Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Trabalho de Conclusão de Curso

Lógica Fuzzy

por

Antônio Fernandes Antero Cardoso dos Santos

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão-SE

Abril de 2014

Universidade Federal de Sergipe

Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Lógica Fuzzy

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ANTÔNIO FERNANDES ANTERO CARDOSO DOS SANTOS

Orientador: André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão-SE, Abril de 2014.

PROFMAT
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Lógica Fuzzy

por

Antonio Fernandes Antero Cardoso dos Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:

André V. S. Dória

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Orientador

Ademakson Souza Araújo

Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo - UEFS
Primeiro Examinador

Danilo Felizardo Barboza

Prof. Dr. Danilo Felizardo Barboza - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 15 de abril de 2014

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Dedico este trabalho a minha família.

Agradecimentos

À Deus, pela constante proteção e auxílio durante toda minha vida e em especial durante a execução desse trabalho.

Aos meus pais Antônio José Cardozo e Olindina Antero Cardozo, que me ensinaram quase tudo do pouco que sei e em especial a minha mãe, por todo amor e dedicação empenhados na minha educação e por me ensinar a manter a humildade sempre presente nas minhas ações.

À minha esposa Marciele de Santana Antero que esteve sempre ao meu lado, me revelando o verdadeiro sentido do matrimônio.

À todos os professores e professoras que de maneira direta ou indireta contribuíram com a minha formação intelectual e pessoal, em especial ao professor Acrísio Gonçalves, um "professor-guerreiro"e matemático que me ensinou a apreciar a maravilhosa ciência dos números e das formas.

Aos professores do Profmat, que fizeram seus trabalhos com muita competência e dedicação e em especial ao Professor André Vinícius Santos Dória pela orientação e pela paciência dispensadas no decorrer da construção dessa dissertação.

À Sociedade Brasileira de Matemática, pela iniciativa de criar o Profmat.

À CAPES, pelo auxílio financeiro durante todo o curso.

À todos os meus colegas do Profmat, que contribuíram direta ou indiretamente para realização desse trabalho.

Resumo

Nesta dissertação é feita uma abordagem sobre a fundamentação teórica necessária para o entendimento da lógica Fuzzy, partindo da definição de conjunto Fuzzy, as principais funções de pertinência, as operações e propriedades e as definições de produto cartesiano e relação Fuzzy. Além disso é feita uma explanação sobre a teoria que fundamenta o raciocínio aproximado e uma descrição das etapas que compõem sistemas e controladores Fuzzy. Na etapa final são apresentadas algumas aplicações, a primeira está ligada à computação dos dados referentes à avaliação de uma turma do ensino básico, a segunda mostra como programar um robô para desviar de obstáculos usando a lógica Fuzzy e a terceira apresenta algumas situações que podem ser trabalhadas em turmas do ensino médio com o objetivo de explorar e difundir os recursos matemáticos oriundos da lógica Fuzzy.

Palavras-chave: Conjuntos Fuzzy, lógica Fuzzy, subjetividade.

Abstract

In this thesis an approach is made on the grounds theoretically necessary for the understanding of fuzzy logic, starting the definition of fuzzy set, the main functions relevance, operations and properties and settings Fuzzy Cartesian product and relations. Moreover it is made a explanation of the theory behind the approximate reasoning and a description of steps that comprise systems and controllers Fuzzy. In the final stage are some applications, first one refers to the computation of the data for the assessment a class of primary school, the second shows how to program a robot to avoid obstacles using Fuzzy logic and third shows some situations that can be worked in groups of high school with the aim of exploring and disseminating resources derived from the mathematical fuzzy logic.

Keywords: Fuzzy sets, Fuzzy logic, subjectivity.

Sumário

Introdução

A busca do conhecimento é algo comprovadamente inerente a natureza humana, sendo um dos grandes motivadores do desenvolvimento da ciência, da tecnologia e da sociedade de forma geral, a história mostra que as organizações sociais que tinham como prioridades o conhecimento e a sabedoria obtiveram sucesso e deixaram um legado precioso para as gerações vindouras, a exemplo da Grécia do século III antes de Cristo, onde Aristóteles (384 a.C. à 322 a.C.), em sua obra Organon, idealiza e difunde a lógica aristotélica, a princípio como uma ferramenta ligada a Filosofia com o objetivo de formalizar e organizar o pensamento filosófico.

A lógica aristotélica tinha como princípios fundamentais: a lei da não-contradição que diz que nenhuma afirmação pode ser verdadeira ou falsa ao mesmo tempo e a lei do tercerio excluído que afirma que uma proposição lógica ou é verdadeira ou falsa, não havendo outro valor lógico possível. Essas regras formaram a base da lógica proposicional que por sua vez fundamentou a teoria dos conjuntos.

A teoria clássica dos conjuntos e a teoria das probabilidades, mostraram-se muito úteis, porém nem sempre conseguem captar a maneira como os seres humanos pensam e transmitem informações. A lógica Fuzzy tem como base a capacidade de descrever matematicamente o raciocínio humano, que de forma geral faz uso de aproximações e estimativas, mostrando-se muito mais eficiente na resolução de uma grande variedade de problemas que lidam com conceitos vagos e imprecisos.

Os primeiros trabalhos relacionados a lógica Fuzzy devem-se a Lotfi A. Zadeh, engenheiro eletrônico, professor de teoria dos sistemas na Universidade da Califórnia (Berkeley), que em 1965 publicou um artigo sobre a teoria dos conjuntos nebulosos para tratar as incertezas não probabilísticas.

A teoria introduzida por Zadeh vem se mostrando mais adequada para lidar com informações fornecidas por seres humanos devido a ser menos restritiva. Juntamente com a teoria de probabilidades, a lógica Fuzzy têm sido cada vez mais usada em sistemas de automatização de processos, aliás, os primeiros trabalhos ligados a lógica Fuzzy tinham como objetivo tornar as máquinas capazes de pensar, tomar decisões e raciocinar baseando-se em informações vagas, imprecisas ou ambíguas, reproduzindo a mente humana.

Atualmente, a lógica Fuzzy vem sendo aplicada em problemas com alto nível de complexidade, onde há comportamentos difíceis de serem tratados e problemas onde resultados aproximados são aceitáveis. Entre as aplicações da lógica Fuzzy destacam-se o controle de processos, a aproximação funcional e o apoio à decisão.

Na maioria das aplicações da lógica Fuzzy, a modelagem de informações imprecisas é feita com certa facilidade, pois para descrever e processar esse tipo de informação são utilizadas variáveis linguísticas e uma base de regras Fuzzy, neste caso a utilização da teoria tradicional se torna inviável em razão da complexidade matemática que poderia resultar.

As primeiras aplicações industriais utilizando a lógica Fuzzy começaram na década de 1970. Em 1980 apareceram as primeiras aplicações em engenharia de controle implementadas por algumas companhias japonesas.

A princípio, os sistemas Fuzzy foram ignorados nos Estados Unidos devido a sua associação com inteligência artificial, área que estava desacreditada na época, resultando numa falta de credibilidade por parte da indústria. Os japoneses, por outro lado, demonstraram interesse em sistemas Fuzzy, a exemplo dos pesquisadores Seiji Yasunobu e Soji Miyamoto da Hitachi, que em 1985 apresentaram simulações que mostraram que sistemas de controle Fuzzy eram mais eficientes no controle da estrada de ferro de Sendai. Seus trabalhos foram aceitos e um sistema Fuzzy foi usado para o controle de aceleração, frenagem e parada na linha inaugurada em 1987.

Atualmente a lógica Fuzzy e suas aplicações são objeto de pesquisa no mundo inteiro, destacando-se, por exemplo, os controladores Fuzzy de plantas nucleares, refinarias, processos biológicos e químicos, tratamento de água, reconhecimento de caracteres, sistemas Fuzzy óticos, robôs, piloto automático de helicópteros, sistemas de elevadores e sistema de operação automática de trens.

Neste trabalho foi feito um levantamento da fundamentação teórica que da suporte ao desenvolvimento da lógica Fuzzy, bem como a apresentação de algumas aplicações e problemas que podem ser trabalhados na educação básica. No capítulo 1 é feita uma abordagem da teoria de conjuntos Fuzzy, onde são destacadas as principais diferenças entre conjuntos Fuzzy e conjuntos clássicos. No capítulo 2, é feita a apresentação das principais ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento da lógica Fuzzy, bem como a comparação com a lógica proposicional, é feito também a descrição das etapas pertinentes aos sistemas de controle Fuzzy. No último capítulo é feita a apresentação de algumas aplicações e problemas, onde evidenciamos a praticidade da lógica Fuzzy e sua ampla capacidade de tratar situações que lidam com a incerteza e o raciocínio aproximado.

Capítulo 1

Conjuntos Fuzzy

Na teoria clássica dos conjuntos, um elemento pertence ou não a um dado conjunto. Dado um universo Ω, o grau de pertinência de um elemento x relacionado a um conjunto A, tal que $A \subseteq \Omega$ é dado por $\mu_A(x)$, onde

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad x \notin A \end{cases}.$$

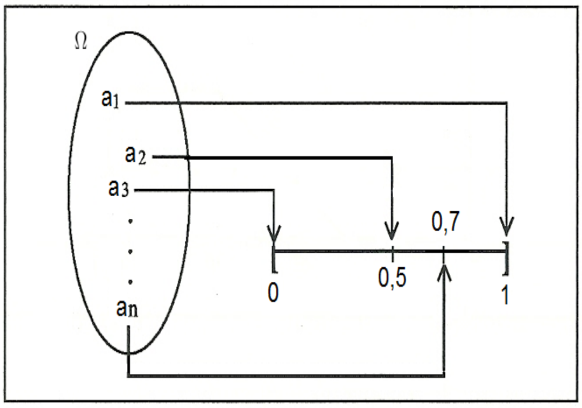
A função $\mu_A(x) : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ é chamada de **função característica**. O que a teoria dos conjuntos Fuzzy propõe é uma caracterização mais ampla, na medida em que se tem a ideia de que alguns elementos são mais membros de um conjunto do que outros, dessa forma o grau de pertinência poderia assumir qualquer valor real entre 0 e 1, sendo o 0 a completa exclusão e o 1 a pertinência completa.

Seja Ω uma coleção de objetos, a qual chamaremos de **universo do discurso**, podendo ser contínua ou discreta.

Definição 1.1. *Um **conjunto Fuzzy** A contido em um universo de discurso Ω é definido por uma função $\mu_A(x)$ que assume valores no intervalo $[0, 1]$, isto é,*

$$\mu_A(x) : \Omega \longrightarrow [0, 1].$$

Tal função é chamada de **função de pertinência** e os elementos do conjunto imagem dessa função são chamados de **graus de pertinência**.



Denotaremos o conjunto Fuzzy A através de pares ordenados

$$A = \{(a, \mu_A(a)) \mid a \in \Omega\}.$$

O **suporte** de um conjunto Fuzzy A é o subconjunto de Ω, composto por todos os elementos a de Ω tal que $\mu_A(a) > 0$. O conjunto Fuzzy cujo suporte possui apenas um elemento a de Ω com $\mu_A(a) = 1$ é chamado de **conjunto unitário Fuzzy**.

Os conjuntos Fuzzy possuem como uma de suas características, a capacidade de representar conceitos imprecisos, de acordo com sua definição podemos encarar tais conjuntos como sendo generalização dos conjuntos clássicos que atribuem valores 0 ou 1 a cada elemento do conjunto universo.

O grau de pertinência de um elemento do conjunto universo em relação a um conjunto Fuzzy expressa o quanto esse elemento se encaixa no conceito representado por esse conjunto Fuzzy. Se A é um conjunto Fuzzy, sua função de pertinência pode ser denotada por $A(x)$, ou seja, o símbolo que representa o conjunto é o mesmo que representa sua função de pertinência.

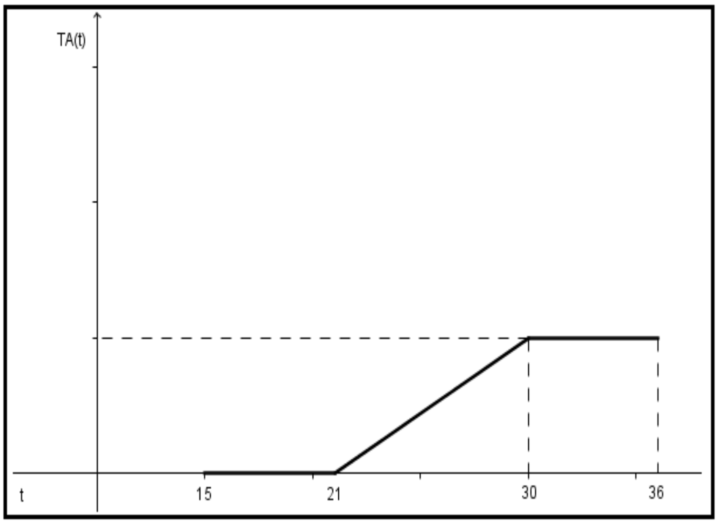
1.1 Representação da função de pertinência

A função de pertinência define completamente o conjunto Fuzzy e pode ser representada das seguintes formas:

1. **Representação gráfica.**

   É a representação feita com o auxílio de um gráfico que fornece a visualização geométrica da função de pertinência, por isso esse tipo de representação é mais conveniente em domínios cujo universo do discurso é o espaço euclidiano ou bidimensional.

Considere, por exemplo, a representação do conceito *temperatura alta* na cidade de Aracaju onde a temperatura varia no intervalo $T = [15, 36]$, em graus centígrados, por meio de um conjunto Fuzzy TA. Com certeza, o valor de temperatura $15°C$ não é considerado *temperatura alta* e, consequentemente, o grau de pertinência do valor $15°C$ ao conceito temperatura alta é zero. Por outro lado, temperaturas a partir de $30°C$ são consideradas altas e, consequentemente, têm um grau de pertinência 1. Portanto, uma representação gráfica para função de pertinência do conjunto Fuzzy TA é o gráfico contido na figura abaixo.



2. **Representação por tabela ou lista.**

Quando se está trabalhando com conjuntos finitos, as funções de pertinência podem ser representadas por tabelas. Esse tipo de representação é caracterizada por uma lista ou tabela na qual os elementos do conjunto são discriminados, juntamente com seus respectivos graus de pertinência ao conjunto. A simbologia utilizada é

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i | x_i,$$

onde a_i é o grau de pertinência de x_i.

Na notação acima, a barra é usada apenas para unir os elementos a seus respectivos graus de pertinência. O sinal de adição (+) indica que os pares $a_i|x_i$ coletivamente formam o conjunto Fuzzy.

Retomando o exemplo anterior, se o universo $T = [15, 36]$ for discretizado e reduzido ao conjunto finito $TD = \{15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}$, o conjunto Fuzzy que representa o conceito *temperatura alta*, graficamente representado na figura acima, pode ser representado por meio da tabela:

$x \in TD$	15	18	21	24	27	30	33	36
TA(x)	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	1

Usando a notação de lista, o conjunto TA pode ser representado por

$$TA = 0|15 + 0|18 + 0|21 + \frac{1}{3}\bigg| 24 + \frac{2}{3}\bigg| 27 + 1|30 + 1|33 + 1|36.$$

Geralmente os elementos para os quais a função de pertinência tem valor 0 não são listados. Dessa forma, TA reduz-se a

$$TA = \frac{1}{3}\bigg| 24 + \frac{2}{3}\bigg| 27 + 1|30 + 1|33 + 1|36.$$

3. **Representação analítica.**

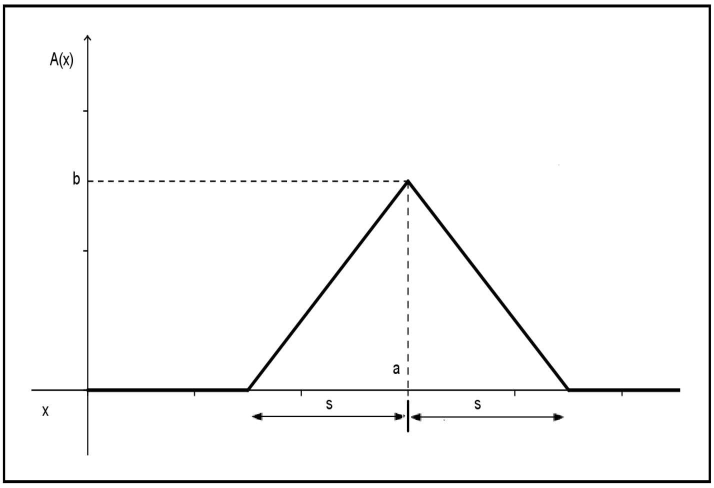
   Nas situações em que o conjunto Fuzzy é definido em um universo infinito, a representação analítica é a mais conveniente, pois nesse tipo de representação todos os elementos do conjunto e seus respectivos graus de pertinência ficam relacionados por meio de uma fórmula, que juntamente com o domínio e o contradomínio escolhidos compõem a função de pertinência.

1.2 Principais tipos de funções analíticas

A forma analítica das funções de pertinência pode assumir diversos formatos, as formas mais utilizadas são as triangulares e trapezoidais.

1. **Funções triangulares.**

   Sejam a, b, s números reais, sendo $s \neq 0$ e $A(x)$ a expressão analítica de uma função de $\mathbb{R}$ em $[0, 1]$, temos:



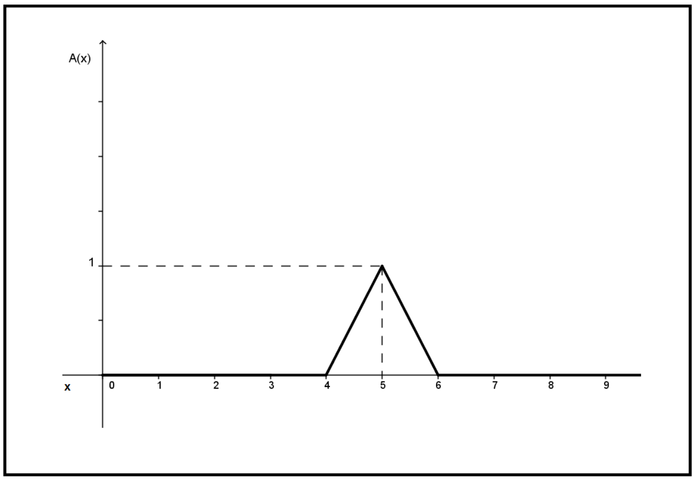
Note que o gráfico da função é a reta $y = 0$ nos intervalos $[0, a - s]$ e $[a + s, \infty]$, no intervalo $[a - s, a]$ é o segmento de reta que contém os pontos $(a - s, 0)$ e (a, b) e no intervalo $[a, a + s]$ é o segmento que contém os pontos (a, b) e $(a + s, 0)$, dessa forma a expressão que caracteriza analiticamente o gráfico é

$$A(x) = \begin{cases} b\left(1 + \dfrac{x - a}{s}\right), \text{ quando } a - s \leq x \leq a \\ b\left(1 - \dfrac{x - a}{s}\right), \text{ quando } a \leq x \leq a + s \\ 0, \text{ nos demais casos} \end{cases}.$$

Com o auxílio do módulo, temos

$$A(x) = \begin{cases} b\left(1 - \dfrac{|x - a|}{s}\right), \text{quando } a - s \leq x \leq a + s \\ 0, \text{ nos demais casos} \end{cases}.$$

Tomemos como exemplo o gráfico da função de pertinência do conjunto Fuzzy que representa o conceito de "aproximadamente" 5, mostrado na figura abaixo.

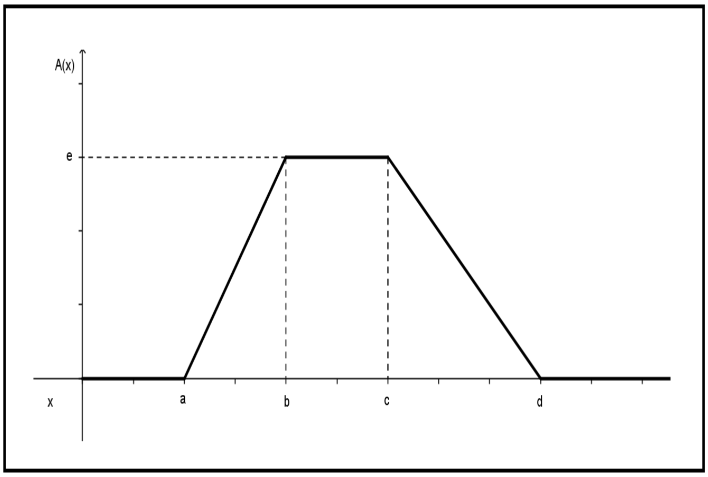


Analiticamente, representamos por

$$A(x) = \begin{cases} 1 - |x-5|, \text{ quando } 4 \leq x \leq 6 \\ 0, \text{ nos demais casos} \end{cases}.$$

2. **Funções Trapezoidais**.

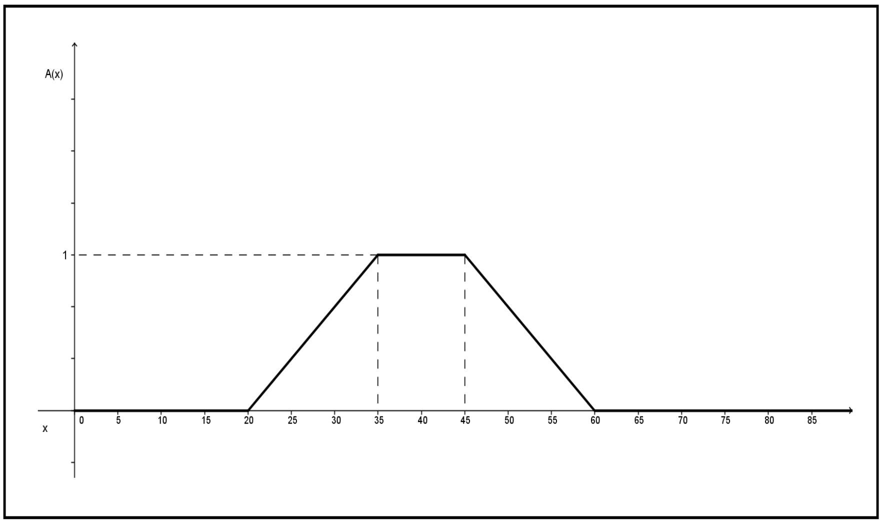
Outro grupo de funções de pertinência, são aquelas cujo gráfico tem o seu contorno no formato trapezoidal. Sejam a, b, c, d, e números reais, sendo $a \neq b$ e $c \neq d$ e $A(x)$ a expressão analítica de uma função de $\mathbb{R}$ em $[0, 1]$ dada por



Note que o gráfico da função é a reta $y = 0$ nos intervalos $[0, a]$ e $[d, \infty]$, no intervalo $[a, b]$ é o segmento de reta que contém os pontos $(a, 0)$ e (b, e), no intervalo $[b, c]$ é a reta $y = e$ e no intervalo $[c, d]$ é o segmento que contém os pontos (c, e) e $(d, 0)$ dessa forma a expressão que caracteriza analiticamente o gráfico é:

$$A(x) = \begin{cases} e\left(\dfrac{a-x}{a-b}\right), & \text{quando } a \leq x \leq b \\ e, & \text{quando } b \leq x \leq c \\ e\left(\dfrac{d-x}{d-c}\right), & \text{quando } c \leq x \leq d \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}.$$

Tomemos como exemplo o gráfico da função de pertinência do conjunto Fuzzy que representa o conceito de meia idade, representado na figura abaixo.



Analiticamente, temos:

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-20}{15}, & \text{quando } 20 \leq x \leq 35 \\ 1, & \text{quando } 35 \leq x \leq 45 \\ \dfrac{60-x}{15}, & \text{quando } 45 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}.$$

1.3 α-corte, Núcleo e Altura

Seja A um conjunto Fuzzy definido em um conjunto universo Ω.

1. α-corte.

   Fixado $\alpha \in [0, 1]$, o α-corte de A é o conjunto definido por

   $$\alpha A = \{x \in \Omega | A(x) \geqslant \alpha\}.$$

2. α-corte estrito.

   Fixado $\alpha \in [0, 1]$, o α-corte estrito de A é o conjunto definido por

   $$\alpha^{+} A = \{x \in \Omega | A(x) > \alpha\}.$$

   Note que o suporte de um conjunto Fuzzy A é o 0-corte estrito de A.

3. Núcleo.

O conjunto núcleo de A é o conjunto que contém todos os elementos de Ω que possuem grau de pertinência igual a 1 em A, ou seja,

$$\text{Nu(A)} = \{x \in \Omega | A(x) = 1\}.$$

Note que o núcleo de um conjunto Fuzzy A é o 1-corte de A.

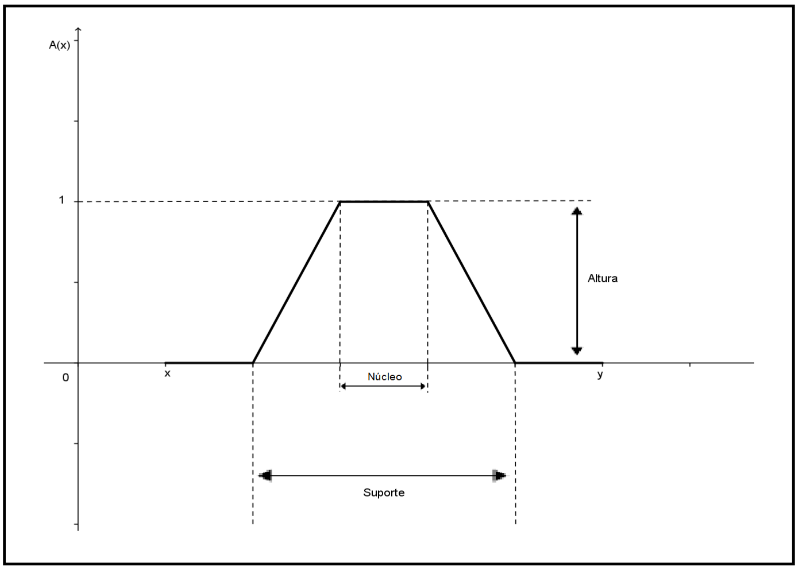
4. Altura.

   A altura de A é o maior grau de pertinência, ou seja,

$$\text{Alt}(A) = \sup_{x \in \Omega}\{A(x)\}.$$

   Portanto, a altura de A é o supremo dos αs para os quais $\alpha A \neq \varnothing$.

   Um conjunto Fuzzy A é chamado **normal** quando a $\text{Alt}(A) = 1$ e chamado **subnormal** quando a $\text{Alt}(A) < 1$. A figura abaixo ilustra os conceitos de suporte, núcleo e altura, para um conjunto Fuzzy A representado por uma função de pertinência trapezoidal definida em um intervalo $[x, y]$.



1.4 Operações

Considerando dois conjuntos Fuzzy A e B contidos no universo Ω, definimos:

1. Conjunto vazio: $A = \varnothing$ se e somente se $\forall a \in \Omega, \mu_A(a) = 0$;

2. Conjunto universo: $A = \Omega$ se e somente se $\forall a \in \Omega, \mu_A(a) = 1$;

3. Conjuntos iguais: $A = B$ se e somente se $\forall a \in \Omega, \mu_A(a) = \mu_B(a)$;

4. Subconjunto: $A \subset B$ quando $\forall a \in \Omega, \mu_A(a) \leq \mu_B(a)$;

5. Complementar: $\overline{A} = \{(a, \mu_{\overline{A}}(a)) \mid a \in \Omega\}$, onde $\mu_{\overline{A}}(a) = 1 - \mu_A(a)$;

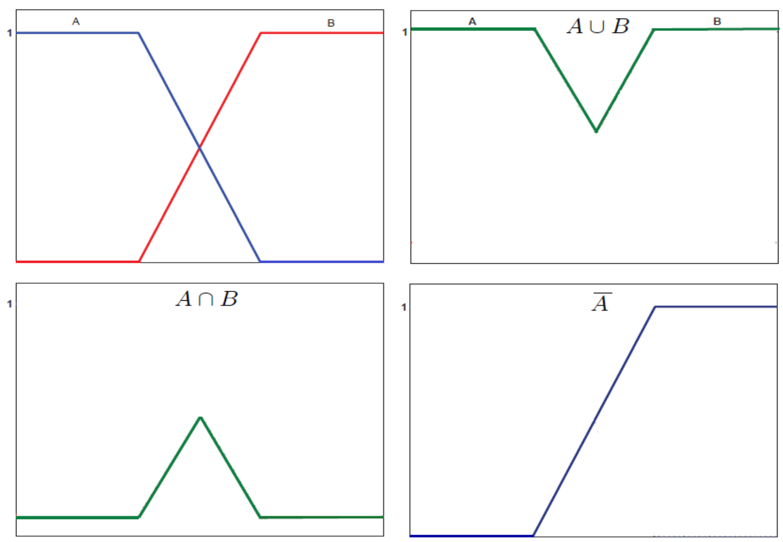
6. União: $\mu_{A \cup B}(a) = \max\{\mu_A(a), \mu_B(a)\}$;

7. Intersecção: $\mu_{A \cap B}(a) = \min\{\mu_A(a), \mu_B(a)\}$.

Exemplo 1.1. *Considere que o conjunto universo Ω seja formado por cinco alunos de uma turma de 1^o ano do ensino médio, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A e B os conjuntos Fuzzy que representam os conceitos de "estatura alta" e "porte físico magro", respectivamente. Considerando que os graus de pertinência aos conjuntos Fuzzy A e B são dados, a tabela abaixo ilustra a união, intersecção e o complemento dos conjuntos A e B.*

ALUNO	A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
1	0,5	0,6	0,6	0,5	0,5	0,4
2	0,3	0,8	0,8	0,3	0,7	0,2
3	0,7	0,4	0,7	0,4	0,3	0,6
4	0,2	0,6	0,6	0,2	0,8	0,4
5	0,9	0,1	0,9	0,1	0,1	0,9

Se o universo do discurso for contínuo a representação gráfica das operações é dada pelas figuras seguintes:



1.5 Propriedades

Utilizando as definições de união, intersecção e complementar, é possível verificar as seguintes propriedades:

1. Involução: $\overline{\overline{A}} = A$.

   Prova. Da definição de complementar, temos

   $$\mu_{\overline{\overline{A}}}(a) = 1 - \mu_{\overline{A}}(a) = 1 - (1 - \mu_A(a)) = \mu_A(a).$$

   Portanto, $\overline{\overline{A}} = A$.

2. Idenpotência: $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$.

   Prova. Notemos que,

   $$\mu_{A\cap A}(a) = \min\{\mu_A(a), \mu_A(a)\} = \mu_A(a)$$

   $$e$$

   $$\mu_{A\cup A}(a) = \max\{\mu_A(a), \mu_A(a)\} = \mu_A(a).$$

   Portanto, $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$.

3. Comutatividade: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$.

   Prova. Como

   $$\mu_{A\cap B}(a) = \min\{\mu_A(a), \mu_B(a)\} = \min\{\mu_B(a), \mu_A(a)\} = \mu_{B\cap A}(a),$$

   segue que $A \cap B = B \cap A$.

   A demonstração referente a união é análoga.

4. Associatividade: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

   Prova. Notemos que,

   $$\mu_{(A\cap B)\cap C}(a) = \min\{\mu_{A\cap B}(a), \mu_C(a)\} = \min\{\min\{\mu_A(a), \mu_B(a)\}, \mu_C(a)\}$$

   $= \min\{\mu_A(a), \mu_B(a), \mu_C(a)\} = \min\{\mu_A(a), \min\{\mu_B(a), \mu_C(a)\}\} = \mu_{A\cap(B\cap C)}$.

   Logo, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

   A demonstração referente a união é análoga.

5. Distributividade: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ e $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

   Prova. Notemos que,

   $\mu_{A\cap(B\cup C)}(a) = \min\{\mu_A(a), \max\{\mu_B(a), \mu_C(a)\}\}$.Contudo,

   $\min\{\mu_A(a), \max\{\mu_B(a), \mu_C(a)\}\} = \max\{\min\{\mu_A(a), \mu_B(a)\}, \min\{\mu_A(a), \mu_C(a)\}\}$.

   Portanto, $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

   A demonstração referente a segunda parte é análoga.

6. Transitividade: Se $A\subset B$ e $B\subset C$ então $A\subset C$.

   Prova. Para todo $a\in\Omega$, $\mu_A(a)\leq\mu_B(a)$ e $\mu_B(a)\leq\mu_C(a)$, assim, $\mu_A(a)\leq\mu_C(a)$. Portanto $A\subset C$.

7. $A\cap\varnothing = \varnothing$ e $A\cap\Omega = A$.

   Prova. Notemos que,

   $$\mu_{A\cap\varnothing}(a) = \min\{\mu_A(a), 0\} = 0 = \mu_{\varnothing}(a).$$

   Segue que,

   $$A\cap\varnothing = \varnothing.$$

   A demonstração referente a segunda parte é análoga.

8. $A\cup\varnothing = A$ e $A\cup\Omega = \Omega$.

   Prova. Notemos que,

   $$\mu_{A\cup\varnothing}(a) = \max\{\mu_A(a), 0\} = \mu_A(a).$$

   Logo,

   $$A\cup\varnothing = A.$$

   A demonstração referente a segunda parte é análoga.

Dentre as propriedades de conjuntos clássicos que não se verificam para conjuntos Fuzzy temos $A\cap\overline{A} = \varnothing$ e $A\cup\overline{A} = \Omega$. Por exemplo, seja A um conjunto Fuzzy e um elemento $a\in\Omega$ tal que $\mu_A(a) = 0.3$, teremos então que $\mu_{A\cap\overline{A}}(a) = 0.3$ e $\mu_{A\cup\overline{A}}(a) = 0.7$. Assim, $A\cap\overline{A}\neq\varnothing$ e $A\cup\overline{A}\neq\Omega$.

1.6 Relação Fuzzy

O conceito de relação matemática utilizado nos conjuntos clássicos trata-se da indicação de haver ou não alguma associação entre dois objetos, na relação Fuzzy, além de indicar se há ou não tal associação, indicamos também o grau dessa relação.

Uma relação clássica R é um subconjunto do produto cartesiano, que pode ser representada por sua função característica $R : \Omega_1 \times ... \times \Omega_n \longrightarrow [0, 1]$, dada por

$$R(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad (x_1, ..., x_n) \in R \\ 0, & \text{se} \quad (x_1, ..., x_n) \notin R \end{cases}.$$

O conceito de **relação Fuzzy** é formalizado a partir do produto cartesiano usual entre conjuntos, estendendo a função característica de uma relação por uma função de $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ em $[0, 1]$, chamada de **função de pertinência** de R.

Suponha que A_1 e A_2 sejam subconjuntos Fuzzy de Ω_1 e Ω_2, respectivamente. O **produto cartesiano Fuzzy** de A_1 por A_2 é o subconjunto Fuzzy do produto cartesiano (clássico) $\Omega_1 \times \Omega_2$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A_1 \times A_2}(a_1, a_2) = \min \{\mu_{A_1}(a_1), \mu_{A_2}(a_2)\}.$$

A definição de produto cartesiano pode ser estendida para mais de dois conjuntos. O produto cartesiano Fuzzy dos subconjuntos $A_1, ..., A_n$ de $\Omega_1, ..., \Omega_n$, respectivamente, é o conjunto Fuzzy $A_1 \times ... \times A_n$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A_1 \times ... \times A_n}(a_1, ..., a_n) = \min\{\mu_{A_1}(a_1), ..., \mu_{A_n}(a_n)\}.$$

Uma relação Fuzzy R sobre $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ é qualquer subconjunto Fuzzy de $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$. Se a função de pertinência da relação Fuzzy R for indicada por μ_R, então o número $\mu_R(x_1, ..., x_n)$ indica o grau com que os elementos x_i estão relacionados segundo a relação R.

Exemplo 1.2. *Considere os conjuntos Fuzzy* $A = \{0.4|a_1, 0.6|a_2, 0.2|a_3, 0.8|a_4\}$ *e* $B = \{0.1|b_1, 0.5|b_2, 1|b_3\}$ *definidos nos universos discretos* Ω_1 *e* Ω_2 *respectivamente e a relação Fuzzy* R*, dada por* $\mu_R(x, y) = max\ \{\mu_A(x), 1 - min\ \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}$*, onde* $x \in \Omega_1$ *e* $y \in \Omega_2$*. Portanto,*

$\mu_R(a_1, b_1) = max\ \{0.4, 1 - min\ \{0.4, 0.1\}\} = 0.9$

$\mu_R(a_1, b_2) = max\ \{0.4, 1 - min\ \{0.4, 0.5\}\} = 0.6$

$\mu_R(a_1, b_3) = max\ \{0.4, 1 - min\ \{0.4, 1\}\} = 0.6$
$\mu_R(a_2, b_1) = max\ \{0.6, 1 - min\ \{0.6, 0.1\}\} = 0.9$
$\mu_R(a_2, b_2) = max\ \{0.6, 1 - min\ \{0.6, 0.5\}\} = 0.6$
$\mu_R(a_2, b_3) = max\ \{0.6, 1 - min\ \{0.6, 1\}\} = 0.6$
$\mu_R(a_3, b_1) = max\ \{0.2, 1 - min\ \{0.2, 0.1\}\} = 0.9$
$\mu_R(a_3, b_2) = max\ \{0.2, 1 - min\ \{0.2, 0.5\}\} = 0.8$
$\mu_R(a_3, b_3) = max\ \{0.2, 1 - min\ \{0.2, 1\}\} = 0.8$
$\mu_R(a_4, b_1) = max\ \{0.8, 1 - min\ \{0.8, 0.1\}\} = 0.9$
$\mu_R(a_4, b_2) = max\ \{0.8, 1 - min\ \{0.8, 0.5\}\} = 0.8$
$\mu_R(a_4, b_3) = max\ \{0.8, 1 - min\ \{0.8, 1\}\} = 0.8$
Organizando os resultados numa matriz teremos,

$$\mu_R(x,y) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

A matriz encontrada é chamada de ***matriz relacional****.*

1.6.1 Composição entre relações Fuzzy binárias

A composição de relações é uma ferramenta muito utilizada nas aplicações relacionadas aos conjuntos Fuzzy, entre as principais composições, temos a composição máximo-mínimo que definiremos a seguir.

Definição 1.2. *Considere R e S duas relações Fuzzy binárias em $\Omega_1 \times \Omega_2$ e $\Omega_2 \times \Omega_3$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação Fuzzy binária em $\Omega_1 \times \Omega_3$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{R \circ S}(x_1, x_3) = \sup_{x_2 \in \Omega_2} \{min(\mu_R(x_1, x_2), \mu_S(x_2, x_3))\}.$$

Quando os conjuntos Ω_1, Ω_2 e Ω_3 são finitos, então a forma matricial da relação $R \circ S$, dada pela composição máximo-mínimo é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo.

Exemplo 1.3. *Sejam R e S duas relações Fuzzy binárias definidas nos universos discretos $\Omega_1 \times \Omega_2$ e $\Omega_2 \times \Omega_3$, respectivamente. Se as matrizes relacionais de R e S são dadas por,*

$$\mu_R(\Omega_1, \Omega_2) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 1 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad e \qquad \mu_S(\Omega_2, \Omega_3) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 1 & 0.9 \\ 0.4 & 0 & 0.4 \\ 0.6 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Teremos, pela composição máximo-mínimo,

$$\mu_{R \circ S}(\Omega_1, \Omega_3) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 2

Lógica Fuzzy

2.1 Raciocínio aproximado

A teoria de conjuntos Fuzzy vem se mostrando muito útil devido a seu caráter prático, já que possibilita chegar a conclusões a partir de proposições incertas. A área que lida com a formalização dessas proposições é conhecida como **raciocínio aproximado**.

Exemplo 2.1. *Considere as seguintes proposições:*

1. *Pressão alta provoca dor de cabeça forte;*

2. *Dor de cabeça forte provoca muito desconforto;*

   Conclusão: *Pressão alta provoca muito desconforto.*

Note que a conclusão é uma dedução obtida a partir das premissas 1 e 2, porém alguns dos termos utilizados são imprecisos, tais como: "forte", "alta" e "muito".

Sentenças desse tipo são normalmente expressas em linguagem natural sem o formalismo matemático, um dos principais objetivos da lógica Fuzzy é conseguir um modelo matemático para essas situações. Para formalizar tais sentenças faz-se necessário a definição de variável linguística.

Definição 2.1. *Uma* ***variável linguística*** *A no universo Ω é uma variável cujos valores assumidos por ela são subconjuntos Fuzzy de Ω.*

Intuitivamente, uma variável linguística é um substantivo, enquanto seus valores são adjetivos, representados por conjuntos Fuzzy. Por exemplo, "gripe" é uma variável linguística que pode assumir os atributos "forte" ou "fraca".

2.1.1 Proposições Fuzzy

Uma sentença da forma x é A, onde x é o nome de uma variável linguística e A é um conjunto Fuzzy definido no universo Ω, é chamada de **proposição Fuzzy**.

Exemplo 2.2. *São exemplos de proposições Fuzzy:*

1. *A umidade do ar é alta.*

2. *A temperatura é baixa.*

As proposições Fuzzy podem ser relacionadas através de diferentes operadores, por exemplo, os conectivos lógicos *e* e *ou*, a negação *não* e o operador *se...então*, as proposições Fuzzy que resultam dessas combinações podem ser descritas em termos de relações Fuzzy.

De forma geral, o conectivo *e* é utilizado com variáveis em universos diferentes, enquanto que o conectivo *ou* relaciona valores linguísticos de uma mesma variável, que estão no mesmo universo. Quando o conectivo *ou* é usado para conectar variáveis em uma sentença do tipo *se...então*, ele pode ser usado com duas variáveis diferentes.

Exemplo 2.3. *Considere as proposições:*

1. *A umidade do ar é baixa e a temperatura é alta.*

2. *A temperatura é alta ou a temperatura é agradável.*

3. *Se a umidade do ar é baixa ou a temperatura é alta, então o desconforto é alto.*

Note que no item 1 o concectivo *e* foi utilizado com variáveis em universos diferentes, no item 2 o conectivo *ou* foi utilizado com variáveis num mesmo universo e no item 3 o conectivo ou foi utilizado com variáveis definidas em universos diferentes, por se tratar de uma sentença do tipo *se...então.*

A operação *não* é considerada como semanticamente sinônima da negação em linguagem natural, ou seja, se $A = \{\mu_A(x)|x\}$, então não $A = \{(1 - \mu_A(x))|x\}$.

Suponha x e y variáveis linguísticas definidas nos universos Ω_1 e Ω_2, respectivamente. Sejam A e B conjuntos Fuzzy definidos nos universos Ω_1 e Ω_2, respectivamente, e as proposições Fuzzy x é A , y é B.

Utilizando o conectivo *ou* para ligar as proposições, teremos a proposição Fuzzy x é A *ou* y é B, que pode ser expressa por uma relação Fuzzy $R_{A\vee B}$, cuja função de pertinência é dada por $\mu_R(x, y) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$. No caso em que as proposições são relacionadas pelo conectivo e, a função de pertinência da relação $R_{A \wedge B}$ é dada por $\mu_R(x,y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$.

O operador *se...então* é também conhecido como declaração condicional Fuzzy e descreve a dependência do valor de uma variável linguística em relação ao valor de outra. Em muitas aplicações essas declarações condicionais são simplesmente denominadas **regras linguísticas**, constituindo-se em frases da forma se x é A então y é B. Uma frase desse tipo é normalmente denominada implicação, representada pela relação $R_{A \to B}$, e expressa pela função de pertinência:

$$\mu_{A \to B}(x,y) = f_{\to}(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

onde $f_{\to}$ é o **operador de implicação**.

Exemplo 2.4. *São exemplos de declaração condicional Fuzzy:*

1. *Se a temperatura é amena, então o desconforto é baixo.*

2. *Se a umidade do ar é baixa, então o desconforto é alto.*

Quando uma declaração condicional apresenta mais de uma proposição antecendente, elas são geralmente combinadas por meio do conectivo e:

$$\text{se } (x_1 \text{ é } A_1) \text{ e ... e } (x_m \text{ é } A_m) \text{ então } (y \text{ é } B).$$

que pode ser representada por uma relação com a seguinte função de pertinência:

$$\mu_R(x_1, ..., x_m, y) = f_{\to}((\mu_{A_1}(x_1) \wedge ... \wedge \mu_{A_m}(x_m)), \mu_B(y)).$$

Várias declarações podem ser combinadas por meio do conectivo ou:

$$R^1 : \text{se } (x \text{ é } A^1) \text{ então } (y \text{ é } B^1)$$

ou

$\vdots$

ou

$$R^n : \text{se } (x \text{ é } A^n) \text{ então } (y \text{ é } B^n).$$

A função de pertinência do conjunto R^n de declarações é:

$$\mu_{R^n}(x,y) = [\mu_{R^1}(x,y) \vee ... \vee \mu_{R^n}(x,y)] =$$

$$= [f_{\rightarrow}(\mu_{A^1}(x), \mu_{B^1}(y)) \vee ... \vee f_{\rightarrow}(\mu_{A^n}(x), \mu_{B^n}(y))].$$

Note que foi feita uma distinção entre as notações para o caso de se ter mais de um antecedente e para existência de várias frases do tipo *se...então*. Na primeira situação, tem-se várias variáveis, cada uma delas com seus valores, e apenas um valor (B) para o consequente (y é B). Na segunda, a variável é a mesma em todos os antecedentes e os valores da variável do consequente são distintos.

2.1.2 Operações lógicas e inferência

A lógica clássica trabalha com proposições que podem assumir os valores lógicos verdadeiro ou falso, obedecendo os seguintes princípios:

- Princípio da não-contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
- Princípio do terceiro excluído: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

Dadas duas proposições p e q é possível formar novas proposições fazendo uso das seguintes operações:

- conjunção (p $\vee$ q): estabelece a verdade quando pelo menos uma proposição é verdadeira.
- disjunção (p $\wedge$ q): estabelece a verdade apenas quando as duas proposições são verdadeiras.
- implicação (p $\rightarrow$ q): regra se ... então, estabelece a falsidade apenas quando p é verdadeira e q é falsa.
- negação ($\sim$ p): assume o valor lógico oposto ao valor lógico da proposição a qual se está aplicando a negação.
- equivalência (p $\longleftrightarrow$ q): assume o valor lógico verdadeiro quando p e q possuem, simultaneamente, o mesmo valor lógico.

As operações lógicas entre proposições são normalmente representadas através de uma tabela verdade, as tabelas verdade para conjunção, disjunção, equivalência e negação, que são fundamentais no desenvolvimento da lógica proposicional, estão ilustradas abaixo, onde V significa verdadeiro e F falso.

p	q	p∧q	p∨q	p→q	p⟷q	∼p
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V

Uma **tautologia** é uma proposição sempre verdadeira, formada a partir da combinação de outras proposições. Por exemplo,

$$(p \to q) \longleftrightarrow \sim [p \wedge (\sim q)] \;\; (P1) \qquad \text{e} \qquad (p \to q) \longleftrightarrow [(\sim p) \vee q] \;\; (P2).$$

Na teoria de conjuntos clássica, a função característica pode assumir apenas dois valores, 0 ou 1 que indica não-pertinência e pertinência, respectivamente, levando em consideração a equivalência existente entre a teoria dos conjuntos e a lógica proposicional e utilizando as tautologias P1 e P2, podemos obter as seguintes funções características para implicação (simbolicamente indicaremos por $f_{p\to q}(x,y)$):

$$(p \to q) \longleftrightarrow \sim [p \wedge (\sim q)] \quad \Rightarrow \quad f_{p\to q}(x,y) = 1 - \min[f_p(x), 1 - f_q(y)]$$

e

$$(p \to q) \longleftrightarrow [(\sim p) \vee q] \quad \Rightarrow \quad f_{p\to q}(x,y) = \max[1 - f_p(x), f_q(y)].$$

A verificação das igualdades acima será feita utilizando a tabela-verdade abaixo, fazendo os valores lógicos V e F corresponderem aos graus de pertinência 1 e 0, respectivamente:

$f_p(x)$	$f_q(y)$	$1 - f_p(x)$	$1 - f_q(y)$	$\max[1 - f_p(x), f_q(y)]$	$1 - \min[f_p(x), 1 - f_q(y)]$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Na lógica clássica existem dois tipos importantes de regras de inferência: Modus ponens e Modus tollens. O primeiro é de grande relevância para as aplicações e por isso será detalhado a seguir:

O Modus ponens é associado à implicação A implica B ($A \to B$), tomando as proposições p e q, podemos expressá-lo por (p ∧ (p → q)) → q.

Exemplo 2.5. *Considere as sentenças:*

p: Pedro é músico.

q: Se Pedro é músico, então Paulo é professor.

Consequência: Paulo é professor.

As definições e conceitos fundamentais da lógica Fuzzy surgiram inspirados na lógica proposicional.

A passagem da lógica proposicional para lógica Fuzzy se deu através da substituição das funções características por funções de pertinência Fuzzy e de forma semelhante à extensão feita dos conjuntos clássicos para conjuntos Fuzzy. Dessa forma, a declaração condicional se x é A, então y é B tem como função de pertinência $\mu_{A \to B}(x, y)$ que mede o grau de verdade da relação de implicação entre x e y.

Com relação à inferência, o Modus ponens é estendido para o **Modus ponens generalizado**, descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Premissa 1} : x \text{ é } A^* \\ \text{Premissa 2} : \text{ se } x \text{ é } A, \text{ então } y \text{ é } B \\ \text{Consequência} : y \text{ é } B^* \end{cases},$$

onde o conjunto Fuzzy A^* não é necessariamente o mesmo que A (antecedente da regra), assim como B^* não é necessariamente o mesmo que o consequente B. Na lógica proposicional, uma regra de inferência só será ativada se a Premissa 1 for exatamente o antecedente da regra, e o resultado será exatamente o consequente dessa regra. Na lógica Fuzzy, uma regra de inferência será ativada se houver um grau de similaridade diferente de zero entre a Premissa 1 e o antecedente da regra, o resultado será um consequente com grau de similaridade não nulo em relação ao consequente da regra.

A função de pertinência do consequente $\mu_{B^*}(y)$ é obtida a partir da composição entre A^* e R, ou seja $B^* = A^* \circ R$, na qual R é a relação Fuzzy que representa a conexão entre as duas premissas.

Isto é equivalente a se considerar duas proposições Fuzzy: uma simples, correspondendo a um fato, e outra correspondendo a uma regra Fuzzy. O Modus ponens generalizado pode ser visto como uma composição de um conjunto Fuzzy com uma relação Fuzzy, isto é

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [(\mu_{A^*}(x)) \wedge (\mu_R(x, y))].$$

Como R é uma relação de implicação, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [(\mu_{A^*}(x)) \wedge (\mu_{A \to B}(x, y))].$$

Exemplo 2.6. *Sejam A e B dois conjuntos Fuzzy, definidos nos universos discretos Ω_1 e Ω_2, respectivamente, cujas funções de pertinência (expressas pelos graus de pertinência de cada um dos elementos dos universos) são:*

$\mu_A(x) = \{0, 0.3, 0.5, 0.2, 1, 0\}$ *e* $\mu_B(y) = \{0.4, 0.7, 1, 0.6, 0\}$.

Supondo que a relação de implicação entre A e B seja dada por:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)].$$

Teremos,

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.5 & 0.7 & 1 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.7 & 1 & 0.6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como os universos são discretos e finitos, a operação sup torna-se max e a função de pertinência do consequente fica:

$$\mu_{B^*}(y) = \max_{x \in A^*} [(\mu_{A^*}(x)) \wedge (\mu_{(A \to B)}(x, y)].$$

Se A^* for dado pela função de pertinência $\mu_{A^*} = \{0, 0.2, 0.7, 1, 0.8, 0.3\}$, teremos:

$$\mu_{B^*}(y) = \begin{bmatrix} max(0 \wedge 1, 0.2 \wedge 0.7, 0.7 \wedge 0.5, 1 \wedge 0.8, 0.8 \wedge 0.4, 0.3 \wedge 1) \\ max(0 \wedge 1, 0.2 \wedge 0.7, 0.7 \wedge 0.7, 1 \wedge 0.8, 0.8 \wedge 0.7, 0.3 \wedge 1) \\ max(0 \wedge 1, 0.2 \wedge 1, 0.7 \wedge 1, 1 \wedge 1, 0.8 \wedge 1, 0.3 \wedge 1) \\ max(0 \wedge 1, 0.2 \wedge 0.7, 0.7 \wedge 0.6, 1 \wedge 0.8, 0.8 \wedge 0.6, 0.3 \wedge 1) \\ max(0 \wedge 1, 0.2 \wedge 0.7, 0.7 \wedge 0.5, 1 \wedge 0.8, 0.8 \wedge 0, 0.3 \wedge 1) \end{bmatrix}.$$

$$\mu_{B^*}(y) = \begin{bmatrix} max(0, 0.2, 0.5, 0.8, 0.4, 0.3) \\ max(0, 0.2, 0.7, 0.8, 0.7, 0.3) \\ max(0, 0.2, 0.7, 1, 0.8, 0.3) \\ max(0, 0.2, 0.6, 0.8, 0.6, 0.3) \\ max(0, 0.2, 0.5, 0.8, 0, 0.3) \end{bmatrix} = [0.8, 0.8, 1, 0.8, 0.8].$$

Neste exemplo, utilizamos o ponto para separar a casa decimal e a vírgula para separar os graus de pertinência.

2.2 Sistemas e controladores Fuzzy

A ideia fundamental dos controladores Fuzzy é associar uma entrada Fuzzy a uma saída também Fuzzy, ou seja, cada elemento que entra no sistema gerará uma resposta (saída). Porém, há casos em que se a entrada for não-Fuzzy, espera-se que a saída também seja não-Fuzzy construída de alguma maneira específica, nesta seção o objetivo é explicar o funcionamento e as etapas que compõem os sistemas Fuzzy.

2.2.1 Módulo de fuzzificação

Neste estágio as entradas do sistema são modeladas por conjuntos Fuzzy com seus respectivos domínios. É nessa etapa que se utiliza o conhecimento de especialistas do fenômeno a ser modelado. Assim, mesmo que a entrada seja não Fuzzy, esta será fuzzificada por meio de sua função característica.

2.2.2 Base de regras

Esta etapa consiste em uma série de regras que servirão de base para o módulo de inferência. As regras que compõem este estágio do processo são implicações da forma:

Se x_1 é A_1 e...e x_n é A_n então u_1 é B_1 e...e u_m é B_m, de acordo com as informações de um especialista.

A base de regras é a parte do sistema Fuzzy responsável, juntamente com o módulo de inferência, por gerar as respostas correspondentes aos valores fornecidos pelo módulo de fuzzificação.

2.2.3 Módulo de inferência Fuzzy

Neste estágio cada regra inserida na base de regras é modelada matematicamente e os valores gerados pelo módulo de fuzzificação são processados de forma a gerar uma saída (controle) Fuzzy a ser adotado pelo controlador.

Assim, a base de regras é representada por uma relação Fuzzy R, que no método de inferência utilizado neste trabalho, terá como função de pertinência:

$$\mu_R(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mu_{R_i}(x,y)).$$

Sendo R_i a relação Fuzzy obtida da regra i, cuja função de pertinência μ_{R_i} é obtida por meio de um Modus ponens generalizado. Os valores x e y representam, respectivamente, o estado e o controle. A inferência, que gera o controle B para um estado A, é dada por uma regra de composição de inferência, ou seja $B = A \circ R$, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \Omega}[\min(\mu_R(x,y), \mu_A(x))],$$

onde Ω é o universo em questão.

O método de inferência que será utilizado neste trabalho é o **Método de Inferência de Mamdani**.

Mandami propõe uma relação Fuzzy binária M entre x e y para modelar matematicamente a base de regras. Esse método tem como base a regra de composição de inferência max-min definida na seção 1.6.1.

Assim, a relação Fuzzy M é o subconjunto Fuzzy de $\Omega_1 \times \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são os universos de A e B respectivamente, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_M(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mu_{R_i}(x,y)) = \max[\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)].$$

Sendo r o número de regras que compõem a base de regras, A_i e B_i são os conjuntos Fuzzy associados a regra i.

Os conjuntos Fuzzy A_i e B_i podem representar o produto cartesiano Fuzzy de subconjuntos Fuzzy, isto é,

$$\mu_{A_i}(x) = \mu_{A_{i1}}(x_1) \wedge \mu_{A_{i2}}(x_2) \text{ e } \mu_{B_i}(y) = \mu_{B_{i1}}(y_1) \wedge \mu_{B_{i2}}(y_2).$$

No exemplo a seguir a ilustração do Método de Inferência Mamdani, para o caso de um sistema Fuzzy com duas entradas e uma saída.

Exemplo 2.7. *Considere as proposições a seguir:*

$$R_1 : \textit{Se } x_1 \textit{ é } A_{11} \textit{ e } x_2 \textit{ é } A_{12} \textit{ então } y \textit{ é } B_1.$$

$$R_2 : \textit{Se } x_1 \textit{ é } A_{21} \textit{ e } x_2 \textit{ é } A_{22} \textit{ então } y \textit{ é } B_2.$$

Dessa forma, para cada terna (x_1, x_2, y), temos

$$\mu_M(x_1, x_2, y) = [\mu_{A_{11}}(x_1) \wedge \mu_{A_{12}}(x_2) \wedge \mu_{B_1}(y)] \vee [\mu_{A_{21}}(x_1) \wedge \mu_{A_{22}}(x_2) \wedge \mu_{B_2}(y)].$$

e

$$\mu_M(x_1, x_2, y) = max\ \{[\mu_{A_{11}}(x_1) \wedge \mu_{A_{12}}(x_2) \wedge \mu_{B_1}(y)], [\mu_{A_{21}}(x_1) \wedge \mu_{A_{22}}(x_2) \wedge \mu_{B_2}(y)]\}.$$

que é a relação Fuzzy obtida da base de regras pelo método Mamdani.

2.2.4 Desfuzzificação

No sistema Fuzzy, a cada entrada Fuzzy, o módulo de inferência produz uma saída Fuzzy que indica o controle a ser adotado. Entretanto, se a entrada for um número real, espera-se que a saída correspondente seja também um número real. Porém, em geral, isso não ocorre em controladores Fuzzy, pois mesmo para uma entrada não-Fuzzy, a saída é Fuzzy. Dessa forma, deve-se indicar um método para desfuzzificar a saída e obter um número real que indicará o controle a ser adotado.

Existem vários métodos de desfuzzificação, o que utilizaremos nas aplicações, é o centro de gravidade (centróide) que é a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto Fuzzy. As equações abaixo referem-se ao domínio discreto e domínio contínuo, respectivamente.

$$G(B) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_B(x_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)} \qquad \text{e} \qquad G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\mu_B(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \mu_B(x)dx}.$$

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações da lógica Fuzzy, onde os conceitos e métodos descritos nos capítulos anteriores serão postos em prática, mostrando a grande capacidade da teoria em lidar com situações que envolvem variáveis imprecisas ou subjetivas, dando suporte a decisão, ou mesmo indicando qual a melhor ação a ser tomada tendo como base os conceitos imprecisos envolvidos na situação-problema.

3.1 Modelo de avaliação discente

A aferição da qualidade do serviço que se oferece na área de educação passa pelo processo de avaliação dos discentes envolvidos. Nesta seção mostraremos uma forma de computar os dados referentes ao processo de avaliação usando lógica Fuzzy e comparar os resultados obtidos com o método tradicional (média aritmética).

Quando estamos corrigindo uma prova escrita, um trabalho de pesquisa, a resolução de uma lista de problemas ou avaliando o desempenho na apresentação de um seminário, geralmente utilizamos alguns critérios pré-estabelecidos para nortear a avaliação, ao qual chamamos de gabarito e a partir daí chegamos a um valor numérico que representa o nível de aprendizagem do discente em questão.

O problema desse método é que a subjetividade envolvida não é tratada e muitas vezes o procedimento adotado para comparar o desempenho do aluno com o gabarito é feito de forma binária e com isso o julgamento feito pelo docente fica comprometido.

A vantagem de utilizar a lógica Fuzzy para fazer o tratamento dos dados referentes ao processo de avaliação discente, consiste no fato de que neste contexto, a subjetividade envolvida no processo é levada em consideração, dessa forma o conceito final conquistado pelo aluno reflete melhor o seu nível de aprendizagem.

Para fazer a comparação foram utilizados dados colhidos de uma turma, composta por 30 alunos, do Curso Técnico em Edificações do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Sergipe.

O processo de avaliação da turma se deu em três etapas.

1. Etapa 1: Prova escrita contendo sete quesitos entre questões e problemas que tratavam do conteúdo trabalhado durante a unidade (Razão e Proporção, Porcentagem, Equações do 1º e 2º graus). A esta etapa foi atribuído peso $0,5$.

2. Etapa 2: Construção de um artigo científico sobre o tema: A beleza e a matemática: aplicações da razão áurea a arquitetura. A esta etapa foi atribuído peso $0,25$.

3. Etapa 3: Resolução de problemas, exercícios e participação nas aulas. Nesta etapa o peso foi $0,25$.

No modelo de avaliação aplicado (não-Fuzzy), a nota final foi o resultado do somatório do produto entre a pontuação obtida em cada etapa e seu respectivo peso. Por exemplo:

O aluno F obteve 8 pontos na etapa 1, 6 pontos na etapa 2 e 7 pontos na etapa 3, logo sua nota final será:

$$\text{Nota final} = 8.0,5 + 6.0,25 + 7.0,25 = 7,25.$$

A nota mínima para aprovação na instituição em questão é 6, portanto o aluno F estaria aprovado na unidade.

O modelo Fuzzy que será apresentado a seguir foi adaptado de [9].

Para construção deste modelo Fuzzy de avaliação discente, foi utilizado o software MATLAB 7.5 que oferece o pacote Fuzzy Logic Toolbox para trabalhar com lógica Fuzzy.

Utilizamos como variáveis de entrada, as etapas do processo de avaliação, que foram:

1. Prova escrita (AV).

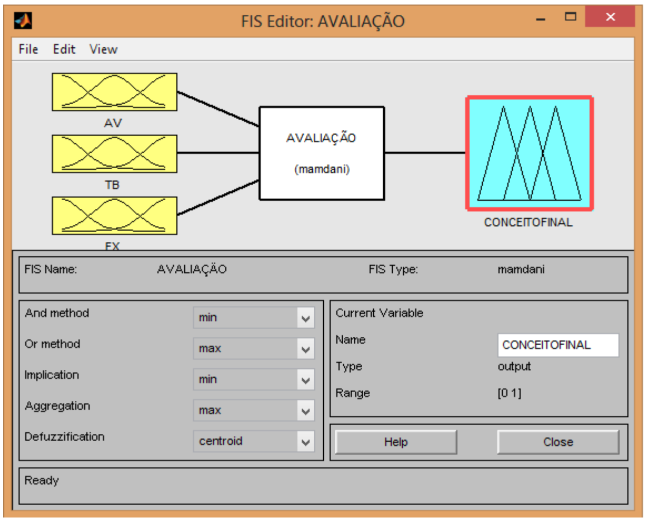
2. Construção, em equipe, de um artigo científico sobre o tema: A beleza e a matemática: aplicações da razão áurea a arquitetura(TB).

3. Resolução de problemas, exercícios e participação nas aulas (EX).

A variável de saída foi o conceito final, que serviu como suporte para classificação final do discente quanto a seu desempenho durante o processo avaliado, que neste caso é a primeira unidade do segundo período letivo do ano de 2013.

O método de inferência utilizado nesta aplicação foi o Método de Inferência de Mamdani, que foi descrito no capítulo 2 e o desfuzzificador foi o centróide, também descrito no capítulo 2.

A janela de interface do Fuzzy Logic Toolbox traz um resumo dos parâmetros estabelecidos e pode ser visto na figura a seguir.

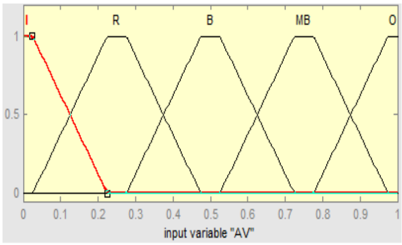


Para dar continuidade a construção do presente modelo de avaliação discente foi necessário definir os conjuntos Fuzzy que estariam associados as variáveis de entrada e saída.

Os conjuntos Fuzzy relacionados à variável de entrada (AV), foram:

- Insuficiente;
- Regular;
- Bom;
- Muito Bom;
- Ótimo;

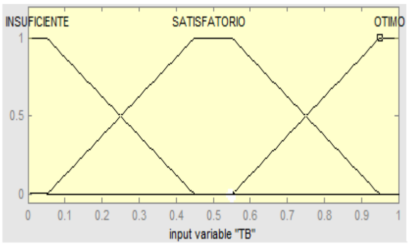
A figura a seguir, fornece a representação gráfica das funções de pertinência associadas aos conjuntos Fuzzy relacionados a variável de entrada AV.

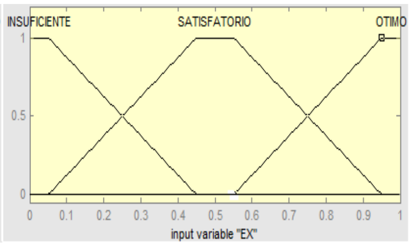


Os conjuntos Fuzzy relacionados as variáveis de entrada (TB) e (EX), são:

- Insuficiente;
- Satisfatório;
- Ótimo;

As figuras a seguir, fornecem as representações gráficas das funções de pertinência associadas aos conjuntos Fuzzy relacionados as variáveis de entrada TB e EX.

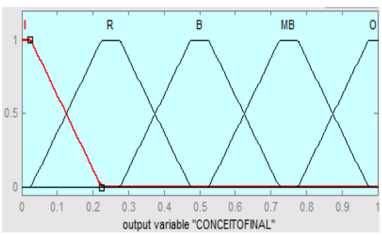




Para variável de saída, os conjuntos Fuzzy definidos foram:

- Insuficiente;
- Regular;
- Bom;
- Muito Bom;
- Ótimo;

A figura a seguir, fornece a representação gráfica das funções de pertinência associadas aos conjuntos Fuzzy relacionados a variável de saída.



Note que todas as funções de pertinência escolhidas são da forma trapezoidal, este foi o tipo de função escolhido porque modela bem os conceitos associados aos conjuntos Fuzzy definidos.

Na etapa da construção da base de regras foram utilizadas as seguintes sentenças:

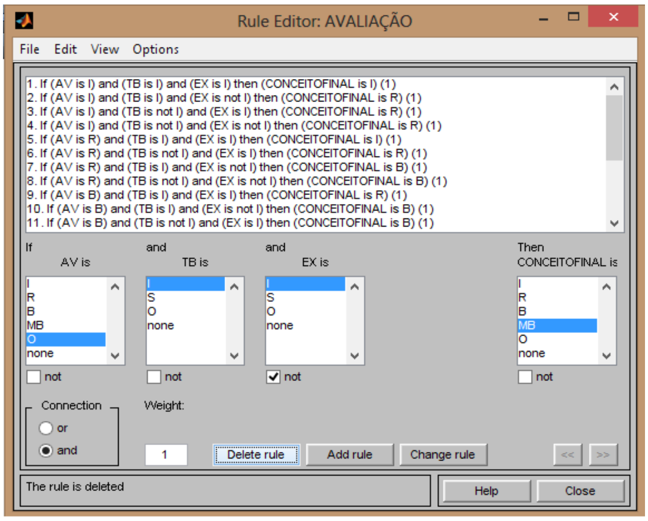
REGRA	AV	TB	EX	SAÌDA
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

Legenda:

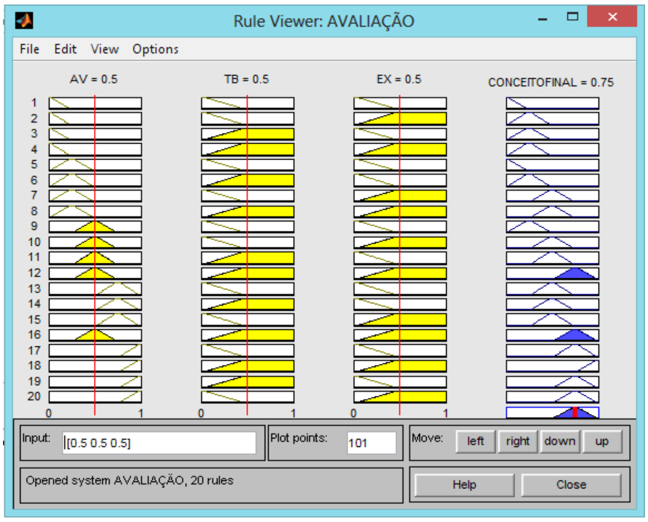
AV/SAIDA	INSUFICIENTE	REGULAR	BOM	MUITO BOM	OTIMO
COR					

TB/EX	INSUFICIENTE	NÃO-INSUFICIENTE
COR		

Na janela de interface do Fuzzy Logic Toolbox, é possível inserir as regras utilizando os botões de comando disponíveis, como mostra a figura seguinte.



Com a base de regras formada, basta inserir os dados (notas dos alunos) e verificar qual o resultado gerado pelo sistema e com isso ter uma base para tomada de decisão a cerca do conceito a ser atribuído a cada discente, a figura a seguir mostra a janela de interface do Fuzzy Logic Toolbox, na qual é possível inserir os dados dos alunos e verificar o respectivo resultado.



Com as notas gerados pelo sistema foi montada a tabela, inserida abaixo, com os resultados obtidos pelo método tradicional (média aritmética) e o sistema Fuzzy.

ALUNO	AV	TB	EX	NOTA	CONCEITO	NOTA FUZZY	CONCEITO FUZZY
1	7,0	7,0	8,0	7,25	APROVADO	7,5	BOM
2	9,3	8,0	4,0	7,65	APROVADO	7,89	BOM
3	8,3	0	6,0	5,65	REPROVADO	5,77	INSUFICIENTE
4	8,3	7,0	0	5,9	REPROVADO	5,77	INSUFICIENTE
5	4,7	8,0	7,0	6,1	APROVADO	7,41	BOM
6	2,1	7,0	8,0	4,8	REPROVADO	4,76	INSUFICIENTE
7	6,4	9,0	10	7,95	APROVADO	7,5	BOM
8	10	7,0	9,0	9,0	APROVADO	9,27	ÓTIMO
9	3,3	6,0	10	5,65	REPROVADO	5,77	INSUFICIENTE
10	4,5	6,0	9,0	6,0	APROVADO	7,11	BOM
11	5,4	7,0	9,0	6,7	APROVADO	7,5	BOM
12	4,4	9,0	7,0	6,2	APROVADO	6,98	REGULAR
13	10	9,0	10	9,75	APROVADO	9,27	ÓTIMO
14	9,0	8,0	10	9,0	APROVADO	9,17	ÓTIMO
15	9,2	4,0	8,0	7,6	APROVADO	7,85	BOM
16	7,1	8,0	4,0	6,55	APROVADO	5,89	INSUFICIENTE
17	7,0	8,0	4,0	6,5	APROVADO	6,25	REGULAR
18	0	9,0	7,0	4,0	REPROVADO	2,5	INSUFICIENTE
19	4,1	7,0	6,0	5,3	REPROVADO	6,62	REGULAR
20	0	8,0	8,0	4,0	REPROVADO	2,5	INSUFICIENTE
21	6,1	7,0	7,6	6,7	APROVADO	7,5	BOM
22	2,7	7,0	9,0	5,35	REPROVADO	5,0	INSUFICIENTE
23	6,6	7,0	8,0	6,75	APROVADO	7,5	BOM
24	5,9	0	4,0	3,95	REPROVADO	4,57	INSUFICIENTE
25	0	7,0	9,0	3,25	REPROVADO	2,5	INSUFICIENTE
26	9,8	0	0	4,9	REPROVADO	7,5	BOM
27	0	8,0	4,0	3,0	REPROVADO	2,5	INSUFICIENTE
28	5,9	7,0	8,0	6,7	APROVADO	7,5	BOM
29	8,3	7,0	4,0	6,9	APROVADO	7,1	BOM
30	1,4	0	0	0,7	REPROVADO	0,845	INSUFICIENTE

Comparando os resultados obtidos nos dois modelos apresentados na tabela, concluímos que para alguns alunos houve uma diferença considerável, isso se deve à base de regras escolhida, por exemplo, no caso do aluno 26, na AV sua nota foi $9,8$ o que é considerado ótimo, porém na AT e na EX sua nota foi 0, o que é considerado insuficiente, portanto de acordo com a regra 17, o conjunto Fuzzy associado a variável de saída é muito bom. Dessa forma, é importante salientar que o modelo Fuzzy é flexível, podendo sofrer adaptações de acordo com os critérios adotados.

Por fim, entendemos que o processo de avaliação é algo com um nível de subjetividade elevado e que tem consequências a longo prazo, com o modelo Fuzzy, essa subjetividade foi levada em consideração tornando a avaliação mais justa.

3.2 Inteligência artificial

A inteligência artificial é uma área do conhecimento que vem auxiliando na modernização e no desenvolvimento tecnológico com uma abrangência muito grande. Diversos seguimentos da ciência e da engenharia estão fazendo uso dessa importante ferramenta e isso fica bem evidente nos aparelhos que na atualidade são indispensáveis, como: os aparelhos celulares/smartphones, eletrodomésticos, automóveis, etc.

A natureza e o comportamento humano são as principais fontes de inspiração para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia que possibilitam a criação e o aprimoramento de equipamentos que possuem a capacidade de tomar decisões baseados em algum tipo de inteligência, neste contexto está inserida a robótica que é uma área ligada a diversos ramos da engenharia que viabilizam a automação de processos industriais e domésticos.

Atualmente, a robótica ocupa um lugar de destaque entre as áreas de pesquisa ligadas à tecnologia e com isso diversas instituições de ensino estão inserindo em suas grades curriculares aulas de robótica, que visam introduzir os procedimento e técnicas elementares de montagem e programação de robôs.

Nesta seção pretendemos mostrar como a lógica Fuzzy pode ser utilizada na programação e controle de um robô capaz de reconhecer e desviar de obstáculos. A descrição dos procedimentos, ferramentas e figuras utilizadas nessa aplicação foram adaptadas de [10].

Uma linha de equipamentos muito utilizada em robótica educacional é o Kit Lego

MindStorms NXT.

Conforme ilustração abaixo, o kit conta com o brick (1), que tem entrada para três servo-motores (6), um sensor de distância por ultrassom (5), um sensor de luz (4), um sonoro (3) e dois de toque (2).

O sensor de som pode ser ajustado na escala decibel (dB) para detectar todos os sons com a mesma sensibilidade e também na escala decibel alocada (dBA). As leituras são feitas em porcentagens, sendo os menores níveis percentuais correspondentes a ambientes silenciosos.

O sensor de toque é capaz de perceber quando é pressionado por algum objeto, e também quando é liberado.

O sensor de luz possibilita ao robô perceber ambientes claros e escuros com uma escala de 0 a 100. Com a possibilidade de medir a reflexão luminosa de uma superfície, e como cada cor reflete a luz de uma forma diferente, o robô torna-se capaz de distinguir cores, principalmente cores com tonalidades de preto e branco, onde a primeira indica ausência de luz (medidas baixas do sensor) e a segunda presença de luz (medidas altas).

O sensor ultra-sônico detecta a distância de obstáculos a até 255 centímetros com uma precisão de $\pm$ 3 cm calculando o tempo de retorno de uma onda sonora refletida pelo objeto.

Os servo-motores podem funcionar como entradas e/ou saídas de dados. Eles funcionam como um motor de passos, sendo possível controlar o quanto o motor deve girar, e com qual velocidade ele deve fazê-lo em uma escala de 0 a 100. Cada motor possui também um sensor de rotações embutido, que permite a leitura dos movimentos do motor.

Uma estrutura que pode ser utilizada é sugerida pela própria Lego denominada Tribot (figura abaixo), pois trata-se de um triciclo composto por duas rodas ligadas a servomotores e uma roda em eixo livre.

A vantagem de se utilizar esse formato está na sua grande eficiência, pois com apenas dois servomotores é possível controlar a direção e o sentido do deslocamento, obtendo-se os movimentos desejados a partir da utilização de uma estrutura simples.

Nessa estrutura básica são inseridos dois sensores ultrassônicos na sua parte superior, necessários para detectar os obstáculos e um sensor sonoro para detectar o sinal de parada.

Para programação do brink pode-se utilizar o software, desenvolvido pela National Instruments, LabVIEW. Com a implementação desse toolkit é possível executar tarefas mais complexas com o kit LEGO, pois com o MATLAB Script Node, é possível fazer a interface entre o LabVIEW e o Matlab.

Para montagem do sistema de controle Fuzzy pode-se utilizar o Fuzzy Logic Toolbox do software MATLAB 7.5. A utilização da lógica Fuzzy nesta aplicação se justifica devido a complexidade do problema, onde o robô terá que lidar com diferentes entradas simultâneas em diferentes situações, caso fosse utilizado um sistema de controle convencional, haveria a necessidade de mapear todas as situações possíveis, o que seria muito trabalhoso e poderia não se levar em conta todas as possíveis variáveis relevantes ao problema, seja por falta de conhecimento de alguma delas ou por mera distração.

As tarefas que o robô deverá executar são:

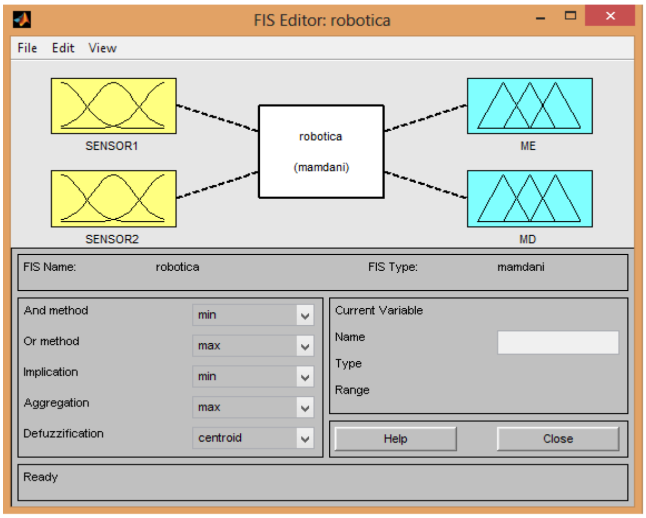
1. Desvio de obstáculos.

   Baseando-se nas leituras dos sensores ultrasônicos e no controlador Fuzzy, o robô deverá desviar dos obstáculos que por ventura atrapalhem o seu deslocamento. A utilização da Lógica Fuzzy favorece a maior fluidez nas atuações dos servo-motores, já que o controle é constante e não booleano, evitando trancos e engasgos no deslocamento do robô.

2. Parar quando for dado o sinal sonoro.

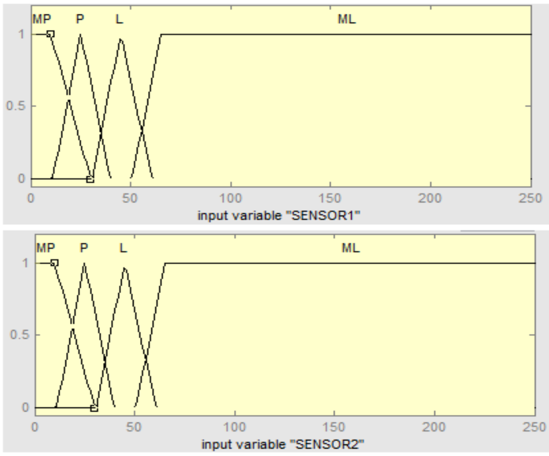
Para execução da tarefa 1, faz-se necessário a implementação de um sistema de controle Fuzzy, as variáveis de entrada que podem ser utilizadas são: Sensor1 e Sensor2, referentes aos valores obtidos pelos sensores ultrasônicos esquerdo e direito, respectivamente.

Como variáveis de saída, são definidas: ME e MD, referentes aos valores de potência que serão atribuídos aos servo-motores esquerdo e direito, respectivamente.

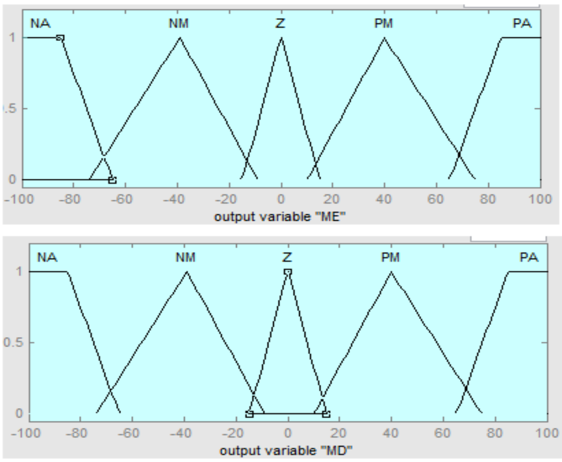


Na montagem do sistema de controle Fuzzy é necessário levar em consideração que as leituras dos sensores ultra-sônicos variam entre 0 e 255 e os servo-motores possuem potência na faixa entre -100 a 100, sendo os valores negativos relativos a movimentos para trás e os valores positivos relativos a movimentos para frente.

Para variáveis de entrada podem ser definidos quatro conjuntos Fuzzy: MP (muito perto), com função de pertinência trapezoidal, P(perto), com função de pertinência triangular, L (longe), com função de pertinência triangular, ML (muito longe), com função de pertinência trapezoidal. A escolha do tipo de função de pertinência vinculada a cada conjunto, que relaciona os valores lidos pelos sensores ultrasônicos aos conjuntos Fuzzy por meio de seus graus de pertinência, é feita a partir de dados empíricos extraídos de testes com os sensores.



Para as variáveis de saída podem ser definidos cinco conjuntos Fuzzy: NA (negativo alto), com função de pertinência trapezoidal, NM (negativo médio), com função de pertinência triangular, Z (zero), com função de pertinência triangular, PM (positivo médio), com função de pertinência triangular, PA (positivo alto), com função de pertinência trapezoidal.



A base de regras deve ser montada levando em consideração que o robô deve desviar para o lado onde o sensor identificar maior distância até ele, sendo que quando as distâncias direita e esquerda até o obstáculo forem iguais é atribuida uma decisão arbitrária. Se o obstáculo estiver longe ou muito longe, o robô não precisa fazer esse desvio, podendo seguir em frente. Uma possível base regras é:

1. Se Sensor 1 é MP e Sensor 2 é MP, então ME é PA e MD é NA.

2. Se Sensor 1 é P e Sensor 2 é MP, então ME é NA e MD é PM.

3. Se Sensor 1 é L e Sensor 2 é MP, então ME é NM e MD é PM.

4. Se Sensor 1 é ML e Sensor 2 é MP, então ME é NM e MD é PM.
5. Se Sensor 1 é MP e Sensor 2 é P, então ME é PM e MD é NA.
6. Se Sensor 1 é P e Sensor 2 é P, então ME é PM e MD é NM.
7. Se Sensor 1 é L e Sensor 2 é P, então ME é Z e MD é PM.
8. Se Sensor 1 é ML e Sensor 2 é P, então ME é PM e MD é PA.
9. Se Sensor 1 é MP e Sensor 2 é L, então ME é PM e MD é NM.
10. Se Sensor 1 é P e Sensor 2 é L, então ME é PM e MD é Z.
11. Se Sensor 1 é L e Sensor 2 é L, então ME é PM e MD é PM.
12. Se Sensor 1 é ML e Sensor 2 é L, então ME é PM e MD é PM.
13. Se Sensor 1 é MP e Sensor 2 é ML, então ME é PM e MD é NM.
14. Se Sensor 1 é P e Sensor 2 é ML, então ME é PA e MD é PM.
15. Se Sensor 1 é L e Sensor 2 é ML, então ME é PM e MD é PM.
16. Se Sensor 1 é ML e Sensor 2 é ML, então ME é PA e MD é PA.

O método de inferência que pode ser utilizado é o Mamdani e o método de defuzzificação pode ser o Centróide, descritos no capitulo 2.

Os possíveis obstáculos para implementação dessa aplicação na educação básica são auto custo do kit Lego Mindstorm NXT e adaptação do Labview para operar em conjunto com o Matlab, embora o contato com esses softwares seja extremamente produtivo, tendo em vista que são ferramentas poderosas e amplamente utilizadas no meio acadêmico e profissional.

3.3 Situações-problema aplicáveis no ensino médio

No primeiro ano do ensino médio, um dos primeiros conteúdos de matemática trabalhados, é a introdução a teoria de conjuntos, sendo abordadas as principais definições, operações e propriedades. Além disso, é aconselhável fazer um paralelo entre a linguagem de conjuntos e a lógica proposicional.

A ideia central desta seção é apresentar algumas situações-problema onde a teoria de conjuntos tradicional não é eficiente para solucionar.

1. **Atendimento de urgência.**

   No cenário atual da saúde pública do Brasil, onde há uma alta demanda de atendimento médico, baixo efetivo de trabalhadores e estrutura hospitalar precária. Um hospital resolveu estabelecer critérios para priorizar o atendimento das pessoas que se encontravam mais debilitadas, pois na região atendida pelo hospital estava ocorrendo um surto de virose, para isso foram levados em consideração dois sintomas.

   (a) Febre.

   (b) Dores no corpo.

   Num certo momento haviam cinco pacientes no hospital com os sintomas da virose. Considerando que cada sintoma corresponde a um conjunto Fuzzy e fazendo a averiguação com o especialista a cerca do grau de pertinência de cada paciente, foi construída a tabela:

PACIENTE	FEBRE (A)	DORES NO CORPO (B)
1	0,7	0,3
2	0,5	0,8
3	0,4	0,6
4	0,1	0,7
5	0,6	0,9

   Para indicar o quanto um indivíduo está doente, tomamos seu grau de pertinência ao conjunto Fuzzy A (Febre) e seu grau de pertinência ao conjunto Fuzzy B (Dores no corpo). Seu diagnóstico para a virose é dado pela conjunção desses graus de pertinência. Isto é, este indivíduo está doente com grau de pertinência dado por:

$$\mu_{A \wedge B}(a_1, a_2) = \min\{\mu_A(a_1), \mu_B(a_2)\}.$$

   Dessa forma, teríamos como graus de pertinência para virose:

   - Paciente 1: 0,3.

- Paciente 2: 0,5.
- Paciente 3: 0,4.
- Paciente 4: 0,1.
- Paciente 5: 0,6.

Portanto, a ordem de atendimento, segundo o modelo apresentado, seria: Paciente 5, Paciente 2, Paciente 3, Paciente 1, Paciente 4.

2. **Nível de satisfação na compra de um imóvel.**

   O Brasil nos últimos anos vem passando por um período de intensa atividade relacionada a área de construção civil, isso se justifica pela realização de eventos de ordem mundial como a copa do mundo de futebol e as olimpíadas, mas também parte desse cenário se deve ao incentivo do governo a financiamentos imobiliários como o famoso programa Minha Casa Minha Vida, diante disso faz-se necessário implementar um sistema de controle a cerca da qualidade dos imóveis e serviços prestados pelas construtoras e imobiliárias.

   Numa cidade do interior de Sergipe, uma construtora, visando o grande potencial do município, resolveu empreender a construção de um condomínio de apartamentos. Para avaliar o serviço prestado por essa empresa foi feita uma pesquisa com compradores onde foi levado em consideração o nível de satisfação com relação aos serviços prestados pelas empresas envolvidas. Os aspectos avaliados foram:

   (a) Qualidade do imóvel/Relação custo-benefício.

   (b) Qualidade no atendimento/Pontualidade na entrega do imóvel.

   Considerando que a satisfação relacionada aos itens listados acima correspondem aos conjuntos Fuzzy A e B respectivamente, onde 0 representa a completa insatisfação equanto que 1 representa a máxima satisfação. Na tabela abaixo foram ilustrados os resultados obtidos e computados por especialistas referentes às graus de pertinência, aos conjuntos A e B, de cinco elementos, que nessa situação são os clientes.

CLIENTE	A	B
1	0,4	0,3
2	0,5	0,7
3	0,4	0,6
4	0,1	0,3
5	0,6	0,5

Supondo que o grau de satisfação relacionado aos serviços prestados pelas empresas envolvidas seja dado pela relação Fuzzy:

$$\mu_R(x, y) = \min[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)].$$

Teremos:

CLIENTE	$\mu_R(x, y)$
1	0,3
2	0,5
3	0,6
4	0,3
5	0,4

Dessa forma podemos afirmar que o nível de satisfaçam desses cinco clientes com os serviços prestados é, em média, igual a $\dfrac{0,3 + 0,5 + 0,6 + 0,3 + 0,4}{5} = 0,42.$

3. **Aptidão por área de conhecimento.**

O comprometimento com a formação dos estudantes passa também pelo direcionamento por parte da escola para a área ou campo de maior aptidão, para isso faz-se necessário a implementação de um sistema de avaliação vocacional no qual o desempenho e a aptidão relacionadas às áreas do conhecimento sejam levadas em consideração no processo de escolha da carreira que se pretende seguir.

Pensando nisso uma escola resolveu montar o modelo de avaliação vocacional tomando como base as quatro áreas do conhecimento que são cobradas no ENEM, bem como as áreas de atuação nas quais a maioria dos cursos superiores são enquadrados, foram definidos os seguintes conjuntos:

(a) de estudantes $X = \{$ Lívia, Eduardo, Marcelo $\}$.

(b) de áreas do conhecimento $Y = \{$ matemática, ciências da natureza, ciências sociais, linguagens e códigos $\}$.

(c) de áreas de atuação $Z = \{$ ciências humanas, ciências sociais, ciências exatas, tecnologia $\}$.

O desempenho e a aptidão dos estudantes (X) em relação às áreas do conhecimento (Y) são representados pela matriz relacional P, ao passo que a relação entre as áreas do conhecimento (Y) e as áreas de atuação (Z) são dadas pela matriz relacional Q.

$$\mu_P(X,Y) = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 & 0,7 & 0,5 \\ 0,7 & 0,7 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

$$\mu_Q(Y,Z) = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 1 & 0,8 \\ 1 & 0,7 & 0,3 & 0,2 \\ 0,8 & 1 & 0,1 & 0,2 \\ 1 & 1 & 0,8 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a regra de composição max-min, descrita na seção 1.6.1, teremos:

$$\mu_{P \circ Q}(X,Z) = \begin{bmatrix} 1 & 0,7 & 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,7 & 0,7 & 0,7 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a matriz obtida relaciona o nível de interesse dos estudantes: Lívia, Eduardo e Marcelo às áreas de atuação: ciências humanas, ciências sociais, ciências exatas, tecnologia. Agrupando os resultados numa tabela, teremos:

ÁREA/ESTUDANTE	Lívia	Eduardo	Marcelo
Ciências Humanas	1	0,7	0,4
Ciências Sociais	0,7	0,7	0,4
Ciências exatas	0,5	0,7	0,6
Tecnológicos	0,5	0,7	0,6

Referências Bibliográficas

[1] BARROS, L. C. *Sobre conjuntos fuzzy.* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 56, p. 2 - 9, 2005.

[2] NICOLETTI, Maria do Carmo ; CAMARGO, Heloisa de Arruda. *Fundamentos da teoria de conjuntos fuzzy(Série Apontamentos).* São Paulo: EdUFSCar, 2009.

[3] SIMÕES, Marcelo Godoy ; SHAW, Ian S. *Controle e modelagem fuzzy.* 2.ed. São Paulo: Blucher: FAPESP, 2007.

[4] BARROS, L. C. ; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática.* 2.ed. São Paulo: IMECC, Universidade Estadual de Campinas, 2010.

[5] KLIR, George J. ; YUAN, Bo. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications.* New Jersey: Prentice Hall PTR, 1995.

[6] AMENDOLA, Mariangela; SOUZA, Anderson Luiz; BARROS, Laécio Carvalho. *Manual do uso da teoria dos conjuntos Fuzzy no MATLAB 6.5.* São Paulo, 2005. (Manual)

[7] GOMIDE, Fernando A. C.; GUDWIN, Ricardo R.; TANSCHEIT, Ricardo. *Conceitos Fundamentais da Teoria de Conjuntos Fuzzy, Lógica Fuzzy e Aplicações.* São Paulo, 1995. Disponível em:<http://www.unitins.br/cienciascontabeis/arquivos/Referencias-Bibiligraficas.pdf> Acesso em: 18 nov. 2013.

[8] TANSCHEIT, Ricardo. *Sistemas Fuzzy.* Rio de Janeiro. Disponível em <http://agminimo.googlecode.com/svn/trunk/mono-material/Fuzzy/LN-Sistemas2520Fuzzy.pdf> Acesso em: 10 dez. 2013.

[9] BARRANTES, Andreza Carla. *Sistema de Inferência Fuzzy Aplicado na Avaliação Discente*. 2011. 47 f. Monografia (Graduação em Matemática) - Instituto Federal de São Paulo, São Paulo.

[10] SIMONSEN, Gabriel Drummond de M. *Resgate utilizando robô real*. Disponível em: <http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio-resumo2011/Relatorios/CTC/ELE/ELE-Gabriel20Drummond20de20MendonC3A7a20Simonsen.pdf>. Data de acesso: 15 DEZ. 2013.