UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Destacando nuances do ensino de geometria analítica e sugestões para uma nova abordagem no ensino básico

Allan de Souza Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2014.

Allan de Souza Rodrigues

Destacando nuances do ensino de geometria analítica e sugestões para uma nova abordagem no ensino básico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos

São Cristovão
Abril de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Destacando nuances do ensino de geometria analítica e sugestões para uma nova abordagem no ensino básico

por

Allan de Souza Rodrigues

Aprovada pela Banca Examinadora:

Zaqueu Alves Ramos

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador

Ives Lima de Jesus

Prof. Dr. Ives Lima de Jesus - IFBA
Primeiro Examinador

André V. S. Dória

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 11 de abril de 2014

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Sumário

Agradecimentos

Tua é, Senhor, a magnificência, e o poder, e a honra, e a vitória, e a majestade; porque teu é tudo quanto há nos céus e na terra; teu é, Senhor, o reino, e tu te exaltaste por cabeça sobre todos.

*E riquezas e glória vêm de diante de ti, e tu dominas sobre tudo, e na tua mão há força e poder; e na tua mão está o engrandecer e o dar fora a tudo. Agora, pois, ó Deus nosso, graas te damos, e louvamos o nome da tua glória.(***1 Crônicas 29:11-13)**

Concluir um trabalho, sem dúvidas é o resultado de muitos esforços e estes, sem dúvidas, não vêm de uma única pessoa. Neste momento de conclusão, muitos são os nomes que passam por minha cabeça e a página torna-se extremamente pequena para agradecê-los como deveria. Dessa forma agradeço:

• Primeiramente, à Deus por toda força, direção e sustentação nesta árdua caminhada;

• À minha família, base de tudo, obrigado por todo encorajamento, compreensão e apoio;

• Ao meu orientador, Zaqueu Alves Ramos, este, sem dúvidas, foi mais que um orientador, mais que um professor, foi um verdadeiro amigo, obrigado por todo auxílio, por cada palavra, por cada orientação, por cada ensinamento, por toda dedicação destinada a este trabalho, pela paciência e por todo conhecimento que passastes para mim. Palavras não podem descrever tamanha gratidão. Aproveito a oprtunidade, para agradecer também à sua mãe Dona Marizete, por toda sua hospitalidade e sábias palavras;

• Aos meus amigos, em especial, aos 19 que o Mestrado me deu a honra de conhecer, Amintas, Anderson, André, Chicão, Elton, Flávio, Iris, Jimmy, Zé Luiz, José Carlos, Kennedy, Paulo, Regene e Marcone. Sem esquecer daqueles que além de amigos foram também meus companheiros de orientação e meus instrutores de TEX, Lucas e Verônica, vocês não tem noção de como foram importantes para mim durante todo o curso, e aqueles que além de amigos se tornaram irmãos que é o caso de Antônio, Edi-Ackel e Janaína, esta parece que conheço faz uma eternidade, tamanha nossa afinindade. Muito obrigado a todos vocês;

• Ao meu vizinho e sua esposa, mais que amigos, irmãos, pessoas com quem pude contar em todos os momentos;

• À todos os irmãos em Cristo da Igreja Presbiteriana que certamente estiveram orando por mim durante esses dois anos;

• À SBM por propiciar aos professores de Matemática da Educação Básica brasileira acesso a um programa de mestrado tão abrangente e eficiente quanto o PROFMAT.

• A UFS, na pessoa do coordenador do PROMAT André Vinícius Santos Dória e de todos os Professores que acreditaram, aceitaram e participaram deste desafio de aprimorar os Professores da Educação Básica;

• À agência financiadora Capes pelo apoio dado ao longo do curso.

Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho e conclusão deste curso.

Resumo

A geometria analítica é um tema bastante importante em matemática que possibilita a comunicação com diversos outros temas. Todavia, essa característica versátil da geometria analítica acaba sendo pouco explorada na maioria das abordagens e o que se percebe é o ensinamento mecânico de manipulações algébricas sem contextualizações. Nesse trabalho pretendemos apontar nuances que visam colaborar com a correção dessa postura equivocada de apresentação da geometria analítica.

Palavras-chave: geometria analítica, nuances, comunicação e manipulações algébricas

Abstract

Analytic geometry is a very important topic in mathematics that enables communication with several other topics. However, this versatile feature of analytic geometry ends up being little explored in most approaches and what we see is the mechanical teaching algebraic manipulations without contextualization. In this work attempts to point out nuances that aim to collaborate with correcting this mistaken position presentation of analytic geometry.

Key-words: Analytic geometry, nuances, communication e algebraic manipulations

Introdução

A geometria analítica é um assunto cuja beleza se baseia em dois adjetivos: simplicidade e eficácia. É realmente surpreendente como a ideia simples de associar pontos de um plano a pares ordenados de números acabou desencadeando um vasto legado a toda matemática moderna. Por exemplo, áreas nobres como a geometria diferencial e algébrica possuem em seus fundamentos os princípios da geometria analítica.

Apesar da importância da geometria analítica para a matemática e áreas afins, o que se percebe no ensino desta disciplina é uma série de equivocos que obscurecem o seu aprendizado. Como sabemos, a geometria analítica é uma via de mão dupla, que permite tratar algebricamente questões geométricas e, de forma recíproca, tratar geometricamente questões algébricas. Contudo, a maneira que esta disciplina é apresentada na grande maioria dos livros didáticos enfatiza exageradamente o raciocínio algébrico em detrimento do geométrico. Tais abordagens acabam disciplinando o aluno em uma postura errônea de encarar os problemas, onde ele manipula os símbolos algébricos mecanicamente sem se preocupar com seus significados.

Neste trabalho nosso principal objetivo é chamar a atenção para os excessos algébricos e propor uma apresentação mais equilibrada da geometria analítica. Ressaltamos, de uma vez por todas, que não é do nosso interesse escrever um texto com o conteúdo da disciplina, mas de apontar fatos que não são observados usualmente nas referências bibliográficas tradicionais.

Para realizar esta empreitada, dividimos o texto em três capítulos os quais passamos a descrever brevemente a partir de agora.

No Capítulo 1 iniciamos apresentando o sistema de coordenadas cartesianas sem necessariamente exigir a condição de ortogonalidade entre os eixos coordenadas. Logo em seguida justificamos o motivo desta configuração entre os eixos ser a mais escolhida. Chamamos a atenção nessa parte do texto para conjuntos de pontos descritos por equações cartesianas que descrevem outros tipos de subconjuntos de pontos que não sejam retas, circunferências ou cônicas. Também damos ênfase nesse momento à conjuntos de pontos determinados por inequações cartesianas. Na última seção do capítulo entramos na discussão referente a ausência de geometria do ensino da geometria analítica, mostrando através de exemplos a ocorrência desse fenômeno.

No Capítulo 2 nos aprofundamos na questão da construção e análise do esboço de gráficos determinado por equações cartesianas. Tratamos das descrições de certos tipos de simetrias planares tanto do ponto de vista sintético (i.e., sem uso de coordenadas) quanto analítico (i.e., com uso de coordenadas). Outra questão que lidamos é sobre a convexidade - para decidir como uma curva determinada por uma dada equação se curva no plano - e sobre a limitação. Finalmente, discutimos na última seção do capítulo como usar os recursos acima citados para determinar características dos gráficos determinados por equações cartesianas.

No Capítulo 3 fazemos a conclusão do trabalho, exibindo ponderações sobre como encontra-se o ensino de matemática na educação básica, em especial, o ensino da geometria analítica, mostrando a necessidade de uma apresentação mais equilibrada dos conteúdos de matemática dos ensinos fundamental e médio.

Capítulo 1

Um breve discussão sobre o ensino da geometria analítica

Como já mencionado na introdução, o objetivo deste trabalho não é construir toda a geometria analítica, nem muito menos fazer as demonstrações de fórmulas que certamente já fazem parte das referências usuais do ensino médio. O objetivo deste texto é mostrar nuances do ensino desta matéria que são de extrema importância e que muitas vezes acabam sendo despercebido por parte do docente. Também desejamos chamar atenção para os excessos algébricos, que se opõe a escassez geométrica, presente na maioria dos livros didáticos utilizados na escola. É fato que a apresentação da geometria analítica no ensino médio tem tratado tal disciplina sobre um ponto de vista extremamente algébrico baseando-se na memorização de fórmulas, chegando até mesmo a fazer com que este conteúdo limite-se a resolução de equações e isto acaba acarretando em um "descaso" com a geometria, omitindo fatos e propriedades que poderiam serem facilitadores da aprendizagem.

1.1 O sistema de coordenadas cartesianas no plano

No ensino fundamental aprendemos, de forma separada, a existência de dois universos matemáticos: o *geométrico* e o *algébrico*. A grosso modo, o universo geométrico se ocupa em estudar figuras e medidas enquanto o algébrico[1] lida com equações. Um dos principais legados de Descartes, é a geometria analítica. Em poucas palavras,

[1]enfatizamos que o significado do termo álgebra nesse contexto está relacionado com seu sentido clássico

esta é uma área da matemática que estabelece uma forma unificada de estudar estes dois universos.

A idéia fundamental segundo a qual a geometria analítica se baseia é através da bijeção existente entre os pontos de um plano Π e o conjunto $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ dos pares ordenados. Esta correspondência biunívoca é realizada da seguinte maneira: inicialmente, escolhemos duas retas x e y no plano que se intersectam em um único ponto O; em seguida coordenamos estas retas a partir do ponto O; depois, dado um ponto P do plano traçamos retas, passanto por este, paralelas às retas x e y; a interseção dessas retas paralelas com as retas x e y determinam, respectivamente, coordenadas a e b; finalmente, associamos ao ponto P o par ordenado (a, b).

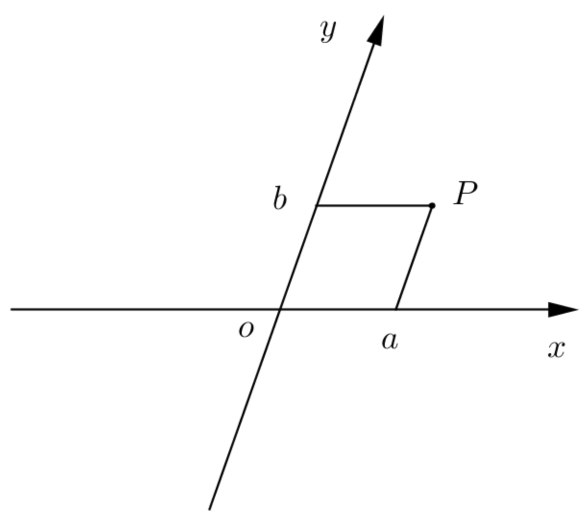

Figura 1.1:

O sistema formado pelo ponto O e as retas x e y é chamado de *sistema de coordenadas cartesianas*. Temos as seguintes nomenclaturas:

- O ponto O é chamado *origem* do sistema;
- As retas x e y são chamadas de *eixos coordenados*;
- A primeira coordenada de P é chamada de *abcissa* e a segunda de *ordenada*.

Observação 1.1.1. Notemos pela definição que os eixos coordenados não precisam ser em geral ortogonais tal como se é ensinado nas referênciais usuais do ensino médio.

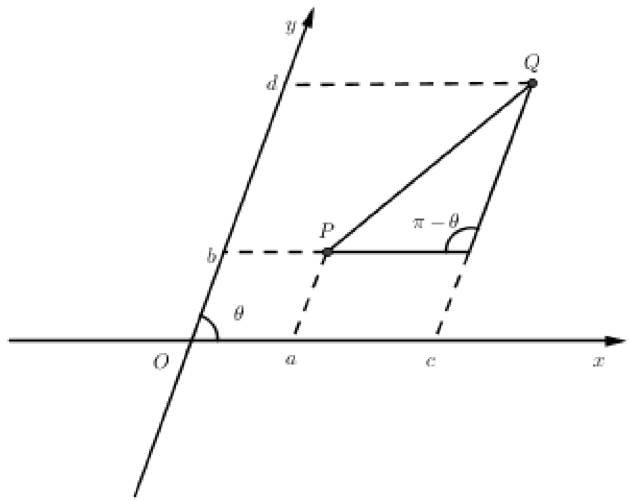

Figura 1.2:

De fato, para a solução de certos problemas essa liberdade na escolha do ângulo entre os eixos se faz bastante útil. Contudo, a justificativa pela preferência do sistema ortogonal é bastante simples e tem haver com o problema de calcular distância entre pontos. De fato, imaginemos $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos em um plano com sistema de coordenadas cartesianas Oxy tal como ilustrado na Figura 1.2. Se θ é o ângulo formado entre os eixos coordenados então, usando a lei dos cossenos, temos que a distância entre P e Q é calculada pela expressão:

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2 - 2(a-c)(b-d)\cos(\pi-\theta)}. \tag{1.1}$$

Assim, quando $\theta = \pi/2$ a expressão (1.1) fica consideravelmente simplificada. Mais especificamente, a distância nesse caso é dada por:

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}. \tag{1.2}$$

Observação 1.1.2. Na primeira série do ensino médio aprendemos uma sucessão de informações a respeito de funções. Entre estas, as noções de função injetora, sobrejetora e bijetora. Contudo, o aluno conclui as demais séries do ensino médio e não é apresentado a ele a importância desses conceitos. Consequentemente, estes acabam caindo em esquecimento. A fase inicial de apresentação da geometria analítica é um momento propício para destacar a importância da noção de bijeção. É uma oportunidade para esclarecer a filosofia de que as bijeções servem como mecanismos de explicar universos distintos, um em função do outro.

Nota histórica: Existem controvérsias a respeito de quem realmente foi o criador da geometria analítica mas, em geral, os créditos são dados ao filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650). A obra em que figura as contribuições de Descartes para o surgimento da geometria analítica é *O discurso do método* publicado em 1637. Descartes se propõe a encontrar um método capaz de resolver qualquer problema. Inicialmente, ele duvida de todas as coisas e depois procura aquelas verdades que são claras e distintas. Em seguida, procura estudar as coisas desconhecidas comparando-as com as verdade claras e distintas. Como apêndices em *O discurso do método*, Descartes elabora três aplicações para ilustrar seu método, a geometria, a dióptrica e os meteoros. É em *A geometria* que Descartes inventa a geometria analítica. Ele observa que a geometria é "difícil" e a álgebra "fácil", e que seu método, nesse caso, se limitava a resolver os problemas difíceis que os gregos haviam proposto através da álgebra, mais clara e fácil de manipular.

1.2 Equações cartesianas

Durante toda antiguidade os matemáticos empregaram boa parte do tempo para estudar curvas que geralmente descreviam lugares geométricos que satisfaziam certas condições. Essas curvas eram o recurso empregado na resolução de problemas para os quais o uso de régua e compasso não obtinha êxito, tais com a duplicação do cubo e quadratura do círculo. Pensando em reconhecer essas características do ponto de vista algébrico passou-se então a estudar estas curvas analiticamente e para isso foram criadas as equações cartesianas.

Definição 1.2.1. Considere um subconjunto $\mathfrak{C}$ de um plano com sistema de coordenadas cartesianas Oxy fixado. Uma *equação cartesiana* deste conjunto $\mathfrak{C}$ é uma equação da forma $F(X, Y) = 0$ tal que seu conjunto solução consiste de todos os pontos (a, b) pertencentes à $\mathfrak{C}$, ou seja,

$$\text{“}(a, b) \in \mathfrak{C} \text{ se, e somente se, } F(a, b) = 0.\text{”}$$

Como já mencionado na seção anterior, a geometria analítica é uma ferramenta que permite uma conexão entre os universos geométricos e algébricos. Esta conexão faz-se muito clara a partir da noção de equação cartesiana.

Exemplo 1.2.2. Suponhamos P um ponto com coordenadas cartesianas (a, b). Uma equação cartesiana para o conjunto $\mathfrak{C} = \{P\}$ é

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = 0.$$

Exemplo 1.2.3. Suponhamos $\mathfrak{C} = \emptyset$. Uma equação cartesiana para este conjunto é

$$X^2 + Y^2 + 1 = 0.$$

Exemplo 1.2.4. Suponhamos $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$ conjuntos de pontos com equações cartesianas $F_1(X, Y) = 0$ e $F_2(X, Y) = 0$, respectivamente. Uma equação cartesiana para o conjunto $\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$ é

$$F_1(X, Y) \cdot F_2(X, Y) = 0.$$

Exemplo 1.2.5. Combinando os exemplos 1.2.2 e 1.2.4 temos que se $P_1, \ldots, P_n$ são pontos cujas coordenadas são respectivamente $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ então a equação cartesiana que descreve o conjunto $\mathfrak{C} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ é

$$((X - a_1)^2 + (Y - b_1)^2) \cdots ((X - a_n)^2 + (Y - b_n)^2) = 0$$

Observação 1.2.6. Usualmente, os subconjuntos do plano que apresentam as equações cartesianas são as retas e as cônicas. Porém, é importante enfatizar que outros subconjuntos também possuem equações cartesianas. No capítulo 2 iremos dar um maior destaque aos conjuntos de pontos determinados por outras equações cartesianas.

Observação 1.2.7. Os exemplos tratados acima são de fácil entendimento e consistem em bons exercícios a serem explorados.

1.3 Inequações no plano cartesiano

Assim como certos conjuntos de pontos do plano cartesiano são conjunto solução de uma equação cartesiana, também podemos pensar conjuntos de pontos que são conjunto solução de uma inequação nas variáveis cartesianas. Em geral, esse é um tema omitido na apresentação da geometria analítica, mas que poderia ser melhor explorado. Exemplos como os que apresentamos são de fácil compreensão e podem auxiliar numa melhor compreensão da interpretação geométrica de fatos algébricos e vice-versa.

Exemplo 1.3.1. Determinar o conjunto de pontos determinado pela inequação

$$aX + bY - c < 0.$$

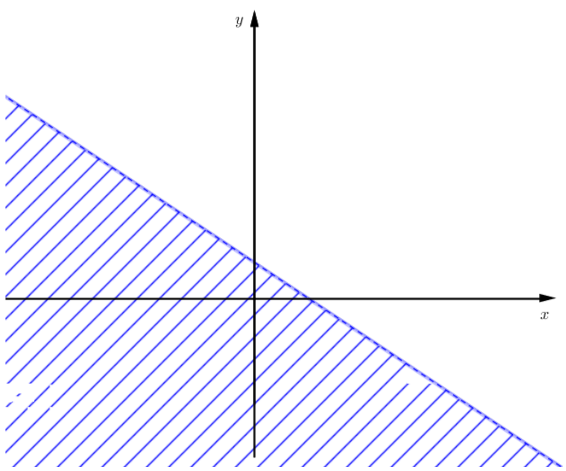

Figura 1.3: Gráfico quando $b > 0$

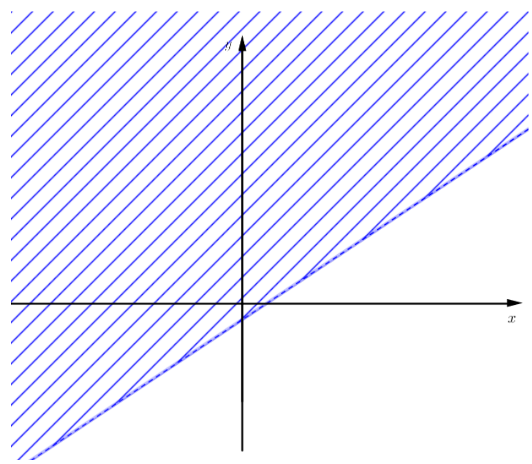

Figura 1.4: Gráfico quando $b < 0$

Notemos que no caso em que $b > 0$ a inequação é equaivalente a $y < -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Daí fica imediato observar que um ponto (x, y) satisfaz esta inequação se, e somente se, o ponto estiver abaixo da reta $ax + by = c$ tal como ilustra a figura acima.

Para o caso em que $b < 0$ basta observar que a inequação dada é equivelente nessa situação a $y > -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Exemplo 1.3.2. Determinar o conjunto de pontos determinado pela inequação

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 \leq r^2$$

Note que a desigualdade $(X - a)^2 + (Y - b)^2 \leq r^2$ significa dizer geometricamente que o ponto (x, y) dista r ou menos que r do ponto (a, b). Assim, se (x, y) satisfaz

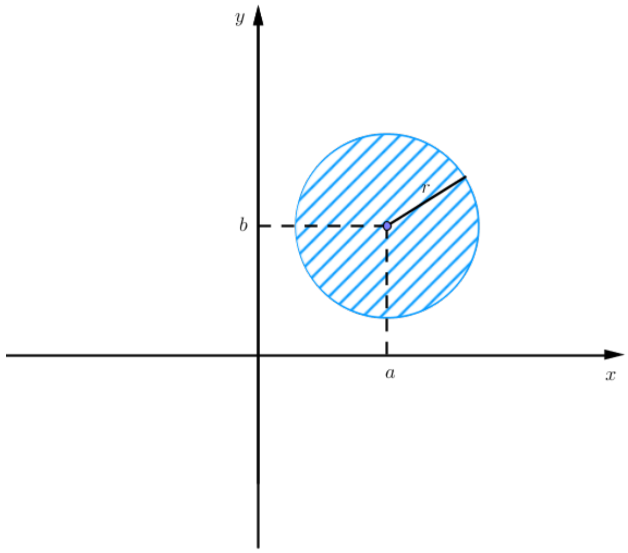

Figura 1.5:

a desigualdade ele deve ser um ponto do círculo. Por outro lado, claramente cada ponto do círculo com raio r e centro (a, b) satisfaz a desigualdade.

Exemplo 1.3.3. Determinar o conjunto de pontos determinado pelas inequações

$$0 < r_1 < (X - a)^2 + (Y - b)^2 < r_2$$

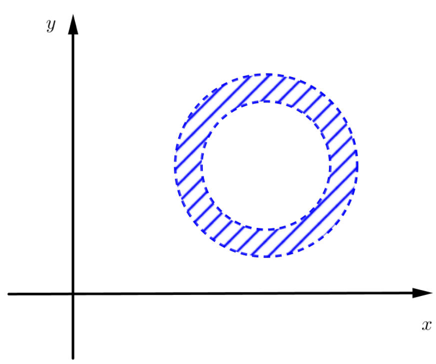

Figura 1.6:

1.4 Dificuldades com a geometria

Um inconveniente percebido no ensino da geometria analítica é com respeito a falta de conhecimento geométrico por parte dos alunos. Isso acontece pelo fato de que se é ensinado durante os anos do ensino fundamental muitas manipulações algébricas e pouca geometria. Para se ter ideia desse problema, basta fazer uma consulta em uma turma para saber quantos dos alunos tem conhecimento dos axiomas da geometria euclidiana (em geral a resposta não será nada animadora).

Possivelmente, um bom ponto de partida para se iniciar a apresentação do contéudo de geometria analítica seja através do uso da própria geometria sintética - i.e. a geometria sem uso de coordenadas, deduzida pura e simplesmente a partir dos axiomas de Euclides - para efeito de motivação.

Vejamos o seguinte exemplo para ilustrar o que seria uma prova baseada puramente em manipulações algébricas e uma outra que utiliza propriedades geométricas

Exemplo 1.4.1. *Calcule o comprimento da corda determinada pela interseção da reta* $\sqrt{2}x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$ *e a circunferência* $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 6y - 14 = 0$.

Solução 1: Primeiro precisamos determinar as coordenadas dos pontos de interseção entre a reta e a circunferência. Para isso, devemos encontrar a solução dos sistema

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \frac{2}{3}y - 1 & = & 0 \\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 6y - 14 & = & 0 \end{cases}.$$

Isolando o valor de y na primeira equação e substituindo na segunda temos:

$$x^2 + \left[\frac{3}{2}(1 - \sqrt{2}x)\right]^2 - 2\sqrt{2}x - 6\left[\frac{3}{2}(1 - \sqrt{2}x)\right] - 14 = 0$$

Simplificando esta equação obtemos:

$$22x^2 + 10\sqrt{2}x - 83 = 0$$

Resolvendo esta equação do segundo grau obtemos

$$x = \frac{-10\sqrt{2} \pm \sqrt{7504}}{44}$$

Fazendo substituições para encontrar o valor de y obtemos:

$$y = \frac{48 \mp 3\sqrt{738}}{22}$$

Assim, os pontos de interseção entre a reta e a curva são:

$$P = \left(\frac{-5\sqrt{2} + 2\sqrt{469}}{22}, \frac{48 - 3\sqrt{738}}{22} \right)$$

e

$$Q = \left(\frac{-5\sqrt{2} - 2\sqrt{469}}{22}, \frac{48 + 3\sqrt{738}}{22} \right).$$

Assim, o comprimento da corda é

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{-5\sqrt{2} + 2\sqrt{469}}{22} - \frac{-5\sqrt{2} - 2\sqrt{469}}{22} \right)^2 + \left(\frac{48 - 3\sqrt{738}}{22} - \frac{48 + 3\sqrt{738}}{22} \right)^2} = \frac{\sqrt{10318}}{11}.$$

$\square$

Solução 2: Completando quadrados na equação da circunferência temos que a mesma pode ser escrita na forma

$$(x - \sqrt{2})^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Assim, vemos que a circunferência determinada por esta equação tem centro no ponto $C = (\sqrt{2}, 3)$ e raio igual a 5. Notemos que a distância d do ponto C à corda determinada pela interseção da reta com a circunferência é:

$$d = \frac{\left| \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 \right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{9 \cdot \sqrt{22}}{22}.$$

Sejam P e Q os pontos de interseção da reta com a circunferência. Temos que os lados $\overline{PC}$ e $\overline{CQ}$ possuem o mesmo comprimento e que o pé da altura R desse triângulo, referente ao vértice C, divide o lado $\overline{PQ}$ ao meio (ver figura abaixo).

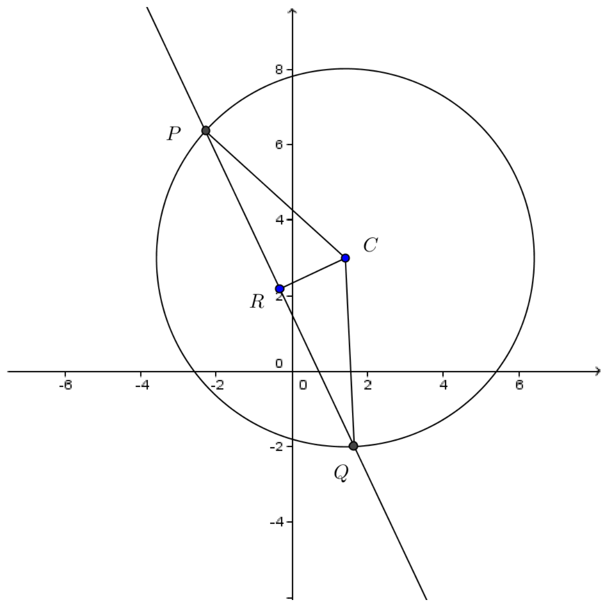

Figura 1.7:

Usando os fatos de que $\overline{CR} = d = \frac{9 \cdot \sqrt{22}}{22}$, $\overline{CP} = 5$ e que o triângulo CPR é retângulo, temos pelo teorema de Pitágoras as seguintes igualdades

$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CR}^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{9 \cdot \sqrt{22}}{22}\right)^2} = \frac{\sqrt{10318}}{22};$$

logo,

$$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{PR} = \frac{\sqrt{10318}}{11}.$$

$\square$

A primeira solução usa simplesmente a interpretação algébrica dos fatos. Não se preocupa com o reconhecimento dos elementos geométricos contidos no enunciado do problema. Tipicamente, esta primeira solução, ou algo próximo a ela, seria a maneira que muitos alunos escolheriam para resolver o problema. Como percebe-se, é uma método que soluciona, porém não é muito inteligente, pois as contas que aparecem são demasiadamente exaustivas. Já a segunda solução, por considerar não somente a álgebra, mas também a geometria do problema, faz-se bem mais econômica em termos de contas. Exemplos como o Problema 1.4.1 são interessantes pois ensinam que não devemos olhar para uma equação cartesiana apenas do ponto de vista algébrico, devemos fazer uma leitura crítica delas e extrair o que elas nos oferece de informações geométricas.

O exemplo a seguir foi retirado de [3]. Nós apreciaremos duas soluções, a óbvia e a sugerida pelo livro.

Exemplo 1.4.2. A distância entre os pontos A e B é 5 u.c. Com base na figura determine as coordenadas do ponto A.

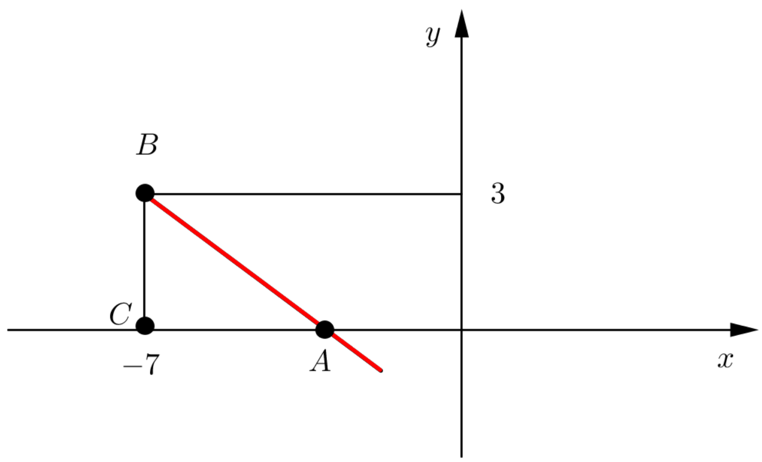

Figura 1.8:

Solução óbvia: Por pitágoras temos: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Daí temos que a distância da origem do sistema ao ponto A é $7 - 4 = 3$. Logo, a abcissa do ponto A é -3.

Solução sugerida pelo livro: Digamos que $(x, 0)$ sejam as coordenadas do ponto A. Sabendo que as coordenadas do ponto B são $(-7, 3)$ e usando a fórmula da distância temos:

$$5 = \sqrt{(x - (-7))^2 + (0 - 3)^2}$$

$$5 = \sqrt{(x - 7)^2 + 9}$$

$$25 = (x - 7)^2 + 9$$

$$25 = x^2 + 14x + 49 + 9$$

$$x^2 + 14x + 33 = 0$$

Resolvendo esta última equação obtemos $x = -3$ ou $x = -11$.

O exemplo é simples, mas ele revela alguns equívocos na abordagem do livro. Primeiro por ignorar o que realmente importa no exercício, que é o teorema de Pitágoras. Vê-se claramente a ênfase à memorização da fórmula da distância em detrimento do seu significado geométrico. Em seguida, até na própria maneira de manipular as equações a solução do livro envereda pelo caminho da memorização. Em vez de resolver a equação $25 = (x-7)^2 + 9$ de maneira direta, a solução dada pelo livro desenvolve o quadrado e põe a equação em sua forma normal, sugerindo com isso o uso desnecessário da fórmula de Báskara.

Capítulo 2

Estudo de gráficos determinados por equações cartesianas

Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais Oxy e uma equação cartesiana

$$F(X,Y) = 0. \tag{2.1}$$

Uma questão natural é saber como esboçar ou determinar características do conjunto dos pontos do plano determinado pela equação $F(X,Y) = 0$. Por exemplo, qual seria o esboço da curva determinada pela equação

$$X^3 + Y^3 - 3XY = 0? \tag{2.2}$$

Aprendemos nos cursos elementares de geometria analítica a responder esta pergunta para equações da forma:

$$aX + bY = 0, \quad (\text{onde } a^2 + b^2 \neq 0) \tag{2.3}$$

ou

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0 \quad (\text{onde } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0). \tag{2.4}$$

(como sabemos, estas equações correspondem, respectivamente, a retas e cônicas no plano).

Para responder esta questão em um âmbito maior não existe uma receita geral, cada caso exibe um tipo de particularidade. Contudo, existem princípios básicos que quando combinados, e/ou adaptados, podem ser aplicados para se obter informações substanciais em diversas situações. Explorar estes princípios envolve ideias que são bastante úteis para um bom treinamento do raciocínio lógico dedutivo e para uma melhor compreensão da interpretação geométrica de fatos algébricos. Apesar destes aspectos, e da beleza estética inerente ao assunto, este é um tema usualmente omitido. Nosso objetivo neste capítulo é apresentar uma proposta de como esse conteúdo pode ser exposto no ensino médio respeitando-se o conhecimento adquirido nessa etapa da formação escolar.

2.1 Simetrias

A noção de simetria ocorre em vários contextos: na arte, na biologia, na química, na física e etc. Apesar de ser um conceito intuitivamente simples e de fácil compreensão, defini-la em termos matemáticos precisos e gerais é tarefa bastante difícil. Nesta seção trataremos da formalização matemática de certas simetrias planares e em seguida mostraremos, através de exemplos, que estas são ingredientes úteis para determinar o esboço de figuras geométricas planares.

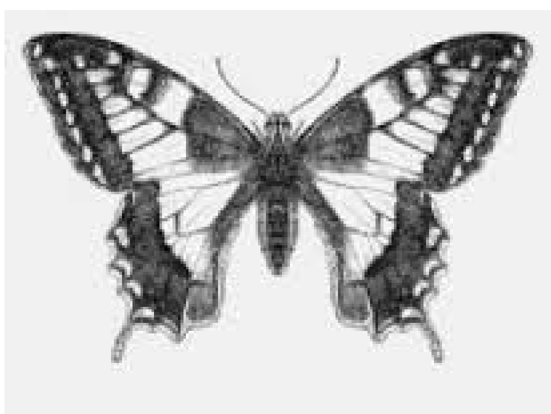

Figura 2.1: Ao mencionarmos que esta é uma figura simétrica, todos entenderão intuitivamente o que queremos dizer com isso. Contudo, dizer o que isso significa em termos matemáticos poucos saberão.

2.1.1 Simetria com respeito a um ponto

Sejam P e C dois pontos em um plano Π

Definição 2.1.1. Um ponto P' do plano Π é dito *simétrico à P com respeito ao ponto C* se o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$ é C. O ponto C é chamado de *centro de simetria*.

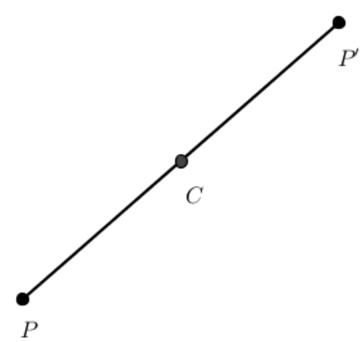

Figura 2.2:

Observação 2.1.2. Notemos que se definirmos o simétrico de C sendo ele próprio então a correspondência que associa a cada ponto P de Π o seu simétrico P' é uma aplicação bijetora de Π em Π.

A definição acima de simetria pode ser generalizada para um conjunto de pontos do seguinte modo:

Definição 2.1.3. Seja F um conjunto de pontos no plano e C um ponto fixado. Dizemos que um conjunto F' de pontos é simétrico a F com respeito a C se:

(a) Cada ponto P de F é simétrico com respeito a C a um ponto P' de F'.

(b) Cada ponto P' de F' é o simétrico com respeito a C de algum ponto P de F.

A figura seguinte ilustra um exemplo de simetria de um conjunto com respeito a um centro de simetria fixado.

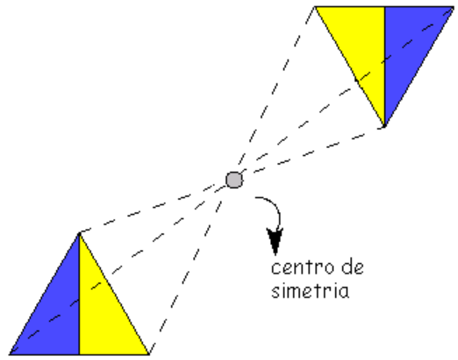

Figura 2.3:

Em termos de coordenadas cartesianas, suponhamos que $P = (x_1, y_1)$ e $C = (x_0, y_0)$. Denotemos por $P' = (x_1', y_1')$ as coordenadas do ponto simétrico a P com respeito à C. Como (x_0, y_0) é ponto médio do segmento $\overline{PP'}$, temos as relações:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + x_1'}{2} \\ \\ y_0 = \dfrac{y_1 + y_1'}{2} \end{cases}.$$

Daí temos que as coordenadas de P' em função dos dados P e C são:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_0 - x_1 \\ y_1' = 2y_0 - y_1 \end{cases}.$$

Observação 2.1.4. Consideremos uma equação cartesiana $F(X, Y) = 0$. Para saber se o conjunto $\mathfrak{C}$ determinado por esta equação é simétrico com respeito a um ponto $C = (x_0, y_0)$ basta verificar a igualdade $F(x_1', y_1') = 0$ para cada ponto $(x_1, y_1) \in \mathfrak{C}$.

Usualmente, a simetria com respeito a um ponto mais fácil de se perceber algebricamente é aquela em que o centro de simetria C coincide com a origem do sistema de coordenadas. De fato, neste caso teremos:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Para esta situação a substituição $F(x', y')$ é bem mais simples em termos de algébricos.

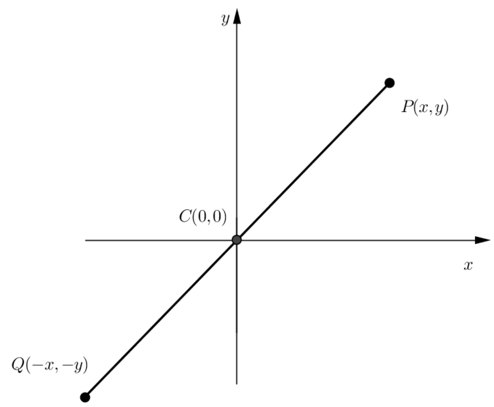

Figura 2.4: Centro de simetria coincidindo com a origem do sistema

Exemplo 2.1.5. Para cada par de inteiros ímpares (m, n) temos que o conjunto de pontos determinado pela equação cartesiana $Y^m - X^n = 0$.

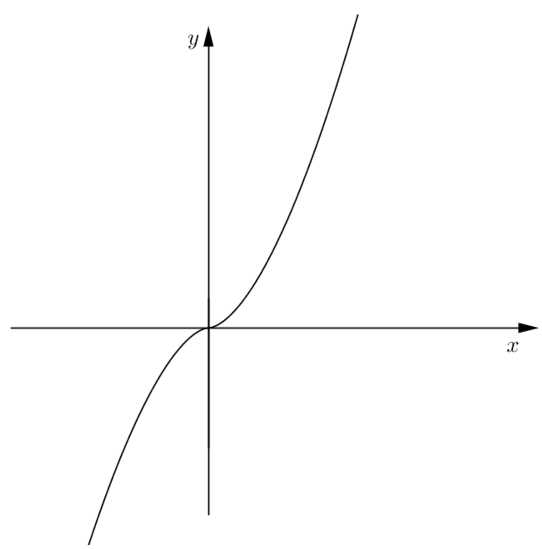

Figura 2.5: Gráfico da equação $X^5 - Y^3 = 0$

Exemplo 2.1.6. A curva $\mathfrak{C}$ determinada pela equação

$$2X^3 + 3Y^2 - 3X^2 + 3XY^2 = 0$$

não é simétrica com respeito a origem pois $(\frac{3}{2}, 0) \in \mathfrak{C}$ e $(-\frac{3}{2}, 0) \notin \mathfrak{C}$.

2.1.2 Simetria com respeito a uma reta

Fixemos um ponto P e uma reta r em um plano Π.

Definição 2.1.7. Um ponto P' em Π é dito *simétrico a P com respeito a reta r* se:

(a) r intersecta o segmento $\overline{PP'}$ em seu ponto médio;

(b) r é perpendicular ao segmento $\overline{PP'}$.

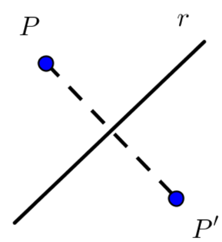

Figura 2.6:

Observação 2.1.8. Se definirmos o simétrico de cada ponto P de r com sendo ele próprio então a correspondência que associa a cada ponto P de Π o seu simétrico P' é uma aplicação bijetora de Π em Π.

De maneira análoga ao que fizemos para as simetrias com respeito a um ponto, também podemos definir simetria com respeito a uma reta para um conjunto de pontos.

Definição 2.1.9. Seja F um conjunto de pontos no plano e r uma reta fixada. Dizemos que um conjunto F' de pontos é *simétrico* a F com respeito a reta r se:

(a) Cada ponto P de F é simétrico com respeito a reta r a um ponto P' de F'.

(b) Cada ponto P' de F' é o simétrico com respeito a reta r de algum ponto P de F.

Em termos de coordenadas cartesianas, suponhamos que $P = (x_1, y_1)$ e que

$$ax + by = c$$

seja a equação cartesiana da reta r. Denotemos por $P' = (x_1', y_1')$ as coordenadas do ponto simétrico a P com respeito à reta r. Notemos que a reta PP' é perpendicular à reta r e passa pelo ponto P, assim, sua equação é dada por

$$-bx + ay = -bx_1 + ay_1$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} ax + by & = & c \\ -bx + ay & = & -bx_1 + ay_1 \end{cases}$$

obtemos que sua solução é o ponto

$$\left(\frac{ac + b^2 x_1 - aby_1}{a^2 + b^2}, \frac{bc + a^2 y_1 - abx_1}{a^2 + b^2} \right).$$

Como este ponto é o ponto médio entre P e P' temos:

$$\begin{cases} x_1' & = & 2\left(\frac{ac+b^2x_1-aby_1}{a^2+b^2}\right) - x_1 \\ \\ y_1' & = & 2\left(\frac{bc+a^2y_1-abx_1}{a^2+b^2}\right) - y_1 \end{cases}$$

Observação 2.1.10. Consideremos uma equação cartesiana $F(X, Y) = 0$. Para saber se o conjunto $\mathfrak{C}$ determinado por esta equação é simétrico com respeito a uma reta r basta verificar a igualdade $F(x_1', y_1') = 0$ para cada ponto $(x_1, y_1) \in \mathfrak{C}$.

Usualmente, as simetrias com respeito a uma reta mais fáceis de se perceber algebricamente são aquelas em que r coincide com uma das seguintes retas:

- a reta $X = 0$
- a reta $Y = 0$
- a reta $Y - X = 0$
- a reta $Y + X = 0$.

Nesses casos as coordenadas do ponto P' ficam, respectivamente:

$$\begin{cases} x_1' & = & -x_1 \\ \\ y_1' & = & y_1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ \\ y_1' &= -y_1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1' &= y_1 \\ \\ y_1' &= x_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x_1' &= -y_1 \\ \\ y_1' &= -x_1 \end{cases}$$

Exemplo 2.1.11. Para cada n par a curva determinada por uma equação cartesiana da forma $Y^n - F(X) = 0$ é simétrica com respeito a reta $Y = 0$.

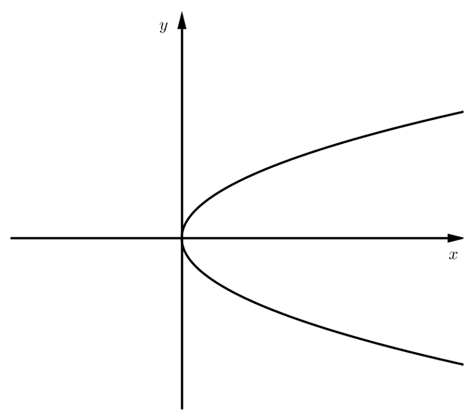

Figura 2.7: Gráfico da equação $Y^2 - X = 0$

2.2 Conjuntos limitados

Definição 2.2.1. Seja S um subconjunto de um plano com coordenadas cartesianas Oxy fixadas. Dizemos que S é *limitado superiormente* (resp. *limitado inferiormente*) com respeito ao eixo das abcissas se existe número real M tal que para cada ponto $P = (x, y) \in S$ tivermos

$$x \leq M \qquad \text{(resp. } M \leq x\text{)}.$$

De maneira análoga definimos conjuntos limitados superiormente (resp., inferiormente) com respeito ao eixo das ordenadas.

Definição 2.2.2. Seja S um subconjunto de um plano com coordenadas cartesianas Oxy fixadas. Se S é limitado superiormente e inferiormente com respeito aos dois eixos coordenados então dizemos que ele é um subconjunto *limitado*.

Exemplo 2.2.3. O conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$$

é limitado.

Exemplo 2.2.4. O conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - 1)^2 x = 1\}$$

é apenas limitado inferiormente com respeito ao eixo das abcissas.

Solução: Notemos que $\frac{1}{(y-1)^2}$ é sempre uma quantidade positiva; logo, para cada $(x, y) \in S$ teremos $0 \leq x$ o que mostra a limitação inferior com respeito ao eixo das abcissas. Agora mostraremos que o conjunto S não é limitado superiormente com respeito ao eixo das abcissas. Assim, devemos exibir para cada $M > 0$ um $(x, y) \in S$ tal que $x > M$. Para isso, basta escolher um $1 < y < \frac{1}{\sqrt{M}} + 1$ e $x = \frac{1}{(y-1)^2}$. Com esta escolha temos $(x, y) \in S$ e $x > M$. A maneira de se demonstrar as demais afirmações é análoga. □

Exemplo 2.2.5. O conjunto

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = \frac{y^2(-y + 3)(y + 1)}{(y - 1)^2}\right\}$$

é limitado inferiormente e superiormente com respeito ao eixo das ordenadas mas não é limitado inferiormente nem superiormente como respeito ao eixo das abcissas.

Solução: Mostraremos inicialmente a limitação superior e inferior com respeito ao eixo das ordenadas. Para isso, suponha $(x, y) \in S$. Como

$$x^2 = \frac{y^2(-y + 3)(y + 1)}{(y - 1)^2}$$

então $(-y+3)(y-1)$ tem que ser maior que 0. Mas isso é verdade se, e somente se,

$$-1 \leq y \leq 3. \tag{2.5}$$

Daí concluímos que S é limitado inferiormente e superiormente com respeito ao eixo das ordenadas.

Agora mostraremos que S não é limitado superiormente nem inferiormente com respeito ao eixo das abcissas. Primeiro mostraremos que para cada $M > 0$ existe $(x, y) \in S$ tal que $x > M$. Primeiro observemos que para cada $1 < y < 2$ temos:

$$1 < y^2, \;\; 1 < -y+3 \;\text{ e }\; 1 < y+1.$$

Desse modo, para cada $1 < y < 2$ temos

$$\frac{1}{(y-1)^2} < \frac{y^2(-y+3)(y+1)}{(y-1)^2}.$$

Agora fixemos um

$$1 < y < \min\left\{2, 1+\frac{1}{M}\right\}$$

Com isso teremos:

$$M^2 < \frac{1}{(y-1)^2} < \frac{y^2(-y+3)(y+1)}{(y-1)^2}.$$

Logo, fazendo

$$x = \sqrt{\frac{y^2(-y+3)(y+1)}{(y-1)^2}}$$

temos $(x, y) \in S$ e $x > M$. A prova para mostrar que S não é limitada inferiormente com respeito ao eixo das abcissas é análoga. □

Proposição 2.2.6. *Se $S_1, \ldots, S_n$ são conjuntos limitados então $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ é conjunto limitado.*

Prova. Como cada S_i $(i = 1, \ldots, n)$ é limitado, então existem números reais K_i, L_i, M_i e N_i tais que

$$K_i \leq x \leq L_i$$

e

$$M_i \leq y \leq N_i$$

qualquer que seja $(x, y) \in S_i$. Consideremos

$$K = \min\{K_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$L = \max\{L_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$M = \min\{M_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

e

$$N = \max\{N_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Agora suponhamos $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Então $(x, y) \in S_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Assim,

$$K \leq K_i \leq x \leq L_i \leq L$$

e

$$M \leq M_i \leq y \leq N_i \leq N.$$

Portanto, $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ é realmente um conjunto limitado. $\square$

Proposição 2.2.7. *Todo subconjunto de um conjunto limitado é também limitado.*

Prova. Imediato. $\square$

Exemplo 2.2.8. O conjunto de pontos determinado pela equação cartesiana

$$((X - a)^2 + Y^2)((X + a)^2 + Y^2) = b^4 \tag{2.6}$$

é limitado.

Solução: Suponhamos que (x, y) seja um ponto de tal conjunto. Então

$$((x - a)^2 + y^2)((x + a)^2 + y^2) = b^4.$$

Em particular:

$$(x - a)^2 + y^2 \leq b^2$$

ou

$$(x+a)^2 + y^2 \leq b^2.$$

Destas desigualdades segue que (x, y) pertence a união do círculo centrado no ponto $(a, 0)$ e raio $|b|$ com o círculo centrado no ponto $(-a, 0)$ e raio $|b|$. Portanto, o conjunto de pontos determinado pela equação cartesiana (2.6) está contido em um conjunto limitado, o que mostra que ele também é um conjunto limitado.

Nota histórica: Em 1694, Jacob Bernoulli publicou um artigo na Acta Eruditorum, no qual descrevia uma curva plana, que designou por *lemniscus*. Catorze anos antes, no ano de 1680, Cassini já tinha descrito, de modo genérico, uma família de curvas planas, que mais tarde passariam a ser chamadas de *ovais de Cassini*. Muito embora a lemniscata de Bernoulli seja um caso particular de uma oval de Cassini, na época de Bernoulli não havia ainda consciência desse fato. Só mais tarde, quando se passou a conhecer propriedades e caracterizações alternativas dessas curvas, é que este fato tornou-se mais evidente. Importantes matemáticos como Gauss e Euler também se ocuparam em estudar a lemniscata. No caso de Gauss, merece destaque suas investigações acerca do comprimento de arco da lemniscata, que o conduziram ao desenvolvimento da teoria das funções elípticas. Quem, contudo, primeiro forneceu uma descrição analítica da lemniscata foi Giovanni Fagnano em 1750. Geometricamente, a oval de Cassini corresponde ao lugar geométrico dos pontos cujo produto das distâncias do ponto à dois pontos fixados é constante.

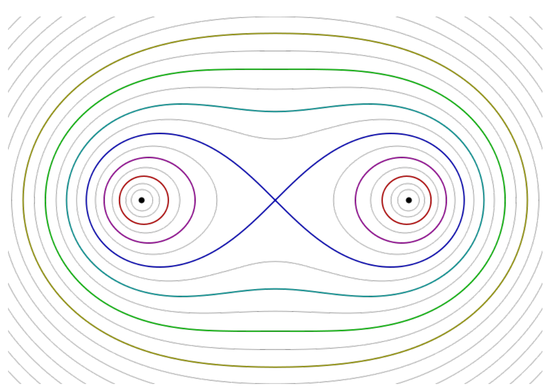

Figura 2.8: Cada linha da figura ilustra a curva correspondente à oval de Cassini de acordo com a escolha dos parâmetros a e b. Se $b^2 < a^2$ então a curva consiste de duas componentes conexas idênticas (na figura, estas são às curvas mais internas). Se $a^2 = b^2$ então temos a lemniscata (na figura, esta corresponde à curva no formato do símbolo do infinito). Se $a^2 < b^2$ então temos a oval de Cassini propriamente dita (na figura, estas correspondem às curvas mais externas).

2.3 Convexidade

Definição 2.3.1. Seja F uma função real em uma variável. Dizemos que F é *função convexa* se para cada a, b no domínio de F tivermos

$$F(at + b(1 - t)) \leq F(a)t + F(b)(1 - t)$$

qualquer que seja t no intervalo $[0, 1]$.

De maneira análoga, definimos funções côncavas

Definição 2.3.2. Seja F uma função real em uma variável. Dizemos que F é *função côncava* se para cada a, b no domínio de F tivermos

$$F(at + b(1 - t)) \geq F(a)t + F(b)(1 - t)$$

qualquer que seja t no intervalo $[0, 1]$.

Geometricamente, dizer que uma função é convexa (resp., côncava) significa que para qualquer dois pontos no gráfico da função os pontos do segmento de reta que liga este pontos situam-se acima (resp., abaixo) dos pontos do gráfico. De maneira imprecisa, o gráfico de uma função convexa (resp., côncava) emborca para cima (resp., para baixo).

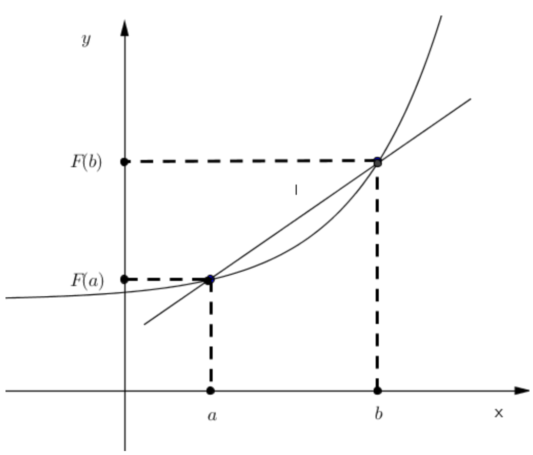

Figura 2.9: Gráfico de uma função convexa

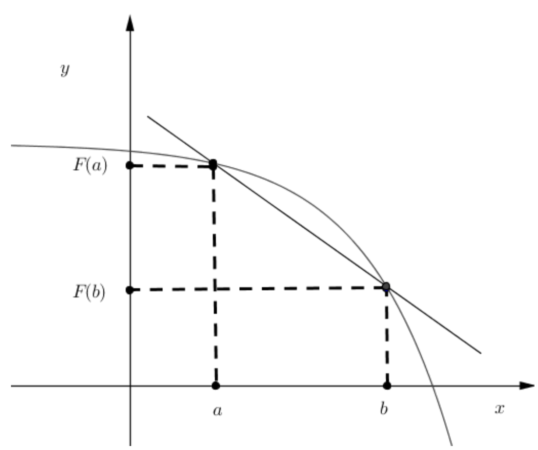

Figura 2.10: Gráfico de uma função côncava

Exemplo 2.3.3. Toda função linear afim é convexa e côncava simultaneamente.

Exemplo 2.3.4. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = x^2$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos para cada $0 \leq t \leq 1$ que

$$\begin{aligned} F(at + b(1-t)) - F(a)t - F(b)(1-t) &= (at + b(1-t))^2 - a^2 t - b^2(1-t) \\ &= a^2(t-1)t + 2ab(1-t)t + b^2(t-1)t \\ &= (t-1)t(a-b)^2 \leq 0; \end{aligned}$$

logo,

$$F(at + b(1-t)) \leq F(a)t + F(b)(1-t).$$

Portanto, a função $F(x) = x^2$ é convexa.

Exemplo 2.3.5. Considere $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \sqrt{x^3}$. Mostrar que esta função é convexa.

Solução: Devemos mostrar que para cada $0 \leq a \leq b$ e $t \in [0, 1]$ temos

$$\sqrt{(ta + (1-t)b)^3} \leq t\sqrt{a^3} + (1-t)\sqrt{b^3}. \tag{2.7}$$

Ora, para provar esta desigualdade podemos considerar a desigualdade equivalente

$$\left(\sqrt{(ta + (1-t)b)^3}\right)^2 \leq \left(t\sqrt{a^3} + (1-t)\sqrt{b^3}\right)^2, \tag{2.8}$$

ou seja, devemos provar que

$$\left(t\sqrt{a^3} + (1-t)\sqrt{b^3}\right)^2 - \left(\sqrt{(ta + (1-t)b)^3}\right)^2 \geq 0, \tag{2.9}$$

Desenvolvendo o primeiro membro de (2.9) obtemos:

$$\left(t\sqrt{a^3} + (1-t)\sqrt{b^3}\right)^2 - \left(\sqrt{(ta + (1-t)b)^3}\right)^2 = \left(t\sqrt{a^3} + (1-t)\sqrt{b^3}\right)^2 - (ta + (1-t)b)^3$$

$$= \left[t^2 a^3 + 2t(1-t)\sqrt{(ab)^3} + (1-t)^2 b^3\right] - \left[t^3 a^3 + 3t^2(1-t)a^2 b + 3t(1-t)^2 ab^2 + (1-t)^3 b^3\right]$$

$$= t^2(1-t)a^3 + t(1-t)^2 b^3 - 3t^2(1-t)a^2 b - 3t(1-t)^2 ab^2 + 2t(1-t)\sqrt{(ab)^3}$$

$$= t(1-t)\left[ta^3 + (1-t)b^3 - 3ta^2 b - 3(1-t)ab^2 + 2\sqrt{(ab)^3}\right]$$

$$= t(1-t)\left[t(a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3) + b^3 - 3ab^2 + 2\sqrt{(ab)^3}\right]$$

$$= t(1-t)\left[t(a-b)^3 + b^3 - 3ab^2 + 2\sqrt{(ab)^3}\right]$$

Como $t(1-t) \geq 0$, para $0 \leq t \leq 1$, segue dessa última igualdade que para concluir o desejado devemos deduzir que

$$t(a-b)^3 + b^3 - 3ab^2 + 2\sqrt{(ab)^3} \geq 0 \tag{2.10}$$

Mas notemos que

$$0 \leq t(a-b)^3 + (b-a)^3$$

para cada $0 \leq t \leq 1$. Assim, para conluir 2.10 é suficiente que

$$t(a-b)^3 + (b-a)^3 \leq t(a-b)^3 + b^3 - 3ab^2 + 2\sqrt{(ab)^3}$$

ou seja,

$$(b-a)^3 \leq b^3 - 3ab^2 + 2\sqrt{(ab)^3} \tag{2.11}$$

ou ainda, equivalentemente,

$$(b-a)^3 \leq b^3 - 3ab^2 + 2\sqrt{(ab)^3} \Leftrightarrow (b-a)^3 - b^3 + 3ab^2 \leq 2\sqrt{(ab)^3}$$

$$\Leftrightarrow -a^3 + 3a^2b \leq 2\sqrt{(ab)^3} \Leftrightarrow (-a^3 + 3a^2b)^2 \leq (2\sqrt{(ab)^3})^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 4(ab)^3 - a^6 + 6a^5b - 9a^4b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^3(4b^3 - a^3 + 6a^2b - 9ab^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 4b^3 - a^3 + 6a^2b - 9ab^2 \Leftrightarrow 0 \leq (b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3) + (3b^2 - 3ab^2) + (3a^2b - 3ab^2)$$

$$0 \leq (b-a)^3 + 3b(b-a) - 3ab(b-a) \Leftrightarrow 0 \leq (b-a)^3 + 3b(b-a)^2.$$

Mas notemos que esta última igualdade é verdadeira pois o segundo membro é soma de números positivos (lembre-se que $0 \leq a < b$). Portanto, temos o resultado. $\square$

Existem funções que não são convexas nem côncavas.

Exemplo 2.3.6. Considere a função $F(x) = x^3$ definida em todo $\mathbb{R}$. Mostrar que esta função não é convexa nem côncava.

Solução: Supondo $a = -1$ e $b = 1$ consideremos $t = 1/3$. Nesse caso temos:

$$F(at + (1-t)b) = \frac{1}{27} \leq \frac{1}{3} = tF(a) + (1-t)F(b)$$

Por outro lado, fazendo $t = 2/3$ temos:

$$F(at+(1-t)b) = -\frac{1}{27} \geq -\frac{1}{3} = tF(a)+(1-t)F(b)$$

Portanto, destas desigualdade segue que $F(x) = x^3$ não é convexa nem côncava. $\square$

Notemos que apresentar funções convexas além de ser uma oportunidade de rever o assunto de inequações (visto no primeiro ano do ensino médio) é também um momento de vê-lo contextualizado e sendo interpretado geometricamente.

Proposição 2.3.7. *Sejam F e G funções reais em uma variável. Então:*

(a) *$F(x)$ é convexa se, e somente se, $-F(x)$ é côncava.*

(b) *Se F e G são funções convexas (resp. côncavas) definidas em um mesmo domínio então $F+G$ é convexa (resp. côncava).*

(c) *Suponhamos que G é uma função convexa crescente e que a imagem de F esteja contida no domínio de G. Se F é convexa então $G \circ F$ é função convexa.*

(d) *Se G é função linear afim crescente e F é convexa então $F \circ G$ é convexa.*

Prova. (a) Suponhamos $H(x) = -F(x)$. Como F é convexa temos:

$$F(at+(1-t)b) \leq tF(a)+(1-t)F(b)$$

para cada a, b no itervalo de definição de F e $t \in [0,1]$.

Multiplicando esta desigualdade por -1 vem

$$-F(at+(1-t)b) \geq t(-F(a))+(1-t)(-F(b)),$$

ou seja,

$$H(at+(1-t)b) \geq tH(a)+(1-t)H(b).$$

Logo, H é côncava como queríamos demonstrar. A prova da recíproca é análoga.

(b) Como F e G são convexas, então para cada a, b no intervalo de definição de F e G e $t \in [0,1]$ temos

$$F(at+(1-t)b) \leq tF(a)+(1-t)F(b)$$

e

$$G(at+(1-t)b) \leq tG(a)+(1-t)G(b).$$

Somando estas deseigualdades vem:

$$\begin{aligned}
(F+G)(at+(1-t)b) &= F(at+(1-t)b)+G(at+(1-t)b) \\
&\leq tF(a)+(1-t)F(b)+tG(a)+(1-t)G(b) \\
&= t(F+G)(a)+(1-t)(F+G)(b)
\end{aligned}$$

Portanto, $F+G$ é realmente convexa. A prova para funções côncavas é análoga.

(c) Como F é convexa então para cada a, b no domínio de F e $t \in [0,1]$ temos

$$F(at+b(1-t)) \leq tF(a)+(1-t)F(b)$$

Desta desigualdade e do fato que G é crescente segue

$$G \circ F(at+b(1-t)) = G(F(at+b(1-t))) \leq G(tF(a)+(1-t)F(b)) \tag{2.12}$$

Por outro lado, como G também é convexa, temos:

$$G(tF(a)+(1-t)F(b)) \leq tG(F(a))+(1-t)G(F(b)) = tG\circ F(a)+(1-t)G\circ F(b). \tag{2.13}$$

Portanto, de (2.12) e (2.13) segue que $G \circ F$ é função convexa.

(d) Como G é função afim crescente então $G(x) = cx+d$ com $c > 0$. Dados a, b e $t \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned}
F \circ G(at+(1-t)b) &= F(c(at+(1-t)b)+d) \\
&= F(cta+c(1-t)b+td+(1-t)d) \\
&= F((ca+d)t+(1-t)(cb+d)) \\
&\leq tF(ca+d)+(1-t)F(cb+d) \\
&= tF(G(a))+(1-t)F(G(b)) \\
&= tF \circ G(a)+(1-t)F \circ G(b).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Portanto, $F \circ G$ é realmente convexa como queríamos demonstrar. □

No exemplo abaixo estudaremos a convexidade de funções polinomiais quadráticas quaisquer utilizando a Proposição 2.3.7 e o Exemplo 2.3.4. O objetivo deste exemplo é mostrar a utilidade da noção de composição de funções.

Exemplo 2.3.8. Mostrar que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = ax^2 + bx + c$ é convexa para qualquer $a > 0$.

Solução: Notemos que podemos rescrever a função F da seguinte maneira:

$$F(x) = \left(\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

(para chegar a este formato basta completar quadrados). Assim,

$$F(x) = S \circ H \circ G(x), \tag{2.15}$$

onde

$$G(x) = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right),$$

$$H(x) = x^2$$

e

$$S(x) = x + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Usando a igualdade (2.15) juntamente com a Proposição 2.3.7 (itens (c) e (d)) temos o desejado. □

2.4 Esboçando gráficos

Nesta seção discutiremos através de exemplos como explorar os recursos apresentados nas seções anteriores para fazer o esboço de conjuntos determinados por equações cartesianas.

Exemplo 2.4.1. Esboçar o gráfico da curva $\mathfrak{C}$ determinada pela equação cartesiana

$$Y^2 - X^3 = 0. \tag{2.16}$$

Solução: Temos as seguintes informações a respeito da curva $\mathfrak{C}$

(1) (x, y) é solução de 2.16 se, e somente se, $(x, -y)$ é solução de 2.16. Logo, a curva $\mathfrak{C}$ é simétrica com respeito ao eixo das abcissas. Assim, basta que conheçamos o traçado de $\mathfrak{C}$ acima do eixo das abcissas para conhecermos-na completamente. De sorte que para conhecermos este pedaço do gráfico necessitamos apenas conhecer os pontos (x, y) que satisfazem a igualdade $y = \sqrt{x^3}$, ou seja, podemos ver y como função de x.

(2) A função $y = \sqrt{x^3}$ é crescente. Logo, para entender o seu traçado podemos explorar a sua convexidade. Mas, pelo Exemplo 2.3.5 temos que esta função é convexa. Assim, seu gráfico deverá ter o seguinte aspecto:

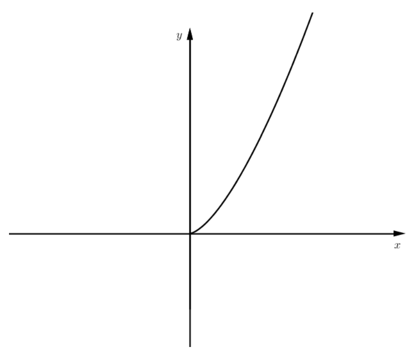

Figura 2.11: Esboco do gráfico da função $y = \sqrt{x^3}$

Finalmente, usando a simetria verificada no item (1) temos que o esboço da curva determinada pela equação 2.16 é:

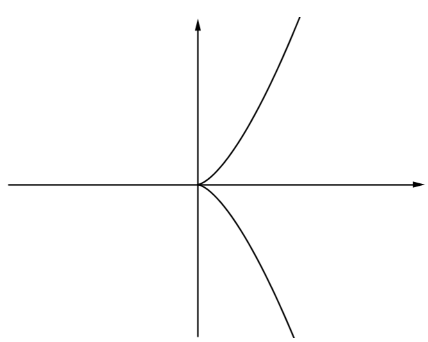

Figura 2.12: Esboço da curva determinada pela equação $Y^2 - X^3$

Problema 2.4.2. *Determinar entre as seguintes figuras qual gráfico melhor representa a curva determinada pela equação cartesiana*

$$(Y-1)^2(X^2+Y^2)=4Y^2 \tag{2.17}$$

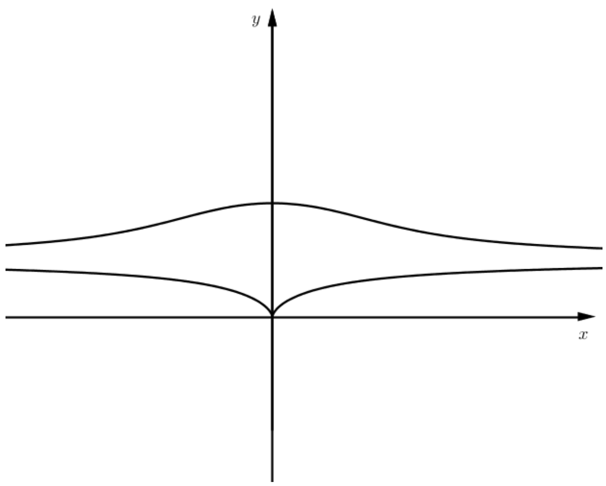

Figura 2.13:

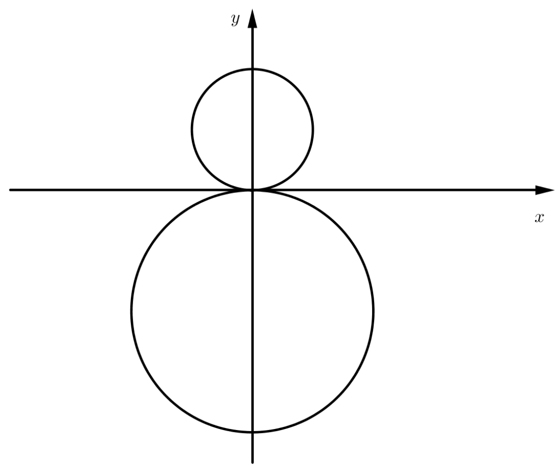

Figura 2.14:

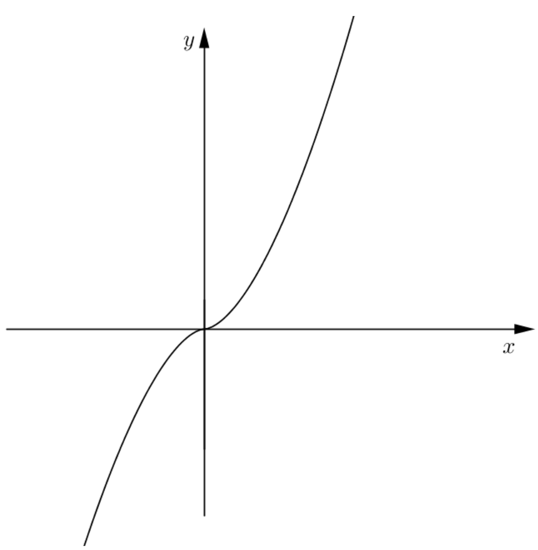

Figura 2.15:

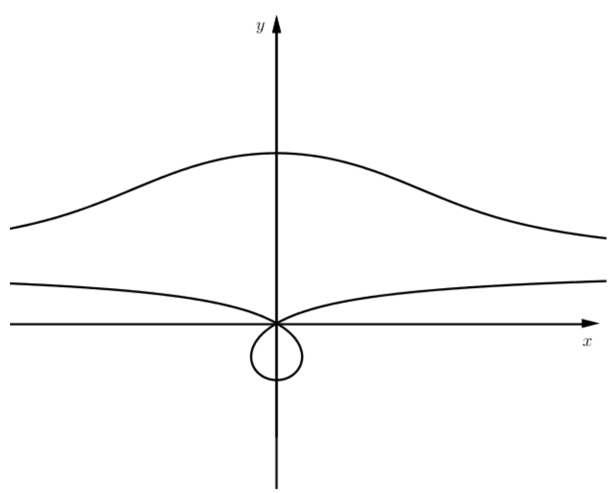

Figura 2.16:

Solução: Notemos inicialmente que fazendo $X = 0$ na equação (2.17) ficamos com a equação

$$(Y-1)^2Y^2 = 4Y^2$$

a qual é equivalente a

$$Y^2(Y-3)(Y+1) = 0$$

cujas raízes são $Y = 0$, $Y = 3$ e $Y = -1$. Desse modo, temos que os pontos $(0,-1)$, $(0,0)$ e $(0,3)$ pertencem à curva. Assim, as figuras 2.13 e 2.15 ficam descartadas pois a ambas intersectam o eixo das ordenadas em menos que três pontos. Por outro lado, a equação (2.17) é equivalente a

$$x^2 = \frac{y^2(-y+3)(y+1)}{(y-1)^2}$$

e o conjunto solução desta equação, segundo o Exemplo 2.2.5, não é limitado. Portanto, a figura 2.14 fica também descartada. Logo a resposta correta é a figura 2.16

$\square$

Nota histórica: Entre os séculos VI a.C. e V d.C. surgiram na Grécia três problemas geométricos que desafiaram matemáticos e intelectuais por mais de dois mil anos. Estes problemas ficaram conhecidos como *Os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega*. Estes são eles:

- *Trissecção do ângulo* - este é o problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais;

- *Duplicação do cubo* - este é o problema de construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;

- *Quadratura do círculo* - este é o problema de construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado.

A dificuldade em resolver estes problemas está na exigência de fazê-los utilizando apenas régua não graduada e compasso. De fato, no século XIX foi mostrado que tais problemas não podem ser resolvidos apenas com o uso de régua não graduada e compasso. Contudo, antes desse período vários matemáticos pensaram ter encontrado soluções para tais problemas, mas estas soluções não seguiam fielmente as restrições de uso exclusivo de régua não graduada e compasso. Uma destas soluções foi apresentada por Nicomedes e nela figurava a curva determinada pela equação (2.17). Em virtude disso, esta curva recebe nos dias de hoje o nome de *concóide de Nicomedes*.

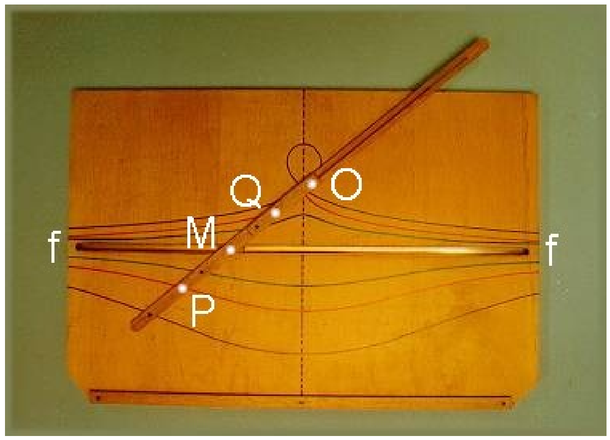

Figura 2.17: Compasso de Nicomedes

Exemplo 2.4.3. Analise as características da curva $Y^3 + X^3 - 3XY = 0$ e indique qual das figuras mais se aproxima do esboço do seu gráfico.

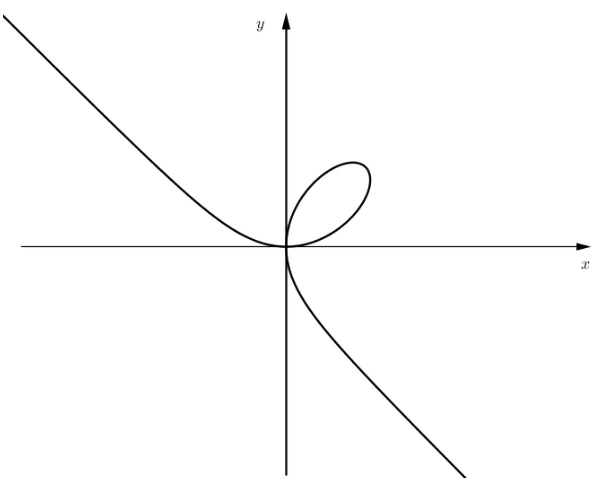

Figura 2.18:

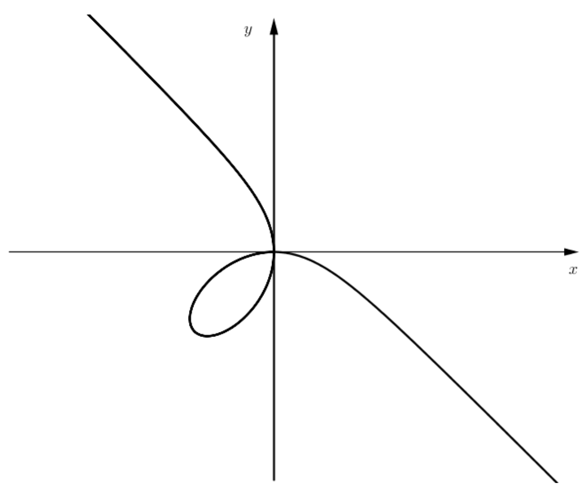

Figura 2.19:

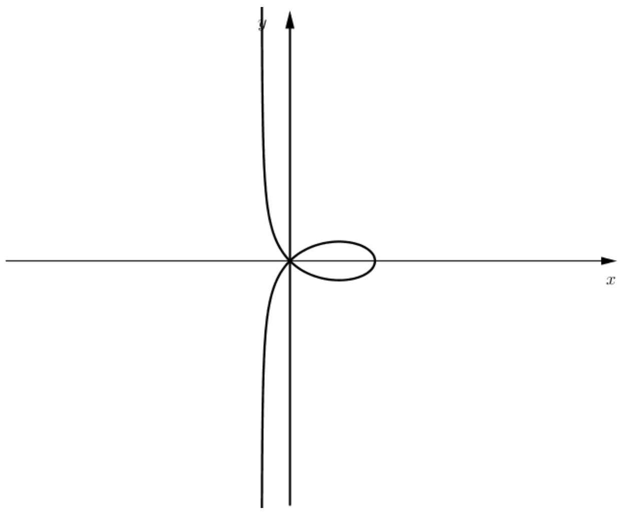

Figura 2.20:

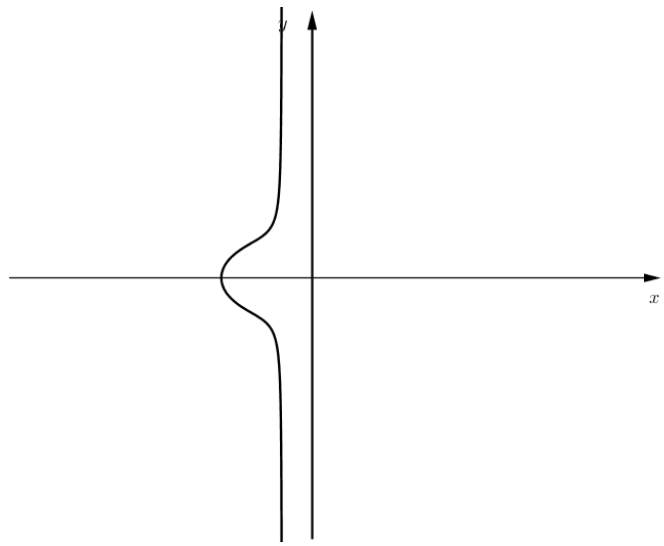

Figura 2.21:

Solução: Inicialmente percebemos com base na equação que esta curva passa pela origem, mas não possui simetria com relação aos eixos ordenados.

Posteriormente verificamos que esta curva não toca os eixos em nenhum outro ponto diferente da origem.

Também vemos que esta curva é simétrica em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares, visto que (x, y) satisfaz a equação se, e somente se, (y, x) satisfaz.

Por fim, notamos que esta curva não passa pelo terceiro quadrante pois y e x não podem ser ambos negativos.

Portanto, com base nestas informações podemos concluir que a figura que melhor representa a curva determinada pela equação $X^3 + Y^3 - 3XY = 0$ é a 2.18.

Capítulo 3

Conclusão

O ensino de matemática tem sido constantemente alvo de críticas. Isto ocorre na maioria das vezes pelo fracasso no aprendizado desta disciplina. Um igrediente que contribui para o acontecimento desse insucesso é a maneira de apresentação de certos conteúdos. Vimos durante todo este trabalho que a geometria analítica possibilita a articulação entre a geometria e a álgebra, devendo o professor, por exemplo, trabalhar o entendimento de figuras geométricas por meio de equações, e o entendimento de equações por meio de figuras geométricas, abandonando a simples apresentação de equações sem explicações geométricas, evitando com isso as memorizações excessivas de fórmulas.

Grande parte dos equívocos na apresentação da geometria analítica é corroborada pelos livros didáticos que muito constantemente não conseguem chegar a um equilíbrio entre conceituação, manipulação e aplicação. De fato, enquanto alguns (poucos) livros formalista priorizam a conceituação, outros (a grande maioria) revela uma forte tendência a preferência pela manipulação, negligenciando demonstrações e justificativas lógicas.

Outro inconvenite percebido na abordagem do assunto em questão diz respeito a ausência do estabelecimento de conexões com outros temas. Além das conexões já citadas no texto o estudo de simetrias serviria muito bem pra se estabelecer as conexões com a a simetria de arcos trigonométricos.

Nosso propósito nesse trabalho foi dar ênfase a geometria, chamar atenção para os excessos algébricos e explicitar através da geometria analítica detalhes que estabelecem ligações entre diversos conteúdos matemáticos do ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] Elon Lages, *Coordenadas no plano*, 2ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992

[2] Vaisencher, Israel, *Introdução às curvas algébricas planas*, IMPA, 1ª edição.

[3] Farago, Jorge Luiz e Carneiro, Lucio, *Matemática ensino médio*, 3ª - Curitiba: Positivo, 2012.

[4] Eves, Howard, *Introdução à história da matemática,* Editora Unicamp, 2007