INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Alexandre de Azevedo Silva
Gabriella Marques Pereira da Costa

Equações do Primeiro Grau

Uma proposta de aula baseada na análise de livros

Rio de Janeiro
2014

Alexandre de Azevedo Silva
Gabriella Marques Pereira da Costa

Equações do Primeiro Grau

Uma proposta de aula baseada na análise de livros

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), ministrado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito para a obtenção do Grau de Mestre.

Área de atuação: Ensino da Matemática

Orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro
2014

Alexandre de Azevedo Silva

Gabriella Marques Pereira da Costa

Equações do Primeiro Grau

Uma proposta de aula baseada na análise de livros

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), ministrado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito para a obtenção do Grau de Mestre.

Área de atuação: Ensino da Matemática

Aprovada em _____ /_____ /_____

BANCA EXAMINADORA

____

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA – IMPA

____

Prof^{a}. Dr^{a}. ANGELA CÁSSIA BIAZUTTI – UFRJ

____

Prof. Dr. CARLOS GUSTAVO TAMM DE ARAÚJO MOREIRA – IMPA

Rio de Janeiro
2014

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar força para não desistir nunca.

À minha família pelo incentivo e por me mostrar o caminho certo a seguir.

Ao meu orientador Roberto pela orientação, apoio e confiança.

Aos amigos da turma PROFMAT/IMPA-2012 pelo convívio nesses dois anos, apoio e momentos de aprendizagem nos grupos de estudo.

Aos amigos e familiares por compreenderem minha ausência e pela força que deram para seguir em frente.

Aos meus alunos que contribuíram para a concretização deste trabalho e, em especial, à E. M. Brasil pelo apoio e compreensão durante o curso de mestrado.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

Muito obrigada.

"Sei que o meu trabalho é uma gota no oceano,
mas sem ele, o oceano seria menor"

(Madre Teresa de Calcutá)

Resumo

O presente trabalho visa à análise de obras direcionadas ao Ensino Fundamental, na disciplina de Matemática, com foco em um assunto específico, no caso, “equações do primeiro grau com uma incógnita”. Tal assunto permite que o educador aplique uma metodologia que desperte o interesse do aluno. No entanto, isso de nada adianta caso o material didático em mãos do professor vá contra os seus anseios. Por esta razão, apresentamos uma proposta de aula sobre o assunto de forma mais simples e atraente para alunos e docentes.

Palavras-chave: equação do primeiro grau, ensino fundamental, livro didático, escola pública, proposta de aula.

Abstract

This study aims to analyze the works directed to elementary school, in Mathematics, focusing on the specific issue of "the first-degree equations with one unknown". This issue allows the educator to apply a methodology that arouses students' interest. However, this is useless if the teaching material in the teacher's hands goes against their wishes. For this reason, we propose a class about the subject in a simpler and more attractive way for students and teachers.

Key words: the first-degree equations, elementary school, teaching material, public school, propose a class

SUMÁRIO

1 Introdução

É fácil encontrar alunos dizendo que a Matemática é muito complexa e professores dizendo que é difícil ensinar de modo que os alunos aprendam. A Matemática está ligada a diversos assuntos de forma abstrata. Na verdade, a falta de contextualização dos problemas na Matemática torna o seu ensino e aprendizado mais complicado, pois ao utilizar problemas que não correspondem à realidade, o aluno pode não buscar o senso crítico para dar sentido à sua resposta, gerando desinteresse pelo assunto.

Por mais que o professor já tenha ministrado uma aula diversas vezes, convém sempre procurar novos ângulos para tornar a aula mais atraente para o aluno e até mesmo para quebrar a monotonia de repetir os mesmos assuntos todo ano. A fim de preparar suas aulas de modo a dosar a apresentação que fará em sala, frequentemente o professor irá recorrer aos livros didáticos os quais, na maioria das vezes, são a sua única fonte de referência. É necessário que esses livros sejam confiáveis, objetivos e precisos. No entanto existem muitos que possuem falhas e deficiências.

Nessas condições, surgiu a ideia deste trabalho: analisar diversas abordagens de um tema específico nos livros didáticos e, a partir das críticas, propor uma aula mais atraente para o aluno.

O tema escolhido foi "equação do primeiro grau com uma incógnita", pois é um assunto que gera muitas dúvidas durante as aulas e que aparece com frequência na resolução de problemas e em situações cotidianas.

O trabalho foi realizado em dupla com o Alexandre de Azevedo Silva tendo como parte comum um capítulo sobre a fundamentação teórica com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) onde apresentamos um breve histórico e analisamos trechos que falam sobre o tema escolhido, e outro com a explicação teórica do tema escolhido. Os capítulos destinados à análise dos livros didáticos e a proposta de aula foram elaborados individualmente.

Os livros analisados foram:

Alexandre de Azevedo Silva:

- Matemática – Ênio Silveira e Claudio Marques
- Matemática em movimento – Adilson Longen
- A conquista da matemática – Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr

Gabriella Marques Pereira da Costa – este trabalho:

- A conquista da matemática – Castrucci e Giovanni Jr
- Matemática – Bianchinni
- Apostila da Prefeitura do RJ

Tomamos como ponto de partida, o livro [9] de Elon Lages Lima com o objetivo de orientar professores oferecendo, junto com a crítica, sugestões, propostas, pontos positivos e negativos. Para realizar a análise, vamos verificar se o livro possui erros, deficiências, excesso de formalismo, tipo de linguagem, layout, adequação aos PCN’s e exercícios de acordo com a teoria.

As propostas de aula terão duas abordagens, Ensino Público (Gabriella) e Ensino Privado (Alexandre), com técnicas desenvolvidas com base em nossas experiências práticas, nas análises dos livros e de acordo com os PCN’s.

2 Fundamentação teórica com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Este capítulo foi elaborado em parceria com Alexandre de Azevedo Silva. Aqui fazemos a exposição dos Parâmetros Curriculares Nacionais, ou PCN's, que serão utilizados como um dos critérios de análise de livros e cadernos pedagógicos.

Iremos nos deter mais naqueles critérios que consideramos mais relevantes para nossa análise.

Com isso, esperamos tornar o trabalho o mais rico possível em informações para que qualquer um, educador ou não, possa ter uma noção bem nítida das vantagens e desvantagens de determinada obra, e se a mesma é adequada ou não à utilização desejada.

2.1 Definição dos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais — PCN's — são referências para o Ensino Fundamental e Médio de todo o país. O objetivo dos PCN's é garantir a todas as crianças e jovens brasileiros, mesmo em locais com condições socioeconômicas desfavoráveis, o direito de usufruir do conjunto de conhecimentos reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania. Não possuem caráter de obrigatoriedade e, portanto, pressupõe-se que serão adaptados às peculiaridades locais. A comunidade escolar de todo o país está ciente de que os PCN's não são uma coleção de regras que pretendem ditar o que os professores devem ou não fazer e sim uma referência para a transformação de objetivos, conteúdos e didática do ensino.

Segundo documento [3] presente no portal do Ministério da Educação – MEC:

"Os Parâmetros Curriculares Nacionais constituem um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País. Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual.

Por sua natureza aberta, configuram uma proposta flexível, a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores. Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas".

Os PCN's são divididos em vários livros, sendo o primeiro deles relacionado ao Ensino Fundamental, da primeira a quarta série, o segundo relacionado ao Ensino Fundamental da quinta a oitava série e, o último, ao Ensino Médio.

Como o nosso trabalho irá falar sobre "equações do primeiro grau", é importante que saibamos o que o Programa Curricular fala a respeito deste tema.

Primeiramente, veremos o que é dito a respeito do Ensino Fundamental em si, que é onde tal assunto encontra-se inserido. Posteriormente, faremos a exposição de como o assunto Álgebra é abordado no documento.

Como podemos ver, os PCN's fazem uma comparação entre a apresentação usual com outras formas da mesma, abrindo um novo leque de opções que podem ser utilizadas para explicar determinado assunto.

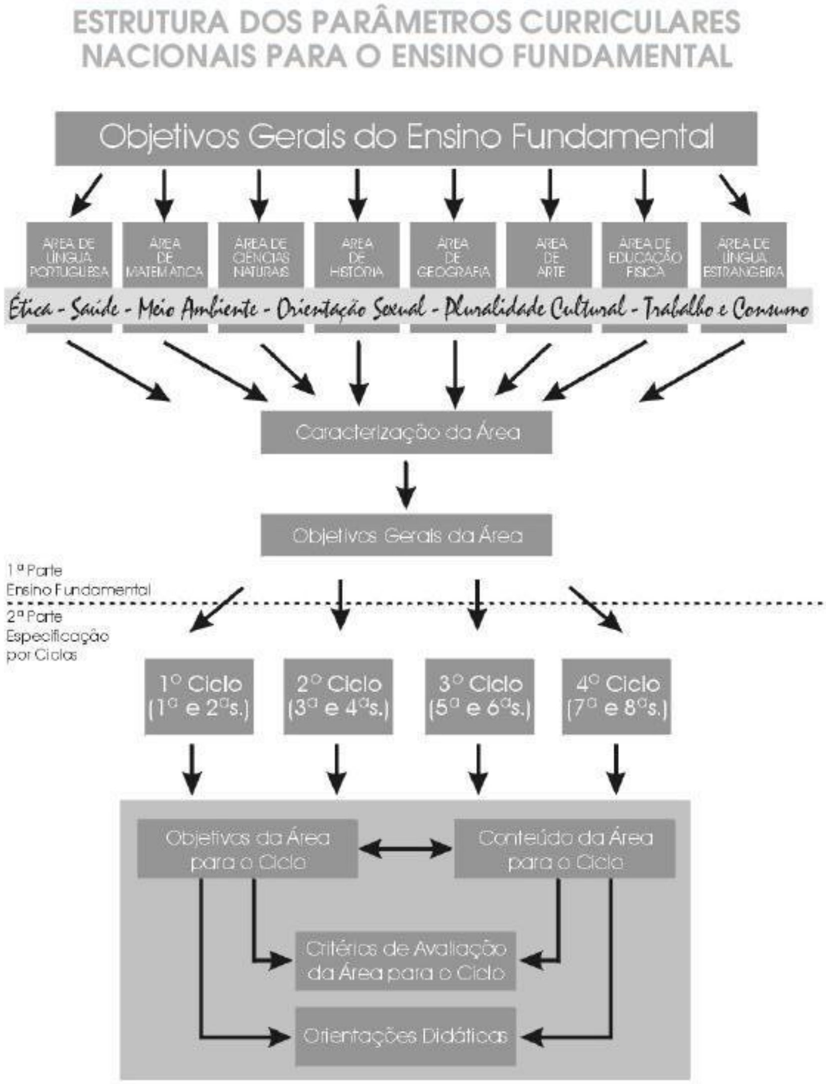
Segundo os PCN's:

"Muitos professores consideram que é possível trabalhar com situações do cotidiano ou de outras áreas do currículo somente depois de os conhecimentos matemáticos envolvidos nessas situações terem sido amplamente estudados pelos alunos. Como esses conteúdos geralmente são abordados de forma linear e hierarquizada, apenas em função de sua complexidade, os alunos acabam tendo poucas oportunidades de explorá-los em contextos mais amplos. Mais ainda, as situações-problema raramente são colocadas aos alunos numa perspectiva de meio para a construção de conhecimentos.

Essa organização linear e bastante rígida dos conteúdos, que vem sendo mantida tradicionalmente na organização do ensino de Matemática, é um dos grandes obstáculos que impedem os professores de mudar sua prática pedagógica numa direção em que se privilegie o recurso à resolução de problemas e a participação ativa do aluno.

Porém, isso pode ser rompido se o professor se predispuser a traçar no seu planejamento algumas conexões entre os conteúdos matemáticos. Para tanto, ao construir o planejamento, é preciso estabelecer os objetivos que se deseja alcançar, selecionar os conteúdos a serem trabalhados, planejar as articulações entre os conteúdos, propor as situações-problema que irão desencadeá-los. É importante que as conexões traçadas estejam em consonância com os eixos temáticos das outras áreas do currículo e também com os temas transversais."

A figura abaixo, retirada do documento original dos PCN's, mostra como são tratados os parâmetros curriculares para o Ensino Fundamental.



Estrutura dos PCN's para o Ensino Fundamental

Algo para o qual os PCN's dão muita importância é a utilização de situações-problema:

"A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las."

Mas, em relação ao tópico por nós escolhido, quais são os apontamentos feitos pelos parâmetros curriculares? Segundo o texto do PCN, mesmo que nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da Álgebra, é especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação.

2.2 O educador e sua adequação aos PCN's

Podemos ver que os PCN's deixam claro que o amadurecimento dos conceitos de Álgebra deve se dar nas séries finais do Ensino Fundamental. Além disso, nota-se que o assunto "equações", embora não diretamente tratado pelos parâmetros traçados, encontra-se presente dentro do tópico que fala sobre a Álgebra de uma maneira geral.

De nenhuma maneira o educador fica sem um norte ao procurar a respeito de tal assunto, pois fica claro que o objetivo é a representação de problemas por meio de equações e inequações, que é quando se faz a necessidade do assunto "equações" tomar forma em sala de aula.

Com tudo o que foi exposto, pode-se delinear melhor como será feita a avaliação dos livros-texto ao longo dos demais capítulos de nosso trabalho. O grande problema é que, segundo Elon Lages Lima em [10], existem essencialmente dois tipos de livros: os que foram escritos por professores que não tiveram uma formação adequada e, assim como seus alunos, tiveram contato com livros cheios de falhas, não aprendendo muito bem sobre o próprio assunto que escreveram; e os que foram escritos por professores de Ensino Superior, que não tem vivência numa sala de aula da série para a qual estão escrevendo, nem conseguem dosar o grau de abstração e generalidade aceitáveis ao público-alvo, resultando em livros menos didáticos e com uma linguagem menos adequada aos alunos.

2.3 Nossa interpretação dos PCN's

Muitas vezes, os livros-textos adotados em escolas são abundantes em exercícios, alguns contextualizados, outros não. De fato, nem sempre é possível contextualizar determinados assuntos, pelo menos naqueles exercícios em que o aluno vai acabar aprendendo a parte mais básica da matéria por meio de uma excessiva repetição. Mas, fique bem claro, não apoiamos aquele ensino "engessado" em que o aluno acaba repetindo e decorando tudo, sem entender.

O que achamos adequado é que seja apresentada uma forma de ensinar que misture tanto a forma tradicional quanto a forma contextualizada de lecionar para que o aluno tenha uma perfeita sedimentação do conteúdo abordado.

Pensamos que o assunto "equações do primeiro grau", quando dado pela primeira vez, no Ensino Fundamental, deva ser dado de maneira a aliarmos o ensino "clássico", com questões repetitivas, do tipo "efetue", "resolva", àquelas que possuam alguma forma de contextualização.

Esta é a linha de pensamento que iremos seguir e que será utilizada para que façamos a análise dos livros que selecionamos para dar continuidade ao nosso trabalho.

3 Teoria de equações

Este capítulo foi elaborado também em parceria com Alexandre de Azevedo Silva. Aqui é apresentada toda a teoria referente ao assunto que será avaliado: teoria das equações do primeiro grau. Com isso, objetiva-se deixar claro qual é o assunto que está sendo analisado, para que fiquem bem claros os critérios, bem como o motivo de elogios ou críticas a várias obras, em vários momentos de nossa avaliação dos materiais didáticos.

Sendo assim, a exposição da teoria nos permite melhor justificar o que será feito no próximo capítulo, que é o da análise crítica em si.

3.1 As equações

Equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. A palavra equação tem o prefixo “equa”, que em latim quer dizer "igual".

Exemplo 1: São equações

$$2x + 8 = 0$$

$$5x - 4 = 6x + 8$$

$$3a - b - c = 0$$

Exemplo 2: Não são equações

$4 + 8 = 7 + 5$ (Não é uma sentença aberta)

$x - 5 < 3$ (Não é igualdade)

$5 \neq -2$ (não é sentença aberta, nem igualdade)

3.2 Equação do primeiro grau

A equação geral do primeiro grau $ax + b = 0$, onde a e b são números conhecidos e $a \neq 0$, se resolve de maneira simples: subtraindo b dos dois lados, obtemos $ax = -b$ e dividindo por a (dos dois lados), temos $x = -\frac{b}{a}$. Os casos em que $a = 0$, serão analisados separadamente na seção 3.7.

No entanto, vale à pena deixar claro que o que deve ser feito é isolar o "x" de um dos lados da equação e deixar os demais valores do lado oposto, o que nos leva à solução do problema.

Devemos esclarecer que há equações que não vão aparecer da exata maneira como no exemplo acima. Na verdade, a maior parte terá de sofrer uma pequena mudança na posição de seus termos para que fique com o aspecto de "$ax + b = 0$".

3.3 Elementos de uma equação

Considere a equação $2x - 8 = 3x - 10$. A letra x representa a incógnita, isto é, a parte desconhecida da equação.

Na equação acima a incógnita é x; tudo que antecede o sinal da igualdade denomina-se 1º membro, e o que sucede, 2º membro.

$$\underbrace{2x - 8}_{1^{\underline{o}}\ membro} = \underbrace{3x - 10}_{2^{\underline{o}}\ membro}$$

Qualquer parcela, do 1º ou do 2º membro, é um termo da equação.

$$\underbrace{\underbrace{2x}\ \underbrace{-8} = \underbrace{3x}\ \underbrace{-10}}_{termos\ da\ equação}$$

3.4 Conjunto universo e conjunto verdade

Conjunto universo é o conjunto de todos os valores que uma variável pode eventualmente assumir. Ele é usualmente indicado pela letra U.

Conjunto verdade é o conjunto dos valores de U, que tornam verdadeira a equação. Ele é usualmente indicado pela letra V.

O conjunto verdade é subconjunto do conjunto universo: $V \subset U$

Exemplo 3: Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e a equação $x + 2 = 5$.

O conjunto A é denominado conjunto universo da equação e o conjunto $\{3\}$ é o conjunto verdade dessa mesma equação, pois $3 + 2 = 5$.

Exemplo 4: Determine os números inteiros que satisfazem a equação $x^2 = 25$.

O conjunto dos números inteiros é o conjunto universo da equação. Os números -5 e 5, que satisfazem a equação, formam o conjunto verdade, podendo ser indicado por $V = \{-5, 5\}$.

Exemplo 5: Determine o conjunto verdade da equação $x^2 = 25$, se o conjunto universo for o dos números naturais.

Os números -5 e 5 vão satisfazer a equação, mas o conjunto verdade será $V = \{5\}$, pois $-5 \notin \mathbb{N}$.

De nada adianta encontrarmos um valor de "x" que obedece à equação dada se tal valor não pertencer ao conjunto universo com o qual estivermos trabalhando.

O conjunto verdade é também conhecido por conjunto solução e pode ser indicado por S.

Devemos observar que o conjunto racional é adotado como conjunto universo pelo fato de que, à época em que tal assunto é abordado na escola, os alunos ainda não tiveram contato com o conjunto dos números reais. Não sendo citado o conjunto universo, devemos considerar como conjunto universo o conjunto dos números racionais: $U = \mathbb{Q}$. Ao chegarem no Ensino Médio, vão perceber que quando nada for mencionado numa questão, o conjunto universo implícito será o conjunto dos números reais.

3.5 Raízes

Os elementos do conjunto verdade de uma equação são chamados raízes da equação. Para verificar se um número é raiz de uma equação, devemos obedecer à seguinte sequência:

- Substituir a incógnita por esse número.
- Determinar o valor de cada membro da equação.
- Verificar a igualdade. Sendo uma sentença verdadeira, o número considerado é raiz da equação.

Resolver uma equação consiste em realizar uma espécie de operações que nos conduzem a equações equivalentes cada vez mais simples e que nos permitem, finalmente, determinar os elementos do conjunto verdade ou, de modo equivalente, as raízes da equação. Ou seja, resolver uma equação significa determinar o seu conjunto verdade, dentro do conjunto universo considerado.

Veremos agora de que maneira podemos resolver uma equação, bem como o que seriam “equações equivalentes”.

3.6 Resolvendo uma equação

Uma das maneiras pelas quais podemos resolver uma equação é através da tentativa e erro. A seguir, um exemplo para que isso fique bem claro.

Vamos verificar quais dos elementos do conjunto universo são raízes das equações abaixo, determinando em cada caso o conjunto verdade.

Exemplo 6: Resolva a equação $x - 2 = 0$, sendo $U = \{0, 1, 2, 3\}$.

Para $x = 0$ na equação $x - 2 = 0$, temos: $0 - 2 = 0 \Rightarrow -2 = 0$. (F)

Para $x = 1$ na equação $x - 2 = 0$, temos: $1 - 2 = 0 \Rightarrow -1 = 0$. (F)

Para $x = 2$ na equação $x - 2 = 0$, temos: $2 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. (V)

Para $x = 3$ na equação $x - 2 = 0$, temos: $3 - 2 = 0 \Rightarrow 1 = 0$. (F)

Verificamos que 2 é raiz da equação $x - 2 = 0$, logo $V = \{2\}$.

Exemplo 7: Resolva a equação $2x - 5 = 1$, sendo $U = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Para $x = -1$ na equação $2x - 5 = 1$ temos: $2 \cdot (-1) - 5 = 1 \Rightarrow -7 = 1$. (F)

Para $x = 0$ na equação $2x - 5 = 1$ temos: $2 \cdot 0 - 5 = 1 \Rightarrow -5 = 1$. (F)

Para $x = 1$ na equação $2x - 5 = 1$ temos: $2 \cdot 1 - 5 = 1 \Rightarrow -3 = 1$. (F)

Para $x = 2$ na equação $2x - 5 = 1$ temos: $2 \cdot 2 - 5 = 1 \Rightarrow -1 = 1$. (F)

A equação $2x - 5 = 1$ não possui raiz em U, logo $V = \emptyset$.

Dados estes exemplos, é importante que fique claro que os mesmos são apresentados com o objetivo de que o aluno entenda o que é exatamente resolver uma equação, já esclarecendo, logo de início, que os valores encontrados devem pertencer ao conjunto universo.

No entanto, isto sempre funciona quando U é finito; para o caso infinito, são necessárias as regras de manipulação que iremos agora discutir.

Na resolução de uma equação do 1º grau com uma incógnita, podemos aplicar os princípios de equivalência das igualdades (aditivo e multiplicativo). Assim, podemos somar/subtrair ou multiplicar/dividir os dois membros de uma equação que encontraremos uma equação equivalente.

Exemplo 8: Sendo $U = \mathbb{Q}$, resolva a equação $-\frac{3x}{4} = \frac{5}{6}$.

$MMC\ (4, 6)\ =\ 12$

$$-\frac{9x}{12} = \frac{10}{12} \Longrightarrow -9x = 10 \Rightarrow x = -\frac{10}{9}$$

Como $-\frac{10}{9} \in \mathbb{Q}$, então $V = \left\{-\frac{10}{9}\right\}$.

Exemplo 9: Sendo $U = \mathbb{Q}$, resolva a equação $2 \cdot (x - 2) - 3 \cdot (1 - x) = 2 \cdot (x - 4)$.

Iniciamos aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.

$$2x - 4 - 3 + 3x = 2x - 8 \Rightarrow 2x + 3x - 2x = -8 + 4 + 3 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Como $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, então $V = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

3.7 Equações impossíveis e identidades

Sendo $U = \mathbb{Q}$, considere a equação $2 \cdot (6x - 4) = 3 \cdot (4x - 1)$.Observe, agora, a sua resolução.

$$2 \cdot 6x - 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4x - 3 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x - 8 = 12x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x - 12x = -3 + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \cdot x = 5$$

Como nenhum número multiplicado por zero é igual a 5, dizemos que a equação é impossível e, portanto, não tem solução. Logo, $V = \emptyset$.

Assim, uma equação do tipo $ax + b = 0$ é impossível quando $a = 0$ e $b \neq 0$, mas esta não é a única situação que leva uma equação a não ter solução. Se $U = \mathbb{N}$, a equação $3 \cdot x = 5$ também é impossível, pois "x" teria de ser igual a $\frac{5}{3}$ e tal valor não pertence ao conjunto universo, que é o conjunto dos números naturais.

Sendo $U = \mathbb{Q}$, considere a equação $10 - 3x - 8 = 2 - 3x$ e observe a sua resolução:

$$-3x + 3x = 2 - 10 + 8 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$$

Como todo número multiplicado por zero é igual a zero, dizemos que a equação possui tantas soluções quanto forem os elementos do conjunto universo. Equações desse tipo, em que qualquer valor atribuído à variável torna a equação verdadeira, são denominadas identidades.

Isso, no entanto, não nos impede de continuar denominando a equação $0 \cdot x = 0$ como uma igualdade, pois tanto num caso quanto no outro, tal equação será sempre válida para todos os valores do conjunto universo U.

4 Análise crítica de livros e caderno pedagógico

Neste capítulo, elaborado individualmente, o objetivo é verificar como é abordado o tema “equações do primeiro grau com uma incógnita” em alguns livros do 7º ano do Ensino Fundamental. Optamos por fazer essa análise didática por sabermos a forte influência que eles exercem na prática de ensino, pois muitas vezes são tomados como referência de como se deve ensinar determinado conteúdo.

Em nossa experiência prática, constatamos a grande dificuldade por parte dos alunos nas manipulações algébricas, como ocorre no ensino de equações. Acreditamos que uma parte dessa dificuldade pode ter origem na forma como o conteúdo é abordado pelo livro didático e repassado pelos professores, já que uma abordagem adequada do assunto pode contribuir significativamente na aprendizagem do aluno.

Diante dessa questão, optamos por fazer a análise dos livros[1] “Matemática” de Edwaldo Bianchini, “A conquista da Matemática” de José Rui Giovanni Jr e Benedicto Castrucci, e o caderno pedagógico da prefeitura da cidade do Rio de Janeiro. Os dois livros analisados foram aprovados no Programa Nacional do Livro Didático, o PNLD de 2011, porém apenas o primeiro livro continuou no PNLD de 2014. Segundo o Ministério da Educação em [11], o principal objetivo do PNLD é subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. Os livros aprovados no PNLD são encaminhados às escolas, que escolhem aqueles que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico. O programa é executado em ciclos trienais alternados, ou seja, a cada três anos o MEC adquire e distribui os livros para os alunos dos anos finais do ensino fundamental. Esses livros são devolvidos ao final de cada ano para a utilização por outros alunos nos anos subsequentes.

Para desenvolver a análise dos livros, vamos verificar se a teoria foi abordada em uma ordem coerente; possíveis erros de definição ou desatenção tais como definições incompletas ou vagas e erros de cálculo ou formatação; adequação da linguagem ao ano em questão; objetividade, que consiste em não dar relevância aos pontos triviais e, ao mesmo tempo, destacar os pontos mais importantes; adequação aos PCN’s e exemplos adequados à realidade

---

[1] Disponíveis em:
https://drive.google.com/file/d/0BzWFRLjSzn1uVVFfRENvN00tWHM/edit?usp=sharing

do aluno da rede pública. Por fim, vamos destacar os pontos positivos e negativos de cada livro, apontar possíveis falhas e/ou deficiências e verificar se os exercícios propostos estão condizentes com o nível da teoria.

4.1 Análise do livro "Matemática – 7ª edição"

O livro apresenta dez capítulos e cada um deles está dividido em seções. O capítulo 4, que tem o nome de "Equações", está dividido da seguinte forma:

1- Um pouco de história
2- Expressões algébricas
3- Valor numérico
4- Termos algébricos
5- Sentenças matemáticas
6- As equações
7- Equações do 1º grau com uma incógnita
8- Resolução de equações
Para saber mais
Trabalhando a informação
Diversificando

Nosso objetivo é analisar as seções 6, 7 e 8 desse capítulo, mas antes faremos uma breve descrição das outras seções.

Na seção 1, o autor apresenta dois problemas antigos presentes no papiro de Rhind e no manuscrito de Lilavati. A ideia é mostrar ao aluno que é possível resolvê-los por tentativa, embora não seja uma tarefa fácil. Por isso, eles aprenderão novos recursos para facilitar a resolução de problemas como esses.

Na seção 2, o autor escreve sobre uma das partes mais importantes e talvez mais difíceis da Álgebra, que é a transcrição da linguagem escrita usual para a linguagem simbólica. Primeiro, ele faz isto com expressões simples, envolvendo apenas números; depois ele mostra expressões com uma variável e apresenta o conceito de variável.

Na seção 3, o autor apresenta um exemplo fácil sobre perímetro de um retângulo de lados x e y, e pergunta qual o valor desse perímetro dadas as medidas dos lados. Depois, apresenta a definição de valor numérico e mostra mais alguns exemplos.

Na seção 4, o autor mais uma vez utiliza a Geometria para exemplificar a Álgebra. Ele define o que é um termo algébrico, coeficiente e parte literal. Apresenta também termos semelhantes, simplificação de expressões algébricas e redução de termos semelhantes.

Na seção 5, o autor define uma sentença como um conjunto de palavras com um sentido completo e, depois, define uma sentença matemática, ou seja, quando a sentença envolve números. Ele também apresenta alguns exemplos de sentenças matemáticas verdadeiras ou falsas.

Vamos ver o que possuem as seções especiais. A seção “Para saber mais” apresenta um texto sobre a história da Matemática onde podemos aprender a regra da falsa posição. No final dessa seção, temos a resolução dos problemas apresentados na seção 1. A seção “Trabalhando a informação” traz conteúdos referentes ao campo de Estatística e Probabilidade, nesse caso, temos o cálculo de médias e estimativas. A seção “Diversificando” oferece uma proposta de atividade que envolve uma “mágica”.

Agora, vamos começar a análise da parte que nos interessa, as seções 6, 7 e 8.

Na seção 6, o autor define o que é uma equação, primeiro e segundo membro e incógnita. Depois, fala sobre raiz de uma equação, conjunto universo e solução. Seria interessante apresentar falsos exemplos de equações na teoria e também expor um exemplo de primeiro e segundo membro, pois o aluno encontrará um exercício onde ele precisará classificar quais sentenças são equações e outro para identificar os membros. Além disso, faltou dar um exemplo contextualizado sobre conjunto universo, pois o autor não fala que em alguns casos ele pode não aparecer, ou seja, o aluno deverá deduzi-lo. Um ponto negativo foi verificar se o -4 e o 4 são soluções da equação do problema, pois não deixa o aluno pensar nas possíveis soluções de acordo com o conjunto universo. Seria mais proveitoso testar alguns elementos do conjunto universo dado em cada situação e depois concluir qual seria a solução da equação em cada caso.

Na seção 7, o autor define o que é uma equação do primeiro grau com uma incógnita e fala sobre equações equivalentes, mas faltou dar exemplos na teoria de uma situação onde poderíamos somar ou multiplicar os dois membros de uma equação por um número sem que isso alterasse o resultado. Com isso, o aluno pode encontrar dificuldades no exercício 28 da página 111, pois ele ainda não sabe resolver uma equação e nem sempre é fácil encontrar a raiz por tentativas.

Na seção 8, o autor faz a resolução de uma equação representada por uma balança, apresenta o princípio aditivo e o princípio multiplicativo e no final equaciona alguns problemas. Essa seção, uma das mais importantes, só apresenta três exemplos iniciais. Além disso, seria bom deixar bem claro para o aluno qual é o objetivo ao se deparar com uma equação, pois não adianta o aluno saber que pode somar, subtrair, multiplicar ou dividir um mesmo número aos dois membros de uma equação, se ele não sabe onde quer chegar. O texto, que não é muito claro, deveria dizer que as propriedades devem ser utilizadas de modo a encontrar o valor do x, ou seja, deve-se isolar o x em algum membro da equação para encontrar sua solução, como disse o autor, deve-se escrever a equação dada na sua forma mais simples. Além disso, o autor não fala sobre equações impossíveis e identidades. Acredito que não seja necessário, pois se o aluno entendeu que nas equações do tipo $ax = b$, x é o valor que multiplicado por a resulta em b, ele saberá resolver essas equações sem precisar falar nos seus nomes.

Em relação aos exercícios propostos, todos estão nivelados de acordo com o que foi dado na teoria, mas até a parte final da seção 8, a maioria apresentada foi apenas para verificar os conceitos apresentados, sem nenhuma contextualização. Ficou faltando dedicar uma seção maior para a resolução de problemas que envolvam todos os conceitos estudados, pois o aluno pode apresentar dificuldades para transcrever um determinado problema na forma de uma equação e identificar, por exemplo, o conjunto universo.

Logo, apesar de algumas deficiências, temos que a ordem dos conteúdos é apresentada de forma coerente e não possui erros. A linguagem utilizada está de acordo com o ano em questão, mas o visual é um pouco confuso. É adequado aos PCN's, todos os exemplos são simples e os exercícios propostos estão de acordo com o nível da teoria.

4.2 Análise do livro "A conquista da Matemática – edição renovada"

O livro apresenta dez capítulos não numerados e cada um deles está dividido em seções. O quarto capítulo, que tem o nome de "Estudando as Equações", está dividido da seguinte forma:

24- Igualdade
25- Equações
26- Conjunto universo e conjunto solução de uma equação
27- Equações equivalentes
28- Equações do 1º grau com uma incógnita
29- Usando equações na resolução de problemas
30- Aplicação das equações: as fórmulas matemáticas
31- Equação do 1º grau com duas incógnitas
32- Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Nosso objetivo é analisar as seções 24, 25, 26, 27 e 28 desse capítulo, mas antes faremos uma breve descrição das outras seções.

Na seção 29, temos alguns problemas resolvidos e, na seção 30, o autor mostra algumas aplicações de equação utilizando área do retângulo, área do trapézio e volume de um bloco retangular.

Agora vamos analisar a parte que nos interessa.

Na seção 24, o autor propõe um problema para ser resolvido por tentativas, define sentença matemática, igualdade e suas propriedades, primeiro membro, segundo membro e apresenta os princípios de equivalência. Ao apresentar esses princípios, utiliza uma linguagem muito formal para um aluno do 7º ano ao concluir que $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ e $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0$. Além disso, nos exercícios, apresenta algumas equações sem falar que são equações, e o aluno deveria usar os princípios de equivalência para encontrar o valor do x. Mas o livro não possui um capítulo ou uma seção destinada ao ensino de expressões algébricas, possui apenas a atividade "explorando" no início da seção seguinte onde o aluno tem contato rapidamente com essa ideia.

Na seção 25, o autor propõe uma atividade chamada de “explorando” para introduzir o conteúdo a ser estudado, apresenta dois problemas para definir equação e incógnita, fala sobre primeiro membro e segundo membro novamente e mostra exemplos de sentenças que não são equações. Um dos problemas apresentados utiliza fração para definir equação e incógnita, o que não é aconselhável para um aluno que acaba de ter contato com esses conceitos, pois normalmente fração é um assunto difícil para eles. Os exercícios possuem um nível bom e são mais fáceis do que os problemas apresentados na teoria.

Na seção 26, o autor propõe outra atividade “explorando” na forma de gincana que está relacionada com o conteúdo a ser estudado, apresenta exemplos para definir conjunto universo, conjunto verdade, raiz da equação e ensina a verificar se um número dado é raiz de uma equação, mas sem contextualizar. O conceito de valor numérico é usado sem ser definido. O autor induz o aluno a pensar que o conjunto universo sempre será dado, o que não é verdade. Além disso, não destaca as definições de conjunto universo e conjunto solução como fez com todas as definições das seções anteriores. Os exercícios são bons e estão de acordo com a teoria, mas como até agora não falou das equações do primeiro grau com uma incógnita, seria interessante apresentar exercícios onde temos equações em outras formas como, por exemplo, uma equação que possui duas soluções ou nenhuma.

Na seção 27, o autor explica o que são equações equivalentes e utiliza as noções de equivalência para mostrar o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Um ponto positivo foi ter apresentado muitos exemplos para explicar esses princípios. Uma sugestão seria colocar esses exemplos em ordem crescente de dificuldade, pois o quinto exemplo é mais fácil do que o terceiro e quarto. E já que o autor não economiza nos exemplos, poderia também desmembrar o terceiro exemplo ($3x + 10 = 4x$) em duas partes: uma com o caso em que a incógnita aparece no segundo membro e outra para falar do coeficiente negativo do x.

Na seção 28, o autor recorre a um texto da história da Matemática para falar sobre as equações desde a primeira referência no papiro de Rhind até os dias de hoje, define a equação do primeiro grau com uma incógnita, mostra como devemos resolvê-las e, por último, fala sobre equações impossíveis e identidades. A definição de equação do primeiro grau com uma incógnita é dada por “toda equação que, reduzida à sua forma mais simples, assume a forma $ax = b$, em que x representa a incógnita, e a e b são números racionais, com $a \neq 0$”, mas na seção anterior, o aluno encontra exemplos onde o autor fala que a forma mais simples de uma equação é sempre $x = k$, onde x é a incógnita e k é um número racional. Essa definição dada pelo autor entra em conflito com os dois exemplos da página 143, pois os casos $0x = 4$ e $0x = 0$ foram classificados como "equações impossíveis" e "equações identidades", mas segundo a sua definição não deveriam ser equações. Um ponto positivo foi deixar claro para o aluno que ele precisará usar os princípios de equivalência de modo a isolar no primeiro membro os termos que apresentam a incógnita e no segundo membro os que não apresentam. Outro ponto positivo foi apresentar exemplos simples englobando diversas situações e explicando detalhadamente o passo a passo em cada um deles.

Portanto, esse livro apresenta algumas falhas que podem atrapalhar o aprendizado do aluno e o planejamento do professor que o utiliza como base para planejar sua aula. A ordem dos conteúdos é apresentada de forma coerente, porém faltou apresentar alguns conceitos. A linguagem utilizada, em alguns momentos, é muito formal, mas a obra é bem agradável visualmente. O livro está adequado aos PCN's e também mostra diversos exemplos simples e bem detalhados para estudar as técnicas de resolução de equação, o que é bom para o aluno. Os exercícios propostos nem sempre estavam de acordo com o nível e a ordem da teoria.

4.3 Análise do caderno pedagógico (2013) da prefeitura da cidade do Rio de Janeiro

Os cadernos pedagógicos são divididos por bimestre e o assunto "equações" é tratado no terceiro bimestre. Vamos analisar as quatro primeiras seções que são:

1- Pensamento algébrico
2- Expressões algébricas
3- Valor numérico
4- Equações do 1º grau

Na seção 1, os autores propõem diversos exercícios envolvendo sequências e expressões algébricas. Nessa seção, foi apresentada a definição de expressões algébricas como sendo "expressões que contem números e letras".

Na seção 2, os autores definem novamente expressões algébricas e completam essa definição falando que as letras que aparecem são chamadas de variáveis, mas não mostram para o aluno qual é a ideia de variável. Com isso, o aluno poderá entender que todas as letras que aparecerem serão chamadas de variáveis e confundir com as que são incógnitas.

Na seção 3, os autores definem valor numérico e ensinam o passo a passo para encontrá-lo, além de alertar o aluno que ele deve utilizar parênteses quando for substituir a letra por um número negativo para evitar que erre o sinal.

Na seção 4, temos uma situação-problema para apresentar o conceito de incógnita, equação do primeiro grau com uma incógnita, primeiro membro, segundo membro e princípio aditivo.

Nessa seção, os autores falam que a letra que representa o número desconhecido no problema é a incógnita da equação e definem equação como "uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas expressões algébricas", mas não mostram exemplos de equações. Até o momento não foi apresentada a definição de equação do primeiro grau com uma incógnita, mas apresentam exercícios e exemplos desse tipo de equação e as resolvem. O princípio aditivo é apresentado como se o aluno já o conhecesse e, depois disso, apresenta a balança de dois pratos para mostrar como resolver algumas equações. O princípio multiplicativo é usado sem ter sido comentado.

Após alguns exercícios, os autores comentam que toda equação do primeiro grau com uma incógnita pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, mas não dizem nada sobre quem são a, b e x. Falam também da solução ou raiz da equação como sendo o valor da incógnita que queremos determinar. Logo em seguida, falam sobre o princípio multiplicativo sem utilizar o seu nome e mostram alguns exercícios resolvidos para exemplificar esses últimos conceitos. Nesses exercícios, os autores mostram o conjunto solução, mas em nenhum momento falaram sobre ele e nem sobre conjunto universo. No final, mostram a resolução de uma única equação com parênteses e propõem alguns exercícios. Nesse exemplo, deveriam mostrar o que acontece quando o número que está multiplicando os parênteses é negativo ou quando só aparece o sinal na sua frente.

Portanto, a ordem dos conteúdos apresentados não é boa, pois em alguns momentos utilizam idéias que foram apresentadas nas páginas seguintes. A linguagem utilizada é razoável, mas o visual é um pouco poluído. Podemos ver, no início da apostila, que os autores se preocuparam em adequá-la aos PCN's ao propor a seção "pensamento algébrico". O nível dos exercícios está dentro da realidade dos alunos da rede pública. Na verdade eles comentam que os exercícios da apostila são muito fáceis.

Esse caderno pedagógico possui uma deficiência muito grande em relação aos conteúdos e suas definições. É incompleto. Mesmo que tenha sido elaborado para ser utilizado como material de apoio, deveria apresentar melhor as definições, ou então deixar apenas os exercícios e alguns lembretes relacionados ao conteúdo. Acontece que as turmas de uma escola da prefeitura considerada boa, como a escola em que leciono, possuem em média 44 alunos ou até mais, pois a procura por essas escolas é muito grande. Com isso, o tempo de aula fica curto, pois perdemos muito tempo até conseguir acalmar a turma, fazer chamada, e iniciar a aula. Assim, fica praticamente impossível trabalhar com o livro didático em paralelo com o caderno pedagógico. Muitos professores acabam optando por usar somente o caderno pedagógico, pois eles servem de base para dois mecanismos de avaliação dos alunos que, para a prefeitura são importantes e possuem caráter macro: as provas bimestrais, chamadas de Prova da SME e a Prova Rio. A primeira já está incorporada como avaliação dos alunos, constando, inclusive, o seu resultado no boletim escolar. A segunda serve como um dos parâmetros para compor o IDERIO, índice de desenvolvimento da educação do Rio de Janeiro, instrumento criado para classificar as escolas do município do Rio de Janeiro. Se a intenção é que sirva como material de apoio, não deveria ser tão influente assim na vida escolar do aluno.

Além disso, existem erros frequentes na maioria dos cadernos. Erros estes que muitas vezes atrapalham a compreensão do aluno, como por exemplo, no caderno do primeiro bimestre de 2014 do 8º ano está escrito "Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Z}$". O erro no material disponível online já foi consertado, mas a versão que o aluno recebeu, ainda contém o erro. A cada ano, temos um caderno novo elaborado e revisado por uma equipe de professores. O fato é que a qualidade do material vem melhorando a cada ano, mas mesmo assim os erros persistem. Outro problema, que já foi encontrado nos materiais de outras séries e de outros anos, é trazer exercícios onde o aluno deve completar algumas partes da resolução. Isso acaba forçando o aluno a resolver determinado problema daquela forma, mesmo que não seja a da sua preferência.

Finalizando, as deficiências são contornáveis, mas como o material é elaborado com dinheiro público, deveria ser melhor. Ou então deixar de existir, uma vez que já existe o livro didático, financiado com o dinheiro do MEC através do PNLD.

5 Proposta de aula

O estudo de equações do primeiro grau é apresentado ao aluno no 7º ano do ensino fundamental, embora o assunto continue aparecendo nos anos posteriores. Durante toda a minha docência, trabalhei com esta série na rede pública do Rio de Janeiro e pude perceber que uma das grandes dificuldades que os alunos possuem em relação a determinados tópicos da Matemática, está relacionada à não compreensão de conceitos básicos e operações que envolvem frações, números decimais e porcentagem. Pensando nisso e com base em minha experiência prática em sala, apresento abaixo uma proposta de aula onde destacamos o estudo das equações em sua forma mais simples, utilizando algumas situações do cotidiano do aluno para tentar convencê-lo da importância desse tópico, facilitando a compreensão de conceitos e do mecanismo de resolução das equações. Em uma aula anterior a essa, apresento aos alunos os conceitos: expressão algébrica, valor numérico, igualdade, sentenças e variável.

5.1 Equações

Muitas vezes, para resolver um problema matemático, vamos nos deparar com uma sentença que deverá ser escrita na linguagem matemática. Essa é a parte mais importante e talvez a mais difícil da Álgebra. Em um primeiro momento, utilizaremos uma situação comum na vida dos alunos, que mesmo envolvendo números decimais (dinheiro), facilite a compreensão dos conceitos iniciais de uma equação. Em um segundo momento, como a grande dificuldade para a maioria é na hora de resolver essa equação, veremos outros problemas mais simples utilizando a balança de dois pratos para melhor compreensão das técnicas de resolução de uma equação.

Ao introduzir problemas envolvendo dinheiro para os alunos da rede pública, com base na minha experiência, pude perceber que embora tenham dificuldade com números decimais, eles conseguem facilmente resolvê-los mentalmente por já estarem familiarizados com situações de compra e venda.

Observe a seguinte situação:

Comprei dois salgados e um suco por R$ 5,50.
Sabendo que o suco custou R$ 1,50, qual o valor de cada salgado?

Vamos escrevê-la utilizando a linguagem matemática. Como não sabemos o preço de um salgado, podemos representá-lo pela letra x. Assim, temos a seguinte situação:

O preço de dois salgados: $2x$
O preço de um suco: $1{,}50$
Valor total da compra: $5{,}50$

O preço pago pelos dois salgados mais o preço pago por um suco, tem que ser igual ao valor total pago, ou seja, $2x + 1{,}50 = 5{,}50$.

Pude perceber em minhas aulas que a transcrição da situação para a linguagem matemática não foi imediata para a maioria dos meus alunos. Dessa forma, para facilitar a ideia de montar a equação, faço uma analogia ao modo como eles resolvem exercícios do tipo "arme e efetue" muito utilizado nas séries iniciais. Assim, podemos armar essa conta da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 2x \\ +1{,}50 \\ \hline 5{,}50 \end{array}$$

De uma maneira bem simples, podemos definir para o aluno que toda sentença matemática que possui uma igualdade e um termo desconhecido (preço de um salgado: x) é chamada de *equação*, ou, segundo E. Bianchini, "equação é toda sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números".

Toda equação é composta por uma expressão colocada à esquerda do sinal de igual, que chamamos de *primeiro membro* e por outra colocada à direita do sinal de igual, que chamamos de *segundo membro*. Dizemos que essas expressões representam o mesmo valor. Cada parcela, do primeiro e do segundo membro, é um *termo* da equação. No nosso exemplo, a expressão "$2x + 1{,}50$" é o primeiro membro da equação, e a expressão "$5{,}50$" é o segundo membro da equação. Os termos dessa equação são "$2x$", "$1{,}50$" e "$5{,}50$".

Os valores desconhecidos (letras representando números) são chamados de *incógnitas*. No nosso problema inicial, a incógnita é a letra x que está representando o preço de um salgado. É o seu valor que deve ser encontrado para resolver o problema.

Por estarmos tratando uma situação que envolve dinheiro, nesse momento, a maioria dos alunos já pensou em alguma resposta. Agora, eles devem falar quanto acham que é o preço de um salgado. Alguns irão falar o valor correto e outros não. Esse é um bom momento para falar de raiz de uma equação, conjunto universo e conjunto verdade.

Vamos supor que os valores dados pelos alunos para o preço de um salgado foram R$ 4,00, R$ 1,50 e R$ 2,00. Vamos então verificar qual o valor correto.

Se um salgado custasse R$ 4,00, dois salgados custariam R$ 8,00. Esse valor já ultrapassou o valor total da conta. Logo, esse não é o valor correto.

Se um salgado custasse R$ 1,50, dois salgados custariam R$ 3,00. Somando o valor de um suco, teríamos uma conta no total de R$ 4,50. Esse valor também não está correto.

Se um salgado custasse R$ 2,00, dois salgados custariam R$ 4,00. Somando o valor de um suco, teríamos uma conta no total de R$ 5,50, que é o valor correto.

Os meus alunos costumam dizer que "a resposta desse problema é R$ 2,00", então, comento que "a resposta desse problema" é chamada de *raiz da equação* $2x + 1{,}50 = 5{,}50$.

Em outras palavras, "um número é denominado raiz de uma equação quando, ao substituir a incógnita por ele, obtemos uma sentença verdadeira". (E. Bianchini) Verificando, temos que $2 \times 2{,}00 + 1{,}50 = 4{,}00 + 1{,}50 = 5{,}50$. A raiz da equação é também chamada por alguns autores de "*solução da equação*".

Embora seja importante o aluno saber as duas denominações, pois pode aparecer em algum outro material que ele esteja utilizando, isso, muitas vezes atrapalha o raciocínio porque ele acaba se confundindo e achando que são duas definições diferentes. Por isso, durante as minhas aulas, comento que existe outra denominação, mas sempre utilizo somente uma delas.

Em toda equação, precisamos saber quais valores podemos colocar no lugar da letra e quais desses tornam a equação verdadeira. No exemplo inicial, por ser um problema que envolve uma situação comum na vida dos alunos, eles não costumam dizer valores absurdos como, por exemplo, $2{,}511$ ou $\frac{1}{3}$. Podemos pedir aos alunos que digam alguns valores que não poderiam estar no conjunto universo e esperamos ouvir, por exemplo, valores negativos ou decimais com mais de duas casas.

Analisando os valores dados pelos alunos como resposta do problema (decimais com até duas casas), podemos dizer que todos esses valores pertencem a um conjunto chamado de "*conjunto universo*", que é um conjunto de valores possíveis para a solução do problema, e que somente aquele valor que tornou a sentença verdadeira, ou seja, a solução da equação, pertence a um conjunto chamado "*conjunto verdade*" ou "*conjunto solução*".

De uma forma mais simples, temos que "o conjunto universo U é aquele formado por todos os valores que a incógnita pode assumir" e "o conjunto verdade V é o subconjunto de valores do conjunto universo que tornam a sentença verdadeira".

Podemos considerar dois tipos de exercícios: os que são puramente algébricos e os que são contextualizados. Cabe ao professor falar nesse momento que o conjunto universo nem sempre será dado pelo problema. No primeiro caso, se não houver, eles devem considerar o maior conjunto numérico visto até agora que é o conjunto dos números racionais e, no segundo caso, eles terão que descobrir que conjunto é esse com base no contexto do problema.

Até este momento, nas minhas aulas, a ideia de equação, membros, termos, incógnitas, solução de uma equação, conjunto universo e conjunto verdade são apresentados ao aluno de uma maneira informal, sem estar tudo escrito no quadro para o aluno copiar em seu caderno, e sem muitos rodeios uma vez que o foco da aula é a manipulação das equações. Os alunos não apresentam dificuldade até esse momento.

Podemos analisar alguns exemplos para fixar os conceitos já vistos até agora e fazer o link com a próxima etapa que é equação do primeiro grau com uma incógnita. Veja alguns exemplos que podem ser usados:

Exemplo 1: $2x + 7 = 5$, $U = \mathbb{Z}$

É uma equação, pois apresenta uma igualdade e um termo desconhecido;

O primeiro membro é $2x + 7$, e o segundo é 5;

Os termos são $2x$, 7 e 5 ;

A raiz é -1, pois $2 \cdot (-1) + 7 = -2 + 7 = 5$;

$V = \{-1\}$.

Exemplo 2: $5 + 7 = 12$

Não é uma equação, pois não apresenta termos desconhecidos.

Exemplo 3: $3x + 2 = x + 4$, $U = \mathbb{Q}$

É uma equação, pois apresenta uma igualdade e um termo desconhecido;

O primeiro membro é $3x + 2$, e o segundo é $x + 4$;

Os termos são $3x$, 2, x e 4;

A raiz é 1, pois $3x + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 = 5$ e $x + 4 = 1 + 4 = 5$

$V = \{1\}$.

Exemplo 4: $3x - 1 < 8$

Não é uma equação, pois não apresenta uma igualdade.

Exemplo 5: $x^2 = 9$, $U = \mathbb{N}$

É uma equação, pois apresenta uma igualdade e um termo desconhecido;

O primeiro membro é x^2, e o segundo é 9;

Os termos são x^2 e 9;

Existem duas soluções, pelo menos: -3 e 3, pois $(-3)^2 = 9$ e $3^2 = 9$ (mais tarde será visto que não há mais);

$V = \{\ 3\}$, pois $-3 \notin \mathbb{N}$.

Exemplo 6: $x^2 + 1 = 0$, $U = \mathbb{N}$

É uma equação, pois apresenta uma igualdade e um termo desconhecido;

O primeiro membro *é* $x^2 + 1$, e o segundo é *0*;

Os termos são x^2, *1* e *0*;

Não possui raiz, pois um número natural elevado ao quadrado sempre é maior ou igual a zero e, ao somar 1, nunca teremos o resultado pedido;

$V = \emptyset$.

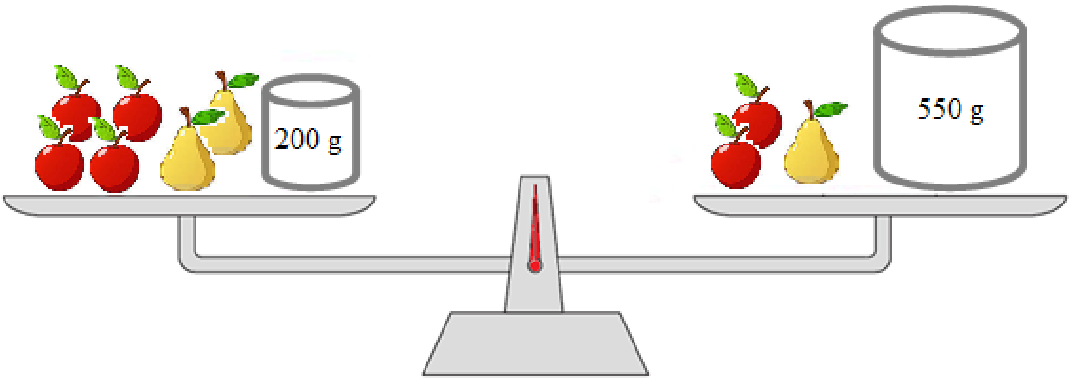
Nos exemplos anteriores, podemos ver que as equações $2x + 7 = 5$ e $3x + 2 = x + 4$, apresentam uma só incógnita (a letra x) com expoente 1, elas são chamadas de “equação do primeiro grau com uma incógnita”. São elas que nós vamos estudar.

5.2 Equação do primeiro grau com uma incógnita

Para estudar essas equações, vamos recorrer a uma técnica muito utilizada por alguns professores e sempre utilizada por mim, que é a ideia de representar a equação através de uma balança de dois pratos. Os alunos aceitam muito bem essa ideia, mas nós professores devemos ter cuidado com os exemplos e escolher adequadamente o que vamos utilizar para não confundir os alunos. Não podemos esquecer que a equação é um assunto novo para o aluno e que envolve técnicas que devem ser muito bem exploradas para melhor fixação por parte deles. Então, proponho essa aula pensando nas dúvidas que os alunos apresentaram nesses três anos ensinando equações: primeiro vamos ver um exemplo concreto para que o aluno tenha contato pela primeira vez com o princípio aditivo e multiplicativo; depois, analisaremos sete tipos de exemplos algébricos para fixar esses princípios.

Este exemplo é apenas para introduzir a ideia inicial da resolução de uma equação.

Observe a figura:



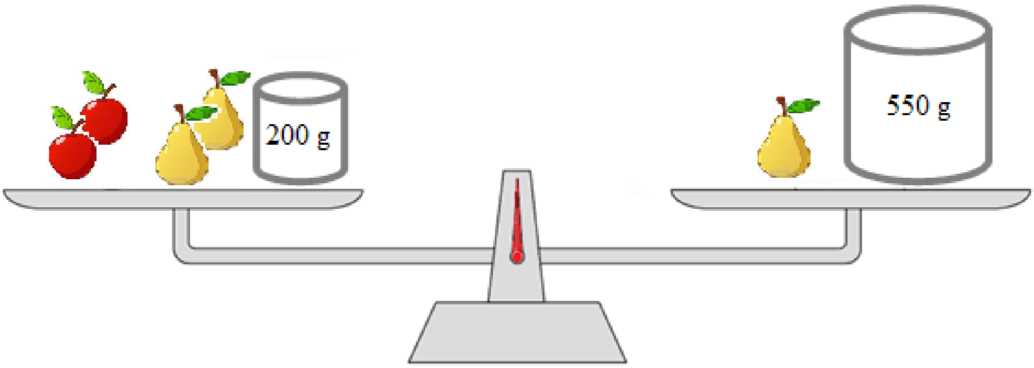
"Sabendo que essa balança está em equilíbrio, frutas iguais têm pesos iguais e que cada pêra pesa 150 g, calcule quantos gramas tem uma maçã".

Analisando a balança, vemos que de um lado temos quatro maçãs, duas pêras e um peso de 200 gramas. Do outro lado, temos duas maçãs, uma pêra e um peso de 550 gramas. Como não sabemos o peso da maçã, ele será o nosso termo desconhecido e o chamaremos x. Então:

$$4x + 300 + 200 = 2x + 150 + 550$$

A cada etapa, vamos escrever uma equação para representar a situação em que está a balança.

Como queremos saber o peso de uma maçã, vamos tentar retirar dos dois lados tudo que podemos até deixar somente maçãs em um dos lados da balança e no outro lado nenhuma maçã. Então, primeiro retiramos duas maçãs de cada lado.

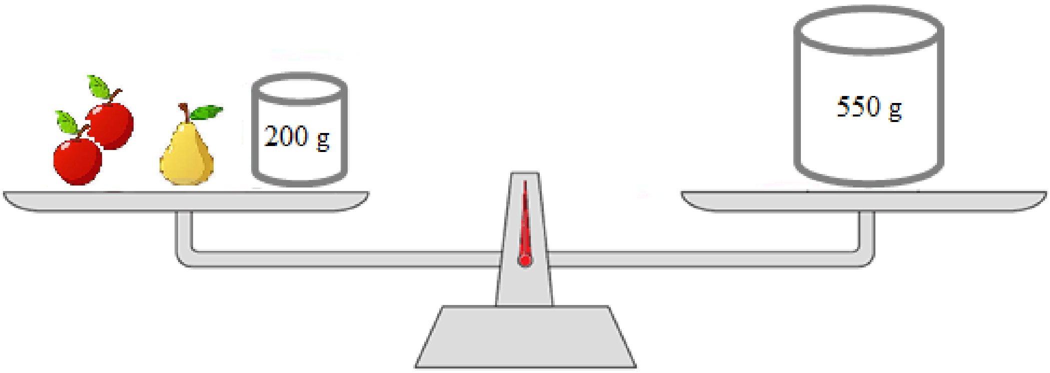


$$\underbrace{4x}_{} + 300 + 200 \underbrace{-2x}_{} = \underbrace{2x}_{} + 150 + 550 \underbrace{-2x}_{}$$

$$2x + 300 + 200 = 150 + 550$$

Os alunos perguntam se podem retirar as pêras e colocar um bloquinho representando o peso delas em cada lado da balança já que este valor é dado pelo problema. Respondo que essa mudança pode ser feita a qualquer momento, a critério deles, sem que altere a solução do problema.

Continuando, podemos retirar uma pêra de cada lado.

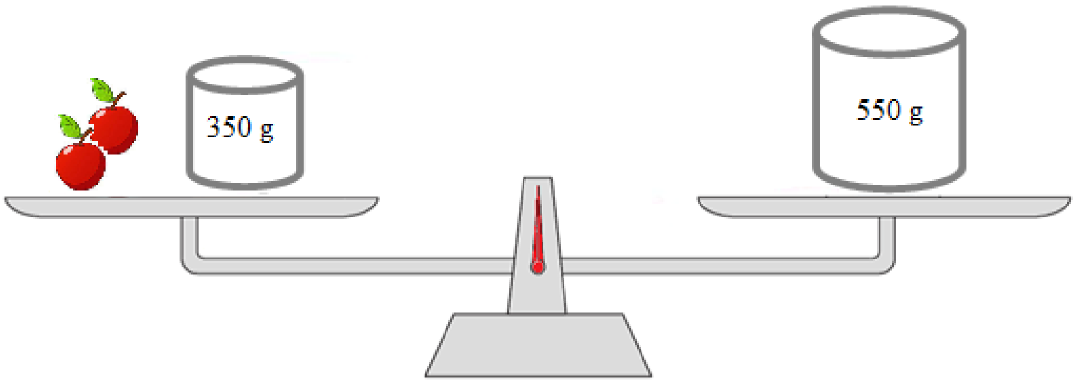


$$2x \underbrace{+300} + 200 \underbrace{-150} = \underbrace{150} + 550 \underbrace{-150}$$

$$2x + 150 + 200 = 550$$

Com isso, sobrarão duas maçãs, uma pêra e 200 gramas de um lado e, do outro lado, 550 gramas.

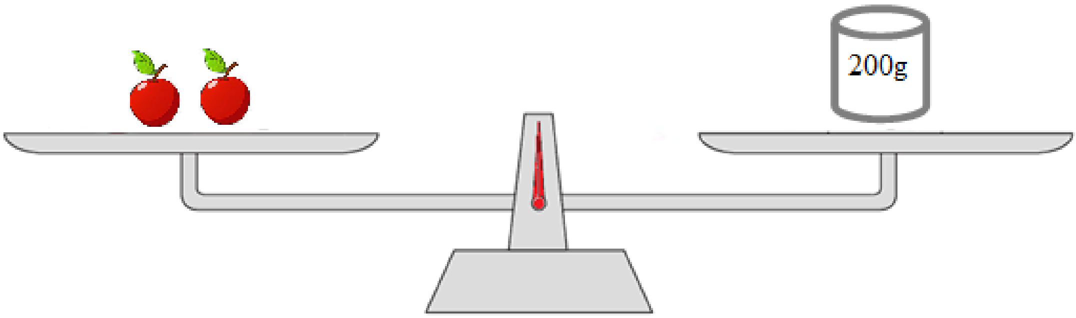
Mas como sabemos que o peso de uma pêra é 150 gramas, temos duas maçãs e 350 gramas de um lado e 550 gramas do outro.



$$2x \underbrace{+150} \underbrace{+200} = 550$$

$$2x + 350 = 550$$

Podemos então tirar 350 gramas de cada lado.



$$2x\underbrace{+350}\underbrace{-350} = \underbrace{550}\underbrace{-350}$$

$$2x = 200$$

Assim, ficaríamos com duas maçãs de um lado e 200 gramas do outro lado. Com isso, o aluno saberá responder que o peso de uma maçã é 100 gramas, pois ele está vendo uma balança em equilíbrio onde um lado possui duas maçãs e o outro lado possui 200 gramas.

Uma pergunta importante que deve ser feita ao aluno é se essas retiradas alteram o peso das maçãs. Em geral, meus alunos respondem que não altera. Dizemos então que a solução do problema, em cada etapa acima, continua a mesma. Assim, eles compreendem o conceito de *equações equivalentes* sem que seja necessário mencionar esse nome. Não podemos esquecer que quanto mais "enchermos a cabeça" do aluno com esses nomes, mais preocupado com a "decoreba" ele vai ficar. O importante é fazê-lo entender a ideia dos conceitos sem ter que se prender a nomenclaturas.

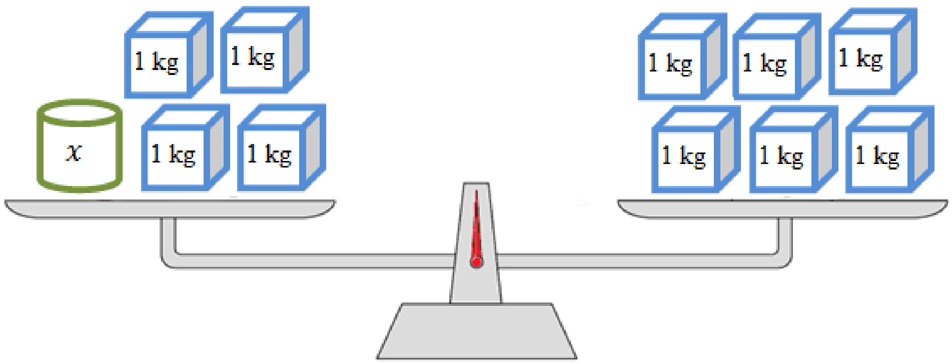
Além disso, com esse problema, o aluno intuitivamente já usou os dois princípios básicos na resolução de uma equação: o *princípio aditivo* e o *princípio multiplicativo*, ou seja, eles podem somar, subtrair, multiplicar ou dividir os dois lados da equação por um mesmo número sem que isso altere o resultado do problema.

Até o momento, só tive contato com alunos da rede pública do Rio de Janeiro e pude perceber que eles possuem muita dificuldade para entender determinados conteúdos, seja por falta de base ou por falta de interesse, ou até mesmo pelas péssimas condições em que eles têm aula. Por isso, ao ensinar as técnicas de resolução de equação, é de grande valia separá-las em diversos casos, aumentando gradativamente a dificuldade, como veremos abaixo.

Vamos utilizar a mesma ideia de retirar ou colocar “coisas iguais” dos dois lados e tentar deixar o termo desconhecido isolado em um dos lados.

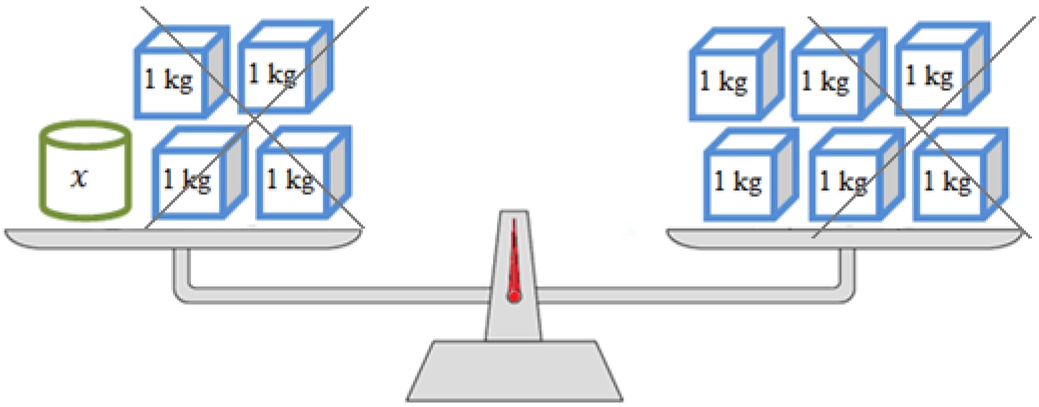
1º caso: Quando temos algum valor somado ao $x \Longrightarrow x + 4 = 6$

Representando essa equação na balança, temos:



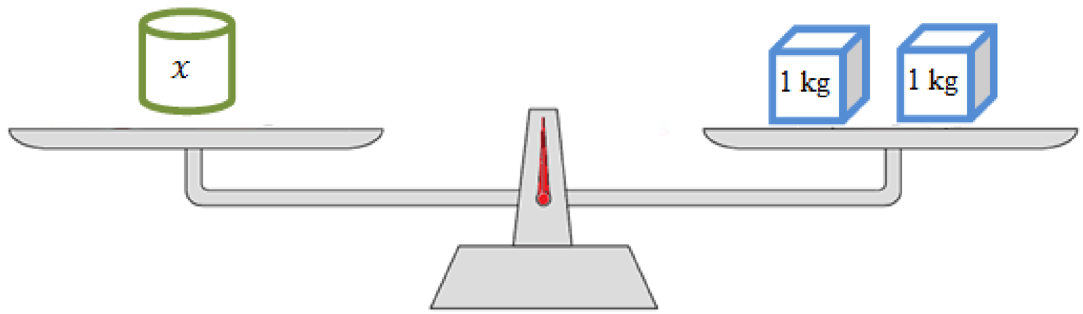
$$x + 4 = 6$$

Retirando quatro bloquinhos de 1 kg de cada lado, mantemos o equilíbrio da balança e temos a seguinte situação:



$$x + 4 - 4 = 6 - 4$$

Então, como a balança continua em equilíbrio, temos que $x = 2$.



$x = 2$

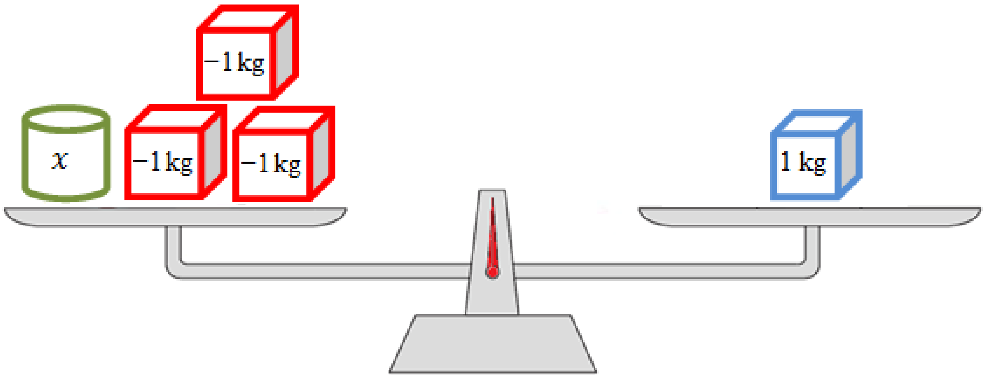
Logo, $x = 2$.

Uma dúvida muito comum dos alunos é nos exemplos onde a incógnita aparece no segundo membro, pois muitos livros e até mesmo professores têm esse costume. É muito importante, nesse momento inicial, colocarmos um exemplo onde a incógnita aparece do outro lado da balança, para os alunos não pensarem que ela sempre aparecerá no primeiro membro. Em minhas aulas, coloco o mesmo exemplo acima, mas com a ordem trocada. Falo aos meus alunos que temos a mesma situação, bastando apenas inverter a balança, e eles percebem isso ao representar o outro exemplo na balança.

Conclusão: podemos subtrair certa quantidade aos dois membros de uma equação que ela continua sendo verdadeira.

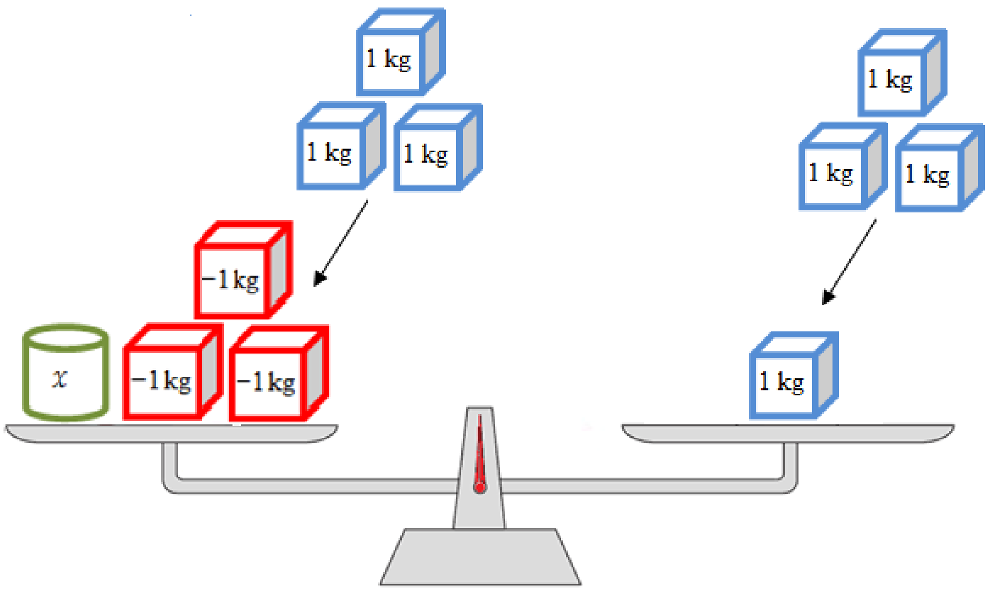
2º caso: Quando temos algum valor subtraindo do $x \Rightarrow\ x - 3 = 1$

Representando essa equação na balança, temos:



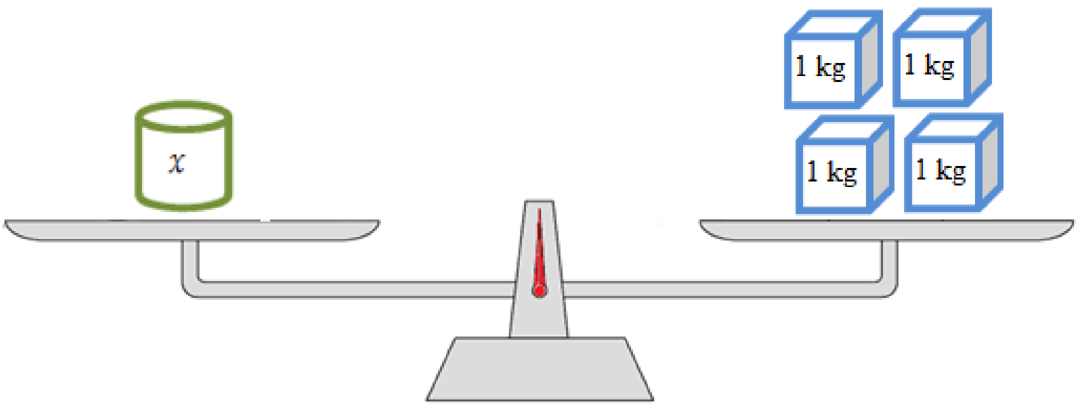
$$x - 3 = 1$$

Como existe uma dívida do lado esquerdo da balança, devemos pagá-la. Mas para manter o equilíbrio, devemos fazer o mesmo do lado direito da balança. Então, adicionando 3 kg dos dois lados da balança, temos:



$$x - 3 + 3 = 1 + 3$$

Pagando a dívida de 3 kg que existia do lado esquerdo da balança, ficamos com a seguinte situação:



$x = 4$

Logo, $x = 4$.

Nesse caso, a representação do número -3 na balança não está correta, pois não existe peso negativo. Porém, digo aos meus alunos que quando um dos termos é negativo, podemos pensar que estamos devendo esse valor em um lado da balança. Se estamos devendo, devemos pagar essa dívida para ficar tudo certo. Os alunos aceitam muito bem essa ideia de dívida.

Conclusão: podemos somar certa quantidade aos dois membros de uma equação que ela continua sendo verdadeira.

Após resolver diversos exemplos, mostro aos alunos que eles podem resolver de uma maneira mais rápida, sem precisar ficar escrevendo mais/menos algum valor, e usar a conhecida frase "passar para o outro lado trocando o sinal", como segue abaixo:

$$x + 4 = 6 \Rightarrow x + 4 - 4 = 6 - 4 \Rightarrow x = 6 - 4$$

é o mesmo que

$$x + 4 = 6 \Rightarrow x = 6 - 4$$

Pude perceber que usar essa ideia pode ser bom ou ruim. Quando o aluno compreendeu bem os dois primeiros casos, ele consegue resolver as equações passando os valores para o outro lado trocando o sinal sem problemas. Porém, quando ele não consegue compreender, acaba se confundindo e troca os termos de lado sem trocar o sinal ou passa para o outro lado esquecendo-se de tirar do outro, conforme segue:

ERRADO!

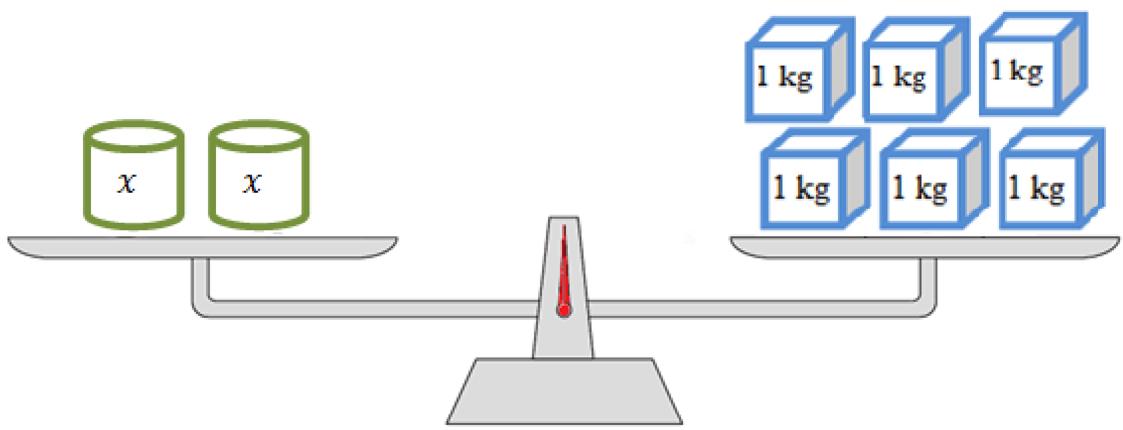
$$x + 4 = 6 \Rightarrow x = 6 + 4$$

$$x + 4 = 6 \Rightarrow x + 4 = 6 - 4$$

O grande problema é que mesmo ao perguntar a cada cinco minutos se os alunos estão entendendo a matéria e, muitas vezes, explicar novamente mesmo sem pedirem, por ter vergonha, eles acabam dizendo que sim quando na verdade não estão entendendo. Assim, a ideia de "trocar de lado" acaba prejudicando esses alunos.

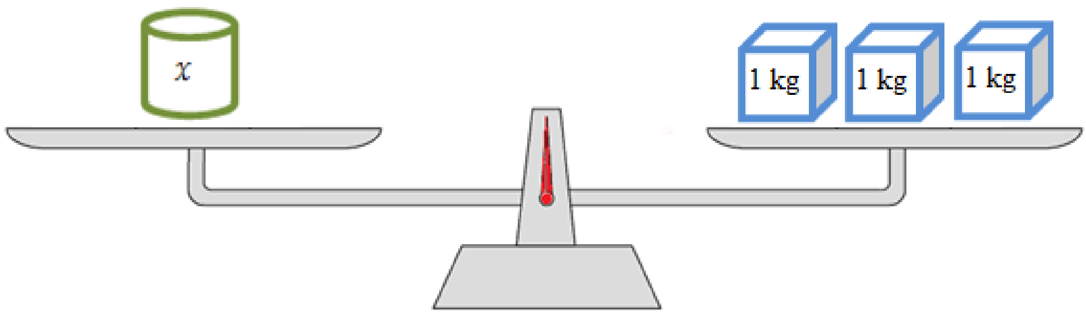
3º caso: Quando temos algum valor multiplicando o $x \Rightarrow 2x = 6$

Representando essa equação na balança, temos:



$2x = 6$

Como temos dois bloquinhos do lado esquerdo da balança e só queremos saber o valor de um deles, vamos dividir os dois lados da balança por dois, pois assim teremos o valor de um único bloquinho desconhecido.



$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

Logo, $x = 3$.

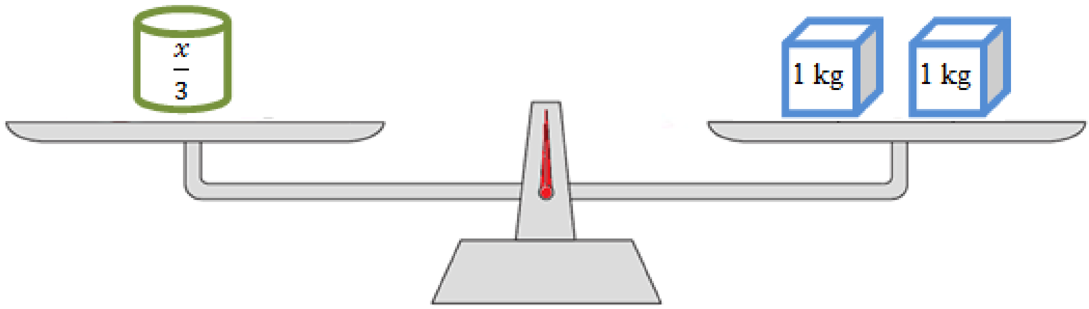
Conclusão: podemos dividir por certa quantidade os dois membros de uma equação que ela continua sendo verdadeira.

Nesse caso, é importante iniciar com exemplos onde o segundo membro é um múltiplo do coeficiente do x para os alunos fixarem a ideia de dividir os dois lados por esse coeficiente, mas não devemos deixar de colocar exemplos onde teremos uma fração como resposta para não dar a ideia ao aluno de que sempre será possível efetuar essa divisão.

De modo a evitar nomenclaturas desnecessárias para os alunos, ao apresentar esse caso, utilizo exemplos onde encontramos as chamadas *"equações impossíveis e identidades"*. Os alunos aceitam melhor uma ideia nova embutida em um exemplo quando não sabem o seu grau de importância. Outro exemplo apresentado é o caso em que o coeficiente do x é negativo. Uma aluna perguntou se poderia utilizar a ideia de "multiplicar por -1", dada por sua explicadora, quando aparecesse esse tipo de equação. A turma ficou curiosa para saber do que se tratava, mas como já havia explicado que eles deveriam utilizar a conhecida "regra dos sinais", chegaram a conclusão que era desnecessário fazer a tal multiplicação.

4º caso: Quando temos algum valor dividindo o $x \Rightarrow \frac{x}{3} = 2$

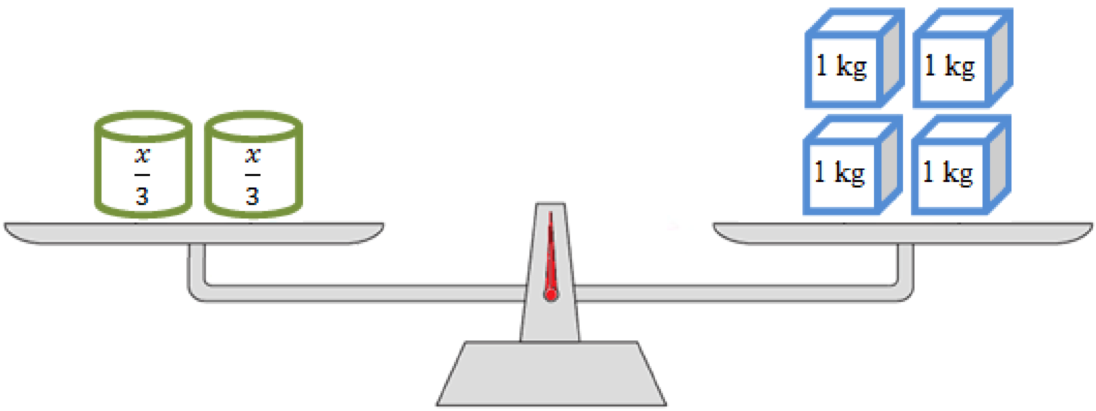
Representando essa equação na balança, temos:



$$\frac{x}{3} = 2$$

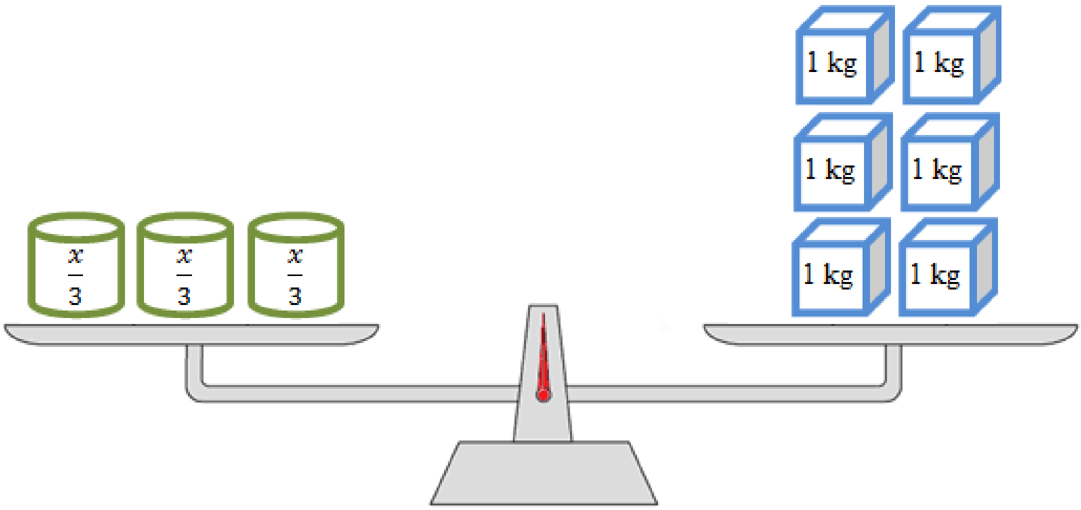
Como temos a terça parte do valor desconhecido do lado esquerdo, e ele pesa 2 kg, para completar um bloquinho inteiro de peso x, devemos ter três pedaços iguais a esse.

Então, no lado esquerdo colocamos mais um bloquinho $\frac{x}{3}$, no lado direito colocamos mais 2 kg.



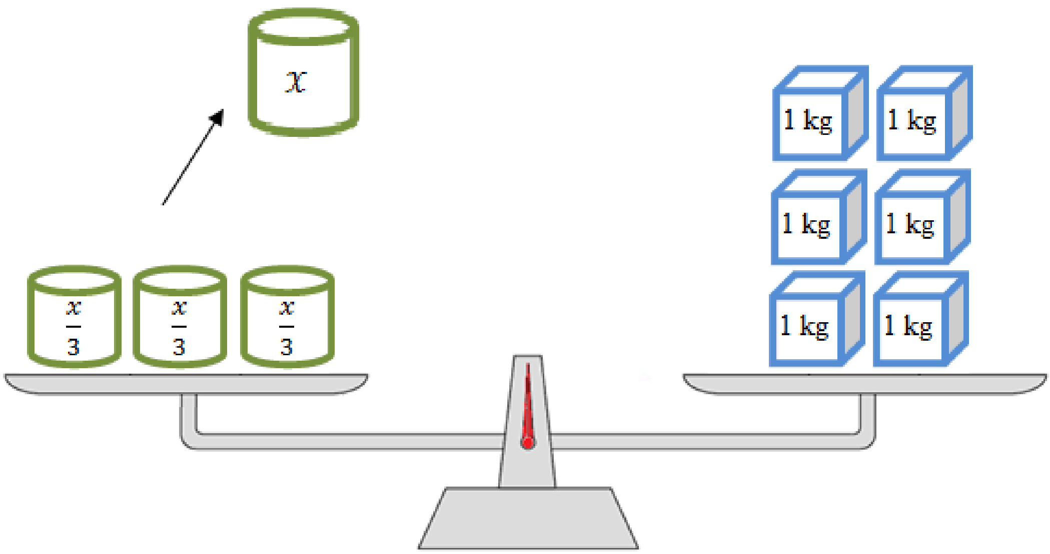
$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 2 + 2 \quad \text{ou} \quad 2 \cdot \frac{x}{3} = 2 \cdot 2 \quad \text{ou} \quad \frac{2x}{3} = 4$$

Fazendo o mesmo processo, temos:



$$\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}=2+2+2 \quad \text{ou} \quad 3\cdot\frac{x}{3}=3\cdot 2$$

Como $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}$ representa um bloquinho inteiro de peso x, temos que $x = 6$.



$$x = 6$$

Logo, $x = 6$.

Conclusão: podemos multiplicar por certa quantidade os dois membros de uma equação que ela continua sendo verdadeira.

No 3º e 4º caso, os alunos cometem os mesmos erros que no 1º e 2º caso. “Passam para o outro lado” de forma errada. Observe:

ERRADO!

$$2x = 6 \Rightarrow x = 6 - 2$$

$$2x = 6 \Rightarrow 2x = \frac{6}{2}$$

$$\frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 2 - 3$$

É muito importante que os alunos conheçam as operações inversas (adição e subtração; multiplicação e divisão) para poder compreender melhor esses quatro casos apresentados acima. Porém, a maioria dos alunos da rede pública chega ao 6º ano sem nunca terem ouvido falar disso.

Ao final de cada caso, é importante propor ao aluno uma bateria de exercícios utilizando a ideia da balança, sem falar a expressão “passar para o outro lado”, para ele fixar bem o princípio aditivo e o princípio multiplicativo, pois segundo os PCN’s, é mais proveitoso propor situações que levem o aluno a construir noções algébricas através da observação de regularidades do que enfatizar a manipulação de uma forma mecânica.

Nos próximos casos, não utilizo mais a balança durante as aulas, mas não proíbo o aluno de usá-la em seu caderno. Além disso, faço um passo a passo para eles seguirem e resolverem qualquer equação.

No primeiro membro, juntar os termos que possuem letras e depois os termos que possuem números, se possível;

Fazer o mesmo no segundo membro;

Escolher um dos membros para ser o lugar das letras e outro para ser o lugar dos números;

Fazer as trocas necessárias utilizando os dois primeiros casos;

Juntar os termos semelhantes;

Resolver utilizando um dos casos anteriores.

5º caso: Quando misturamos os casos anteriores ⇒ $3x + 1 = 4$

$$3x = 4 - 1$$

$$3x = 3$$

$$x = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

6º caso: Quando o x aparece nos dois lados ⇒ $4x - 2 = 2x + 8$

$$4x - 2x = +8 + 2$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

7º caso: Quando aparecem parênteses $\Rightarrow 2 \cdot (x-3)+4=3-(2-x)$

$$2x-6+4=3-2+x$$

$$2x-2=1+x$$

$$2x-x=1+2$$

$$x=3$$

Quando os alunos se deparam com equações que envolvem parênteses, eles costumam errar ao efetuar a propriedade distributiva da multiplicação. Os erros mais comuns são: esquecer de usar a regra dos sinais e não distribuir para todos os membros. Observe:

ERRADO!

$$2 \cdot (x-3)+4=3-(2-x)$$

$$2x-3+4=3-2-x$$

Além de todos os erros cometidos pelos alunos e citados anteriormente, eles também erram contas, pois as operações com os números inteiros e racionais foram vistas recentemente e eles ainda estão imaturos para realizar esses cálculos. Assim como os PCN's recomendam, acredito que o ensino de técnicas de resolução de equações poderia ser deixado para o 8º ano do Ensino fundamental, caso contrário, os conteúdos do 6º e 7º ano ficariam mais extensos e os alunos teriam menos tempo para amadurecê-los, dificultando o aprendizado. Entretanto, é possível que os alunos traduzam algumas situações-problema no 7º ano utilizando equações, mas desenvolvendo estratégias próprias para resolvê-las. Uma observação importante é que o princípio aditivo e o multiplicativo ajudam os alunos a evitar erros cometidos quando os cálculos são mecânicos ("passar para o outro lado"). Acredito que neste nível (Ensino Fundamental) é crucial enfatizar o "concreto" se ele permite/ajuda a evitar erros.

Em uma aula posterior a essa, reforçamos os conceitos já vistos, enfatizamos a técnica de resolução para eliminar qualquer tipo de resolução mecânica e trabalhamos com problemas que envolvem equações.

6 Conclusão

Vários aspectos foram de vital importância para chegarmos à conclusão final de nosso trabalho, tais como a qualidade da explicação e dos exercícios utilizados nos livros analisados, se a estrutura deles era visualmente poluída ou confusa, se havia erros conceituais, se obedeciam aos PCN's, dentre outros. Além disso, foi muito importante observar a contextualização dos problemas, cada vez mais exigida nos dias de hoje, com o Enem, e ver se tal contextualização realmente se aplicava ao assunto escolhido ou se o mesmo exigia questões mais diretas ou não.

Os três materiais analisados possuem deficiências, mas o livro [6] apresentou um erro muito comum na definição de equação do primeiro grau. Este livro foi o que apresentou o melhor layout e a apostila [4], o pior. Ela é a mais pobre e a mais confusa das obras ao explicar a teoria. Os três foram razoavelmente contextualizados e estavam adequados aos PCN's, mas o livro [6] falhou ao apresentar um exemplo com fração para iniciar a ideia de equação. O livro [6] foi o que apresentou mais pontos positivos, enquanto a apostila [4] não apresentou nenhum. Apesar de ter muitos pontos positivos, o livro [6] deixou de apresentar algumas definições importantes e necessárias. Portanto, recomendo o livro [1] para ser utilizado na rede pública, enquanto o [6] não é recomendado por apresentar um erro. A apostila [4] deveria ser elaborada apenas com exercícios e pequenos lembretes, pois como está hoje, não é recomendada para ser usada como material de apoio na rede pública do Rio de Janeiro.

Temos de ressaltar que a maior parte do material didático analisado possuía seus defeitos e virtudes. De fato, tivemos a oportunidade de analisar vários livros que são recomendados tanto em escolas particulares quanto públicas e daí vale observar que existem livros com versões desenvolvidas e adaptadas para o ensino público, de mesmo nome e autor de sua versão “normal”. Independentemente disso, não existe a supremacia do material utilizado no ensino público ou privado, apenas diferentes direcionamentos que foram analisados e nos ajudaram a melhor compor as nossas aulas.

Para finalizar, esperamos que este trabalho possa ser útil também a outros professores que pretendem mudar o rumo de suas aulas e torná-las mais agradáveis e interessantes para seus alunos.

7 Referências bibliográficas

[1] BIANCHINI, E. Matemática: 7º ano. 7ª edição. São Paulo: Moderna, 2011. 272 p.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília. MEC/SEF, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Data de acesso: 13/12/2013

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> Data de acesso: 13/12/2013

[4] Caderno Pedagógico da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro. Matemática: 7º ano, 2013. Disponível em <https://onedrive.live.com/view.aspx?cid=C7A1F0E461C93410&resid=C7A1F0E461C93410%21947&app=WordPdf&wdo=1> Data de acesso: 12/03/2014

[5] Cadernos Pedagógicos da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro. Matemática: 2013 e 2014. Disponível em: <http://www.rioeduca.net/recursosPedagogicos.php> Data de acesso: 12/03/2014

[6] GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. A conquista da Matemática: 7º ano. Edição renovada. São Paulo: FTD, 2009. 336 p.

[7] Guia de livros didáticos: PNLD 2011: Matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. 96 p. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2349-guia-pnld-2011-%E2%80%93-anos-finais-do-ensino-fundamental> Data de acesso: 27/02/2014

[8] Guia de livros didáticos: PNLD 2014: Matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013. 104 p. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/guia-pnld-2014> Data de acesso: 27/02/2014

[9] Lima, E. L. ed. Exames de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. 1ª edição. Rio de Janeiro.

[10] Lima, E. L. Matemática e Ensino. 1ª edição. Rio de Janeiro.

[11] Programa Nacional do Livro Didático. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id%3D12391option%3Dcom_contentview%3Darticle> Data de acesso: 27/02/2014