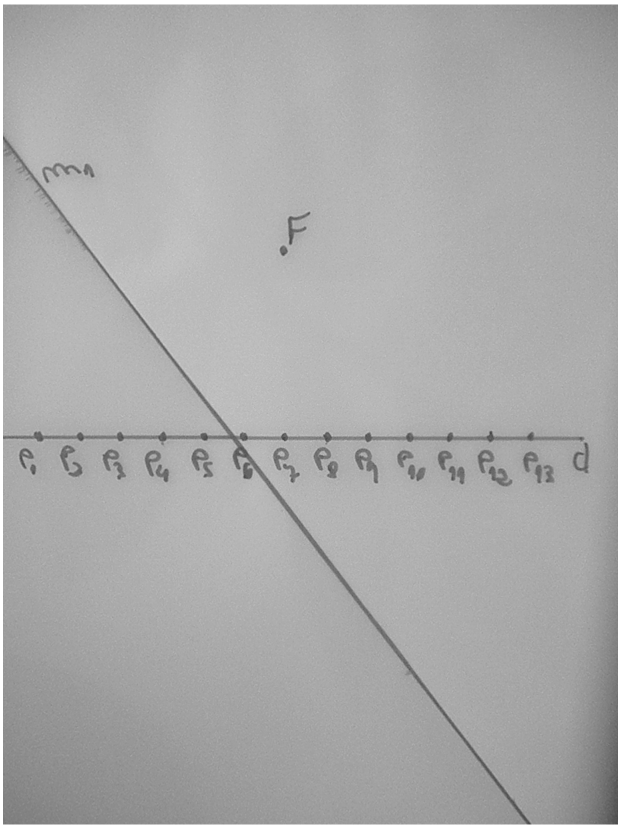


Figura 4.5: Mediatriz m_1 do segmento FP_1

Agora é só repetir os 5 passos para cada um dos demais pontos P_n, de maneira que em cada dobra o ponto F coincida com o respectivo ponto. Assim, obteremos as mediatrizes m_n dos segmentos FP_n e como consequência a parábola de diretriz d e foco F, como mostra a figura 4.6.

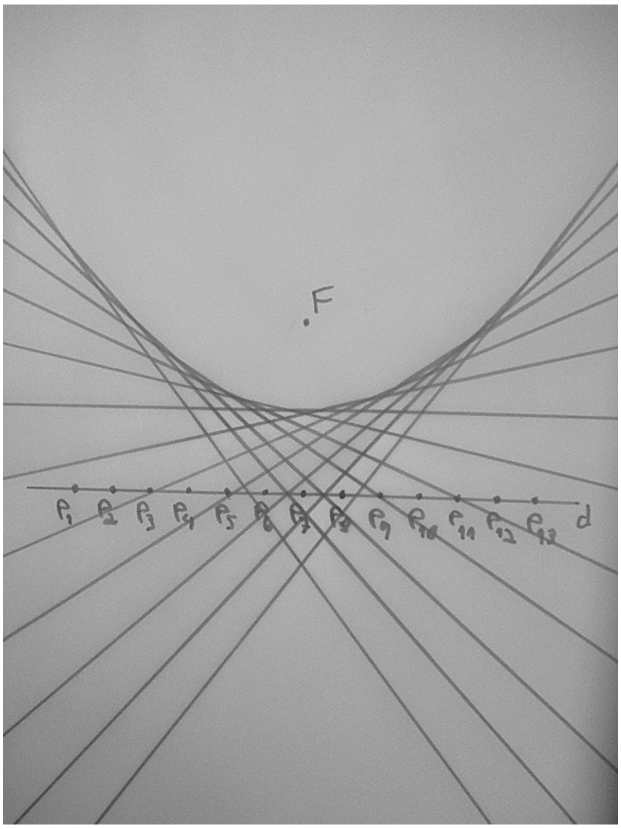


Figura 4.6: Parábola de diretriz d e foco F

4.1.1 JUSTIFICATIVA

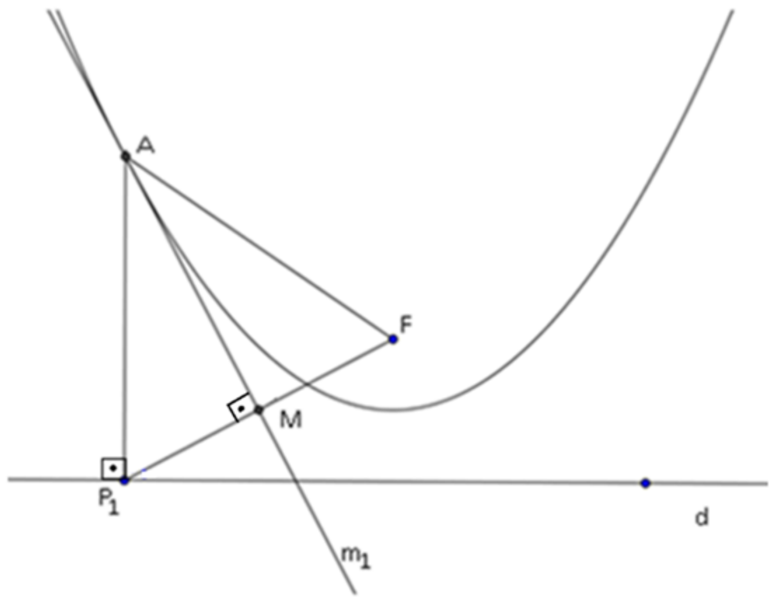


Figura 4.7: Parábola de diretriz d e foco F

Na figura 4.7, o ponto A da parábola é a intersecção das retas AP_1(perpendicular à diretriz d) e m_1(mediatriz do segmento FP_1). Queremos mostrar que a distância do ponto A ao foco F é igual a sua distância à diretriz d, satisfazendo assim a definição de parábola.

Demonstração:

A reta m_1 é a mediatriz do segmento FP_1, portanto M é o ponto médio de FP_1 e as distâncias MP_1 e MF são iguais. Como o segmento AM é lado comum dos triângulos AMP_1 e AMF, então pelo critério de congruência LAL (lado-ângulo-lado) podemos afirmar que estes triângulos são congruentes. Portanto, podemos concluir que os segmentos AF e AP_1 são congruentes, como queríamos demonstrar.

4.2 ELIPSE

1º passo:

Desenhe uma circunferência λ de centro F_1 e marque um ponto F_2 interior à mesma, como mostra a figura 4.8.

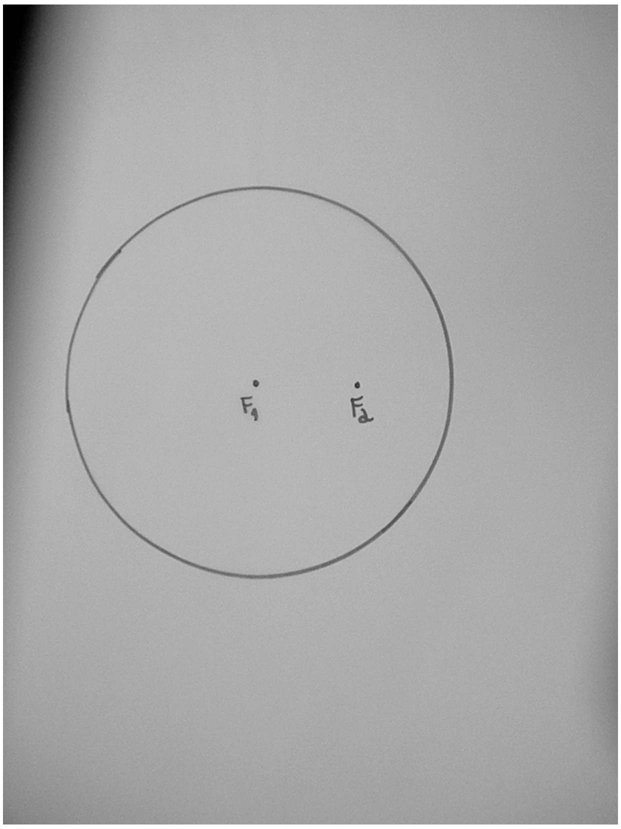


Figura 4.8: Circunferência λ de centro F_1

2º passo:

Marque sobre a circunferência λ n pontos P_n, como mostra a figura 4.9.

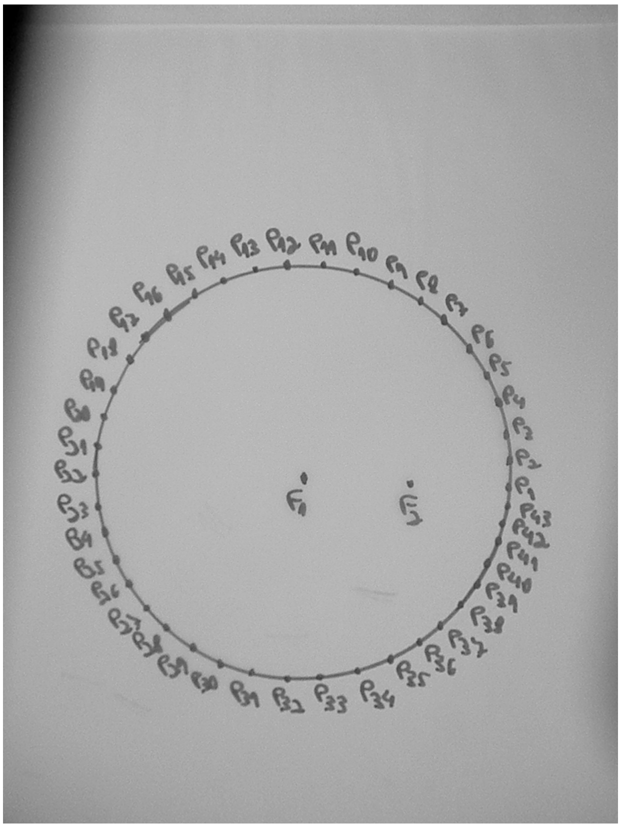


Figura 4.9: Pontos P_n sobre a circunferência λ

3º passo:

Faça a primeira dobra de maneira que o ponto F_2 coincida com o ponto P_1, como mostra a figura 4.10.

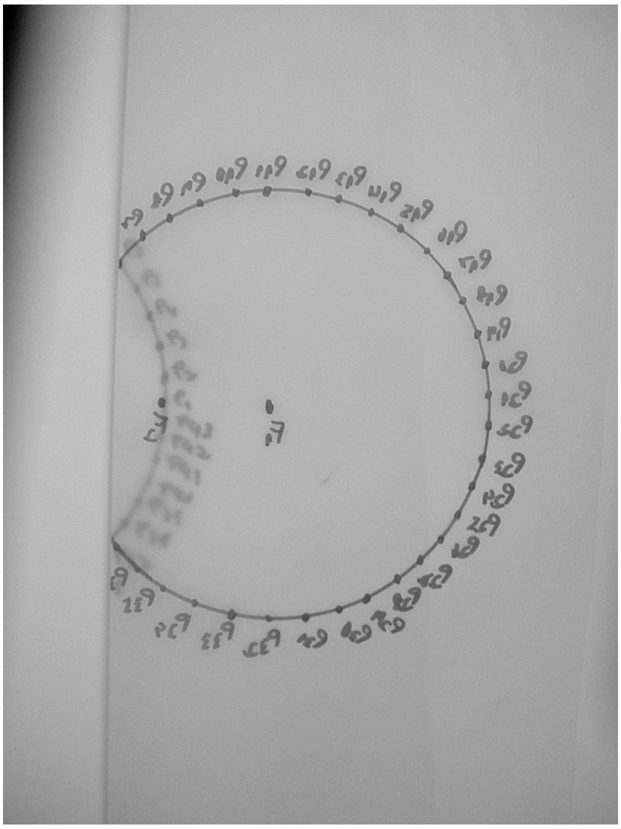


Figura 4.10: Primeira dobra

4º passo:

Desdobre a folha, voltando-a para a posição inicial. Temos assim o primeiro vinco, como mostra a figura 4.11.

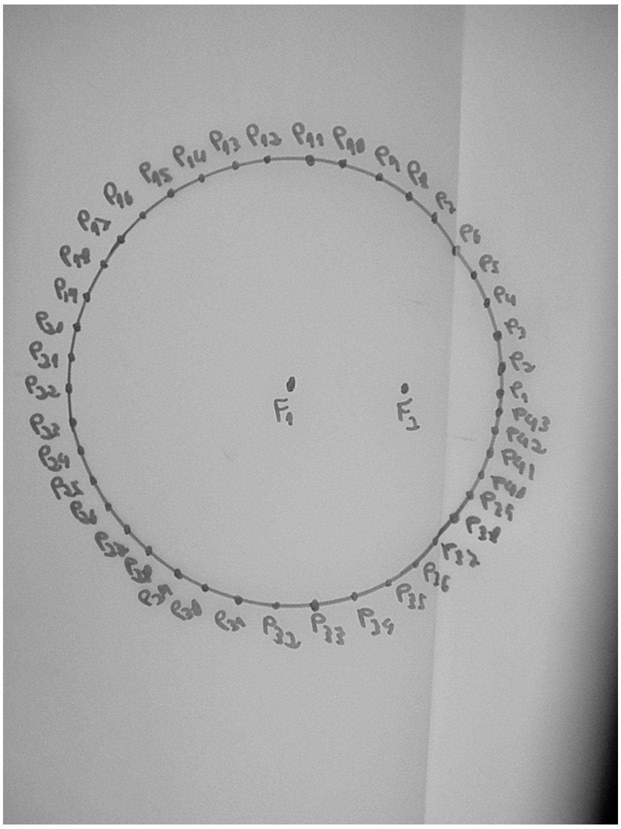


Figura 4.11: Primeiro vinco

5º passo:

Sobre o primeiro vinco traça-se a reta m_1 que é a mediatriz do segmento F_2P_1, como mostra a figura 4.12.

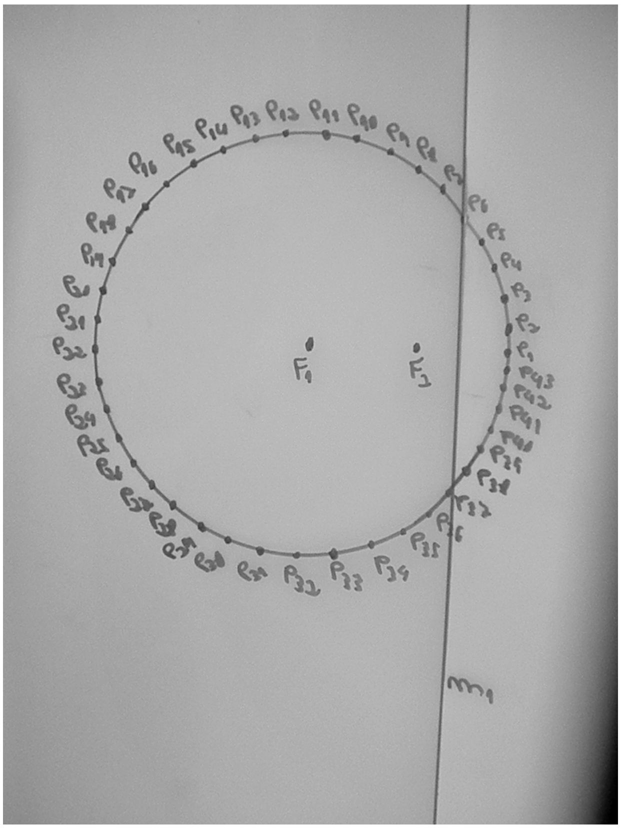


Figura 4.12: Mediatriz m_1 do segmento F_2P_1

Agora é só repetir os 5 passos para cada um dos demais pontos P_n, de maneira que em cada dobra o ponto F_2 coincida com o respectivo ponto. Assim, obteremos as mediatrizes m_n dos segmentos F_2P_n e como consequência a elipse de focos F_1 e F_2, como mostra a figura 4.13.

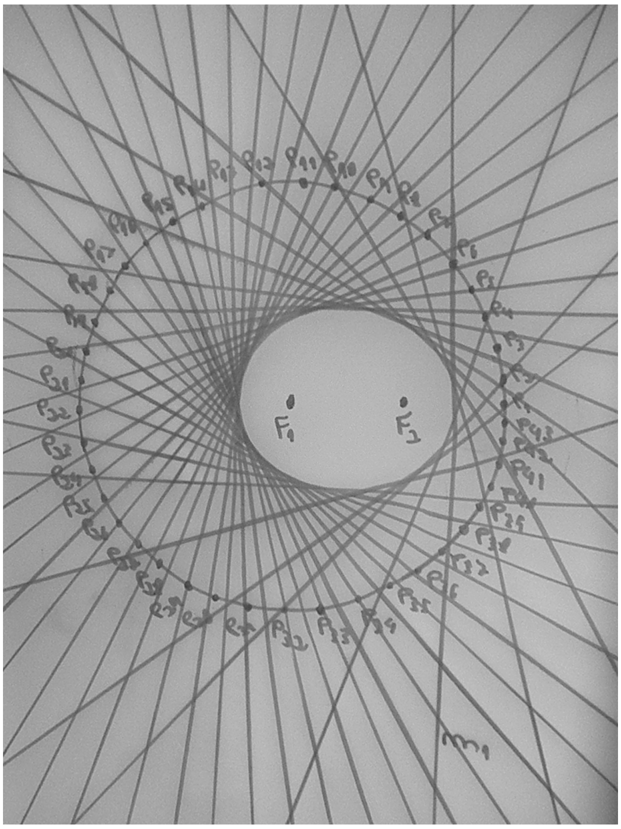


Figura 4.13: Elipse de focos F_1 e F_2

4.2.1 JUSTIFICATIVA

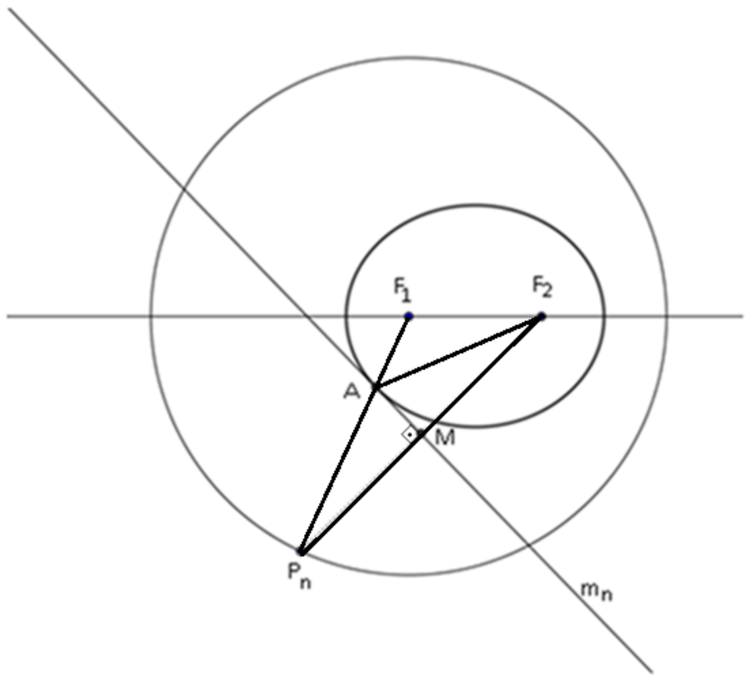


Figura 4.14: Elipse de focos F_1 e F_2

Na figura 4.14 temos uma circunferência de centro F_1 e raio r $= F_1P_n$ e uma elipse de focos F_1 e F_2 interior à mesma. O ponto A da elipse é a intersecção da reta m_n , mediatriz do segmento F_2P_n, com o segmento F_1P_n. Queremos mostrar que $AF_1 + AF_2$ é igual a uma constante, satisfazendo assim a definição de elipse. Demonstração:

A reta m_n é a mediatriz do segmento F_2P_n, portanto M é o ponto médio de F_2P_n e as distâncias MP_n e MF_2 são iguais. Como o segmento AM é lado comum dos triângulos AMP_n e AMF_2, então pelo critério de congruência LAL (lado-ângulo-lado) podemos afirmar que estes triângulos são congruentes. Portanto, podemos concluir que os segmentos AF_2 e AP_n são congruentes. Daí, segue que $AF_1 + AF_2 = AF_1 + AP_n = r$ e que $r = 2a$ (o semi-eixo maior é igual ao raio da circunferência). Como queríamos demonstrar.

4.3 HIPÉRBOLE

1º passo:

Desenhe uma circunferência λ de centro F_1 e marque um ponto F_2 exterior à mesma, como mostra a figura 4.15.

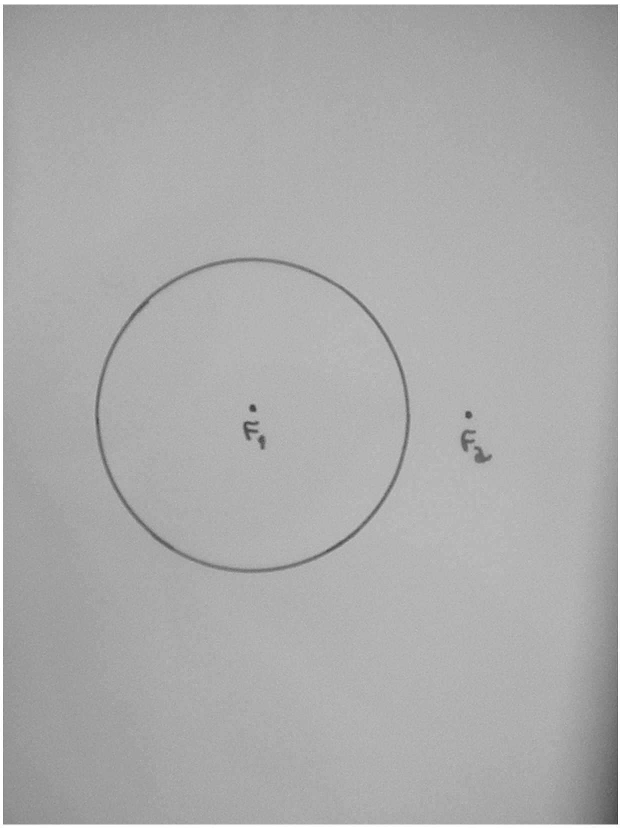


Figura 4.15: Circunferência λ de centro F_1

2^o passo:

Marque sobre a circunferência λ n pontos P_n, como mostra a figura 4.16.

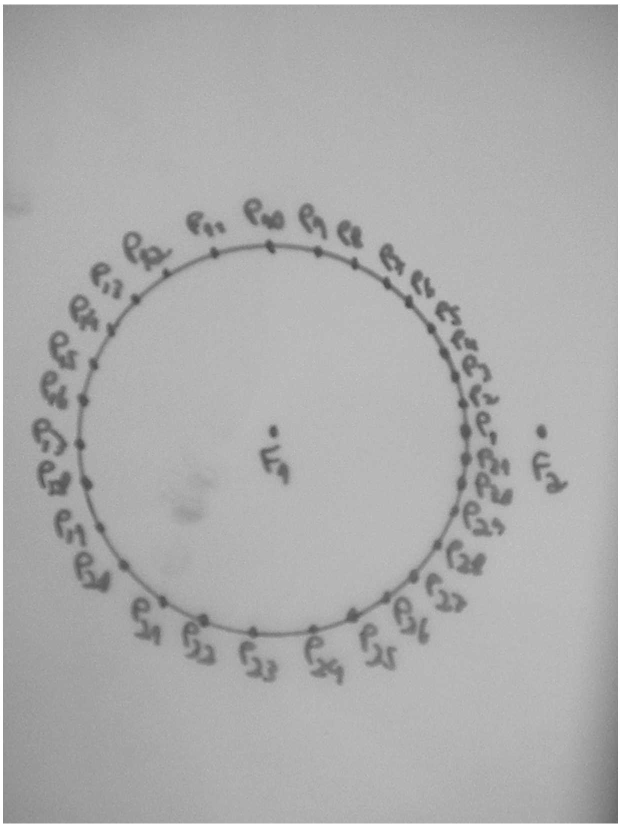


Figura 4.16: Pontos P_n sobre a circunferência λ

3º passo:

Faça a primeira dobra de maneira que o ponto F_2 coincida com o ponto P_1, como mostra a figura 4.17.

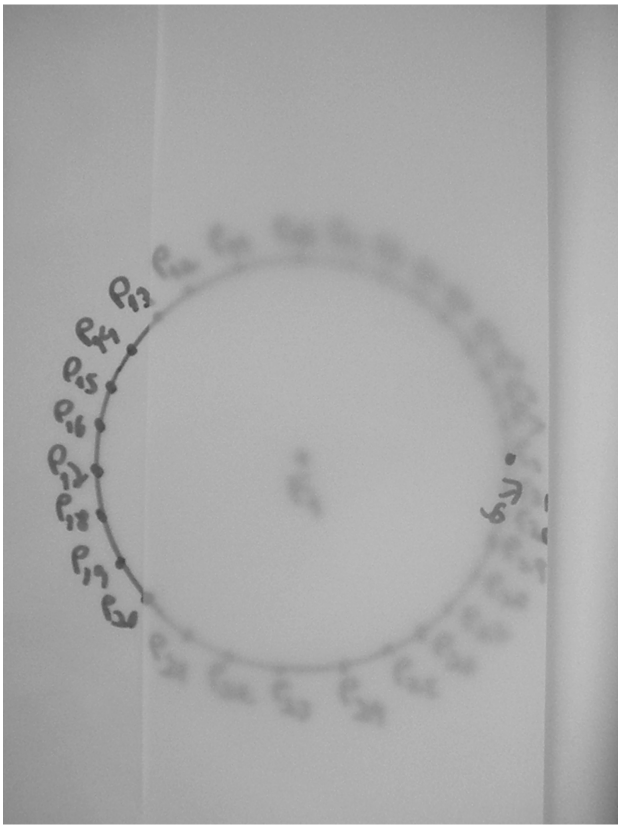


Figura 4.17: Primeira dobra

4º passo:

Desdobre a folha, voltando-a para a posição inicial. Temos assim o primeiro vinco, como mostra a figura 4.18.

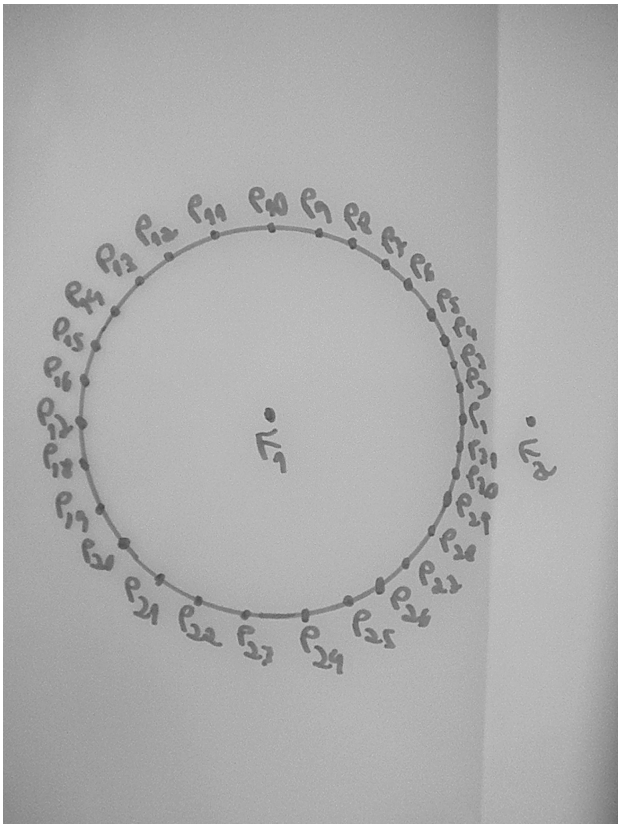


Figura 4.18: Primeiro vinco

5º passo:

Sobre o primeiro vinco traça-se a reta m_1 que é a mediatriz do segmento F_2P_1, como mostra a figura 4.19.

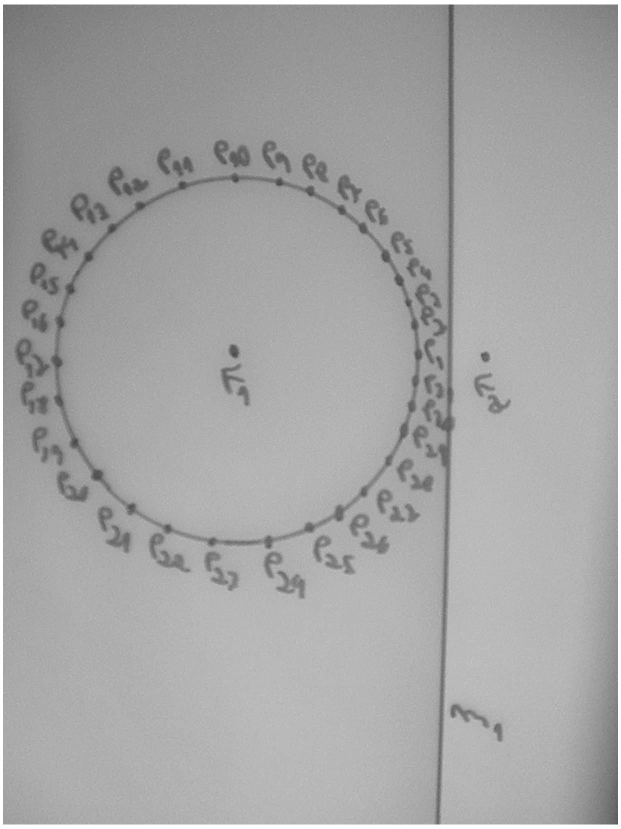


Figura 4.19: Mediatriz m_1 do segmento F_2P_1

Agora é só repetir os 5 passos para cada um dos demais pontos P_n, de maneira que em cada dobra o ponto F_2 coincida com o respectivo ponto. Assim, obteremos as mediatrizes m_n dos segmentos F_2P_n e como consequência a hipérbole de focos F_1 e F_2, como mostra a figura 4.20.

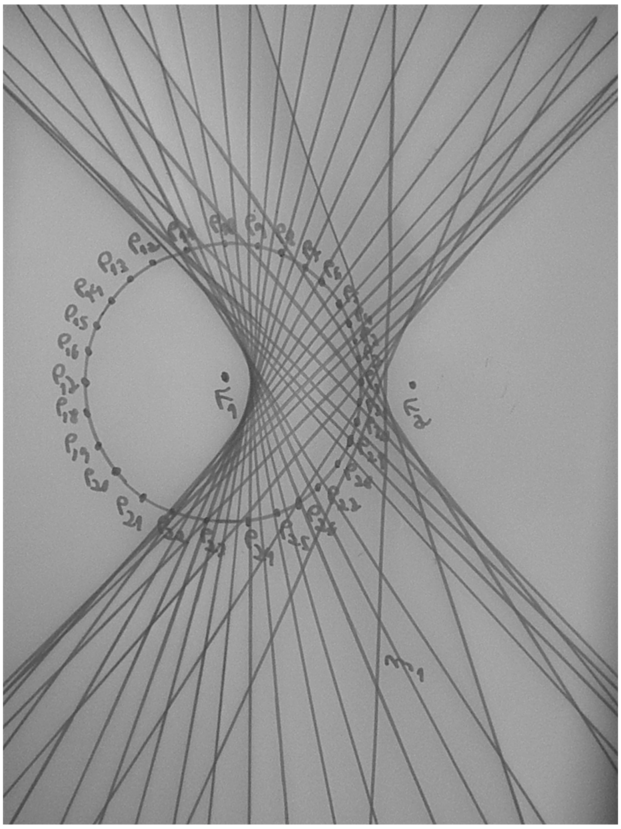


Figura 4.20: Hipérbole de focos F_1 e F_2

4.3.1 JUSTIFICATIVA

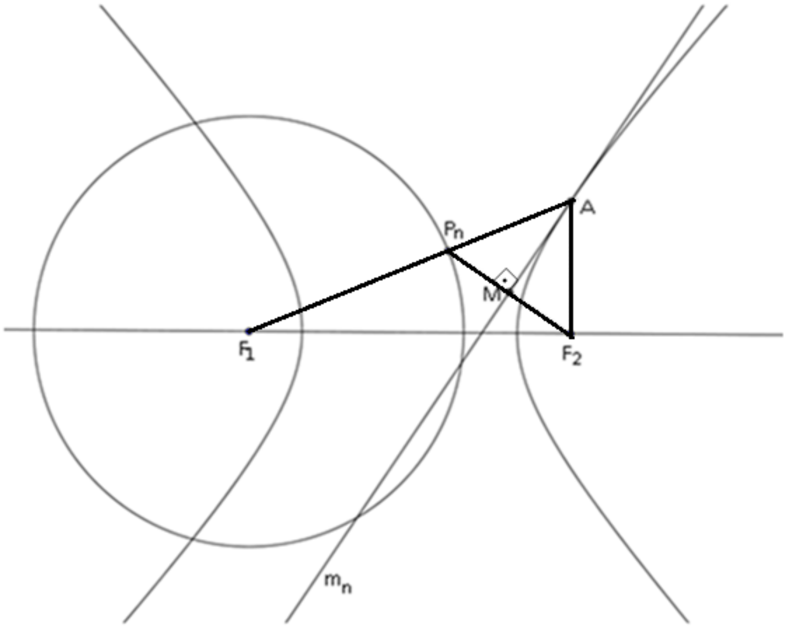


Figura 4.21: Hipérbole de focos F_1 e F_2

Na figura 4.21 temos uma circunferência de centro F_1 e raio r = F_1P_n e uma hipérbole de focos F_1 e F_2. O ponto A da hipérbole é a intersecção da reta m_n, mediatriz do segmento F_2P_n, com a reta que passa por F_1 e P_n. Queremos mostrar que AF_1 - AF_2 é igual a uma constante, satisfazendo assim a definição de hipérbole.

Demonstração:

A reta m_n é a mediatriz do segmento F_2P_n, portanto M é o ponto médio de F_2P_n e as distâncias MP_n e MF_2 são iguais. Como o segmento AM é lado comum dos triângulos AMP_n e AMF_2, então pelo critério de congruência LAL (lado-ângulo-lado) podemos afirmar que estes triângulos são congruentes. Portanto, podemos concluir que os segmentos AF_2 e AP_n são congruentes. Daí, segue que AF_1 - AF_2 = AF_1 - AP_n = r e que r = $2a$. Como queríamos demonstrar.

Capítulo 5

ATIVIDADES PROPOSTAS

5.1 PARÁBOLA

- Represente graficamente a parábola de equação $y^2 + 6y - 4x + 29 = 0$ num referencial cartesiano por meio de dobraduras.
  Resolução:

Utilizando o método de completar quadrados, temos:
$y^2 + 6y - 4x + 29 = 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 9 - 9 = 4x - 29 \Rightarrow (y + 3)^2 = 4(x - 5)$.
Logo, a parábola possui a diretriz paralela ao eixo y, com vértice em $V(5, -3)$ à direita da diretriz e $p = 2$, pois $2p = 4$. Segue que: foco $F(x_0 + \frac{p}{2}, y_0) \Rightarrow F(6, -3)$ e a reta diretriz $x = x_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow x = 4$.
Construção:
Num referencial cartesiano marque o foco $F(6, -3)$ e trace a reta diretriz $x = 4$, como mostra a figura 5.1.

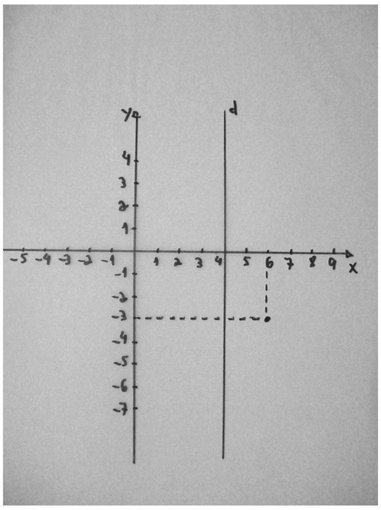


Figura 5.1: Foco $F(6, -3)$ e a diretriz $x = 4$

Agora, seguindo as orientações do capítulo anterior para a construção de uma parábola por meio de dobraduras, obteremos a parábola de foco $F(6, -3)$ e diretriz $x = 4$ como mostra a figura 5.2.

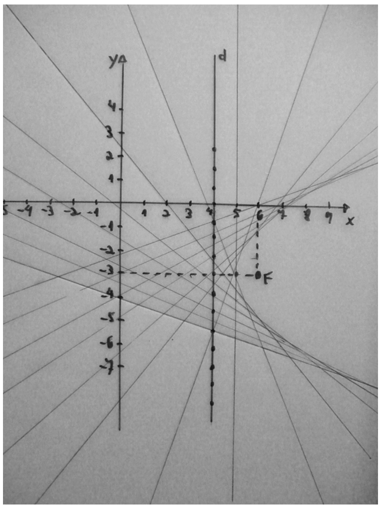


Figura 5.2: Parábola de foco $F(6, -3)$ e diretriz $x = 4$

5.2 ELIPSE

- Represente graficamente a elipse de equação $\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1$ num referencial cartesiano por meio de dobraduras.

Resolução:

Temos uma elipse com centro $C(4, -1)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo x, pois $9 > 5$. Logo: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$ e $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 5 + c^2 \Rightarrow c = 2$.
Segue que:
$F_1(x_0 - c, y_0) \Rightarrow F_1(2, -1)$
$F_2(x_0 + c, y_0) \Rightarrow F_2(6, -1)$
$A_1(x_0 - a, y_0) \Rightarrow A_1(1, -1)$
$A_2(x_0 + a, y_0) \Rightarrow A_2(7, -1)$
$B_1(x_0, y_0 + b) \Rightarrow B_1(4, -1 + \sqrt{5})$
$B_2(x_0, y_0 - b) \Rightarrow B_2(4, -1 - \sqrt{5})$

Construção:

Num referencial cartesiano marque os focos $F_1(2, -1)$ e $F_2(6, -1)$ e desenhe a circunferência de raio $r = 2a = 6$ com centro em F_1, como mostra a figura 5.3.

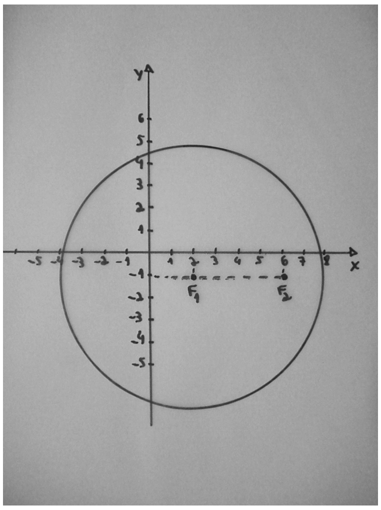


Figura 5.3: Circunferência de centro F_1 e raio $r = 2a = 6$

Agora, seguindo as orientações do capítulo anterior para a construção de uma elipse por meio de dobraduras, obteremos a elipse de focos F_1 e F_2 como mostra a figura 5.4.

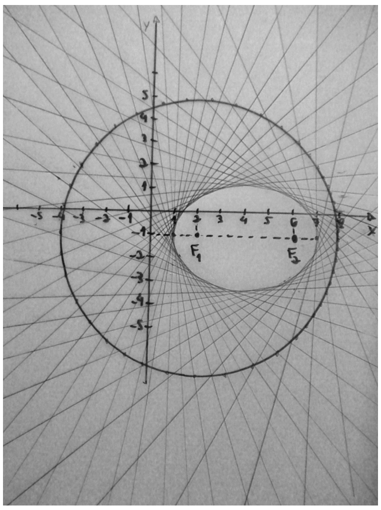


Figura 5.4: Elipse de focos F_1 e F_2

5.3 HIPÉRBOLE

- Represente graficamente a hipérbole $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-5)^2}{7} = 1$ de equação num referencial cartesiano por meio de dobraduras.

Resolução:

Temos uma hipérbole com centro $C(-2, 5)$, cujo eixo real é paralelo ao eixo x.

Logo: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, $b^2 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$ e $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 7 \Rightarrow c = 4$.
Segue que:
$F_1(x_0 - c, y_0) \Rightarrow F_1(-6, 5)$
$F_2(x_0 + c, y_0) \Rightarrow F_2(2, 5)$
$A_1(x_0 - a, y_0) \Rightarrow A_1(-5, 5)$
$A_2(x_0 + a, y_0) \Rightarrow A_2(1, 5)$
$B_1(x_0, y_0 + b) \Rightarrow B_1(-2, 5 + \sqrt{7})$
$B_2(x_0, y_0 - b) \Rightarrow B_2(-2, 5 - \sqrt{7})$

Construção:

Num referencial cartesiano marque os focos $F_1(-6, 5)$ e $F_2(2, 5)$ e desenhe a circunferência de raio $r = 2a = 6$ com centro em F_1, como mostra a figura 5.5.

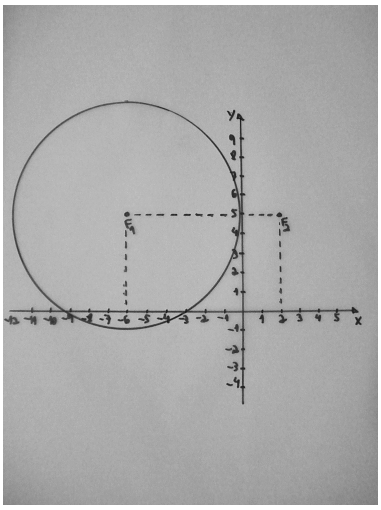


Figura 5.5: Circunferência de centro F_1 e raio $r = 2a = 6$

Agora, seguindo as orientações do capítulo anterior para a construção de uma hipérbole por meio de dobraduras, obteremos a hipérbole de focos F_1 e F_2 como mostra a figura 5.6.

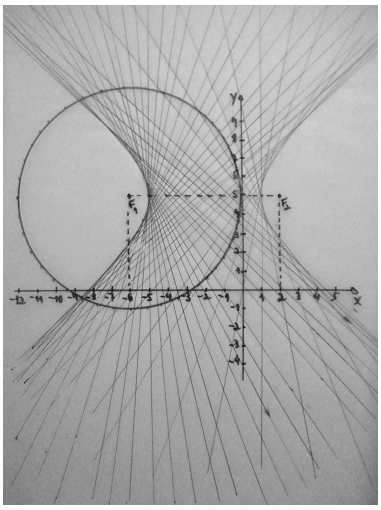


Figura 5.6: Hipérbole de focos F_1 e F_2

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria analítica, com destaque especial nas cônicas, sempre foram uma fonte de inspiração e despertou a curiosidade de muitos matemáticos devida a sua aplicabilidade na vida real ou mesmo para se entender os movimentos dos corpos do sisema solar. De tudo o que já foi produzido, é importante destacar que uma das principais características destes entes são suas propriedades refletoras.

Nessa breve escrita em torno do tema, tentamos focar os principais conceitos que são utilizados, ou deveriam ser utilizados mesmo que implicitamente por nós professores em sala de aula.

Com demonstrações de todas as fórmulas e enunciando os principais elementos, além de alguns exercícios propostos com sua devida resolução, tentamos mostrar como se constrói as cônicas através de dobraduras, mostrando passo a passo a construção de cada uma, ressaltando que as construções por dobradura pode ajudar os alunos a melhorar a percepção dos entes das cônicas bem como facilitar sua posterior aplicabilidade, além é claro de melhorar a prática de sala de aula, pois facilita as idéias e traz várias boas estratégias para atrair a atenção ou mesmo diminuir a dificuldade no ensino da geometria analítica.

Este trabalho é apenas uma breve escrita acerca deste tema, pois a aplicabilidade das cônicas também seria um bom tema para discussão, pois o assunto é muito vasto. Este material poderá posteriormente ser utilizado por estudantes que queiram se aprofundar nesses conceitos já citados, pois é tratado de uma maneira bastante simples e fundamentada em autores com notável respeito nessa área do conhecimento.

Referências Bibliográficas

[1] AZEVEDO, F. V. LaTeX. São Paulo: FEBAB, 2012. Apostila (Curso: Ferramenta para Estruturação de Trabalhos Científicos e Livros)

[2] EVES, Howard. Introdução à história da matemática, Campinas, SP,Unicamp, 2004.

[3] FREIRE, P. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo. Paz e Terra. 1997

[4] IEZZI,Gelson.Fundamentos de matemática Elementar. 4.ed. São Paulo,Atual, 1993

[5] LAKATOS, Eva M.; ANDRADE, Marina M. Fundamentos de metodologia científica. São Paulo: Atlas, 1986.

[6] LEITHOLD,Louis.O cálculo com geometria analítica. 3 ed.,vol.1, São Paulo,Harbra ltda

[7] $HTTP : //portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula = 27219$

[8] PRESTES, Maria de Luci de Mesquita. A pesquisa e a construção do conhecimento científico: do planejamento aos textos, da escola à

academia. 4. ed. São Paulo, Rêspel, 2012.