2014: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Sobre Pombos e Gavetas

Vinícius Barbosa de Paiva [1]
Marcelo Oliveira Veloso[2]

Resumo: Nesse trabalho estuda-se três versões do Princípio das Gavetas de Dirichlet e suas aplicações em diversos problemas geométricos e aritméticos.

Palavras-chave: Princípio das Gavetas. Matemática Discreta.

1 Introdução

Se todos os pontos do plano forem pintados, cada um com uma dentre 2 cores, seria possível encontrarmos dois pontos cuja distância entre eles é de exatamente 10 cm? O que acontece se distribuirmos 12 bombons para 9 crianças? É possível afirmar que em determinada sala de aula existem alunos que nasceram no mesmo dia da semana? E no mesmo dia do ano?

Neste texto pretende-se responder a essas questões, entre outras, utilizando o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos, que diz:

"Se distribuirmos n objetos em m gavetas com $n > m$, então pelo menos uma gaveta terá mais que um objeto".

Acredita-se que o matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet tenha utilizado este princípio pela primeira vez em 1834, na forma de ocupação de gavetas. O Princípio da Gavetas é uma ferramenta simples, cujo enunciado é de fácil entendimento e de grande utilidade na solução de problemas e demostrações de alguns resultados clássicos em Matemática Discreta.

A técnica para aplicar o Princípio da Gavetas é identificar os "objetos", as "gavetas" e qual "regra" é utilizada para distribuir os objetos nessas gavetas. Neste trabalho é explicitado, nos diversos exemplos, estas três etapas.

O texto está organizado da seguinte maneira: na seção 2 relembramos alguns conceitos que serão utilizados nesta discussão. Na terceira seção, apresentamos três versões do Princípio das Gavetas e alguns exemplos de sua aplicação, destacando a importância da escolha "ideal" dos objetos e das gavetas. As seções 4 e 5 foram dedicadas aos temas de aritmética e geometria, respectivamente. O texto termina com uma coletânea de problemas propostos sobre o assunto.

[1] Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
E-mail: viniciusbpaiva@yahoo.com.br

[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ
E-mail: veloso@ufsj.edu.br

2 Conceitos Básicos

Nesta seção listamos os conceitos utilizados ao longo do texto. Alguns resultados são acompanhados da respectiva demonstração. Os resultados cujas demonstrações são omitidas possuem uma indicação de bibliografia sobre o assunto.

Definição 2.1 *Sejam a e b números inteiros com $a \neq 0$. Dizemos que a divide b e vamos denotar por $a \mid b$, se existir um inteiro c tal que $b = ac$. Se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.*

É usual dizer que a é um **divisor** de b, ou b é **divisível** por a, ou ainda b é um **múltiplo** de a quando $a \mid b$.

Exemplo 2.1 *Como $12 = 2 \cdot 6$, então 2 divide 12 e denotamos por $2 \mid 12$. Segue que 2 é um **divisor** de 12, ou 12 é **divisível** por 2, ou ainda 12 é um **múltiplo** de 2. Também temos que $-3 \mid 12$, visto que $12 = (-3)(-4)$.*

♢

Definição 2.2 *Um número inteiro n é **primo** se $n > 1$ e se possui apenas dois divisores positivos n e 1. Se $n > 1$ não é primo dizemos que n é **composto**.*

Exemplo 2.2 *Os inteiros 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 67 e 277 são números primos. Já os inteiros 8 $(8 = 2.4)$ e 33 $(33 = 3.11)$ não são primos, ou seja, são números compostos.*

♢

Vejamos algumas propriedades da divisão dos inteiros:

Teorema 2.1 *Sejam a, d, m e n números inteiros. Então:*

1. $1 \mid n$, $n \mid n$ e $n \mid 0$;
2. $d \mid n \Rightarrow ad \mid an$;
3. $ad \mid an$ e $a \neq 0 \Rightarrow d \mid n$;
4. $d \mid n \Rightarrow d \mid nm$;
5. $a \mid b$ e $b \mid c$, $\Rightarrow a \mid c$.

Demonstração. Veja a demonstração: (1 e 5) no livro [7]: unidade 1 - página 3 e (2) no livro [8] - página 3. □

Teorema 2.2 (Algoritmo da Divisão) *Sejam a e b números inteiros com $b > 0$. Então existem dois, únicos, números inteiros q e r tais que:*

$$a = b \cdot q + r, \ \text{com } 0 \leq r < b$$

Demonstração. Veja a demonstração do algoritmo no livro [8] página 5. □

Exemplo 2.3 *Como* $13 = 5 \cdot 2 + 3$, *o quociente e o resto da divisão de 13 por 5 são* $q = 2$ *e* $r = 3$. *Já* $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$, *ou seja, o quociente e o resto da divisão de* -17 *por 5 são* $q = -4$ *e* $r = 3$.

$\diamondsuit$

Definição 2.3 *Sejam* a, b *inteiros não simultaneamente nulos. Um inteiro* $d > 0$ *é dito o máximo divisor comum de* a *e* b *se, e somente se*

i) $d|a$ *e* $d|b$,

ii) c *inteiro tal que* $c|a$ *e* $c|b$ *implica que* $c|d$.

O inteiro d *é denotado por* $mdc(a,\, b)$.

Observe que o segundo item garante a unicidade do $mdc(a, b)$. De fato: suponha que $d = mdc(a, b)$ e $d_1 = mdc(a, b)$. Segue do segundo item que $d|d_1$ e $d_1|d$ e assim $d = d_1$.

Exemplo 2.4 *O* $mdc(12, 18) = 6$, *pois os números* $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$ *são os divisores comuns de 12 e 18.*

$\diamondsuit$

É usual dizer que a e b são coprimos, ou primos entre si, quando $mdc(a, b) = 1$. O próximo resultado elenca algumas propriedades do máximo divisor comum.

Teorema 2.3 *Sejam* a *e* b *números inteiros. Então:*

1. $mdc(a, b) = mdc(b, a) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b)$;
2. $mdc(1, a) = 1$;
3. $mdc(0, a) = |a|$;
4. $mdc(a, a) = |a|$;
5. $a \mid b \;\Leftrightarrow\; (a, b) = |a|$.

Demonstração. Veja a demonstração no livro [7]: unidade 5 - páginas 2 e 3. $\square$

Para provar a existência do máximo divisor comum de dois inteiros não negativos, Euclides utiliza, essencialmente, o resultado abaixo que chamaremos de *Lema de Euclides*.

Lema 2.1 (Lema de Euclides) *Sejam* a, b, q *e* r *números inteiros. Se* $a = b \cdot q + r$ *então*

$$mdc(a,\, b) = mdc(b,\, r).$$

Demonstração. Seja $d = mdc(a,\, b)$ e $d_1 = mdc(b,\, r)$. Como $d = mdc(a,\, b)$ temos que $d|a$ e $d|b$ e então $d|(a - bq)$, ou seja, $d|r$. Portanto $d|d_1$, pois $d_1 = mdc(b,\, r)$. De maneira análoga temos que $d_1|d$. Portanto, $d = d_1$ e o temos o resultado. $\square$

Exemplo 2.5 *Para calcular o* $mdc(20, 35)$ *basta observar que* $35 = 1 \cdot 20 + 15$, $20 = 1 \cdot 15 + 5$ *e* $15 = 3 \cdot 5 + 0$ *e aplicar o Lema de Euclides três vezes*

$$mdc(35,\, 20) = mdc(20,\, 15) = mdc(15,\, 5) = mdc(5,\, 0) = 5.$$

$\diamondsuit$

Exemplo 2.6 *Dados m e n inteiros positivos e distintos, temos que:*

$$mdc(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1) = 1.$$

De fato, suponha que $m > n$ e note que

$$2^{2^m} - 1 = (2^{2^{m-1}}+1)(2^{2^{m-2}}+1)\cdots(2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1).$$

Assim $2^{2^m}+1 = (2^{2^n}+1)\cdot q + 2$ e portanto pelo Lema de Euclides

$$mdc(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1) = mdc(2^{2^n}+1, 2) = 1.$$

$\diamondsuit$

Teorema 2.4 *Sejam a, b e c números inteiros. Se $a \mid b\cdot c$ e $mdc(a,b) = 1$ então $a \mid c$.*

Demonstração. Veja a demonstração do teorema no livro [7]: unidade 6 - página 4. $\square$

Definição 2.4 *Seja x um número real. Denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro que é menor ou igual a x, ou seja,*

$$\lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

A função $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é chamada de *maior inteiro* ou *função piso.*

Exemplo 2.7 $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 2,71 \rfloor = 2$, $\lfloor 1,618 \rfloor = 1$, $\lfloor -3,71 \rfloor = -4$

Teorema 2.5 *Sejam x, y números reais e m um número inteiro. Então:*

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$;
2. *se* $x < y$ *então* $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$;
3. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$;
4. *se* $m > 0$ *então* $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{m} \right\rfloor$.

Demonstração.

1. Seja $x = n + \alpha$ onde n é inteiro e $0 \leq \alpha < 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= n \\ &\leq x \\ &< n+1 \\ &= \lfloor x \rfloor + 1 \end{aligned}$$

2. Sejam $x = n + \alpha$ e $y = p + \beta$ onde n e p são inteiros, e $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Então

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor n + \alpha \rfloor = n \leq p = \lfloor p + \beta \rfloor = \lfloor y \rfloor.$$

3. Sejam $x = n + \alpha$ e $y = p + \beta$ onde n e p são inteiros e $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Logo,

$$\begin{array}{rcl}
\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor & = & n + p \\
& = & \lfloor n + p \rfloor \\
& \leq & \lfloor n + \alpha + p + \beta \rfloor \\
& = & \lfloor x + y \rfloor \\
& = & n + p + \lfloor \alpha + \beta \rfloor \\
& \leq & n + p + 1 \\
& = & \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1
\end{array}$$

4. Seja $x = n + \alpha$, onde n é inteiro e $0 \leq \alpha < 1$. Sabemos, do algoritmo da divisão, que existem q e r tais que $n = m.q + r, \ \ 0 \leq r < m$. Portanto,

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q.m + r + \alpha}{m} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r + \alpha}{m} \right\rfloor = q$$

pois $0 \leq r + \alpha < m$, uma vez que $0 \leq \alpha < 1$ e $0 \leq r < m$. Mas,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q.m + r}{m} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{m} \right\rfloor = q$$

o que prova (4).

□

Definição 2.5 *Seja x um número real. Denotamos por $\lceil x \rceil$ o menor inteiro que é maior ou igual a x, ou seja,*

$$\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}.$$

A função $\lceil \ \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é chamada de *função menor inteiro* ou *função teto.*

Exemplo 2.8 $\lceil 2 \rceil = 2, \ \lceil 2,71 \rceil = 3, \ \lceil 1,618 \rceil = 2, \ \lceil -3,71 \rceil = -3$

Teorema 2.6 *Sejam x, y números reais e m um número inteiro. Então:*

1. $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$;

2. *se* $x < y$ *então* $\lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil$;

3. $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$;

4. *se* $m > 0$ *então* $\left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil$.

Demonstração.

1. Seja $x = n - \alpha$ onde n é inteiro e $0 \leq \alpha < 1$. Logo,

$$\begin{array}{rcl}
\lceil x \rceil - 1 & = & n - 1 \\
& < & n - \alpha \\
& = & \lceil x \rceil
\end{array}$$

2. Sejam $x = n - \alpha$ e $y = p - \beta$ onde n e p são inteiros e $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Então

$$\lceil x \rceil = \lceil n - \alpha \rceil = n \leq p = \lceil p - \beta \rceil = \lceil y \rceil.$$

3. Sejam $x = n - \alpha$ e $y = p - \beta$ onde n e p são inteiros e $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 &= n + p - 1 \\
&\leq n + p + \lceil -\alpha - \beta \rceil \\
&= \lceil n - \alpha + p - \beta \rceil \\
&\leq \lceil n + p \rceil \\
&= n + p \\
&= \lceil x \rceil + \lceil y \rceil
\end{aligned}$$

4. Seja $x = n - \alpha$, onde n é inteiro e $0 \leq \alpha < 1$. Sabemos, do algoritmo da divisão, que existem q e r tais que $n = m.q + r,\ \ 0 \leq r < m$. Portanto,

$$\left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{q.m + r - \alpha}{m} \right\rceil = \left\lceil q + \frac{r - \alpha}{m} \right\rceil = q$$

pois $0 \leq r - \alpha < m$, uma vez que $0 \leq \alpha < 1$ e $0 \leq r < m$. Mas,

$$\left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{q.m + r}{m} \right\rceil = \left\lceil q + \frac{r}{m} \right\rceil = q$$

o que prova (4).

□

3 Princípio de Dirichlet e Generalizações

Nesta seção vamos apresentar três versões do Princípio de Dirichlet, ou Príncípio da casa dos Pombos, e vários exemplos de suas aplicações.

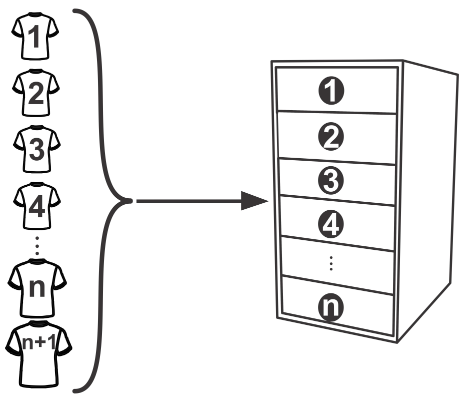

Figura 1: Cômoda.

Princípio das Gavetas 3.1 *Se colocamos $n + 1$ objetos em n gavetas, então haverá pelo menos uma gaveta com dois ou mais objetos.*

Demonstração. Como temos n gavetas e se cada uma delas contiver, no máximo, um objeto, o número total de objetos assim distribuídos será, no máximo, n, o que é uma contradição. $\square$

Note que $n+1$ é o número mínimo de objetos que satisfaz o Princípio das Gavetas 3.1, e, claramente, o resultado é válido para todo inteiro $l \geq n+1$. Veremos que o Princípio das Gavetas de Dirichlet nos auxiliará na resolução de exercícios de Combinatória, Teoria dos Números e Geometria, dentre outros.

Vejamos, nos exemplos abaixo, como aplicar o Princípio das Gavetas 3.1.

Exemplo 3.1 *Em um conjunto de 8 pessoas podemos afirmar que: pelo menos duas nasceram no mesmo dia da semana.*

Identificando as gavetas e os objetos.

- *Objetos: As oito pessoas;*
- *Gavetas: Os sete dias da semana;*
- *Regra: Cada pessoa está associada ao dia da semana que nasceu.*

Temos 8 objetos (pessoas) para serem distribuídos em 7 gavetas (dias da semana). Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, temos que, pelo menos uma gaveta irá conter ao menos dois objetos, ou seja, no mínimo 2 pessoas nasceram no mesmo dia da semana.*

$\diamondsuit$

Exemplo 3.2 *O que acontece se distribuirmos 12 bombons para 9 crianças?*

- *Objetos: Os doze bombons;*
- *Gavetas: As nove crianças;*
- *Regra: Cada bombom está associado a uma criança.*

Temos 12 objetos (bombons) para serem distribuídos em 9 gavetas (crianças). Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, temos que, pelo menos uma gaveta irá conter pelo menos dois objetos, ou seja, pelo menos 1 criança irá receber pelo menos 2 bombons.*

$\diamondsuit$

Definição 3.1 *Uma função $f: A \to B$ é dita injetora se para cada $y \in B$ existir um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Exemplo 3.3 *Sejam A e B conjuntos finitos com n e m elementos respectivamente. Se $n > m$, então não existe nenhuma função $f: A \to B$ injetiva.*

- *Objetos: Os elementos do domínio (n);*
- *Gavetas: Os elementos da imagem (m);*
- *Regra: A função $f(x) = y$.*

Sabemos que $n > m$, ou seja, há demasiados elementos no conjunto A em relação ao conjunto B, portanto, pelo Princípio das Gavetas 3.1, *temos que, pelo menos uma gaveta irá conter pelo menos dois objetos, ou seja, existe pelo menos um $y \in B$, que é correspondente de pelo menos dois $x \in A$.*

$\diamondsuit$

Exemplo 3.4 *Marcam-se cinco pontos (A, B, C, D, E) sobre um quadrado de lado 2. Mostre que, pelo menos, 2 destes pontos estão a uma distância menor ou igual a $\sqrt{2}$.*

Nosso desafio em cada exercício é determinar quem são as gavetas e quem são os objetos. Se a escolha não for bem sucedida acarretará em complicações. Por exemplo, se escolhermos as gavetas como sendo os quatro triângulos da figura abaixo:

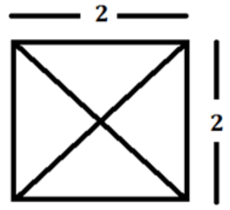

Figura 2: Quadrado.

Aplicando o Princípio das Gavetas 3.1 *temos que ao menos uma gaveta conterá 2 pontos, como mostra figura abaixo:*

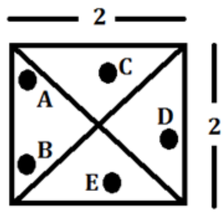

Figura 3: Possíveis gavetas.

Nesse caso, podemos obter uma distância entre os pontos A e B maior que $\sqrt{2}$. Logo, a escolha das gavetas não foi adequado para o nosso problema.

Mas, se dividirmos o quadrado original em 4 quadrados de lado 1, como na figura abaixo:

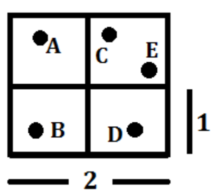

Figura 4: Objetos nas gavetas.

Vamos obter

- *Objetos: Os cinco pontos (A, B, C, D, E);*
- *Gavetas: Os quatro quadrados de lado 1;*

- *Regra: Cada ponto está associado a um quadrado (Caso um ponto esteja na fronteira entre dois ou mais quadrados, "ele pode escolher"a qual deles quer pertencer).*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, ao distribuirmos os 5 pontos* (A, B, C, D, E) *dentro dos 4 quadrados de lado 1, teremos pelo menos dois pontos dentro de um mesmo quadrado.*

Sabemos que a maior distância entre dois pontos contidos no interior de um quadrado é igual a sua diagonal ($l\sqrt{2}$*). Portanto, como os quadrados possuem lado 1, temos que o maior comprimento entre estes dois pontos será* $\sqrt{2}$*.*

$\diamondsuit$

Exemplo 3.5 *Lança-se uma dado, não viciado, 7 vezes. Podemos afirmar que uma de suas faces repete pelo menos duas vezes.*

- *Objetos: Os sete lançamentos;*
- *Gavetas: Os seis resultados possíveis do lançamento de um dado;*
- *Regra: Cada lançamento está associado ao seu resultado.*

Temos 7 objetos (lançamentos) para serem distribuídos em 6 gavetas (resultados possíveis). Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, temos que, pelo menos uma gaveta irá conter ao menos dois objetos, ou seja, no mínimo 2 lançamentos vão assumir o mesmo valor numérico.*

$\diamondsuit$

Exemplo 3.6 *Em um ano, não bissexto, em qualquer conjunto com 366 pessoas existem pelo menos duas que nasceram no mesmo dia.*

- *Objetos: As pessoas;*
- *Gavetas: Os dias do ano (365 dias, nesse caso);*
- *Regra: Cada pessoa está associada ao dia do seu nascimento.*

Temos 366 objetos (pessoas) para serem distribuídos em 365 gavetas (dias do ano). Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, temos que, pelo menos uma das gavetas irá conter pelo menos dois objetos, ou seja, pelo menos 2 pessoas vão nascer no mesmo dia do ano.*

$\diamondsuit$

O Princípio das Gavetas 3.1 garante que em qualquer grupo de 366 pessoas, em um ano não bissexto, pelo menos duas nasceram no mesmo dia do ano. Um fato curioso é que em um grupo de apenas 23 pessoas existe a chance de pelo menos duas nascerem no mesmo dia do ano, e esta, é maior que 50%. Ou seja, no referido grupo, é mais provável ter duas pessoas com o mesmo aniversário do que todas aniversariarem em dias diferentes. Indicamos a leitura do texto *O paradoxo gêmeo e o velho e bom logaritmo* na seção 2.5 do livro [1] - página 36.

Exemplo 3.7 *Mostre que em um grupo de* n *pessoas há sempre duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas desse conjunto.(Conhecer é uma relação simétrica, ou seja, se* a *conhece* b*,* b *conhece* a*.)*

Dentro desse grupo de n *pessoas, qualquer uma delas pode conhecer no mínimo 0 (quando não se conhece ninguém - "penetra") e no máximo* $(n-1)$ *pessoas (quando se conhece todo mundo).*

- *Objetos: As pessoas;*

- *Gavetas: Número de pessoas que cada indivíduo pode conhecer (de* 0 *a* $(n-1)$*, nesse caso);*

- *Regra: Cada pessoa está associada ao número de pessoas que ela conhece.*

Note que uma das gavetas 0 e $n-1$ *permanecerá desocupada, pois não existe a possibilidade de conhecer 0 e* $n-1$ *pessoas simultaneamente. Portanto, temos* n *objetos para serem distribuídas em* $n-1$ *gavetas. Pelo Princípio das Gavetas* 3.1*, temos que pelo menos uma gaveta irá conter pelo menos dois objetos, ou seja, existem pelo menos duas pessoas que conhecem o mesmo número de pessoas do referido conjunto.*

$\diamondsuit$

O próximo exemplo estava proposto na seção de exercícios do livro [9] página 159.

Exemplo 3.8 *Um certo livreiro vende pelo menos um livro por dia. Sabendo que o livreiro vendeu 463 livros durante 305 dias consecutivos, mostre que em algum período de dias consecutivos o livreiro vendeu exatamente 144 livros.*
Seja S_K *o total de livros vendidos até o K-ésimo dia inclusive. Sabemos que o livreiro vende pelo menos um livro por dia e que durante 305 dias vendeu um total de 463 livros. Logo:*

$$1 \leq S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_{305} = 463$$

O número de livros vendidos do dia q *ao dia* p *(inclusive) é* $S_p - S_{q-1}$*. Nossa intenção é mostrar que existem termos na sequência* S_n *cuja diferença é 144. Com esse intuito definimos a seguinte sequência*

$$T_k = S_k + 144, \text{ onde } k = 1, \ldots 305$$

Note que

$$145 \leq T_1 < T_2 < T_3 < \ldots < T_{305} = 607.$$

Agora estamos em condições de definirmos nossas gavetas e objetos:

- *Objetos:* $S_1, S_2, S_3, S_{305}, T_1, T_2, \ldots, T_{305}$

- *Gavetas: Os 607 números inteiros de 1 a 607;*

- *Regra: Cada número* S_k *ou* T_k*,* $k = 1, \ldots, 305$*, está associada ao seu valor inteiro.*

Temos 610 objetos (termos) para serem distribuídos em 607 gavetas. Pelo Princípio das Gavetas 3.1 *pelo menos uma gaveta irá conter pelo menos dois objetos, ou seja, pelo menos 2 termos desse grupo são iguais. Estes números não podem pertencer à sequência* S_k*, pois esta é estritamente crescente, o mesmo vale para à sequência* T_k*. Portanto, existem* S_p *e* T_q *tais que* $S_p = T_q$*, ou seja:* $S_p = S_q + 144$*. Assim* $S_p - S_q = 144$*. Portanto, entre os dias e* $q+1$ *e* p*, inclusive, foram vendidos* 144 *livros.*

$\diamondsuit$

Princípio das Gavetas 3.2 *Se colocamos* $n \cdot k + 1$ *objetos em* n *gavetas, então haverá pelo menos uma gaveta com* $k+1$ *ou mais objetos.*

Demonstração. Se cada gaveta conter no máximo k objetos, então teremos $n.k$ objetos distribuídos. Como temos $n \cdot k + 1$ objetos, então pelo menos uma gaveta conterá pelo menos $k + 1$ objetos. □

Abaixo, segue alguns exemplos e sua aplicação.

Exemplo 3.9 *Mostre que ao distribuirmos 49 presentes a um grupo de 12 crianças, pelo menos uma delas irá receber ao menos 5 presentes.*

- *Objetos: Os presentes;*
- *Gavetas: As crianças;*
- *Regra: Cada criança está associada a seu presente.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.2, *que se n gavetas são ocupadas por $n \cdot k + 1$ objetos então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $k + 1$ objetos. Como temos 49 objetos (presentes) e $n = 12$ gavetas, podemos escrever:*

$$\begin{aligned} n \cdot k + 1 &= 49 \\ 12 \cdot k + 1 &= 49 \\ 12 \cdot k &= 48 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

Pelo menos uma gaveta, ou seja, pelo menos uma criança receberá $k + 1$ presentes.
Portanto, como $k = 4$, temos que $k + 1 = 5$ presentes.

♢

Exemplo 3.10 *Uma caixa contém 4 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas e brancas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?*
Queremos obter duas bolas de mesma cor. Cada bola está associada a sua cor, portanto, temos:

- *Objetos: As bolas;*
- *Gavetas: As cores (Azul, Verde, Amarela e Branca);*
- *Regra: Cada bola está associada a sua cor.*

Segundo o Princípio das Gavetas 3.2 *para afirmarmos que alguma gaveta contém pelo menos $k+1$ objetos, após uma distribuição de objetos em n gavetas, é necessário pelo menos $n \cdot k + 1$ objetos .*

Como queremos 2 bolas de mesma cor, basta fazer uma "gaveta"assumir 2 "objetos", ou seja, $k + 1 = 2$, donde temos que $k = 1$. Agora, o total de objeto é dado por: $n.k + 1$, onde $n = 4$ gavetas (cores) e $k = 1$. Substituindo: $n \cdot k + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$ bolas.
Portanto, é necessário retirar pelo menos 5 bolas da caixa para se ter certeza de que 2 são da mesma cor.

♢

Exemplo 3.11 *Um estojo contém 5 canetas vermelhas, 8 canetas azuis, 7 canetas pretas e 4 canetas verdes. Qual o menor número de canetas que devemos retirar para que possamos garantir que retiramos 4 de uma mesma cor?*

- *Objetos: As canetas;*
- *Gavetas: As cores (Vermelha, Azul, Preta e Verde);*
- *Regra: Cada caneta está associada a sua cor.*

Sabemos, pelo Princípio das Gavetas 3.2*, que se n gavetas são ocupadas por $n \cdot k+1$ objetos então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $k+1$ objetos. Como queremos obter 4 objetos (canetas) de uma mesma cor, então:*

$$\begin{aligned} k+1 &= 4 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Agora, como temos $n = 4$ gavetas (cores) e $k = 3$, pelo Princípio das Gavetas, podemos escrever:

$$\begin{aligned} n \cdot k + 1 &= 4 \cdot 3 + 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Dessa forma, para termos certeza de que retiramos 4 canetas de uma mesma cor, é necessário retirar do estojo no mínino 13 canetas.

$\diamondsuit$

Princípio das Gavetas 3.3 *Suponha que distribuímos $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ objetos em n gavetas da seguinte maneira:*

$$\begin{gathered} a_1 \text{ objetos na primeira gaveta,} \\ a_2 \text{ objetos na segunda gaveta,} \\ \vdots \\ a_n \text{ objetos na última gaveta} \end{gathered}$$

Então

i) existe uma gaveta com no mínimo $\left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor$ *objetos.*

ii) existe uma gaveta com no máximo $\left\lceil \dfrac{S}{n} \right\rceil$ *objetos.*

Demonstração: *i)* - Queremos mostrar que existe, pelo menos um a_i, $1 \leq i \leq n$, tal que: $a_i \geq \left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor$.

Suponha que todos os $a_i's$ sejam menores que $\left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor$, ou seja,

$$a_i \leq \left\lfloor \frac{S}{n} \right\rfloor - 1, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Logo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n(\left\lfloor \frac{S}{n} \right\rfloor - 1)$ e temos que

$$\frac{S}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \left\lfloor \frac{S}{n} \right\rfloor - 1.$$

Um absurdo visto que $\left\lfloor \frac{S}{n} \right\rfloor \leq \frac{S}{n}$, Teorema 2.5. Portanto, existe uma gaveta com no mínimo $\left\lfloor \frac{S}{n} \right\rfloor$ objetos.

ii) Queremos mostrar que existe, pelo menos um a_i, $1 \leq i \leq n$, tal que: $a_i \leq \left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil$. Vamos supor que todos os $a_i's$ sejam maiores que $\left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil$, ou seja,

$$\left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil + 1 \leq a_i \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Então $n(\left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil + 1) \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e assim

$$\left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil + 1 \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{S}{n}.$$

Logo $\left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil \leq \frac{S}{n} - 1$. Um absurdo visto que $\frac{S}{n} \leq \left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil$, Teorema 2.6. Portanto, existe uma gaveta com no máximo $\left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil$ objetos. □

Uma consequência direta desta demostração é que se M é a média aritmética dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então ao menos um dos números é maior ou igual a M, e, ao menos um dos números é menor ou igual a M.

Exemplo 3.12 *Em um restaurante, há 16 amigos sentados em torno de uma mesa circular para uma confraternização. Um garçom serve a cada um deles, sem perguntar a sua preferência, um suco. Alguns desses sucos são de laranja e outros de abacaxi. Sabendo que 8 desses amigos preferem suco de laranja e os outros 8 preferem suco de abacaxi, mostre que, sem mexer nos amigos e fazendo apenas rotações na mesa (por exemplo sentido horário), é possível fazer com que pelo menos 8 amigos tenham suas preferências respeitadas.*
A mesa pode assumir 16 posições diferentes. Seja $a_i, i = 1, \ldots, 16$, *o número de amigos cuja preferência é atendida com a mesa na posição i. Portanto, temos:*

- *Objetos: O número total de preferências atendidas pela mesa em cada posição i* $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{16})$*;*
- *Gavetas: As 16 posições distintas que a mesa pode assumir;*
- *Regra: Cada número de amigos cuja preferência é atendida está associado com a mesa na posição i.*

Mas cada suco é colocado, sucessivamente, em frente a cada um dos amigos e sabemos que existem exatamente 8 amigos que preferem cada sabor, ou seja, cada suco atende a exatamente 8 amigos. Como o garçom serviu 16 sucos, podemos concluir que o total de preferências atendidas será 128. Assim, temos:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} = 128 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{16}}{16} = 8$$

Logo, pelo Princípio das Gavetas 3.3*, podemos concluir que pelo menos um* $a_i, i = 1, \ldots, 16$*, será no mínimo igual a 8, ou seja, há uma determinada posição da mesa em que pelo menos 8 dos amigos terão suas preferências atendidas.*

$\diamondsuit$

Exemplo 3.13 *A média de idade do elenco dos 23 jogadores da Seleção Brasileira de futebol campeã da Copa das Confederações, realizada no Brasil, no ano 2013, era de 26 anos. O que se pode dizer da idade do atleta mais velho do time?*
Como temos 23 atletas, podemos ter no máximo $n = 23$ *idades diferentes (Gavetas). Sabemos que a média de idade da seleção é 26 anos. Portanto:*

- *Objetos: Cada um dos 23 atletas;*
- *Gavetas: As 23 possíveis idades;*
- *Regra: Cada atleta está associado a sua idade.*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{23}}{23} = 26$$

Assim, pela consequência do Princípio das Gavetas 3.3*, existe pelo menos um atleta,* a_i *com* $i = 1, \ldots, 23$*, que possui idade de pelo menos 26 anos.*

$\diamondsuit$

O exemplo abaixo foi retirado do livro [9] página 146.

Exemplo 3.14 *Numa família formada por cinco pessoas a soma das idades é de 245 anos. É possível selecionar* 3 *membros da família cuja soma das idades não é menor que 147. De fato: Vamos indicar as pessoas pelas letras* A, B, C, D, E *e por* $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|$, $|E|$ *as respectivas idades. Primeiramente, vamos determinar quantos grupos de 3 pessoas distintas podemos formar.*
$\binom{5}{3} = 10$ *grupos*[3]*. São eles:*

$$G_1 = \{A, B, C\},\ G_2 = \{A, B, D\},\ G_3 = \{A, B, E\},\ G_4 = \{A, C, D\},\ G_5 = \{A, C, E\},$$
$$G_6 = \{A, D, E\},\ G_7 = \{B, C, D\},\ G_8 = \{B, C, E\},\ G_9 = \{B, D, E\},\ G_{10} = \{C, D, E\}.$$

Note que cada pessoa aparece exatamente em 6 grupos. Poderíamos ter determinado esse fato da seguinte maneira:
Temos 5 pessoas e queremos formar grupos de 3 pessoas. Imagine que uma determinada

[3] O número de maneiras distintas de escolher p elementos de um conjunto de m elementos, ou seja, o número de Combinações de m elementos tomados p a p é $\binom{m}{p} = \frac{m!}{(m-p)!p!}$

pessoa já está escolhida, por exemplo A. Agora faltam escolher mais 2 pessoas de um total de 4 pessoas, pois A está escolhida:
$\binom{4}{2} = 6$, *ou seja, cada pessoa aparece exatamente em 6 grupos.*

- *Objetos: A soma das idades de cada um dos 10 grupos;*
- *Gavetas: Os 10 possíveis grupos;*
- *Regra: Cada soma de idade está associada a um determinado grupo.*

Agora, basta calcularmos a média da soma das idades dos 10 grupos:

$$\begin{aligned}\frac{|G_1|+|G_2|+\ldots+|G_{10}|}{10} &= \frac{6|A|+6|B|+6|C|+6|D|+6|E|}{10} \\ &= \frac{6(|A|+|B|+|C|+|D|+|E|)}{10} \\ &= \frac{6 \cdot 245}{10} \\ &= \frac{1470}{10} \\ &= 147\end{aligned}$$

Portanto, pela consequência do Princípio das Gavetas 3.3*, existe pelo menos um* G_i*, com* $i = 1, \ldots, 10$*, tal que* $G_i \geq 147$.

$\diamondsuit$

Exemplo 3.15 *Suponhamos que os números de 1 até 12 sejam distribuídos aleatoriamente nas posições em torno do círculo da figura abaixo. Mostre que a soma dos elementos de pelo menos um conjunto de 3 elementos consecutivos tem que ser maior ou igual a 20.*

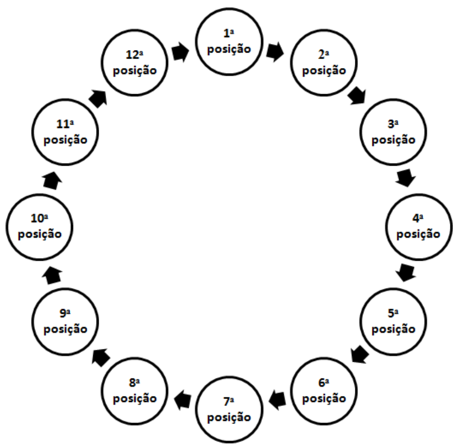

Figura 5: Círculo.

Sabemos que os números de 1 até 12 serão distribuídos, aleatoriamente, nas 12 posições $(a_1, \ldots, a_{12})$ *do circulo. Feito a distribuição, nos resta fazer os conjuntos de 3 elementos consecutivos. Começando, por exemplo da* 1^a *posição e no sentido horário, vamos obter 12 conjuntos:*

$$\begin{gathered}G_1 = \{a_1, a_2, a_3\},\ G_2 = \{a_2, a_3, a_4\},\ G_3 = \{a_3, a_4, a_5\}, \\ G_4 = \{a_4, a_5, a_6\},\ G_5 = \{a_5, a_6, a_7\},\ G_6 = \{a_6, a_7, a_8\}, \\ G_7 = \{a_7, a_8, a_9\},\ G_8 = \{a_8, a_9, a_{10}\},\ G_9 = \{a_9, a_{10}, a_{11}\}, \\ G_{10} = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}\},\ G_{11} = \{a_{11}, a_{12}, a_1\}, G_{12} = \{a_{12}, a_1, a_2\}\end{gathered}$$

Note que cada posição aparece em 3 conjuntos, ou seja, podemos afirmar que todos os números vão repetir exatamente 3 vezes, independente da posição que este número ocupar.

- *Objetos: A soma dos três números consecutivos de cada um dos 12 grupos;*
- *Gavetas: Os 12 possíveis grupos;*
- *Regra: Cada soma dos três números está associada a um determinado grupo.*

Agora, basta calcular a média da soma dos números dos 12 conjuntos:

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{12}|G_i|}{12} &= \frac{|G_1|+|G_2|+\ldots+|G_{12}|}{12} = \frac{3a_1+3a_2+\ldots+3a_{12}}{12} \\ &= \frac{3(a_1+a_2+\ldots+a_{12})}{12} = \frac{3(78)}{12} = \frac{234}{12} = 19.5\end{aligned}$$

Pelo Princípio das Gavetas 3.3, *existe pelo menos um* G_{i_0} *onde* $i_0 \in \{1,\ldots,12\}$, *tal que* $G_{i_0} \geq 20$. *Ou seja, a soma de pelo menos um conjunto de 3 elementos consecutivos tem que ser maior ou igual a 20.*

♢

4 Aritmética

Nesta seção combinamos a Aritmética e a aplicação do Princípio das Gavetas de Dirichlet. Aqui, apresentamos alguns exemplos mais complexos.

Exemplo 4.1 *Mostre que em um conjunto de sete inteiros, não necessariamente consecutivos, existem pelo menos dois que possuem o mesmo resto quando divididos por seis.*

Sabemos que

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < a.$$

Sejam os sete números: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, *não necessariamente consecutivos. Ao dividí-los por seis, os possíveis restos são da forma* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- *Objetos: Os sete números;*
- *Gavetas: Os seis possíveis restos;*
- *Regra: Cada número está associado a seu resto.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *ao dividirmos os sete números por seis, teremos pelo menos dois números com o mesmo resto.*

♢

Exemplo 4.2 *Dados 5 ou mais números inteiros existirão, pelo menos dois inteiros cuja diferença é divisível por quatro.*

Considere os quatro conjuntos:

$$K_0 = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12\ldots\}$$

$$K_1 = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13\ldots\}$$

$$K_2 = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, 16\ldots\}$$

$$K_3 = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15\ldots\}$$

Observe que cada conjunto K_i, com $0 \leq i \leq 3$, é formado pelos números que deixam restos: $0, 1, 2$ e 3, respectivamente, na divisão por 4.
Sejam os cinco números inteiros: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, não necessariamente consecutivos. Cada um desses números, estará associado a exatamente uma classe de K_i's, com $0 \leq i \leq 3$. Portanto, os possíveis restos serão da forma $\{0, 1, 2, 3\}$.

- *Objetos: Os cinco números;*
- *Gavetas: Os quatro possíveis restos (da divisão por 4);*
- *Regra: Cada número está associado a seu resto.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, pelo menos, dois desses números vão possuir o mesmo resto e, portanto, a diferença entre eles será um múltiplo de 4.

$\diamondsuit$

Note que, o que acabamos de fazer com o número 4, pode ser feito com qualquer número n. Basta considerarmos os n conjuntos: $K_0, K_1, K_2, ..., K_{n-1}$, onde em cada K_i, com $0 \leq i \leq (n-1)$, colocamos todos os inteiros que deixam restos i quando divididos por n. Sabemos que cada inteiro estará associado a exatamente uma classe de K_i's. Agora, basta tomarmos um conjunto de números com m elementos, $m \geq n+1$, de onde podemos concluir que, pelo menos, 2 deles estarão na mesma classe K_i e portanto, a diferença entre eles será divisível por n.

Exemplo 4.3 *Provar que 11 divide infinitos números da forma* $919191\ldots91$.

Sabemos, do algoritmo da Divisão Euclidiana, que os possíveis restos de uma divisão por 11 são: r = {0, 1, 2, 3, ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10}.
Agora, considere os doze números abaixo:

91
9191
919191
91919191
9191919191
919191919191
91919191919191
9191919191919191
919191919191919191
91919191919191919191
9191919191919191919191
919191919191919191919191

- *Objetos: Os doze números;*

- *Gavetas: Os onze possíveis restos (da divisão por 11);*

- *Regra: Cada número está associado a seu resto.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *ao dividirmos os doze números por onze vamos obter, pelo menos dois deles, que possuem o mesmo resto. Logo, a diferença entre eles será divisível por 11.*
Note que esta diferença é da forma:

$$919191\ldots91\ldots0000 = \underbrace{919191\ldots91}_{c}\cdot\underbrace{10^{2^k}}_{b}$$

Podemos concluir, pelo Teorema 2.4, *que* $11 \mid (919191\ldots91)$, *uma vez que 11 não divide* 10^{2^k}. *Para mostrarmos que são infinitos números, basta procedermos de forma análoga, mas com sequências suficientemente grandes, afim de excluir as repetições.*

$\diamondsuit$

O exemplo abaixo foi retirado do livro [9], página 151, e mostra que podemos escrever o $mdc(a, b) = d$ como uma combinação linear de a e b.

Exemplo 4.4 *Sejam os números naturais* a *e* b *e o* $mdc(a, b) = 1$. *Mostre que existem números inteiros* m *e* n *tais que:*

$$am + bn = 1$$

Se $mdc(a, b) = 1$, *considere a sequência* $A = \{a, 2a, 3a, \ldots, ba\}$. *Afirmamos que existe algum número do conjunto* A *que deixa resto 1 quando dividido por* b. *Se isso não ocorresse, teríamos:*

- *Objetos: Os* b *números do conjunto* A*;*

- *Gavetas: Os* $b - 1$ *restos diferentes quando divididos por* b $(0, 2, \ldots, b - 1)$*;*

- *Regra: Cada número da sequência está associado a seu resto.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *pelo menos dois deles, digamos* ia *e* ja, *com* $1 \leq i < j < b$, *deixarão o mesmo resto quando divididos por* b. *Logo a diferença entre eles,* $(j - i)a$ *será divisível por* b.

Mas o $mdc(a, b) = 1$, *então* $b \mid (j - i)$, *pelo Teorema* 2.4, *com* $j - i > 0$. *Como* $b > j - i$, *temos um absurdo. Assim, algum dos números em* A *deixa resto 1 quando divididos por* b. *Digamos que esse número seja* am. *Logo,* $am - 1$ *é múltiplo de* b, *ou seja,* $\exists\, n$ *tal que* $am - 1 = bn$, *onde obtemos o resultado desejado.*

$\diamondsuit$

O exemplo que segue estava proposto na seção de exercícios do livro [5] página 140.

Exemplo 4.5 *Prove que, dentre os números* $5, 5^2, 5^3, \ldots, 5^{13}$, *pelo menos um deixa resto 1 quando dividido por 14.*

Considere r *sendo os possíveis restos da divisão por 14. Note que o* $mdc(5^n, 14) = 1$, $1 \leq n \leq 13$, *portanto* $14 \nmid 5^n \;\Rightarrow\; r = \{1, 2, \ldots, 13\}$.
Afirmamos que existe algum 5^n, *com* $1 \leq n \leq 13$, *que deixa resto 1 quando dividido por 14. De fato! Se isso não ocorresse, teríamos:*

- *Objetos: Os treze números;*
- *Gavetas: Os doze possíveis restos (2, ..., 13);*
- *Regra: Cada número está associado a seu resto.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *ao dividirmos os 13 números por 14 vamos obter, pelo menos dois deles, digamos* 5^{n_1} *e* 5^{n_2}, *com* $n_1 > n_2$, *com o mesmo resto. Logo, a diferença entre eles será divisível por 14.*

$$14 \mid (5^{n_1} - 5^{n_2}) \;\Rightarrow\; 14 \mid 5^{n_2}(5^{n_1-n_2} - 1)$$

Mas o $mdc(5^n, 14) = 1$, *então* $14 \mid (5^{n_1-n_2}-1)$, *pelo Teorema* 2.4. *Logo* $\exists\ q$ *tal que* $5^{n_1-n_2}-1 = 14.q$, *ou seja,* $5^{n_1-n_2} = 14.q + 1$. *Contradição. Portanto, existe algum* 5^n, *com* $1 \leq n \leq 13$, *que deixa resto 1 quando dividido por 14.*

$\diamondsuit$

Teorema 4.1 *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha que o conjunto dos números primos é finito. Sejam

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n$$

todos os primos ordenados. Agora considere os subconjuntos G_1, G_2, ..., G_n dos números inteiros, onde G_i é o conjunto dos múltiplos do primo p_i, para $i = 1, \ldots, n$. Afimamos que não existe nenhum conjunto

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$$

com $n + 1$ elementos primos entre si dois a dois. De fato, sendo

- Objetos: $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$
- Gavetas: G_1, G_2, ..., G_n
- Regra: $a_i \in G_i$ se p_i é o maior divisor primo de a_i

Portanto, temos pelo Princípio das Gavetas 3.1, que para algum $1 \leq j \leq n$ existem $a_r, a_s \in G_j$. Ou seja, p_j divide a_r e a_s, e então $mdc(a_r, a_s) \geq p_j$, verificando nossa afirmação. Mas isto é um absurdo! Visto que existem subconjuntos infinitos com elementos primos entre si, como no Exemplo 2.6. $\square$

5 Geometria

Apresentamos agora alguns exemplos de como podemos utilizar a aplicação do Princípio das Gavetas de Dirichlet na Geometria.

Exemplo 5.1 *Todos os pontos de um plano são pintados de azul ou vermelho. Prove que podemos encontrar dois pontos da mesma cor que distam exatamente 10 cm.*

Como queremos distâncias de exatamente 10 cm, basta imaginarmos um triângulo equilátero de lado igual a 10 cm.

- *Objetos: três pontos (Vértices do Triângulo Equilátero);*

- *Gavetas: duas cores;*

- *Regra: Cada ponto está associado a sua cor.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *ao pintarmos os 3 pontos com uma das 2 cores (Azul ou Vermelho), teremos dois pontos da mesma cor que distam exatamente 10 cm pelo fato do triângulo ser Equilátero.*

$\diamondsuit$

Exemplo 5.2 *Durante uma partida de futebol entre Botafogo × Cruzeiro, válida pelo campeonato Brasileiro de 2013, um torcedor Botafoguense fez o seguinte comentário a seu colega:*

"Considerando os jogadores em campo e o árbitro da partida, existem pelo menos duas pessoas que estão a uma distância máxima de 36 metros".

Sabendo que a partida ocorreu no Maracanã e que as dimensões do gramado são: $110m \times 68m$*, mostre que o torcedor foi feliz quanto ao seu comentário.*
Pelo Teorema de Pitágoras, temos que a diagonal de um retângulo é: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$*, sendo a e b, comprimento e largura, respectivamente. Para definirmos nossas gavetas, basta dividirmos o gramado em 22 retângulos de dimensões* $10m \times 34m$.

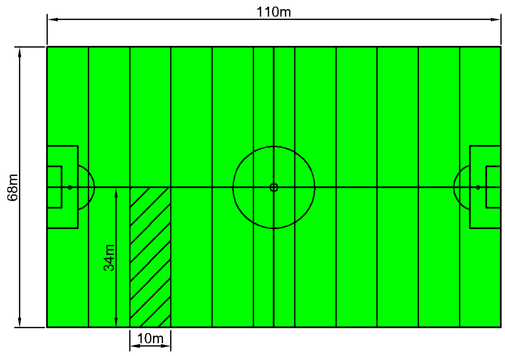

Figura 6: Campo - 22 gavetas.

- *Objetos: Os vinte e três personagens da partida (Jogadores e o Árbitro);*

- *Gavetas: Os vinte e dois retângulos;*

- *Regra: Cada personagem está associado a um retângulo (Caso um ponto esteja na fronteira entre dois ou mais retângulos, "ele pode escolher" a qual deles quer pertencer).*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *ao distribuirmos os 23 personagens dentro dos 22 retângulos de dimensões* $10m \times 34m$*, teremos pelo menos dois personagens dentro de um mesmo retângulo. Sabemos que a maior distância entre dois pontos contidos no interior de um retângulo é a sua diagonal (*$d = \sqrt{a^2 + b^2}$*). Portanto, como os retângulos são da forma* $10m \times 34m$*, temos que a maior distância entre eles será:*

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 34^2} = \sqrt{100 + 1156} = \sqrt{1256} \cong 35,44 < 36 metros.$$

$\diamondsuit$

Exemplo 5.3 *Dado um cubo de lado 4 , mostre que ao marcarmos 9 pontos em seu interior, a distância, entre pelo menos dois deles, será menor ou igual* $2\sqrt{3}$. *A diagonal de um cubo é dada em função de seu lado, ou seja,* $l\sqrt{3}$.
Vamos definir as gavetas e os objetos! Considere o cubo abaixo, de aresta 4.

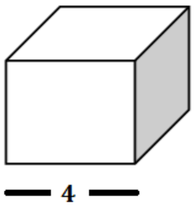

Figura 7: Cubo.

Para cada par de faces opostas desse cubo, tomamos um plano paralelo a essas faces, que passa pelo centro do cubo (Plano Mediador). Serão 3 planos que dividirão esse cubo em outros 8 cubos de aresta 2, figura abaixo.

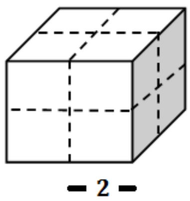

Figura 8: Cubo - 8 gavetas.

- *Objetos: Os nove pontos;*
- *Gavetas: Os oito cubos de aresta 2;*
- *Regra: Cada ponto está associado a um cubo (Caso o ponto esteja sobre o vértice ou intersecção de um cubo, ele pode pertencer a ambos).*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *um cubo de aresta 2 irá conter, pelo menos, 2 pontos no seu interior ou em sua superfície. Sabendo que a maior distância entre estes dois pontos está no seu interior, ou seja, coincide com sua diagonal que vale* $2\sqrt{3}$, *onde temos o resultado desejado.*

$\diamondsuit$

Exemplo 5.4 *Uma sala de estar possui um aquário ornamental de dimensões:* $120cm \times 60cm \times 30cm$, *comprimento, largura e altura, respectivamente. Sabendo que o mesmo possui 38 peixes, mostre que existem, pelo menos dois deles que distam entre si, de no máximo,* $10\sqrt{14}$. *Para definir nossas gavetas, vamos dividir o aquário em 36"sub aquários"de dimensões:* $30cm \times 20cm \times 10cm$, *ver figura:*

- *Objetos: Os trinta e oito peixes;*

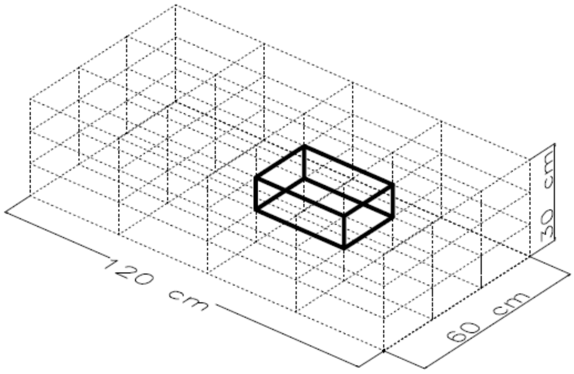

Figura 9: Aquário - 36 sub aquários.

- *Gavetas: Os trinta e seis "sub aquários";*
- *Regra: Cada peixe está associado a um dos "sub aquários"(Caso o peixe esteja sobre o vértice ou na intersecção de um "sub aquários", ele pode pertencer a ambos).*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, pelo menos um dos "sub aquários"irá conter pelo menos 2 peixes em seu interior ou em sua superfície. Sendo a maior distância entre estes dois pontos no seu interior, ou seja, a diagonal do "bloco"que vale:*

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{30^2 + 20^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{900 + 400 + 100} \\ &= \sqrt{1400} \\ &= 10\sqrt{14} \end{aligned}$$

Portanto, $d = 10\sqrt{14}$ *centímetros, o que comprova o resultado desejado.*

$\diamondsuit$

No próximo exemplo exibimos uma figura do brinquedo gira-gira. A figura foi retirada do sítio `www.animamix.com.br/subcategoria/gira-gira/71`.

Exemplo 5.5 *Na praça de uma cidade, seis crianças se divertem no brinquedo gira-gira, figura abaixo. Mostre que, necessariamente, existem três delas que se conhecem mutuamente ou três delas que não se conhecem mutuamente.*

Figura 10: gira-gira.

Vamos considerar as crianças A, B, C, D, E e F como sendo os vértices de um hexágono regular.

Agora, vamos associar as crianças duas a duas, através de segmentos de retas.

$\binom{6}{2} = 15$ *possibilidades*

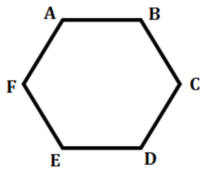

Figura 11: Hexágono regular.

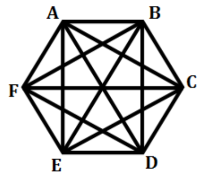

Figura 12: Crianças associadas duas a duas.

Vamos identificar as relações: conhecer (cor Azul) e não conhecer (Cor Vermelha). Conhecer ou não conhecer é uma relação simétrica (Se A conhece B então B conhece A). Note que cada criança está relacionada as outras cinco através de cinco segmentos de retas.

Observemos, por exemplo, a criança A (O raciocínio vale para todas as crianças).

- *Objetos: Os cinco segmentos de retas;*
- *Gavetas: As cores disponíveis (Azul ou Vermelha);*
- *Regra: Cada segmento está associado a uma das cores.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.2, $n.k+1$, *como* $5 = 2.2 + 1$, *temos pelo menos 3 dos 5 segmentos da mesma cor. Vamos supor que os 3 segmentos* ($\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE}$) *sejam Azul (caso contrário o argumento será análogo), ver figura.*

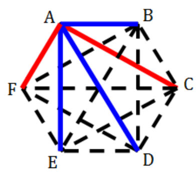

Figura 13: Criança A conhece três crianças.

Agora, se algum dos segmentos $\overline{BE}, \overline{BD}$ *ou* $\overline{DE}$ *(lado do triângulo BDE) for Azul, então este segmento junto aos que se ligam com A, formam um triângulo Azul, ver figura.*

Do contrário, se nenhum deles for Azul, então eles formam um triângulo de lados na cor Vermelha, o que completa a demonstração.

Triângulo na cor Azul indica que as crianças se conhecem e triângulo na cor Vermelha indica que as crianças não se conhecem.

$\diamondsuit$

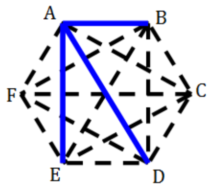

Figura 14:

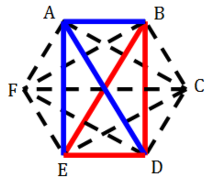

Figura 15: Três crianças que não se conhecem mutuamente.

Exemplo 5.6 *Considere cinco pontos reticulados*[4]*, distintos, no plano* $\mathbb{R}^2$*. Mostre que ao menos um dos segmentos definidos por esses pontos possui um ponto reticulado como seu ponto médio (veja proposição* 24.2 *do livro [11] página 237).*

Sabemos, da geometria analítica, que as coordenadas do ponto médio de um segmento $\overline{XY}$ *é dado pela média aritmética das coordenadas dos pontos* X *e* Y*. Sejam os pontos reticulados e distintos:*

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3),\ D(x_4, y_4) \text{ e } E(x_5, y_5)$$

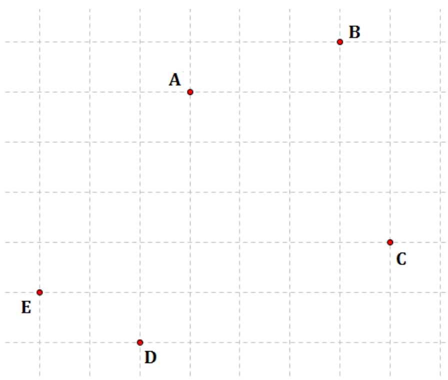

Figura 16: Pontos Reticulados.

Podemos formar $\binom{5}{2} = 10$ *segmentos de retas distintos com extremos nesses pontos, ver figura.*

As coordenadas de um ponto reticulado vão assumir valores pares ou ímpares e podem ser classificadas:

(par, par), (par, ímpar), (ímpar, par) ou (ímpar, ímpar)

[4]Ponto Reticulado é todo ponto cujas coordenadas são ambas números inteiros. Por exemplo: (0,0), (2,5) e (-1,3) são pontos reticulados, mas $(\sqrt{2}, 1)$ não é.

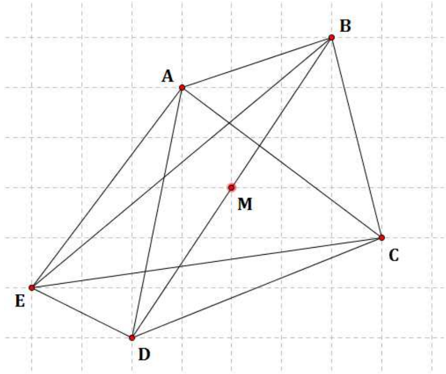

Figura 17: Pontos reticulados ligados dois a dois.

- *Objetos: Os cinco pontos reticulados;*
- *Gavetas: Os quatro tipos de paridade;*
- *Regra: Cada ponto reticulado está associado a sua paridade.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *pelo menos dois desses pontos vão ter a mesma paridade. Suponhamos que estes pontos tenham coordenadas* (x_i, y_i) *e* (x_j, y_j), *com* $1 \leq i \neq j \leq 5$. *O ponto médio desse segmento tem coordenadas do tipo:* $(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$. *Como* x_i *e* x_j *tem a mesma paridade, então* $x_i + x_j$ *é par e, assim* $\frac{x_i+x_j}{2}$ *é inteiro. Analogamente,* $\frac{y_i+y_j}{2}$ *é inteiro. Na figura 17, temos que o ponto médio* M *de* $\overline{BD}$ *é reticulado.*

$\diamondsuit$

Exemplo 5.7 *Suponha que todos os pontos do plano* $\mathbb{R}^2$ *sejam pintados, cada um com uma dentre 2 cores, Vermelha (V) ou Azul (A). Mostre que existem 4 pontos de mesma cor que formam os vértices de algum retângulo.*

Retângulo é um paralelogramo que possui, pelo menos um ângulo reto.

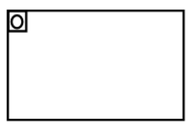

Figura 18: Retângulo.

Queremos que os quatro vértices do retângulo tenham a mesma cor. Como temos disponíveis apenas duas cores, vamos imaginar, inicialmente, três pontos distintos P_1, P_2 *e* P_3 *alinhados sobre uma reta* r_1 *- vertical, ver figura:*

- *Objetos: Três pontos alinhados na reta vertical;*
- *Gavetas: Duas cores (Vermelha ou Azul);*
- *Regra: Cada ponto está associado a sua cor.*

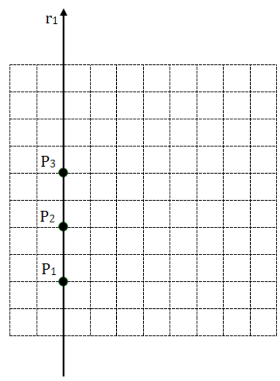

Figura 19: Três pontos alinhados.

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, pelo menos, 2 destes 3 pontos, necessariamente, terão que assumir a mesma cor. Por exemplo:*

$$(V, V, V),\ (V, V, A),\ (V, A, V),\ (A, V, V),\ (V, A, A),\ (A, V, A),\ (A, A, V)\ ou\ (A, A, A)$$

Encontramos 8 configurações de cores. Tome três retas t_1, t_2 *e* t_3 *perpendiculares à* r_1*, passando cada uma, por cada um dos três pontos alinhados* P_1, P_2 *e* P_3*.*

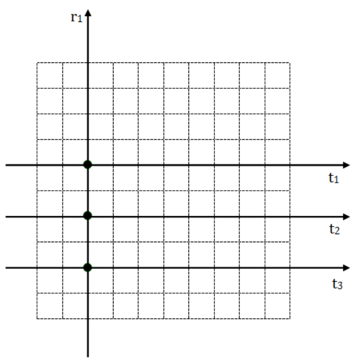

Figura 20: Retas paralelas e perpendiculares à r_1.

Agora, para obtermos retângulos, vamos traçar um feixe de 7 retas, $r_2, \ldots, r_8$ *paralelas e distintas à* r_1*. A intersecção de cada uma dessas 7 retas:* $r_2, \ldots, r_8$*, com as 3 retas:* t_1, t_2 *e* t_3*, nos fornece 3 pontos distintos e alinhados que pode assumir uma das 8 configurações de cores encontradas.*

Podemos visualizar retângulos com vértices de mesma cor, mas ainda não é garantido que conseguimos sempre. Para finalizar, basta tomarmos uma reta r_9*, paralela às retas* $r_1, \ldots, r_8$*, e aplicar, novamente, o Princípio das Gavetas* 3.1 *da seguinte maneira:*

- *Objetos: As nove retas paralelas* $(r_1, \ldots, r_9)$*;*
- *Gavetas: As oito configurações de pontos;*
- *Regra: Cada uma das nove retas está relacionada à uma das configurações.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, pelo menos, 2 destas 9 retas, necessariamente, terão que assumir a mesma configuração e sabemos que em cada configuração, pelo menos, dois pontos*

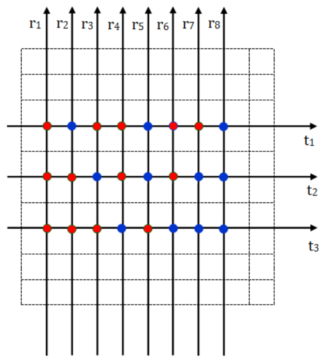

Figura 21: Feixes de retas paralelas e perpendiculares.

possuem uma mesma cor, o que nos garante que sempre teremos algum retângulo com vértices de mesma cor. Para melhor visualização, vamos supor que a configuração de r_9 seja a mesma de r_5.

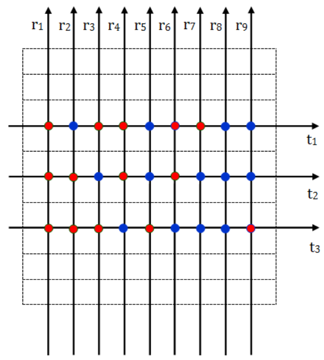

Figura 22: Retângulo com vértices de mesma cor - retas 5 e 9.

Vale ressaltar que, por conveniência, iniciamos o exercício supondo r_1 sendo uma reta vertical, e isto não precisa ser obrigatório. Basta termos três pontos alinhados, em qualquer posição, que define a nossa reta r_1 e a partir daqui imaginarmos um feixe de nove retas paralelas. Agora tome um outro feixe de três retas paralelas e perpendiculares às outras nove. A conclusão é idêntica!

$\diamondsuit$

6 Coletânea de Problemas

Apresentamos a seguir uma lista de atividades que podem ser resolvidas utilizando o Princípio da Casa dos Pombos. São problemas interessantes que podem ser utilizados com alunos do Ensino Fundamental e Médio para introduzir o tema. Estes problemas são exemplos e exercícios obtidos dos textos [8] e [10].

6.1 *Quantos estudantes, no mínimo, uma turma precisa conter para que pelo menos dois deles tirem notas iguais no exame final, dado que as notas variam de 0 a 10 e apenas uma casa decimal é utilizada quando necessário?*

6.2 *Suponha agora que as notas possíveis são conceitos A, B, C, D e F. Qual o número mínimo de estudantes para que pelo menos 5 tenham conceitos iguais?*

6.3 *O mapa abaixo representa a divisão do Brasil em suas regiões. Esse mapa deve ser colorido de maneira que as regiões com uma fronteira em comum sejam de cores distintas. Determine o número n de maneiras de se colorir o mapa, usando-se 3 cores. Mostre que em um grupo de 37 alunos existem pelo menos 7 mapas coloridos da mesma maneira.*

Figura 23: Mapa

6.4 *Em um bosque há 180 árvores. Sabe-se que cada árvore tem pelo menos 30 frutos e que nenhuma árvore tem mais de 200 frutos. Prove que existem, pelo menos, 2 árvores nesse bosque com a mesma quantidade de frutos.*

6.5 *Existem 25 milhões de linhas telefônicas em um determinado Estado, identificadas por uma sequência de 10dígitos da forma $NXX - NXX - XXXX$, onde N é um dígito entre 2 e 9, inclusive, X é um dígito qualquer e os primeiros 3 dígitos constituem o código de DDD. Quantos códigos distintos de DDD, no mínimo, o Estado deve admitir para que cada linha telefônica, corresponda uma sequência de 10 dígitos distinta das demais?*

6.6 *Existem 83 casas em uma rua. As casas são numeradas com números entre 100 e 262, inclusive. Mostre que pelo menos 2 casas têm números consecutivos.*

6.7 *Quantas pessoas, no mínimo, devemos ter em um grupo para que possamos garantir a existência de pelo menos duas tendo nomes que começam com a mesma letra? (Considere um alfabeto com 26 letras).*

6.8 *Suponha que os números de RG sejam constituídos de 7 dígitos, quantas pessoas, no mínimo, devemos ter em uma cidade para que se tenha certeza da existência de pelo menos duas com os primeiros dois dígitos (da esquerda) iguais? (admita que um RG possa ter "0" como dígito inicial).*

6.9 *Um restaurante possui 62 mesas com um total de 314 cadeiras. É possível garantir a existência de pelo menos uma mesa com pelo menos 6 cadeiras?*

6.10 *Dados 12 livros de português, 14 de história, 9 de química e 7 de física, quantos livros devemos retirar (sem olhar) para que estejamos certos de termos retirado 6 de uma mesma disciplina?*

6.11 *Mostre que em toda reunião com 10 pessoas existem 3 que se conhecem mutuamente ou 4 que se desconhecem mutuamente. Mostre que, na realidade, o resultado vale mesmo que na reunião só existam 9 pessoas.*

6.12 *Mostre que 1319 divide infinitos números da forma 3, 33, 333, ...*

6.13 *Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos 7 pessoas nascidas no mesmo mês?*

6.14 *40100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos K candidatos responderão de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova".*
Determine o maior valor de K para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

6.15 *40100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos 4 candidatos responderão de modo idêntico às K primeiras questões da prova".*
Determine o maior valor de K para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

6.16 *Os pontos de uma reta são coloridos com 11 cores. Mostre que é possível achar dois pontos com a mesma cor tal que a distância entre eles é um número inteiro.*

6.17 *Selecionam-se oito números distintos no conjunto* $\{1, 2, \ldots, 15\}$. *Mostre que há pelo menos três pares de números selecionados com a mesma diferença entre o maior e o menor número do par.*

6.18 *Durante um período de 44 dias, um nadador vai treinar, pelo menos uma vez por dia, totalizando 70 treinamentos. Mostram que existe um período de dias consecutivos que ele treina exatamente 17 vezes.*

6.19 *Escolhem-se 10 inteiros entre 1 e 100 inclusive. Prove que podemos encontrar dois subconjuntos de números inteiros, disjuntos e não-vazios, de tal modo que obtemos a mesma soma de seus elementos.*

6.20 *Marcam-se 9 pontos em um quadrado de lado 1. Mostre que existe pelo menos um triângulo com área no máximo* $\frac{1}{8}$.

6.21 *Prove que em qualquer conjunto de 51 pontos dentro de um quadrado de lado 1, há sempre três pontos que podem ser cobertos por um círculo de raio 1/7.*

6.22 *Mostre que dados 5 pontos do plano, três a três não colineares, existem 4 pontos que são vértices de um quadrilátero convexo.*

Comentário e agradecimento final

Nesse trabalho podemos perceber a importância do Princípio das Gavetas de Dirichlet e a sua aplicação como ferramenta que nos auxilia nas soluções de alguns exercícios não imediatos. Esse importante assunto pode e deve ser introduzido no Ensino Básico, principalmente, dentro dos descritores: funções, análise combinatória e geometria como técnica na resolução de exercícios de existência. Entendemos que esse tema também contribui para o desenvolvimento lógico dos alunos, despertando-os para uma nova visão da matemática.

Por fim, agradeço a Deus, por estar a minha frente me direcionando e iluminando o meu caminho. Aos meus pais, João (in memorian) e Luiza pelo carinho e exemplo de vida. A minha namorada Larissa Maris pelo apoio e incentivo durante meus estudos. Aos professores do PROFMAT, UFSJ/CAP, especialmente ao meu orientador professor Dr. Marcelo Oliveira Veloso, pela dedicação durante a orientação desse trabalho de conclusão. Aos companheiros de sala: Alessandro, Daniela, Divalde, Emerson, Fernanda, Helbeth, Janine, Jordan, Leonardo, Lucimar, Luiz Daniel, Marcelo, Sérgio e Vladimir pelos bons momentos de estudos. Aos amigos Professores e Funcionários da Escola Estadual Dom Pedro II, Ouro Preto, pelo apoio durante esses dois anos estudos.

Referências

[1] L. Lovász & J. Pelikán & K. Vesztergombi; *Matemática Discreta.*, SBM, 2005.

[2] A. César Morgado & J. Bosco Pitombeira de Carvalho & P. Cézar Pinto de Carvalho & P. Fernandez; *Análise Combinatória e Probabilidade.*, SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[3] J. Plínio de Oliveira Santos & E. Luis Estrada; *Problemas Resolvidos de Combinatória.*, Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2011.

[4] J. Plínio de Oliveira Santos & M. Pinheiro Mello & I.Theresinha Calzolari Murari; *Introdução à Análise Combinatória.*, Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

[5] A. Caminha Muniz Neto; *Tópicos de Matemática Elementar - Vol. 8.*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[6] A. Hefez; *Elementos de Aritmética.*, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[7] A. Hefez; *Aritmética - Coleção PROFMAT.*, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[8] J. Plínio de Oliveira Santos; *Introdução à Teoria dos Números.*, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[9] K. Irraciel Martins Oliveira & A. José Corcho Fernández; *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.*, SBM, Rio de Janeiro, 2010.

[10] E. Lages Lima & P. Cézar Pinto de Carvalho & E. Wagner & A. César Morgado; *A Matemática do Ensino Médio - Vol. 2.*, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[11] E. R. Scheinerman; *Matemática Discreta - Uma introdução.*, Cengage Learning, 2011.