UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

# O Estudo de Curvas de Nível na Educação Básica.

**Elton Severino da Silva Dória**

**Orientador: Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira**

São Cristovão-SE
Abril de 2014

**Elton Severino da Silva Dória**

# O Estudo de Curvas de Nível na Educação Básica.

**Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.**

**Orientador: Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira**

São Cristovão-SE
Abril de 2014

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

**O estudo de Curvas de Nível na Educação Básica**

*por*

Elton Severino da Silva Doria

Aprovada pela Banca Examinadora:

Evilson S. Vieira

Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira - UFS
Orientador

Ives Lima de Jesus

Prof. Dr. Ives Lima de Jesus - IFBA
Primeiro Examinador

Prof. Dr. João Paulo Attie - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 11 de abril de 2014

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

# Sumário

# Lista de Figuras

# Agradecimentos

Contemplando esse momento de conquista, agradeço a todos que contribuíram no transcorrer desta jornada, em especial:

a Deus, meu Pai. Por sua inclinação a realizar sonhos, por ter revigorado diariamente minhas forças, por ter me resguardo nas desgastantes viagens de Jatobá-PE a Aracaju-SE, pelo cuidado dispensado à minha família. Deus é bom!

a minha esposa Yussara, meu amor. Pela ilimitada contribuição e compreensão nessa árdua etapa das nossas vidas. Me tornei ainda mais admirador seu, por exercer com excelência os papéis de esposa, mãe e amiga. Te amo!

aos meus filhos Sarah e Caio, meus pequenos inspiradores. Que, mesmo sem entender a necessidade da minha ausência em momentos tão importantes em suas vidas, foram peças fundamentais nessa conquista.

aos meus familiares. Pelas mais diversificadas contribuições. Assim, na realização desse sonho, tem um pedacinho de cada um de vocês.

ao meu orientador Prof. Evilson Da Silva Vieira. Por ter aceito ao convite de me orientar nesse trabalho e pelo sincero empenho e colaboração na concretização dessa ideia, sempre disposto quando precisei.

aos meus professores. Por me proporcionarem um excelente nível de conhecimento que servirá para minha vida, em especial, na prática docente.

aos meus colegas de mestrado pelo companheirismo durante todo esse tempo. Pelos apoios em duros momentos, pelas colaborações nas elucidações de dúvidas e pelos inúmeros momentos de descontração.

àqueles que contribuíram para a implantação deste rico projeto, como a SBM, a Capes e a UFS.

Minha sincera gratidão.

Elton Severino da Silva Dória
*Abril de 2014*

# Resumo

A presente dissertação tem por objetivo sugerir a possibilidade de que grande parte do estudo de curvas de nível pode ser abordada nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Ao analisar alguns componentes do estudo de curvas de nível, como pontos, retas, planos, curvas, coordenadas, proporções, entre outros, percebe-se que muitos dos conteúdos da educação básica são contemplados em tal exploração, assim como é intensificada a compreensão geométrica espacial do estudante. Outro registro é que, abordagens a respeito de Lugares Geométricos ou estudos, por exemplo, de Coordenadas Cartesianas no Espaço ou Coordenadas Polares, que são empregadas no estudo de curvas de nível, poderiam ocorrer em tais séries, pois são conhecimentos que auxiliam na percepção do meio em que vivemos. No decorrer do trabalho ocorrem diferentes investidas acerca do tema, desde o contexto histórico, passando por conhecimentos matemáticos e geométricos, adentrando um pouco em topografia até chegar a uma situação prática, na qual, a partir da construção da representação de um relevo, é possível desenhar suas curvas de nível e seu perfil topográfico. O caminho contrário também pode ser feito, pois a partir de um conjunto de curvas, podemos obter o formato do acidente geográfico.

**Palavras Chaves**: Geometria, Topografia, Curvas de Nível.

# Capítulo 1

# Introdução

Pensando na realidade do município em que resido e percebendo o perfil dos jovens da minha comunidade é que nasce a motivação para a escolha e desenvolvimento deste tema, pois deve-se ao fato de eu ser professor de estudantes que residem em áreas rurais do município ribeirinho de Jatobá-PE. Esse contato me permite conhecer a realidade de vida deles e suas necessidade. Esses jovens possuem contato desde cedo com um ambiente rural e, geralmente, desenvolvem atividades ligadas a agricultura, pecuária ou piscicultura, que são as principais atividades desenvolvidas na cidade e região.

Um outro fato muito interessante que contribuiu para a aspiração da execução deste projeto, foi de ocorrer no mesmo município a construção da Usina Hidrelétrica Luis Gonzaga, realizada pela CHESF, que ao serem concluídas as obras e, logo após, fechadas as suas comportas, as águas do rio São Francisco subiram em níveis, previamente definidos por topógrafos, chegando ao ponto de deixar submersa a cidade vizinha, Petrolândia-PE.

Assim, por motivos como esses, questões arroladas a essas realidades despertam o interesse dos estudantes e torna significativo o estudo de Matemática e Geometria.

> A atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. (PCNs)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática foram elaborados com o objetivo de orientar as escolas a planejarem seus currículos, que possam prever situações em que os alunos tenham acesso aos conhecimentos socialmente elaborados e que são necessários ao exercer a cidadania, que eles consigam evidenciar a importância que a Matemática tem para compreender o mundo em sua volta, e também consigam perceber que esta área do conhecimento estimula a criatividade, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Da forma que a exploração e a representação do meio em que vivemos é algo do interesse da Topografia, parte do estudo de Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio pode partir de análises, conhecimentos e de técnicas topográficas já há muito tempo discutidas e aplicadas.

O trabalho tem início com um breve histórico a respeito da Geometria, da Topografia e do estudo de Coordenadas, com o intuito de mostrar a habilidade do ser humano a partir de suas necessidades e a busca de técnicas que facilitem suas atividades cotidianas revelando, também , o incansável interesse em adquirir novos conhecimentos.

Adiante, são expostas algumas ferramentas matemáticas aplicadas no estudo de curvas de nível, mostrando assim, que o estudo de qualquer uma dessas ferramentas pode ter como ponto de partida o conhecimento aplicado na exploração dessas curvas.

Foi destinado um capítulo ao tema "Curvas", pois no estudo de Geometria na Educação Básica essa abordagem não é muito trabalhada. O motivo não é claro, mas percebe-se os muitos conhecimentos e habilidades que podem ser explorados e desenvolvidos, como foi exposto no trabalho.

É notório que o estudo a respeito de curvas de nível e suas particularidades ficaram restritas ao ensino superior. No entanto, como mostra o capítulo "Curvas de Nível", onde o tema foi esclarecido usando um ponto de vista topográfico, muitos conhecimentos ali tratados fazem parte do currículo da Educação Básica, de tal forma que há maneiras de tal tema ser abordado e aprofundado em determinadas séries do Ensino Fundamental e Médio.

Por fim, é sugerida uma atividade, na qual tudo o que foi apresentado nesse trabalho pode ser extraído e discutido de forma prática. Uma atividade que registra a possibilidade de realização de um método facilitador de forma a provar a intenção da presente dissertação.

# Capítulo 2

# Contexto Histórico

Nesse capítulo será realizado um breve apanhado histórico de componentes relevantes para a construção deste trabalho. Será explanado a respeito da Geometria, da Topografia e do estudo de Coordenadas, incluindo suas importâncias.

## 2.1 Geometria

É muito difícil afirmar a respeito do surgimento da Geometria, pois tal ciência apareceu independentemente em diversas culturas antigas como um aglomerado de informações e experiências práticas sobre, por exemplo, comprimento, área e volume.

A Geometria, então ramo da matemática, surgiu enquanto atividade empírica dos povos antigos para suprir as suas necessidades da época, sendo suas primeiras sistematizações realizadas pelos gregos que muito contribuíram para essa área do saber. Platão, dentre outros, deram à Geometria um caráter especial, encarando-a como um ramo de excelência da ciência Matemática. Mas, é com o matemático grego Euclides que a Geometria recebeu seu grande impulso. Seu tratamento, chamado de geometria euclidiana, estabeleceu um padrão que perdurou por séculos. Euclides sistematizou em sua notória obra, os Elementos, os principais conhecimentos trabalhados pelos seus antecessores, dando um caráter axiomático-dedutivo ao conhecimento geométrico da época.

O que talvez justifique a origem de sua palavra Geometria, que vem do grego antigo: *geo*- "terra", *metria*- "medida", seriam as necessidades do homem em compreender melhor o meio onde ele se encontrava. Assim, a Geometria é a área da Matemática que se dedica a questões relacionadas com forma, tamanho, posição relativa entre figuras ou propriedades do espaço, dividindo-se em várias subáreas, dependendo dos métodos utilizados para estudar os seus problemas. Um matemático que trabalha no campo da geometria é chamado geômetra.

Os gregos muito contribuiram na sistematização dessa ciência e, após essa contribuição, existiram diversas outros que colaboraram para o desenvolvimento dessa ciência enquanto ramo matemático. Descartes gerou a Geometria Analítica, Poncelet e Chasles, introduzindo novas concepções, que contribuíram para o surgimento da Geometria Projetiva; Cayley introduziu elementos imaginativos às descobertas de Poncelet e Chasles, que foram posteriormente desenvolvidos e unificados por Felix Klein[3].

O campo da astronomia, especialmente o mapeamento das estrelas e planetas na esfera celestial e a descrição das relações entre os movimentos dos corpos celestiais, foi uma das mais importantes fontes de problemas geométricos durante os mil e quinhentos anos seguintes.

Tanto a geometria quanto a astronomia foram consideradas no mundo clássico parte do Quadrivium, um subgrupo das sete artes liberais cujo domínio era considerado essencial para o cidadão livre.

A influência da geometria sobre as ciências físicas foi enorme. Como exemplo, quando o astrônomo Kepler mostrou que as relações entre as velocidades máximas e mínimas dos planetas, propriedades intrínsecas das órbitas, estavam em razões que eram harmônicas(relações musicais), ele afirmou que essa era uma música que só podia ser percebida com os ouvidos da alma — a mente do geômetra.

## 2.2 Topografia

Do grego antigo: *topos* - "lugar" e *graphen* - "descrever", o que significa, a descrição exata e minuciosa de um lugar.

> "A Topografia tem por objetivo o estudo dos instrumentos e métodos utilizados para obter a representação gráfica de uma porção do terreno sobre uma superfície plana" [5]

Historicamente é quase impossível datar a origem da topografia, porém, quando a humanidade sentiu a necessidade de fixar moradia, ou seja, deixou de ser nômade, tal ciência começou a fazer parte de suas diversas atividades e se tornou muito importante na determinação do espaço físico a ser utilizado.

Nas próprias escrituras bíblicas, especificamente no Velho Testamento, pode-se encontrar várias referências ao direito de propriedade e, também, os babilônicos certamente praticavam algumas técnicas de topografia. A prova para tal informação são os achados datados de cerca de 2500a.C.. Esses materiais encontrados por arqueólogos são mapas da Babilônia inscritos em tábuas.Veja a Figura 2.1.

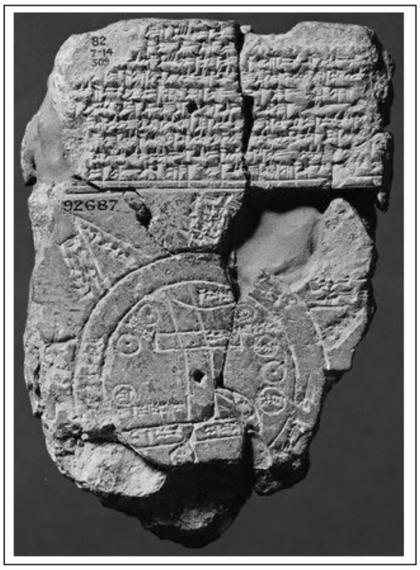


Figura 2.1: Mapa Babilônico.

No Egito antigo a humanidade fazia uso de técnicas de topografia para assistência nos projetos de sistemas de irrigação; construção de pirâmides e de prédios públicos; entre outras obras.

Dos tempos romanos até a era moderna foram poucos os avanços na arte da topografia, mas nos últimos séculos surgiram lunetas, teodolitos, medidores eletrônicos de distâncias, computadores, sistemas de posicionamento global por satélites e muitos outros dispositivos.

Com o avanço das ciências e com constante descoberta de novas tecnologias, certamente, muitos outros equipamentos e técnicas serão criadas e aperfeiçoadas, auxiliando e facilitando a vida do profissional que trabalha com topografia.

## 2.3 Coordenadas

Em meio de diversas pessoas que tiveram influência no pensamento científico moderno, pode-se mencionar, por exemplo, Leonardo da Vinci (1452-1519), Nicolau Copérnico (1473-1543), Francis Bacon (1561-1626), Galileu Galilei (1564-1642), J. Kepler (1571-1630), Renné Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1642-1727). Esses homens viveram num momento em que, para compreender a natureza das coisas, a ideia de movimento conflitou-se com a de estática. Foi uma época histórica em que homens incrédulos arredondaram a Terra, exploradores como Cristóvão Colombo (1450-1506) extinguiram os monstros marinhos do além da costa terrestre e novos filósofos estimularam uma outra maneira para se refletir a respeito do mundo.

Figura 2.2: Newton

O estudo aprofundado do Sistema Solar nos permitiu conhecer muito melhor o nosso Sol e a exploração planetária trouxe uma nova visão desse conjunto. O Sistema Solar tem como elemento central uma estrela anã, com cerca de 4.6 bilhões de anos de idade chamada Sol, ao redor da qual orbitam os oito planetas conhecidos, satélites, meteoróides, asteróides e cometas, todos distribuídos numa grande região de quase vinte bilhões de quilômetros. Em busca de entender o funcionamento desse complexo sistema, por exemplo, ao se procurar compreender o movimento de corpos celestes, Isaac Newton (Figura 2.2) observou que a localização ou a trajetória de um ponto no plano ficaria melhor descrita por sua direção angular e sua distância em relação a um ponto fixo. Esse esquema atualmente é denominado sistema de coordenadas polares.

Figura 2.3: Descartes

Por outro lado, desde remotas épocas o homem percebeu a necessidade de localizar coisas ou a si mesmo, ou melhor, da necessidade de representar ou descrever localizações. Tais localizações seriam possíveis quando existissem referências, quando existissem informações ou registros que apontassem onde se encontram determinados locais. Na história da Cartografia e dos mapas constam inúmeros meridianos (linhas de referência norte-sul entre o Pólo Norte e o Pólo Sul) de referência para o ponto inicial da longitude(localização de um lugar na Terra para leste ou para oeste). O primeiro meridiano de origem foi supostamente estabelecido por Ptolomeu no século II, quando escolheu as Ilhas Afortunadas (hoje Ilhas Canárias) como referência longitudinal e limite do mundo conhecido.

Semelhante a tal necessidade, dado ao estudar o movimento de um ponto no plano, Renné Descartes (Figura 2.3) inquietou-se em determinar as propriedades geométricas de curvas planas relacionando variáveis como x e y. Esse tipo de estudo proporcionou a criação do sistema de coordenadas retangulares ou sistema cartesiano. Com a introdução do plano cartesiano, muitos problemas de outras áreas da matemática, como álgebra, puderam ser transformados em problemas de geometria (e vice-versa), muitas vezes conduzindo à simplificação das soluções.

# Capítulo 3

# Ferramentas Matemáticas Aplicadas no Estudo de Curvas de Nível

No estudo de Curvas de Nível são aplicadas diversas ferramentas e conheimentos matemáticos. Aqui serão expostas algumas dessas ferramentas que são estudadas na Educação Básica e algumas outras que, não necessariamente de maneira aprofundada, também poderiam ser estudadas nessas séries, como Coordenadas no Espaço e Coordenadas Polares.
.

## 3.1 Escalas

Por muitas vezes o que estamos vendo não pode ser reproduzido no papel em tamanho real. Na maioria dos casos precisamos reduzir o tamanho real para que objeto ou espaço possa vir a caber nesse papel.

As Escalas representam, de forma gráfica, um mapa e a realidade do espaço geográfico real. É a relação entre a medida de um objeto ou lugar representado no papel e sua medida real.

Duas figuras semelhantes têm ângulos iguais dois a dois e lados homólogos proporcionais.

Verifica-se portanto, que será sempre possível, através do desenho geométrico obter-se figuras semelhantes às do terreno.

Sejam:

**D** = um comprimento tomado no terreno, que denominar-se-á distância real natural.

**d** = um comprimento homólogo no desenho, denominado distância prática.

Como as linhas do terreno e as do desenho são homólogas, o desenho que representa o terreno é uma figura semelhante a dele, logo, a razão ou relação de semelhança é a seguinte:

$$\frac{d}{D}$$

Esta relação é denominada Escala.

Assim:

Escala é definida como a relação existente entre as dimensões das linhas de um desenho e as suas homólogas.

A relação $\frac{d}{D}$ pode ser maior, igual ou menor que a unidade, dando lugar à classificação das escalas quanto a sua natureza, em três categorias:

- Na $1^a$, tem-se d > D.
- Na $2^a$, tem-se d = D.
- Na $3^a$ categoria, que é a usada em Cartografia, a distância gráfica é menor que a real, ou seja, d < D. É a escala de projeção menor, empregada para reduções, em que as dimensões no desenho são menores que as naturais ou do modelo.

Com isso os mapas podem utilizar duas escalas, a numérica ou a gráfica.

### 3.1.1 Escalas Numéricas

A escala numérica é estabelecida através de uma relação matemática, normalmente representada por uma razão, por exemplo: 1: 300 000 (1 por 300 000). A primeira informação que ela fornece é a quantidade de vezes em que o espaço representado foi reduzido. Neste exemplo, o mapa é 300 000 vezes menor que o tamanho real da superfície que ele representa.

Assim, indica a relação entre os comprimentos de uma linha na carta e o correspondente comprimento no terreno, em forma de fração com a unidade para numerador.

$E = \frac{1}{N}$, onde $N = \frac{D}{d}$

Logo, $E = \frac{1}{\frac{D}{d}} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{d}{D}$

Sendo:
E = escala
N = denominador da escala
d = distância medida na carta
D = distância real (no terreno)

As escalas mais comuns têm para numerador a unidade e para denominador, um múltiplo de 10. O numerador sendo 1, ele indica o valor de 1 unidade no mapa. O denominador é a unidade variável e indica o valor em cm correspondente no território. No caso da escala exemplificada (1: 300 000), 1cm no mapa representa 300 000 cm no terreno, ou 3 km.

### 3.1.2 Escalas Gráficas

A escala gráfica é representada por um pequeno segmento de reta graduado, sobre o qual está estabelecida diretamente a relação entre as distâncias no mapa, indicadas a cada trecho deste segmento, e a distância real de um território. Veja a Figura 3.1.

É a representação gráfica de várias distâncias do terreno sobre uma linha reta. É constituída de um segmento à direita da referência zero, conhecida como escala primária. Consiste também de um segmento à esquerda da origem denominada de Talão ou escala de fracionamento, que é dividido em submúltiplos da unidade escolhida graduadas da direita para a esquerda.

A Escala Gráfica nos permite realizar as transformações de dimensões gráficas em dimensões reais sem efetuarmos cálculos. Para sua construção, entretanto, torna-se necessário o emprego da escala numérica.

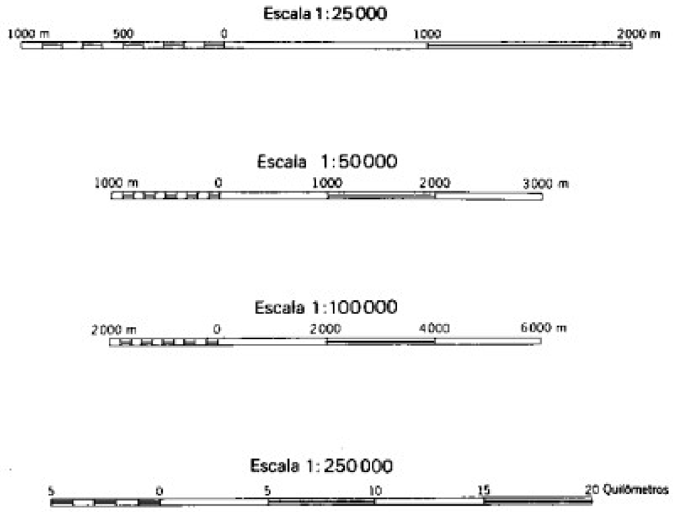


Figura 3.1: Escalas Gráficas. (Fonte: www.ibge.gov.br)

O seu emprego consiste nas seguintes operações:
$1^o$) Tomamos na carta a distância que pretendemos medir (pode-se usar um compasso).
$2^o$) Transportamos essa distância para a Escala Gráfica.
$3^o$) Lemos o resultado obtido.

## 3.2 Ponto, Reta e Plano.

Vários matemáticos da antiguidade baseados em estudos e observações do cotidiano (vida real), como Euclides de Alexandria (360 a 295 a.C.) estabeleceram entes matemáticos com os quais construíram a geometria. Três desses entes destacam-se por serem conhecidos intuitivamente. São eles: o ponto, a reta e o plano.

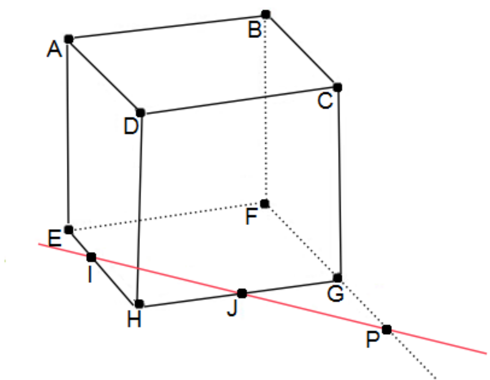


Figura 3.2: Pontos, Retas e Planos.

Ao estudar estes entes geométricos, tratando apenas de suas posições, se faz necessário estabelecer conceitos e propriedades.

As primeiras noções na geometria, chamadas primitivas, são as de ponto, reta e plano, que são conhecidas intuitivamente, ou seja, são aceitas sem definição.

A noção de ponto pode ser-nos dada intuitivamente pelo menor grão de areia desprovido de espessura, ou então, pela marca deixada no papel pela ponta de um lápis. Um ponto não tem dimensão e é usualmente representado por um pequeno círculo e identificado com uma letra latina maiúscula (A, B, C, ..., Z). Conforme Figura 3.3

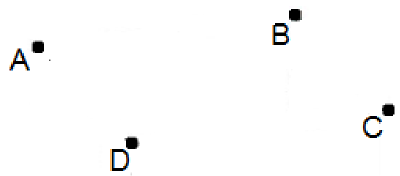


Figura 3.3: Pontos.

Para ter a ideia de reta, basta imaginar (supor) que uma caneta se prolongue infinitamente e que seja desprovida de espessura. Esta suposição conduz-nos à noção de reta. Poderíamos fazer outras comparações, como por exemplo, um cordão "infinitamente"grande e bem esticado ou os cabos de eletricidade. Uma reta é constituída por uma infinidade de pontos. Uma reta tem dimensão um, isto é, apenas possui dimensão linear, o comprimento. É representada por uma “‘linha” e identificada por uma letra latina minúscula (a, b, c, ..., z). Conforme Figura 3.4


Figura 3.4: Reta.

Assim como o ponto e a reta, existem situações do cotidiano que nos tornam possível descrever um plano, tais como, o chão de uma sala, o teto, ou a superfície de um lago. Qualquer deles nos ajuda a visualizar um plano, pois são superfícies planas que podemos imaginar desprovidas de espessura e prolongadas infinitamente.

Um plano tem dimensão dois, isto é, possui comprimento e largura. É representado por um paralelogramo e usualmente identificado por uma letra minúscula do alfabeto grego ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...). Conforme Figura 3.5.

Para o desenvolvimento da Geometria, necessita-se, além dos conceitos primitivos, fixar também outros conceitos, postulados ou axiomas e teoremas.

Para o estudo de Geometria são necessários esses entes primitivos, pois várias definições e postulados dependem deles. Uma definição é um enunciado que explica o significado de um termo e pode ser estabelecido através de uma série de palavras que definem o termo. Um postulado, ou axioma, é uma afirmação que é aceita sem que seja necessária a prova, contanto que não exista a contraprova. Enquanto teorema é uma afirmação que pode ser provada como verdadeira através de outras afirmações já demonstradas, como outros teoremas, juntamente com afirmações anteriormente aceitas, como axiomas.

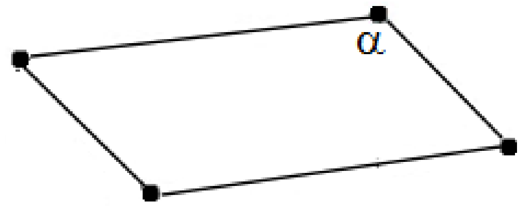


Figura 3.5: Plano.

Dentre vários axiomas existentes na geometria, destacamos:

**Axioma 3.2.1** *Numa reta bem como fora dela há infinitos pontos distintos.*

**Axioma 3.2.2** *Dois pontos determinam uma única reta.*

**Axioma 3.2.3** *Pontos colineares pertencem à mesma reta.*

**Axioma 3.2.4** *Três pontos não colineares determinam um único plano.*

**Axioma 3.2.5** *Se dois planos $\alpha$ e $\beta$ se interseccionam em um ponto P, então eles possuem outro ponto em comum.*

Assim, como pode-se destacar o teorema:

**Teorema 3.2.1** *Se uma reta tem dois de seus pontos (distintos) pertencentes a um mesmo plano, então a reta está contida no plano.*

**Demonstração:** *Sejam r a reta do enunciado e P, Q os dois pontos distintos de r. Seja $\alpha$ plano contendo P e Q. A mostrar: $r \subseteq \alpha$. Note que $\alpha$ é um plano, logo a Geometria Plana vale em $\alpha$. Assim, como $P, Q \in \alpha$, $\exists|$ s reta passando por P e Q em $\alpha$.* Pelo Postulado 3.2.2, deve valer que r = s. Como $s \subseteq \alpha$, segue que $r \subseteq \alpha$.

### 3.2.1 Posições relativas entre duas retas.

Dadas r e s duas retas distintas, essas retas podem se relacionar de alguma maneiras distintas.

Se $r \cap s =$ P ponto. Neste caso, dizemos que r e s são retas *concorrentes*. Note que, como pelo Axioma 3.2.4, três pontos distintos do espaço não colineares determinam um único plano, as retas concorrentes r e s sempre serão coplanares, pois é possível determinar um único plano pegando-se um ponto de r diferente de P, um ponto de s diferente de P e o próprio ponto P, conforme a Figura 3.6.

Retas concorrentes que formam entre si ângulos retos, ou seja, medindo $90^o$, chamamos de retas perpendiculares.

Nos casos em que $r \cap s = \varnothing$ e existe um único plano que as contém. Nesse caso, dizemos que as retas r e s são *paralelas*. Segundo a Figura 3.7.

Se as retas não têm ponto em comum, ou seja, $r \cap s = \varnothing$ e também não existe um plano que as contém. Neste caso, dizemos que r e s são retas *reversas*. Conforme a Figura 3.8.

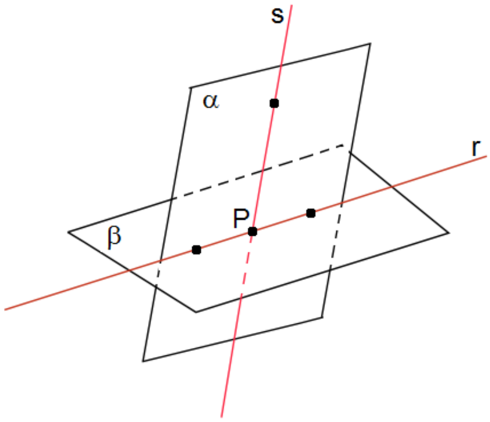


Figura 3.6: Retas concorrentes.

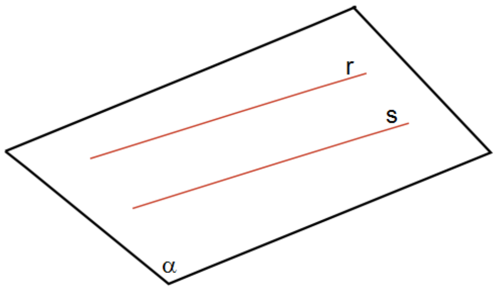


Figura 3.7: Retas paralelas.

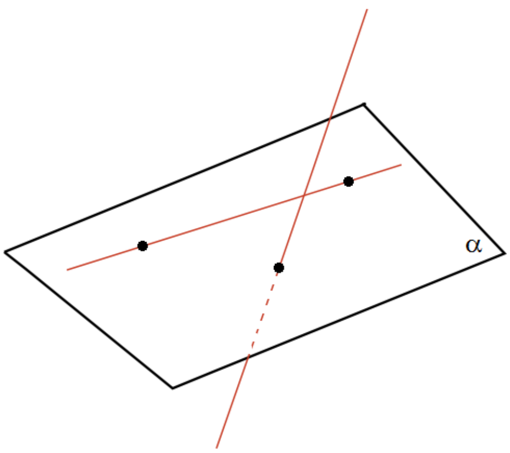


Figura 3.8: Retas reversas.

### 3.2.2 Posições relativas entre reta e plano

Dados uma reta r e um plano $\alpha$, existem apenas três posições relativas possíveis entre eles.

No caso em que $r \cap \alpha = \varnothing$, ou seja, em que a reta não toca no plano, temos que a reta $r$ é paralela ao plano $\alpha$. Conforme a Figura 3.9.

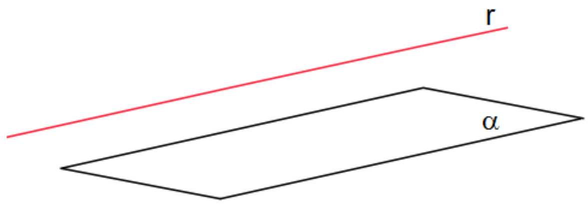


Figura 3.9: Reta paralela ao plano.

Quando $r \cap \alpha = P$, ou seja, quando uma reta "fura" um plano, dizemos que a reta r é secante ao plano $\alpha$. Ver a Figura 3.10.

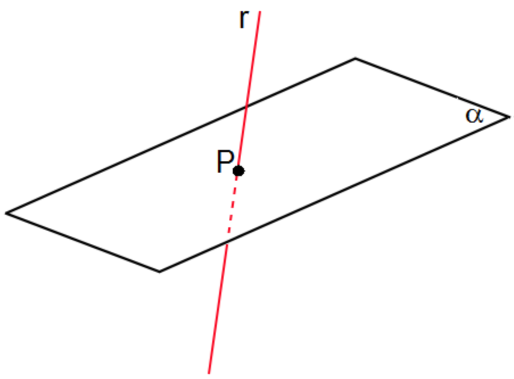


Figura 3.10: Reta secante ao plano.

Outra condição para a relação entre uma reta e um plano é a de que a reta pode estar contida no plano. Ou seja, se $r \cap \alpha = \{P, Q\}$ , pelo Teorema 3.2.1, $r \cap \alpha \supseteq r \Longleftrightarrow \alpha \supseteq r$, dessa forma $r \cap \alpha = r$. Ilustrando essa relação, temos a Figura 3.11.

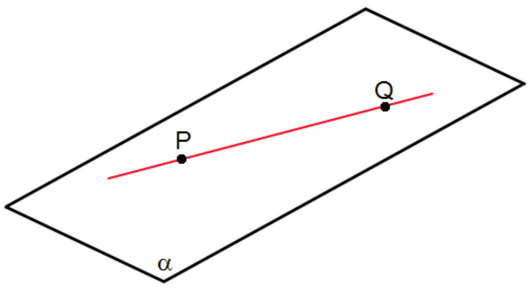


Figura 3.11: Plano contém reta.

### 3.2.3 Posições relativas entre planos

Graças ao Axioma 3.2.5, existem apenas duas posições relativas entre planos.

No caso em que os planos se intersecionam, eles formam uma reta, ou seja, $\alpha \cap \beta =$ r reta. Conforme Figura 3.12.

Pois, se $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$, então $\exists$ P no espaço tal que P $\in \alpha \cap \beta$. Pelo Axioma 3.2.5 , existe Q $\neq$ P tal que Q $\in \alpha \cap \beta$. Se r é a reta que passa por P e Q, o Teorema 3.2.1 garante que r$\subseteq \alpha$ e r$\subseteq \beta$ pois P, Q $\in \alpha$ e P, Q $\in \beta$. Daí, r $\subseteq \alpha \cap \beta$. Então, temos que $\subseteq \alpha \cap \beta =$ r.

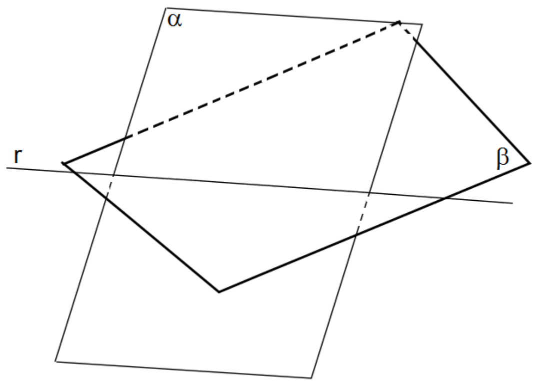


Figura 3.12: Secção entre planos.

O outro caso é quando os dois planos são paralelos.

No caso em que $\alpha \cap \beta = \varnothing$, temos que os dois planos são paralelos. Ou seja, $\alpha$ é paralelo a $\beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$ ou $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$. Figura 3.13.

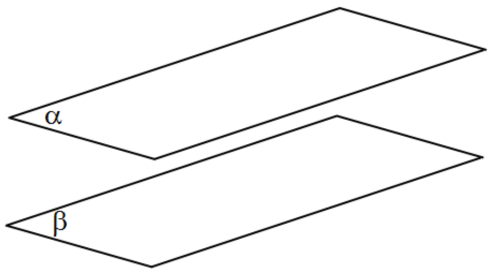


Figura 3.13: Planos paralelos.

## 3.3 Lugar Geométrico

Podemos classificar uma figura como um lugar geométrico (*l.g.*) de pontos quando todos os seus pontos, e apenas eles, gozam de uma propriedade em comum.

**Exemplo 3.3.1** *Sejam $A$ e $B$ dois pontos distintos em um plano $\alpha$.*

*O lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A$ e de $B$ é a mediatriz so segmento $\overline{AB}$.*

*Isso significa que, no plano $\alpha$, todos os pontos que estão à mesma distância de $A$ e de $B$, pertencem necessariamente à mediatriz $m$, e, reciprocamente, todo ponto de $m$ é equidistante de $A$ e de $B$.*

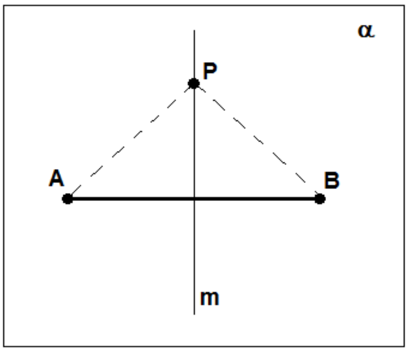


Figura 3.14: Lugar Geométrico de dois pontos

**Exemplo 3.3.2** *Seja O um ponto que pertence a um plano $\alpha$ e r um segmento de reta com comprimento $d \neq 0$. O lugar geométrico dos pontos de $\alpha$ que estão à distância d de O é a circunferência de centro O e raio r.*

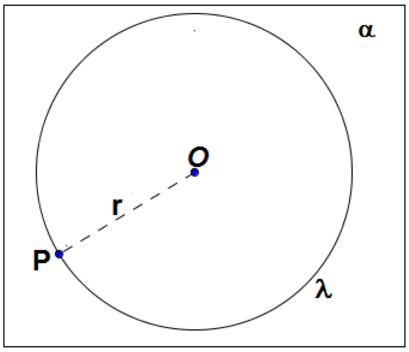


Figura 3.15: Lugar Geométrico de um ponto no plano

*Isso significa que, no plano $\alpha$, todos os pontos que estão à distância r de O pertencem necessariamente à circunferência $\lambda$, e, reciprocamente, todos ponto de $\lambda$ está à distância r de O.*

## 3.4 Coordenadas Geométricas

Coordenadas são elementos que servem para determinar a posição de um ponto sobre uma superfície ou no espaço em relação a um sistema de referência.

São referenciais pelos quais se estabelece uma correspondência recíproca entre pontos geométricos e números reais. Esses sistemas são usados para investigação analítica de propriedades geométricas, como por exemplo determinar a equação de uma curva geométrica, muitas vezes interpretada como a descrição da trajetória de um ponto em movimento.

A Matemática faz uso do Sistema de Coordenadas no Plano Cartesiano ou no Espaço Cartesiano, que é um esquema reticulado necessário para especificar pontos num determinado "espaço" com dimensões.

Cartesiano é um adjetivo que se refere ao matemático francês e filósofo *René Descartes* que, entre outras coisas, desenvolveu uma síntese da Álgebra com a Geometria Euclidiana. Os seus trabalhos permitiram o desenvolvimento de áreas científicas como a Geometria Analítica, o Cálculo e a Cartografia.

A ideia para este sistema foi desenvolvida em 1637 em duas obras de *Descartes*:

*Discurso sobre o método* - onde, na segunda parte, *Descartes* apresenta a ideia de especificar a posição de um ponto ou objeto numa superfície, usando dois eixos que se intersectam.

*La Géométrie* - onde desenvolve o conceito que apenas tinha sido referido na obra anterior.

Um sistema de referência consiste em um ponto de origem, direção e sentido, de tal forma que isto pode ser obtido de diversas formas. Porém, o sistema de coordenadas cartesianas é o mais próximo do mundo real, ele nos permite observar as formas da maneira mais aproximada possível do nosso modo de ver o universo.

### 3.4.1 Coordenadas no Plano

O Plano Cartesiano, foi criado por René Descartes com o objetivo de localizar pontos. Ele é formado por dois eixos perpendiculares: um horizontal e outro vertical que se cruzam na origem das coordenadas. O eixo horizontal é chamado de abscissa (x) e o vertical de ordenada (y). Os eixos são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais. Observe na Figura 3.16 a representação do plano cartesiano.

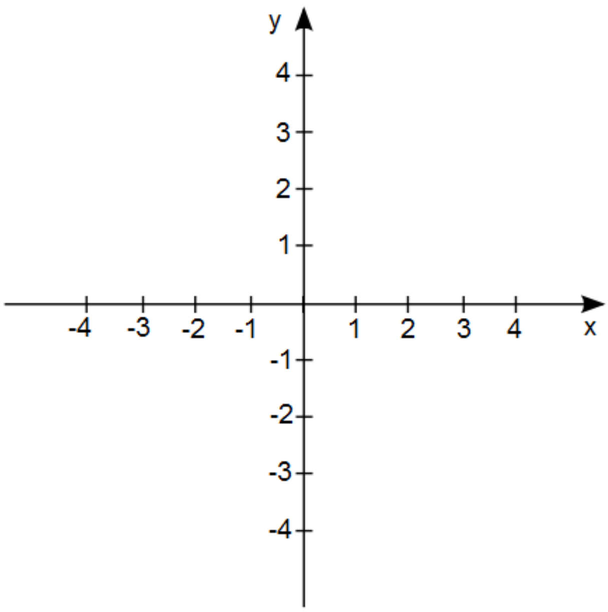


Figura 3.16: Plano Cartesiano.

As coordenadas cartesianas são representadas pelos pares ordenados (x , y). Em razão dessa ordem, devemos localizar o ponto observando primeiramente o eixo x e posteriormente o eixo y. Qualquer ponto que não se encontrar sobre os eixos, estará localizado nos quadrantes. Figura 3.17.

Assim,

$1^o$ quadrante: $x > 0$ e $y > 0$

$2^o$ quadrante: $x < 0$ e $y > 0$

$3^o$ quadrante: $x < 0$ e $y < 0$

$4^o$ quadrante: $x > 0$ e $y < 0$

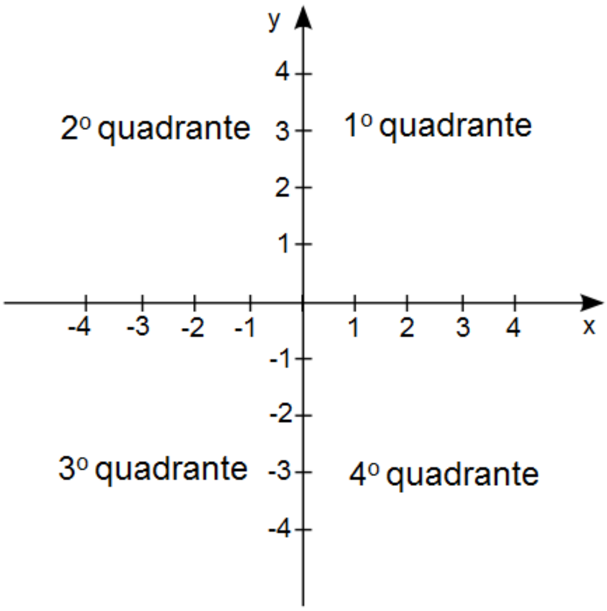


Figura 3.17: Quadrantes.

Vejamos o exemplo:

**Exemplo 3.4.1** *Localizando pontos no Plano Cartesiano:*
$A(4,3) \longrightarrow x = 4 \ e \ y = 3$
$B(1,2) \longrightarrow x = 1 \ e \ y = 2$
$C(-2,4) \longrightarrow x = -2 \ e \ y = 4$
$D(-3,-4) \longrightarrow x = -3 \ e \ y = -4$
$E(3,-3) \longrightarrow x = 3 \ e \ y = -3$
$F(0,-2) \longrightarrow x = 0 \ e \ y = -2$

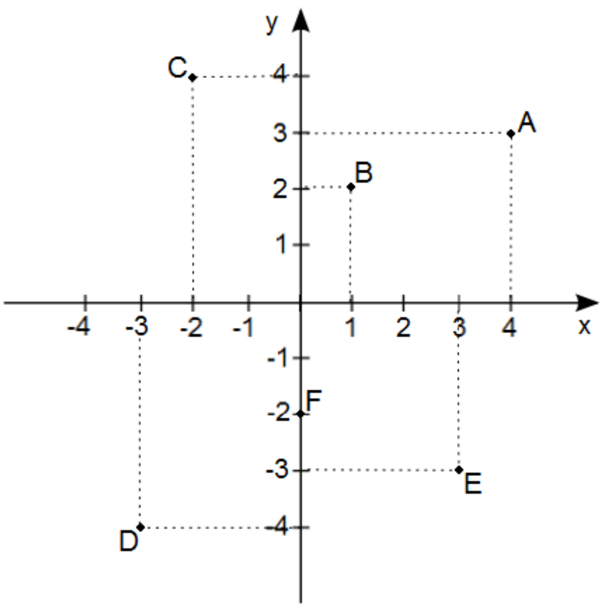


Figura 3.18: Pontos no Plano Cartesiano.

O Plano Cartesiano é muito utilizado na construção de gráficos de funções, onde os valores relacionados à $x$ constituem o domínio e os valores de $y$, a imagem da função. A criação do Sistema de Coordenadas Cartesianas é considerada uma ferramenta muito importante na Matemática, facilitando a observação do comportamento de funções em alguns pontos considerados críticos.

Podemos associar o Plano Cartesiano com a latitude e a longitude, temas relacionados aos estudos geográficos e à criação do atual sistema de posicionamento, o GPS. O Sistema de Posicionamento Global permite que saibamos nossa localização exata na terra.

### 3.4.2 Coordenadas no Espaço

É um sistema no qual um ponto pode se deslocar livremente para todas as direções no espaço tridimensional. O espaço tridimensional aqui é entendido como o espaço ocupado pelos seres humanos.

Esse sistema tem como referencial três planos mutuamente perpendiculares que se interceptam em três retas mutuamente perpendiculares e num ponto comum $O$ é a origem do sistema. Os planos dividem o espaço em oito regiões denominadas octantes.

Um referencial de coordenadas no espaço com as características descritas a seguir, representa geometricamente o $R^3$ (ou $R^2 \times R$ ou, ainda, $R \times R \times R$).

Cada ponto geométrico no sistema de coordenadas no espaço corresponde uma e única terna ordenada $(x, y, z)$ e a cada terna ordenada $(x, y, z)$ corresponde um único ponto. Assim, há uma correspondência biunívoca entre cada ponto geométrico e uma terna ordenada de números reais.

Para introduzir um sistema de coordenadas no espaço, escolhe-se um ponto como origem $O$ e como eixos coordenados, três retas orientadas, passando pela origem, perpendiculares entre si. Estes serão os eixos $x$,$y$ e $z$. O eixo $z$ é o eixo vertical. Os eixos $x$ e $y$ são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade:

Se os dedos da mão direita apontam na direção do semi-eixo x positivo de forma que o semi-eixo $y$ positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semi-eixo $z$ positivo. Cada par de eixos determina um plano chamado de plano coordenado. Portanto os três planos coordenados são: $xy$, $yz$ e $xz$.

Assim, para localizar cada ponto $P$ no espaço, associados a um terno de números $(x, y, z)$, chamado de coordenadas do ponto $P$, segue-se as etapas:

• Passa-se três planos por $P$ paralelos aos planos coordenados.

• A interseçãao do plano paralelo ao plano $xy$, passando por $P$, com o eixo z determina a coordenada $z$.

• A interseção do plano paralelo ao plano $xz$, passando por $P$, com o eixo $y$ determina a coordenada $y$.

• A interseçãao do plano paralelo ao plano $yz$, passando por $P$, com o eixo $x$ determina a coordenada $x$.

Alternativamente, podemos encontrar as coordenadas de um ponto $P$ como segue.

• Traça-se uma reta paralela ao eixo $z$, passando por $P$.

• A interseção da reta paralela ao eixo $z$, passando por $P$, com o plano $xy$ é o ponto $P_1$. As coordenadas de $P_1$, $(x, y)$, no sistema de coordenadas $xy$ são as duas primeiras coordenadas de $P$.

• A terceira coordenada é igual a distância de $P$ a $P_1$, se $P$ estiver acima do plano $xy$ e o oposto de $P$ a $P_1$ se $P$ estiver abaixo do plano $xy$.

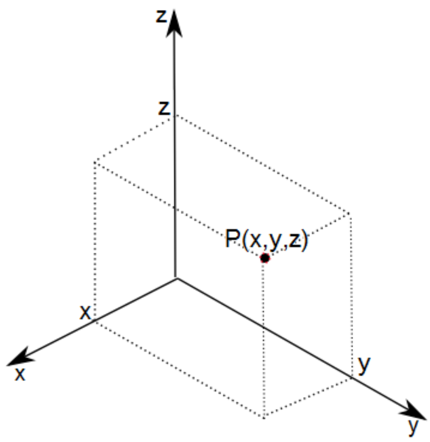


Figura 3.19: Coordenadas no espaço - 1.

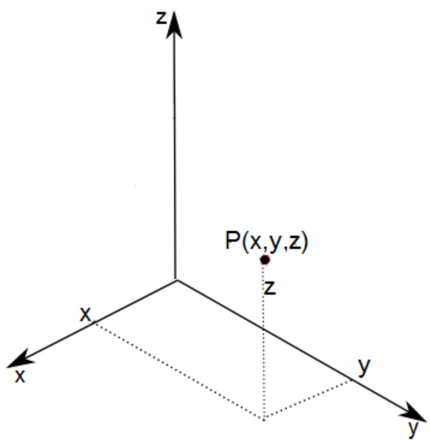


Figura 3.20: Coordenadas no espaço - 2.

### 3.4.3 Coordenadas Polares

Um conteúdo pouco conhecido, principalmente no Ensino Médio, e menos ainda suas aplicações, o estudo de Coordenadas polares é uma atividade vastamente executada no ensino superior.

Esse sistema é aplicado, por exemplo, nos projetos de antenas, no acompanhamento do trajeto dos planetas e dos satélites, na identificação e localização de objetos em telas de radar, e na movimentação de um ponto em órbita em relação a um ponto fixo.

O sistema de coordenadas polares tem como referenciais uma semi-reta orientada fixa denominada eixo polar e um ponto fixo O denominado pólo, localizado na origem do eixo polar. Veja a Figura 3.21.

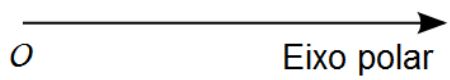


Figura 3.21: Eixo polar.

Como o próprio nome já diz, é um tipo de notação de coordenadas colocadas num plano bidimensional, como um tipo especial de plano semelhante ao Cartesiano. Porém, se faz uso de outros parâmetros. Usando uma definição mais matemática, pode-se dizer que é um plano de coordenadas P(r, $\theta$),sendo $r$ a coordenada radial (raio) de P ou distância de P ao pólo e $\theta$ é a coordenada angular ou ângulo polar. Aplicadas sobre um determinado plano com pólo (origem) equivalente ao eixo $x$ nas coordenadas cartesianas. Uma vez escolhido o raio que se quer, traça-se na direção do ângulo $\theta$ uma semi-reta (raio), assim:

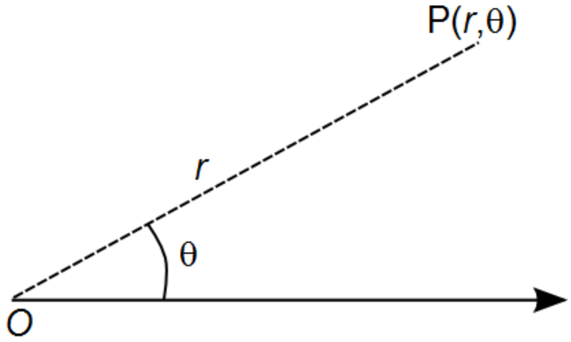


Figura 3.22: Coordenadas polares no plano

Como $\theta$ é um número real, $\theta$ deve ser medido em radianos e $\theta$ é positivo se medido no sentido anti-horário e negativo se medido no sentido horário.

Se o raio $r$ for positivo, então ele deve ser marcado sobre o lado extremidade do ângulo polar. Se $r$ for negativo, então ele deve ser marcado sobre o sentido oposto do lado extremidade do ângulo polar, na mesma distância igual ao valor absoluto do raio.

No sistema polar, cada par de coordenadas polares $(r, \theta)$ determina um e único ponto no plano coordenado. No entanto, um mesmo ponto $P(r, \theta)$ pode ter como coordenadas os pares $(r, \theta + 2k\pi)$ ou $(-r, \theta + k\pi)$ para qualquer $k \in Z$ . Assim, para que haja uma correspondência biunívoca entre um ponto geométrico e um par de números reais, convenciona-se que $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Mas se o ponto for o pólo, então não haverá correspondência biunívoca entre par ordenado e ponto. Assim, se $r = 0$, então $\theta$ pode assumir qualquer valor real, decorrendo daí que o ponto correspondente ao par $(0, \theta)$ é o pólo.

Pode-se sobrepor o sistema de coordenadas cartesianas planas ao sistema de coordenadas polares de tal forma que o eixo positivo das abscissas coincida com o eixo polar e a origem do sistema cartesiano coincida com o pólo. Ver a Figura 3.23.

Assim, as coordenadas cartesianas (x, y) de P e suas coordenadas polares $(r, \theta)$ se relacionam de modo que:

$$x = r \cdot \cos\theta; \quad y = r \cdot \operatorname{sen}\theta; \quad r^2 = x^2 + y^2 \text{ e } \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \text{com } r \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi \ .$$

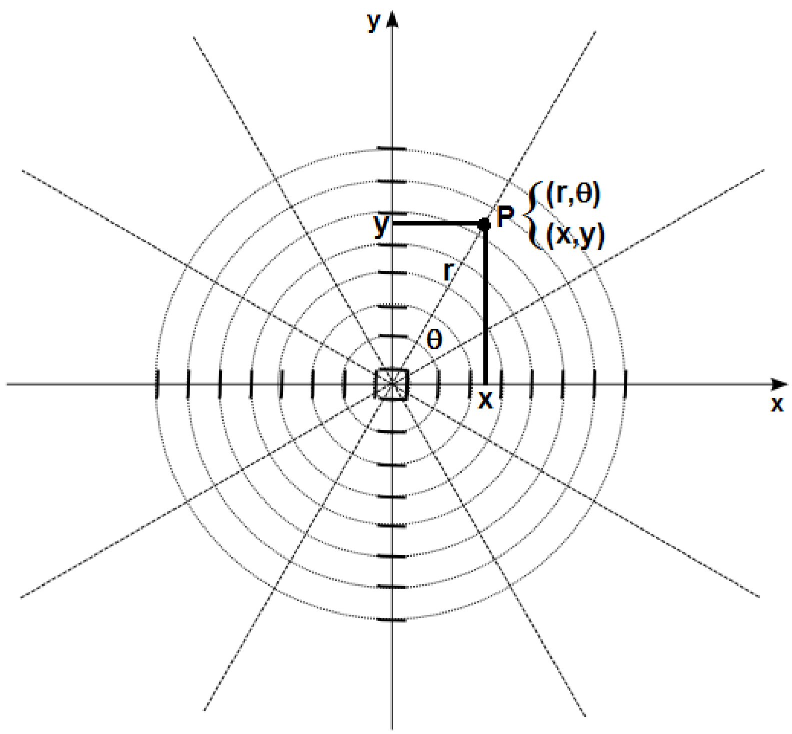


Figura 3.23: Coordenadas cartesianas e polares no plano.

# Capítulo 4

# Curvas

Uma curva, em termos gerais, é um objeto semelhante a uma linha e, ao menos de forma intuitiva, todos nós temos a ideia do que seria. Quando questionado a dar um exemplo de curva, muitos podem dar uma linha reta, por exemplo $y - 2x = 1$, ou uma parábola, por exemplo $y - x^2 = o$, ou uma circunferência, por exemplo $x^2 + y^2 = 1$ (Ver Figura 4.1). Tecnicamente, uma curva pode ser vista como a trajetória a ser seguida por um ponto que se move de acordo com uma ou mais leis especificadas. Neste caso, as leis comporão uma condição necessária e suficiente para a existência do objeto definido.

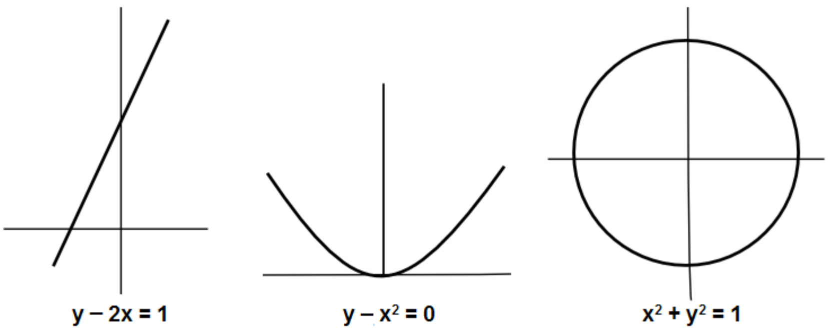


Figura 4.1: Exemplos de curvas

Num sentido geral, todas estas curvas são descritas por meio da sua equação cartesiana $f(x, y) = c$, onde $f$ é uma função de $x$ e $y$, enquanto $c$ é uma constante. Deste ponto de vista, uma curva é um conjunto de pontos $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$.

Estes exemplos são todos de curvas no plano $\mathbb{R}^2$, mas pode-se também considerar curvas em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, o eixo $OX$ em $\mathbb{R}^3$ é a reta dada por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z = 0\}$ e, mais geralmente, uma curva em $\mathbb{R}^3$ pode ser definida por um par de equações $f_1(x, y, z) = c_1$, $f_2(x, y, z) = c_2$.

Frequentemente há maior interesse nas curvas em um espaço euclidiano de duas dimensões (curvas planas) ou três dimensões (curvas espaciais).

Em tópicos diferentes dentro da matemática o termo possui significados distintos dependendo da área de estudo, então o sentido exato depende do contexto. Um exemplo simples é a curva plana que gira em torno de um ponto central (chamado polo), dele se afastando ou se aproximando segundo uma determinada lei, que é chamada de espiral. Na figura 4.2 temos a espiral de Fibonacci.

A espiral de Fibonacci é o resultado da transformação da sequência 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... em quadrados com lados medindo os valores dessa sequência e dispô-los de maneira geométrica. Essa sucessão de números que, curiosamente, aparece em muitos fenômenos da natureza foi descrita no final do século 12 pelo italiano Leonardo Fibonacci. Ela é infinita e começa com 0 e 1. Os números seguintes são sempre a soma dos dois números anteriores.

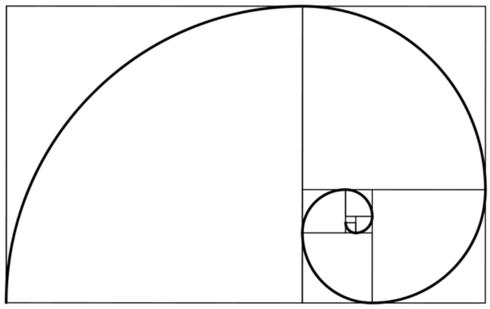

Figura 4.2: Espiral de Fibonacci. (Fonte:www.mundoestranho.abril.com.br)

Um grande número de outras curvas já foi bem estudado em diversos campos da matemática.

O termo curva também tem vários significados na linguagem não matemática. Por exemplo, em uma curva de aprendizado, ele pode ser muito bem um sinônimo de função matemática.

## 4.1 Parametrização

Uma curva é um objeto unidimensional. No entanto, cada ponto de uma curva pode ser representado por um único número real. Parametrizar uma curva é descrever uma tal representação.

Assim, parametrização é o processo no qual se define parâmetros necessários para uma particularização completa ou relevante de um modelo ou objeto geométrico. É um processo matemático envolvendo a identificação de um conjunto completo de coordenadas de um sistema ou processo. Parametrizar uma linha implica em identificar tal conjunto de coordenadas que permita unicamente especificar a posição de qualquer ponto sobre a linha, com uma lista ordenada de números. Cada uma das coordenadas pode ser definida parametricamente na forma de uma curva paramétrica ou uma equação paramétrica.

Descrever o trajeto realizado por um objeto ao ser efetuado um lançamento ou um arremesso ao espaço é um problema que aparece em muitos contextos no estudo de ciências, principalmente no estudo de Física. O arremesso de uma simples pedra ou bola, no lançamento de foguetes, dardos, discos, fogo por catapultas, bala de ferro por canhão, só para lembrar alguns.

Concentrando-se no lançamento de uma bala de ferro por um canhão, temos o percurso que tal bala descreve desde o seu lançamento até o seu alvo representado na Figura 4.3.

Qual a expressão matemática que descreve a trajetória da bola lançada pelo canhão?

Mesmo não sabendo de atividades bélicas, intui-se, pelo menos, que a trajetória da bola descreve uma curva plana e depende de sua altura, sua velocidade no momento do arremesso e do ângulo do lançamento. Sabemos que a trajetória da bola é a composição de duas translações: uma na direção vertical e outra na horizontal. Por outro lado, o movimento acima é regido pela segunda Lei de Newton, que afirma:

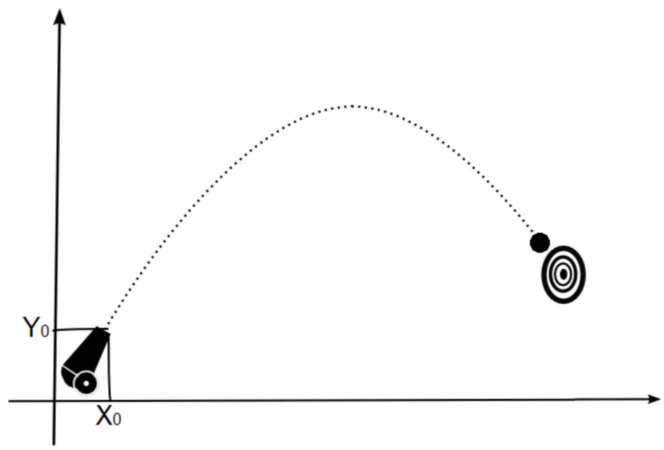


Figura 4.3: Trajetória de uma bala de canhão.

- a resultante das forças que atuam em cada direção é igual a massa da bola vezes a sua aceleração.

Para descrever o trajeto do objeto lançado, especificando a sua posição em cada instante de tempo $t$, necessita-se constituir um sistema de coordenadas (Ver figura 4.4). A expressão matemática da trajetória está relacionada à escolha desse sistema.

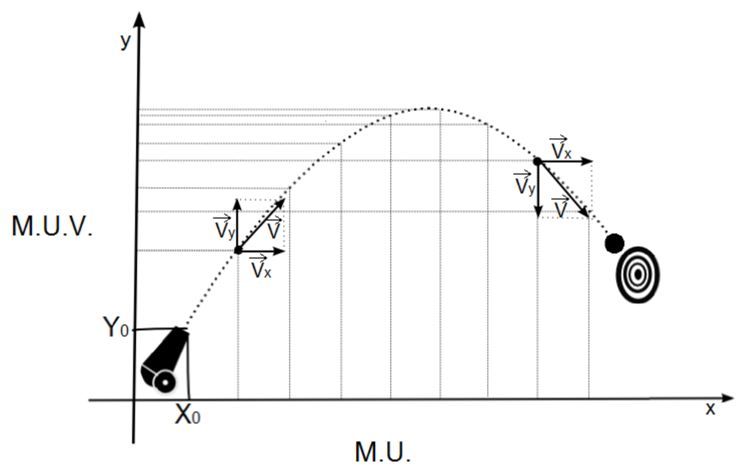


Figura 4.4: Posições da bala do canhão.

Logo após o lançamento da bala, o ar e a gravidade são as únicas forças atuantes sobre ela. Desprezando a resistência do ar, temos que a gravidade será a única força que resta sobre a bola, ou seja, seu peso atuando na direção vertical. Como não há forças atuando na horizontal, pela $2^a$ Lei de Newton temos que a aceleração nessa direção é nula, isto é, tem um movimento uniforme (M.U.) e pode ser apresentada por uma reta com representação algébrica na forma

$$v_{i_x} = v_i \cdot \cos\alpha \quad ou \quad x = x_i + v_{i_x} \cdot t$$

onde $v_x$ é a componente constante da velocidade na direção horizontal e $x_0$ é o deslocamento horizontal inicial da bola.

Na direção vertical, devido a ação da gravidade, existe a força peso. Possui um movimento uniformemente variado (M.U.V.) e aplicando-se a $2^a$ Lei de Newton nessa direção e supondo a bola de massa m = 1, obtemos uma equação

$$v_{i_y} = v_i \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad ou \quad y = y_i + v_{i_y} \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

onde $v_y$ é a componente da velocidade inicial na direção vertical e $y_0$ é o deslocamento vertical inicial da bola. As equações obtidas acima

$$\begin{cases} x &= x_i + v_{i_x} \cdot t \\ y &= y_i + v_{i_y} \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

são classificadas como equações paramétricas da trajetória, porque fornecem a localização $(x; y)$ da bola como funções de um parâmetro $t$ que, no exemplo dado, representa o tempo que transcorreu a partir do momento do lançamento.

De um modo geral, se um corpo se desloca no plano sobre uma curva, a sua posição $P = (x; y)$ pode ser determinada em cada instante $t$ por duas funções do tempo

$$x = x(t) \quad e \quad y = y(t)$$

Tais funções são chamadas de equações paramétricas da curva e $t$ é chamado de parâmetro e a curva assim descrita é chamada de curva parametrizada. Se olharmos a curva apenas como um ente geométrico, o parâmetro $t$ não representa necessariamente o tempo, como pode ser visto em outros exemplos.

No exemplo do lançamento da bala de canhão, a curva descrita pela bala é uma parábola, ou seja, é o gráfico de uma função $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Se não pensar em movimento, mas apenas na curva descrita como um ente geométrico, pode-se determinar cada ponto $(x; y)$ da curva com a parametrização natural $x = t$ e $y = at^2 + bt + c$. Portanto, nos casos em que a curva é o gráfico de uma função de uma variável $y = f(x)$, uma parametrização natural da curva é:

$$x = t \quad e \quad y = f(t).$$

Uma parametrização de uma curva $C$ fica definida como uma função r : [a,b]$\to C$, que associa o valor do parâmetro $t \in$ [a,b] com o ponto correspondente da curva. Tal parâmetro muitas vezes é visto como o tempo, e a parametrização fica associada ao movimento sobre a determinada curva. Tendo por objetivo representar os pontos da curva $C$ por um único valor do parâmetro $t$, deve-se procurar movimentos que percorram a curva de uma única vez.

A cicloide é um outro exemplo de curva cuja representação usa relações trigonométricas básicas e na qual observa-se as condições que um ponto deve possuir para que pertença a essa curva.

Seja $C$ um círculo de raio r, s uma reta e P um ponto de $C$. Recebe o nome de ciclode a curva descrita pelo ponto P quando $C$ rola sobre a reta s, sem deslizar.

Considerando que a reta s é o eixo $OX$, que o círculo $C$ tem seu movimento iniciado com centro no ponto ($O$,r) e que o ponto P coincide com a origem do sistema de cordenadas quando o movimento se inicia, pode-se obter as equações paramétricas da cicloide.

Considerando dois círculos $C_1$ e $C_2$, onde esses representam o círculo C na posição inicial e ao ter rolado após alguns instantes, respectivamente.

Observando na figura 4.5, tem-se os determinados elementos que a compõe:

- $O_1$ e $O_2$ são os centros dos círculos $C_1$ e $C_2$, respectivamente;

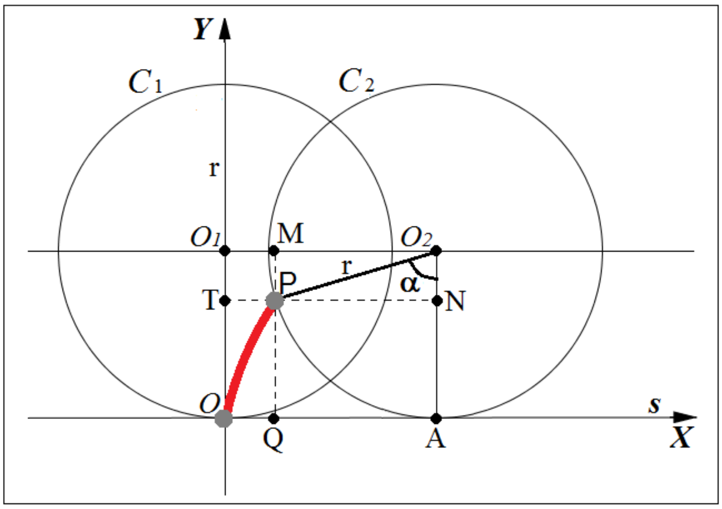


Figura 4.5: Cicloide - Definição

- P=(x,y) o ponto da cicloide em $C_2$;
- A é o ponto em que $C_2$ intercepta o eixo OX;
- Q= (x,0) e T= (0,y) são as projeções ortogonais de P sobre os eixos OX e OY, respectivamente;
- M e N são as projeções ortogonais de P sobre $O_2O_1$ e $O_2A$, respectivamente;
- $\alpha$ é a medida do ângulo $\widehat{AO_2P}$, considerada em radiano.

Sendo que os pontos do arco de A a P fizeram contato com a reta s enquanto $C_2$ girava, temos que o segmento OA tem o mesmo comprimento desse arco.

Sendo $\alpha$ a medida do ângulo $\widehat{AO_2P}$, o comprimento do arco de A a P, que pertence a $C_2$ que já fez contato com s, é r$\alpha$. Assim, |AP|=$\alpha$t.

Considerando os intervalos $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ e $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e analisando os sinais de *sen*$\alpha$ e *cos*$\alpha$, temos que x e y, coordenadas de P(x,y), são determinadas por meio das seguintes relações:

x = $|\overline{OQ}|$ = $|\overline{OA}|$ - $|\overline{QA}|$ = $|\overline{OA}|$ $-|\overline{O_2M}| = r \cdot \alpha - r \cdot \operatorname{sen}\alpha$,
y = $|\overline{OT}|$ = $|\overline{OO_1}|$ - $|\overline{TO_1}| = r - |\overline{O_2N}| = r - r \cdot \cos\alpha$.

Assim, as equações paramétricas da cicloide são:

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & r \cdot \alpha & - & r \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ y & = & r & - & r \cdot \cos\alpha \end{array}\right. ;\alpha \in \mathbb{R}$$

Em particular,

para $t = 0$, o ponto $P$ está na sua posição inicial;
para $t = \pi$, $P$ dista $2r$ do eixo $OX$;
para $t = 2\pi$, o círculo dá um giro completo e o ponto $P$ volta a tocar o eixo $OX$.

Veja como é feito o movimento na seqüência da Figura 4.6.

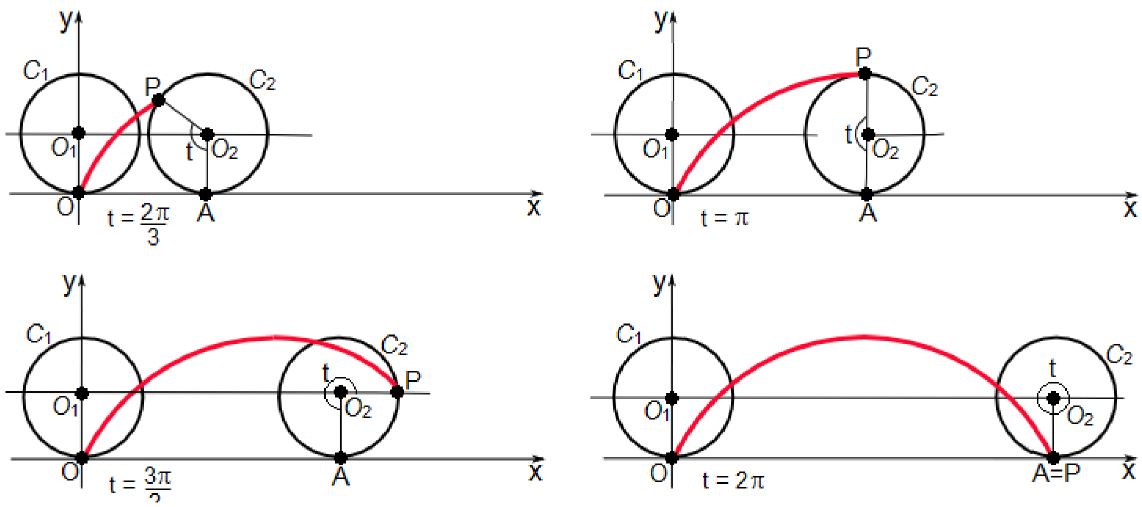


Figura 4.6: Desenvolvimento da Cicloide.

Assim, temos a representação gráfica da cicloide determinada por:

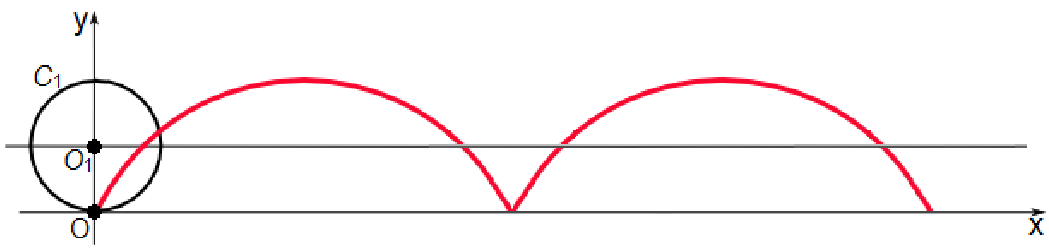


Figura 4.7: Cicloide

## 4.2 Tipos de curvas planas

Como foi citado anteriormente, uma curva pode ser vista como o movimento de um ponto. Dependendo do tipo de movimento e da direção que o ponto toma ao deslocar-se, são criados os vários tipos de curvas.

Para compreender melhor esse conceito, pode-se pegar um lápis e uma folha de papel. Ao colocar a ponta do lápis no papel tem-se um ponto. Agora, sem tirar a ponta do lápis do papel, movimenta-se o lápis (ou seja, deslocando o ponto). O movimento pode ser descompromissado, em qualquer direção, retilíneo ou não. Isso fará com que seja feito no papel um risco com uma forma qualquer. Esse risco é chamado de linha ou curva e foi criada pelo movimento do ponto (a ponta do lápis).

Às vezes, a palavra "curva" pode ter mais de um significado e mais de uma classificação gramatical. Geralmente é usada como adjetivo para expressar a não linearidade de alguma coisa. Exemplo: Aquela estrada é curva, ou seja, não é reta.

Entretanto, na geometria, também usamos esta palavra como substantivo, para designar algumas espécies de figuras geométricas. Normalmente, dizemos que qualquer linha é considerada uma curva geométrica e tais curvas podem ser classificadas como abertas ou fechadas, simples ou não-simples. E, ainda, podem ter combinações dos vários tipos: curva aberta simples, curva aberta não-simples, curva fechada simples e curva fechada não-simples.

### 4.2.1 Curvas simples

São aquelas que não têm cruzamentos.

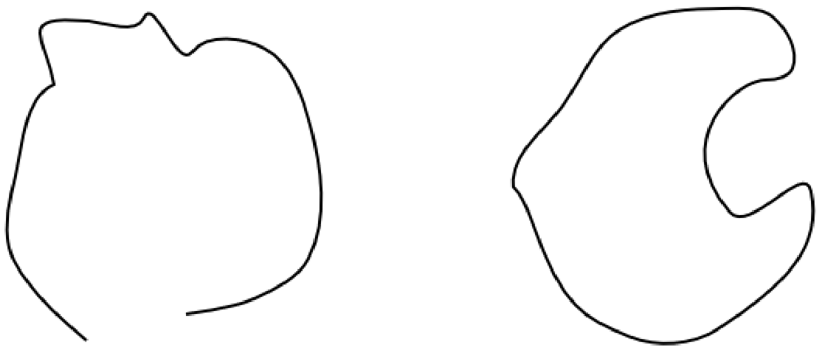

Figura 4.8: Curvas simples

### 4.2.2 Curvas não-simples

São aquelas que têm cruzamentos

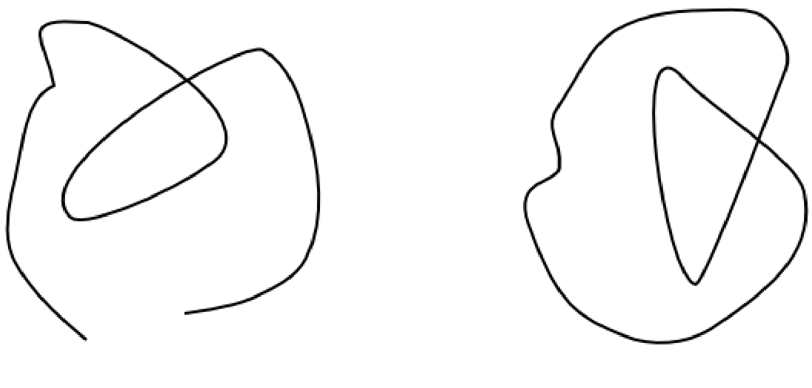

Figura 4.9: Curvas não-simples

### 4.2.3 Curvas abertas

São aquelas que têm extremidades.

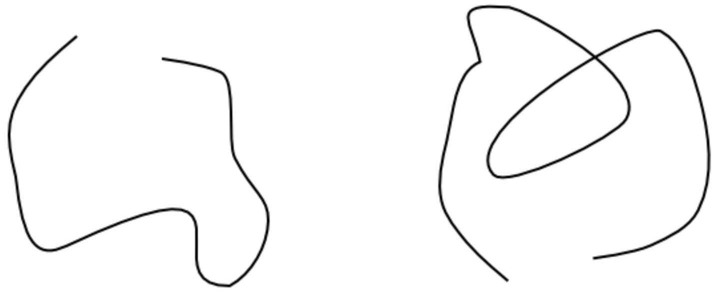

Figura 4.10: Curvas abertas

### 4.2.4 Curvas fechadas

São aquelas que não têm extremidades.

Figura 4.11: Curvas fechadas

Como podemos ver nas ilustrações acima, podemos ter combinações dos vários tipos: - curva aberta simples - curva aberta não-simples - curva fechada simples - curva fechada não simples

## 4.3 Curvas de Jordan

Daremos início a essa seção com uma pergunta bem simples:
O ponto **P** da Figura 4.12 está dentro ou fora da curva simples e fechada?

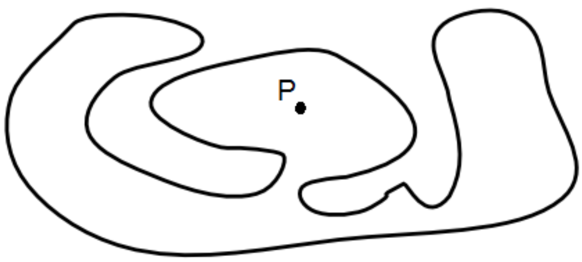


Figura 4.12: Curva 1 - Noção a respeito de Curvas de Jordan

Sem muita análise, percebe-se facilmente que o ponto está dentro da curva.

Porém, e se essa curva fosse um pouco mais complexa com mais detalhes conforme a Figura 4.13, o ponto **P** estaria dentro ou fora dessa curva?

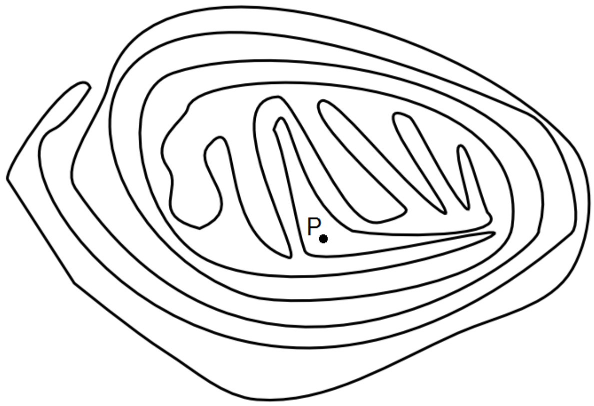


Figura 4.13: Curva 2 - Noção a respeito de Curvas de Jordan

É bem provável que, com um pouco mais de atenção, possamos dar a resposta correta à pergunta, mas a dificuldade aumentaria em relação à imagem da Figura 4.12. Agora, imaginemos se tal curva fosse bem mais complexa. Talvez não achássemos tão fácil e, quem sabe, precisaríamos de algum outro recurso para chegarmos ao resultado correto.

Assim, que procedimento poderia ser adotado para resolver problemas iguais a esse?

A ideia a respeito de uma curva plana fechada simples é prática e intuitiva. Uma curva sem extremos e que não possuem cruzamentos é de fácil entendimento.

Outro fato que também parece óbvio e que não precisaria de demonstração é de que uma curva fechada simples separa o plano em duas regiões distintas que possuem como fronteira essa tal curva.

Assim também pensavam os matemáticos até meados do século XIX. Segundo Kline [8], apenas em 1865 C. Neumann chamou atenção para a necessidade de demonstração desta propriedade de "separação do plano". Apenas vinte e dois anos depois, em 1887, Camille Jordan(1838 - 1922), na primeira edição do seu Cours d'Analyse[9] a demonstrou pela primeira vez. Porém, a primeira demonstração correta deste resultado deve-se a Oswald Veblen, em 1905.

O Teorema da Curva de Jordan é um misto de curiosidade, uma vez que combina a simplicidade da sua formulação a uma grande complexidade na sua demonstração, gerando intriga e aceitação àquele que lê acerca desse tema. Demonstração essa que não é um dos intuitos do presente trabalho.

O Teorema da Curva de Jordan, que recebe esse nome ao homenagear Camille Jordan, diz que toda curva fechada e simples no plano $C \subset \mathbb{R}^2$ divide o próprio $\mathbb{R}^2$ em dois conjuntos disjuntos $\omega_1$ e $\omega_2$, que têm como fronteira comum a própria curva $C$. Além disso, $\omega_1$ é limitada (dentro de $C$) e $\omega_2$ é ilimitada (fora de $C$). Para um melhor aprofundamento, fato que também não faz parte do interesse do presente trabalho, sugere-se uma leitura de Munkres [4].

Os conjuntos são definidos da seguinte forma: O conjunto $\omega_1$ é conjunto de todos os pontos do plano que, quando traçam-se segmentos de reta a partir de um desses pontos cortando essa curva transversalmente, o número de interseções é ímpar. Enquanto que, o conjunto $\omega_2$ é conjunto de todos os pontos do plano que, quando traçam-se segmentos de reta a partir de um desses pontos cortando essa curva transversalmente, o número de interseções é par. Ao $\omega_1$ chamaremos de interior da curva, enquanto que ao $\omega_2$ chamaremos de exterior.

Agora respondendo à pergunta da Figura 4.13, ao pintar uma das partes da plano limitada pela curva, conforme a Figura 4.14, vemos facilmente que o ponto está fora da curva.

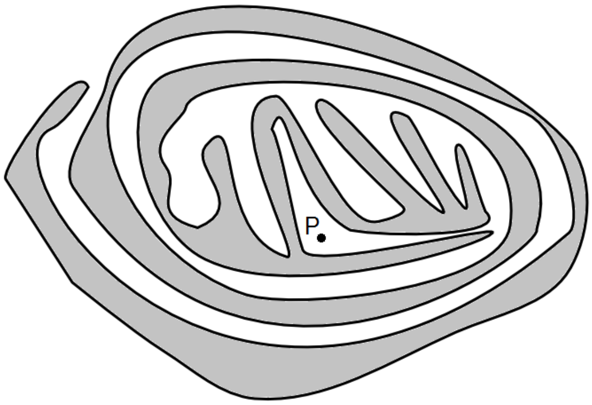


Figura 4.14: Curva 2 Pintada - Noção a respeito de Curvas de Jordan

Ou, se traçarmos uma semi-reta do ponto P seccionando transversalmente a curva, esta semi-reta vai cortar a curva em vários pontos. Contamos o número de pontos onde a curva é cortada pela semi-reta (não levando em conta os casos de tangências, pois necessitaria um considerado aprofundamento sobre tal), então:

Se o número de pontos de secção par, o ponto está do lado de fora da curva e se o número de pontos de secções for ímpar, o ponto está dentro da curva.

Como podemos ver na Figura 4.15, não importa a semi-reta, há sempre um número par de pontos que seccionam a curva.

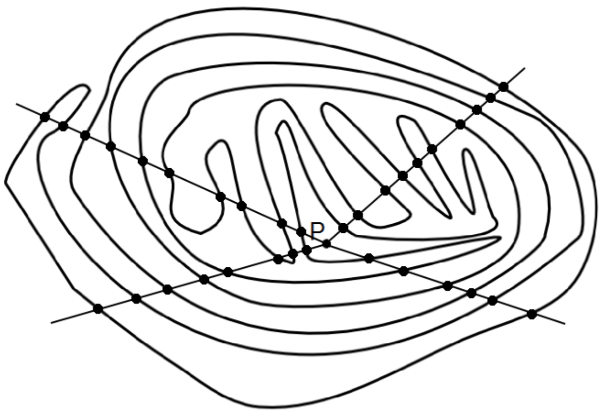


Figura 4.15: Curva 2 com segmentos seccionados - Noção a respeito de Curvas de Jordan

# Capítulo 5

# Curvas de Nível

A curva de nível constitui uma linha imaginária do terreno, em que todos os pontos de referida linha têm a mesma altitude, acima ou abaixo de uma determinada superfície da referência, geralmente o nível médio do mar.

O método, por excelência, para representar o relevo terrestre, é o das curvas de nível, permitindo ao usuário, ter um valor aproximado da altitude em qualquer parte da carta.

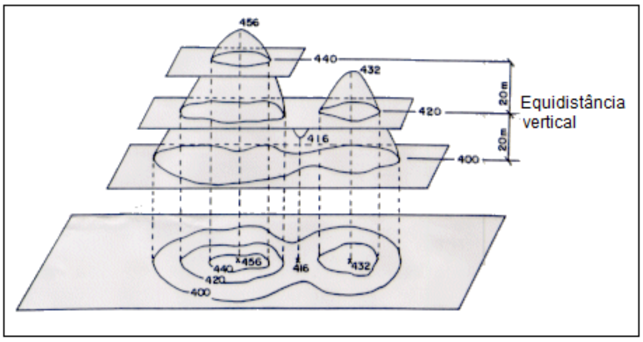


Figura 5.1: Curvas de Nível. (Fonte: www.ibge.gov.br)

Com a finalidade de ter a leitura facilitada, adota-se o sistema de apresentar dentro de um mesmo intervalo altimétrico, determinadas curvas, mediante um traço mais grosso. Tais curvas são chamadas "mestras", assim como as outras, denominam-se "secundárias" ou "intermediárias". Existem ainda as curvas "auxiliares", como mostra a Figura 5.2.

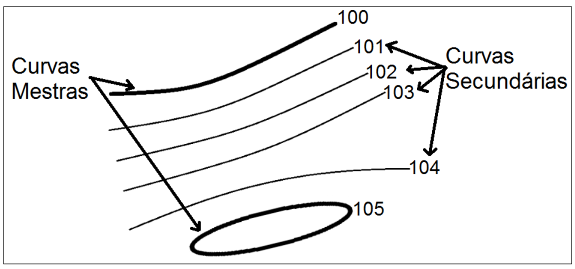


Figura 5.2: Curvas Mestras e Curvas Secundárias.

## 5.1 Representações

### 5.1.1 Planimetria

Planimetria é a representação em um plano de algum espaço. É a representação por uma planta de uma área (projeção horizontal), que permite uma visão imaginária geral da sinuosidade do terreno.

Assim, é a técnica pela qual as medidas tanto angulares como lineares são reproduzidas em um plano horizontal de referência, levando em conta apenas a locação dos objetos da área, se assemelha à foto da área tirada de um avião. Não estarão representados os relevos e as diferenças de níveis.

Figura 5.3: Planimetria. (Fonte: www.ibge.gov.br)

Os pontos medidos são projetados sobre uma superfície horizontal de referência; levantamento dos limites e confrontações de uma propriedade, pela determinação do seu perímetro, incluindo quando for o caso, o alinhamento da via ou logradouro com o qual faça a frente, bem como sua orientação e sua posição relativa (amarração) a pontos materializados e estáveis do terreno.

### 5.1.2 Altimetria

A altimetria é a parte da topografia que trata dos métodos e instrumentos empregados no estudo e representação do relevo do solo. O estudo do relevo de um terreno consiste na determinação das alturas de seus pontos característicos e definidores da altimetria, relacionados com uma superfície de nível que se toma como elemento de comparação.

A determinação da cota/altitude de um ponto é uma atividade fundamental em engenharia. Projetos de redes de esgoto, de estradas, planejamento urbano, entre outros, são exemplos de aplicações que utilizam estas informações. A determinação do valor da cota/altitude está baseada em métodos que permitem obter o desnível entre pontos. Conhecendo-se um valor de referência inicial é possível calcular as demais cotas ou altitudes. Estes métodos são denominados de nivelamento. Dentre os diferentes métodos, cuja aplicação de cada um dependerá da finalidade do trabalho, que permitem determinar os desníveis, com precisões que variam de alguns centímetros até submilímetro, podemos destacar:

### Nivelamento Barométrico

Baseia-se na diferença de pressão com altitude, tendo princípio que, para um determinado ponto da superfície terrestre, o valor da altitude é inversamente proporcional ao valor da pressão atmosférica.

Este método em função do aparelho que usa, permite obter valores em campo que estão diretamente relacionados ao nível verdadeiro.

Atualmente com o avanço da tecnologia GPS e dos níveis laser e digital, este método não é mais empregado.

O altímetro analógico ou digital são os equipamentos para esse típo de nivelamento.

### Nivelamento Trigonométrico

Baseia-se na medida de distâncias horizontais e os ângulos de inclinação para a determinação da cota ou altitude de um ponto através das relações trigonométricas.

Portanto, obtém valores que podem ser relacionados ao nível verdadeiro ou ao nível aparente, dependendo do levantamento.

Segundo Espartel [10], divide-se em nivelamento trigonométrico de pequeno alcance (com visadas de 250m) e grande alcance (com visadas >250m), sendo que para este último, deve-se considerar a influência da curvatura da Terra e a refração atmosférica sobre as medidas.

### Nivelamento Geométrico

Este método diferencia-se dos demais pois está baseado somente na leitura de réguas ou miras graduadas, não envolvendo ângulos.

O aparelho a ser utilizado deve estar estacionado a meia distância entre os pontos (ré e vante) dentro ou fora do alinhamento a medir.

Na determinação das alturas e dos pontos característicos de um relevo, alguns conceitos são imprescindíveis. Tais como:

- Altitude:

É a distância medida na vertical entre um ponto da superfície física da terra e a superfície de referência altimétrica, que no caso das altitudes, é o nível médio dos mares prolongado nos continentes.

- Cota:

É a distância medida ao longo da vertical de um ponto até um plano de referência qualquer, arbitrado. A diferença entre cota e altitude encontra-se ilustrada na figura 5.4.

- Datum:

*Datum*, palavra no latim que significa dado ou detalhe. Em cartografia refere-se ao modelo matemático teórico da representação da superfície da Terra ao nível do mar utilizado pelos cartógrafos numa dada carta ou mapa. A origem das altitudes é o nível médio dos mares (superfície geoidal), determinado por um equipamento chamado marégrafo, e materializada em um RN que é denominado de “Datum Vertical”.

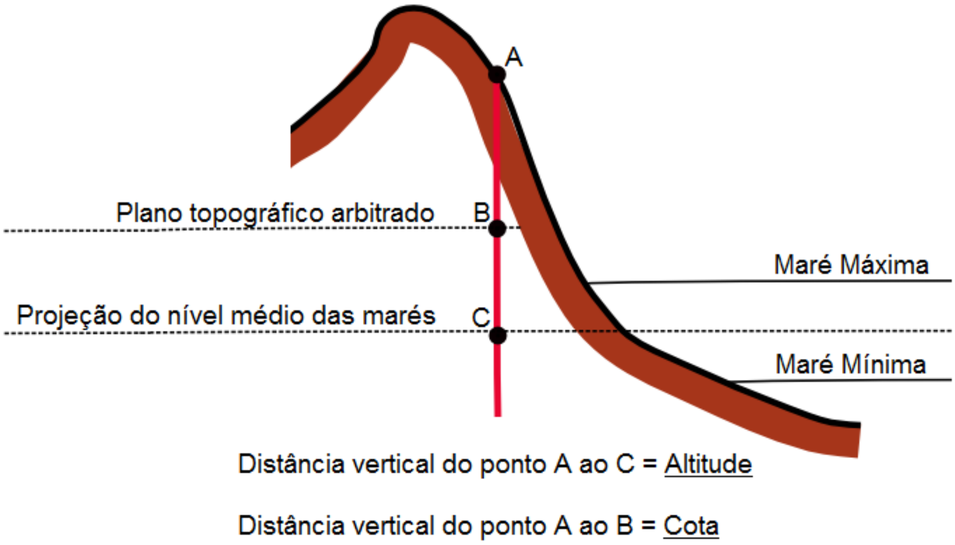


Figura 5.4: Altitude e Cota

Na Figura 5.5 tem-se o marégrafo da Praça São Marco, Veneza, Itália. O "Datum Vertical" Oficial para todo o território brasileiro é um RN materializado no porto de Imbituba/SC, com altitude obtida em função do marégrafo ali instalado.

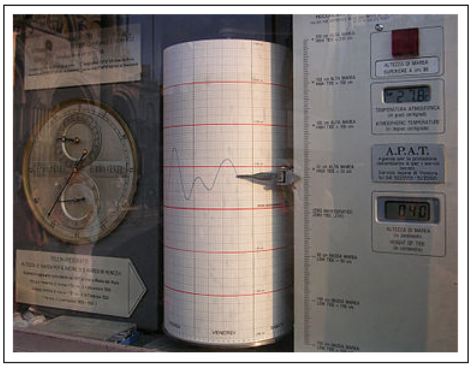

Figura 5.5: Marégrafo da Praça São Marco, Veneza, Itália

O sistema de medida do marégrafo foi estabelecido em 1877 em Paris por J. Wagner e foi instalado em 1882, tendo sido um dos primeiros sistemas de coleta de dados sobre o nível do mar instalados na Europa, existindo especificamente para este fim, a coleta de dados sobre as correntes e as marés.

Em 1895 foi deslocado para a sua atual localização, uma vez que no local de sua instalação inicial os dados coletados não eram muito confiáveis, uma vez que estava razoavelmente distante do mar.

O Marégrafo de Cascais, também conhecido como Marégrafo do Borel, localiza-se na Marina de Cascais, à entrada da baía, junto à Cidadela, em Portugal. Ele foi o primeiro equipamento deste gênero instalado no país, tendo sido essencial para a obtenção do Datum Altimétrico, que funciona como "Zero de Referência" altimétrico, sendo todos os dados altimétricos de Portugal medidos a partir dos desta medição, que foi feita entre 1882 e 1938.

Este Marégrafo, que tem seu funcionamento representado em um esquema simplificado apresentado na Figura 5.6, tem um sistema de medição analógico, funcionando com uma boia (A) que está colocada num poço em que entra água, ligado diretamente ao mar. O movimento da boia é transmitido por um sistema de cordas e roldanas (B e C) que está conectado ao sistema de medição, mais precisamente a uma caneta (D) que registra numa folha de papel quadriculada, cujas linhas verticais representam as 24 horas do dia e as linhas horizontais a altura do nível do mar em relação à marca no bordo do poço, em metros. Esta folha está colocada num tambor (E) que gira periodicamente devido a um sistema de relógio com autonomia de 4 dias. O movimento deste tambor é cronometrado por um relógio acertado pelo Tempo Universal, coincidindo com a Hora Legal Portuguesa apenas durante o Horário de Inverno.

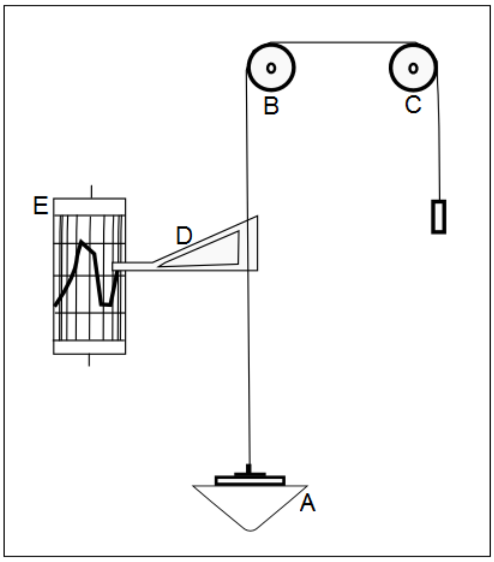


Figura 5.6: Marégrafo

As Referências de Nível (RRNN) são marcas características confeccionadas em metal (latão ou bronze) que são cravadas em pilares de concreto erguidos nos extremos das seções ou (obras de arte, monumentos, estações ferroviárias ou rodoviárias) pontos notáveis dos percursos de linhas geodésicas. Na Figura 5.7 está ilustrada uma placa de Referência de Nível, com suas medidas oficiais, emitida pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

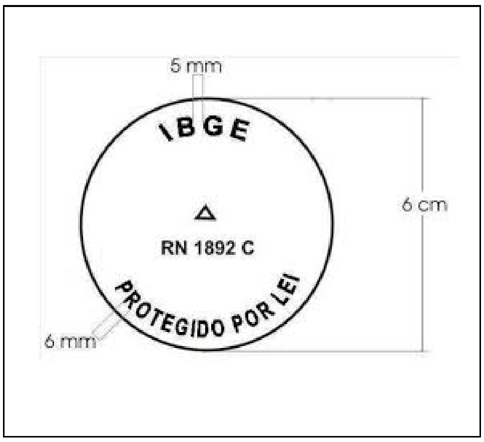


Figura 5.7: Referência de Nível.

Admitindo-se um valor de referência inicial é possível calcular as demais cotas ou altitudes. Estes métodos são denominados de nivelamento. Existem diferentes métodos que permitem determinar os desníveis, com precisões que variam de alguns centímetros até submilímetro. A aplicação de cada um deles dependerá da finalidade do trabalho.

As altitudes no Brasil são determinadas a partir da Rede Altimétrica Brasileira,estabelecida e mantida pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).


Figura 5.8: Rede Altimétrica Brasileira. (Fonte: www.ibge.gov.br)

## 5.2 Leitura de Coordenadas

Para que seja realizada a leitura de coordenadas geográficas ou planimétricas de um ponto, em uma carta ou mapa, emprega-se conhecimentos matemáticos elementares como, por exemplo, conceito de segmentos proporcionais e regra de três simples.

A leitura de coordenadas é um serviço que deve ser efetuado com cuidado e atenção.

A determinação de um ponto na carta, mediante as suas coordenadas planas E e N ou a sua latitude e longitude é um processo usado no sentido de posicionar um detalhe cartográfico, como o cruzamento de estradas, a foz de um rio, a torre de uma igreja, etc.

Na ocorrência de se ter os valores das coordenadas e quando se precisa marcá-lo na carta, é necessário em primeiro lugar, verificar, de acordo com os valores das coordenadas em questão quais os dois pares do grid (UTM) ou paralelos e meridianos (geográficas) que abrangem o ponto a ser determinado.

Para fazermos as medições, escolhemos preferencialmente uma extensão em centímetros (ou milímetros) que corresponda a um múltiplo do valor encontrado no intervalo entre os pares do grid (metros) ou paralelos e meridianos (graus, minutos, segundos) e que exceda a medida entre eles.

### 5.2.1 Coordenadas Planimétricas

De posse de uma régua graduada com extensão de $n$ cm ($10 \times n$ mm), medimos o intervalo entre os paralelos e meridianos, com a finalidade de estabelecermos uma relação entre este intervalo, em graus, minutos e segundos e a distância gráfica entre eles, em milímetros.

A medição deve ser feita fazendo coincidir o início da graduação da régua (zero) com o paralelo ou meridiano de menor valor e a maior graduação escolhida, com o de maior valor. O procedimento para marcação de um ponto de coordenadas planas conhecidas segue os seguintes passos

Ex: Locar o ponto A, em uma carta na escala 1:50.000, cujas coordenadas planimétricas são:

$$A = \begin{cases} N & = & 7.368.700m \\ E & = & 351.750m \end{cases}$$

$1^o$) Marcação da Coordenada N:

Para marcarmos a coordenada N, as linhas do grid em questão são as de valores 7.368.000m e 7.370.000m representados na carta por 7368 e 7370, respectivamente.

O intervalo entre as linhas do grid é de 2.000m. Se usarmos uma distância gráfica de 10 cm (100 mm), a cada 1 mm corresponderão 20 m, sendo este o erro máximo que poderá ser cometido. Estabelecemos uma relação entre o intervalo de 2.000 m (distância real no terreno) e a distância gráfica estabelecida:

$$\begin{array}{rcr} 100mm & -------- & 2000m \\ 1mm & -------- & x \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 20m$$

Ou seja, a cada 1 mm na régua, correspondem 20 m no terreno.

Já temos na carta a linha do grid de valor 7.368.000m ( 7368 ), precisamos portanto acrescentar 700m para a coordenada dada.

$$\begin{array}{rcr} 1mm & -------- & 20m \\ x & -------- & 700m \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 35mm$$

Medimos 35 mm na carta, dentro do intervalo entre as linhas do grid, partindo da menor para a maior coordenada, ou seja, 7368 para 7370 e marcamos um ponto, traçando a seguir uma reta horizontal passando por este ponto.

$2^o$) Marcação da Coordenada E:

As linhas do grid em questão são as de valores 350.000 m e 352.000 m cujos valores na carta são representados por 350 e 352 respectivamente.

Assim como no caso da coordenada N, encontraremos os mesmos valores de intervalo entre as linhas do grid e a distância gráfica entre elas, portanto a relação é a mesma, ou seja, a cada 1 mm correspondem 20 m.

Na carta já temos a linha do grid de valor 350.000 m (350), portanto, para a coordenada do ponto precisamos acrescentar 1750 m.

$$\begin{array}{rcr} 1mm & -------- & 20m \\ x & -------- & 1750m \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 87,5mm$$

Medimos 87,5 mm na carta, dentro do intervalo entre as linhas do grid, partindo da menor para a maior coordenada, ou seja, de 350 para 352 e marcamos um ponto, traçando a seguir uma reta vertical passando por este ponto.

No cruzamento entre as duas retas traçadas estará localizado o ponto A desejado, determinado pelas coordenadas dadas. Ver Figura 5.9.


Figura 5.9: Coordenadas Planimétricas. (Fonte: www.ibge.gov.br)

### 5.2.2 Altitude de um ponto na carta

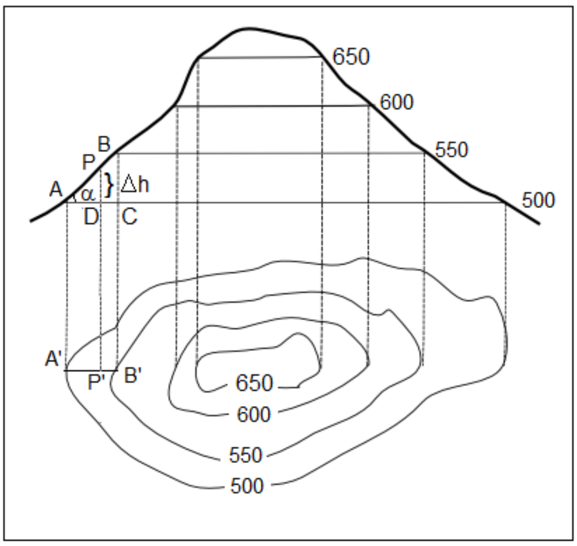


Figura 5.10: Altitude de um ponto na carta.

Na Figura 5.10, obsevamos que o ponto P tem uma altitude

$$P = 500m + (\Delta h)$$

Observando também os triângulos APD e ABC. Pelo caso (ângulo, ângulo, ângulo) de semelhança de triângulos, temos que $\triangle$APD $\cong$ $\triangle$ABC.

Assim,

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{PD} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \overline{BC}$$

Sendo $\overline{BC}$ a equidistância vertical, temos:

$\overline{PD}$ = [(distância da curva ao ponto P) / (distância entre as duas curvas de nível)] x (equidistância vertial)

### 5.2.3 Declivide

Chama-se de declividade a relação entre a diferença de altura entre dois pontos e a distância horizontal entre esses pontos.

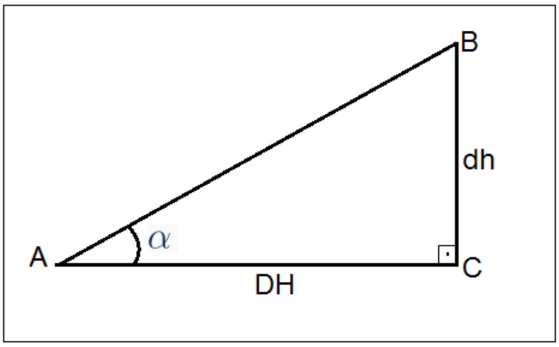


Figura 5.11: Declividade

Considerando na Figura 5.11 que $dh$ é a diferença de altura BC(equidistância vertical) e que $dH$ é a distância horizontal AC(distância entre os pontos), temos que:

Declividade(D) é a razão:

$$D = \frac{dh}{dH}$$

A tangente expressa o coeficiente angular de uma reta em relação ao eixo das abcissas. Assim:

$$\tan\alpha = \frac{dh}{dH}$$

Na necessidade de expressar a declividade em graus, tem-se:

$$\arctan = \frac{dh}{dH} = \alpha = D$$

Quando deseja-se expressar a declividade de uma inclinação em percentual, tem-se que a Rampa é dada por:

$$\tan\alpha = \frac{dh}{dH} \times 100$$

## 5.3 Formas de terrenos representados pelas curvas

### 5.3.1 Terreno plano uniformemente inclinados

Terrenos que são planos, porém, possuem uma inclinação regular.

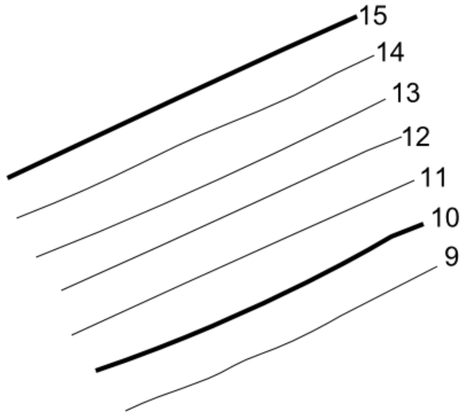


Figura 5.12: Terreno plano uniformemente inclinado.

### 5.3.2 Terreno em curva com inclinação uniforme

Terrenos curvos que possuem uma inclinação regular.

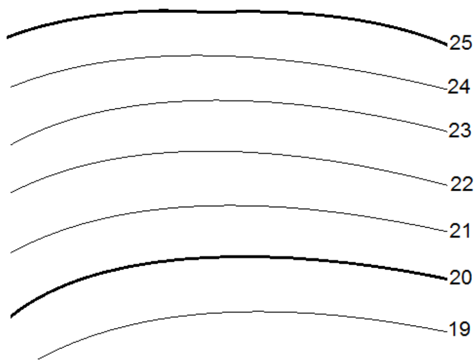


Figura 5.13: Terreno em curva com inclinação uniforme.

### 5.3.3 Terreno com declinação desuniforme

Terrenos que possuem declinações irregulares.

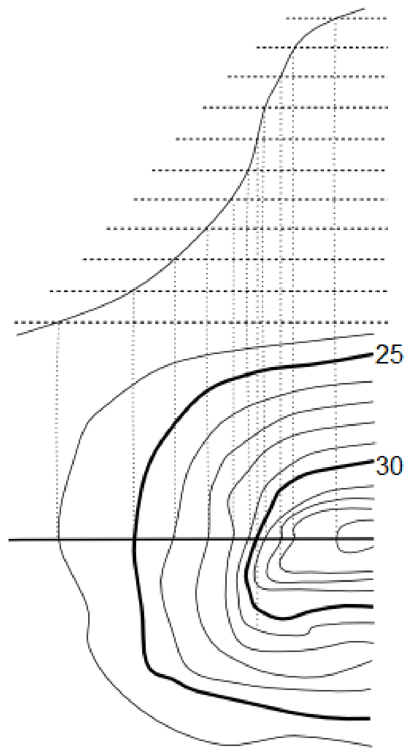


Figura 5.14: Terreno com declinação desuniforme.

### 5.3.4 Elevação

As curvas de nível de menor valor envolvem as de maior valor. Figura 5.15

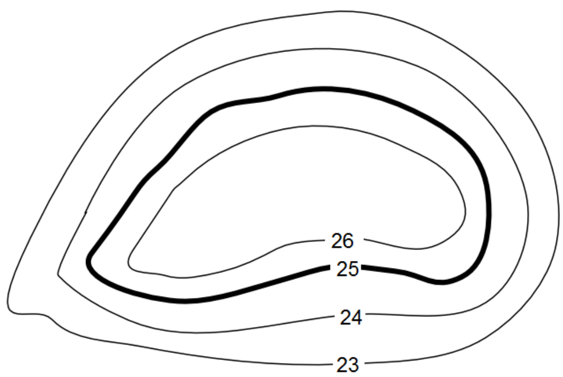


Figura 5.15: Elevação.

### 5.3.5 Depressão

As curvas de nível de maior valor envolvem as de menor valor. Figura 5.16

### 5.3.6 Espigão

É a superfície de altitude mais alta da linha de cumiada (linha divisória de água).

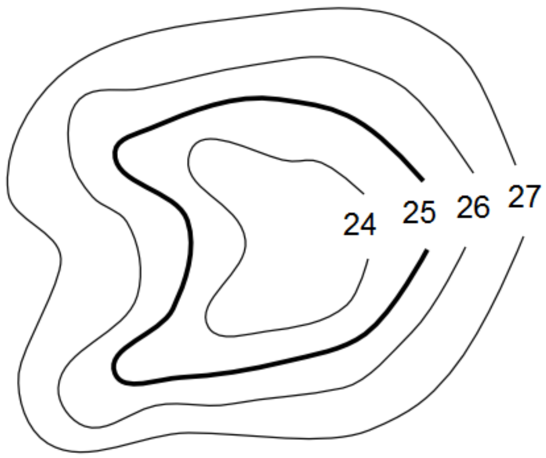


Figura 5.16: Depressão.

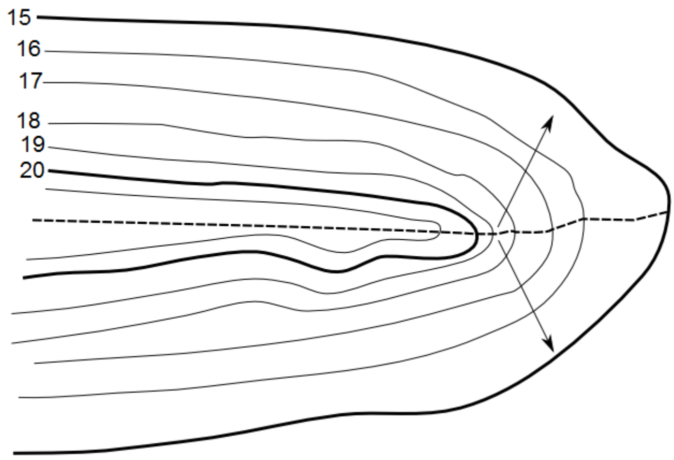


Figura 5.17: Espigão.

## 5.4 Características das Curvas de Nível

Nas curvas de Nível representadas em cartas topográficas podem ser encontradas algumas características:

1) As Curvas de Nível tendem a ser paralelas entre si.

2) Todos os pontos de uma Curva de Nível se encontram em uma mesma elevação.

3) Cada Curva de Nível fecha-se sobre si mesma.

4) As Curvas de Nível nunca se cruzam, podendo se tocar em saltos d'água ou despenhadeiros.

5) Em regra geral, as curvas de nível cruzam os cursos d'água em forma de "V", com o vértice apontado para a nascente.

## 5.5 Intervalos entre curvas de nível

O intervalo escolhido entre as curvas a serem representadas de um determinado relevo depende de cada trabalho com base em dois fatores:

1) A escala da planta.

2) A declividade ou sinuosidade do terreno.

Na representação cartográfica, sistematicamente, a equidistância entre uma determinada curva e outra tem que ser constante. Ou seja, é o espaçamento ou a distância vertical entre as curvas de nível não pode sofrer alteração. Essa equidistância varia de acordo com a escala da carta com o relevo e com a precisão do levantamento.

Só deve haver numa mesma escala, duas alterações quanto à equidistância. A primeira é quando, numa área predominantemente plana, por exemplo a Amazônia, precisa-se ressaltar pequenas altitudes, que ali são de grande importância. Estas são as curvas auxiliares. No segundo caso, quando o detalhe é muito escarpado, deixa-se de representar uma curva ou outra porque além de sobrecarregar a área dificulta a leitura.

Quanto à equidistância das curvas de nível, algumas recomendações de acordo com a escala devem ser consideradas.

Imprescindível na representação altimétrica em curvas de nível é a colocação dos valores quantitativos das curvas mestras.

Recomendações são feitas em Domingues [11] quanto a equidistância das curvas de nível de acordo com cada escala e mostradas na tabela abaixo.

| Escala | Equidistância | Escala | Equidistância |
|---|---|---|---|
| 1: 500 | 0,5m | 1: 100.000 | 50,0m |
| 1: 1.000 | 1,0m | 1: 200.000 | 100,0m |
| 1: 2.000 | 2,0m | 1: 250.000 | 100,0m |
| 1: 10.000 | 10,0m | 1: 500.000 | 200,0m |
| 1: 25.000 | 10,0m | 1: 1.000.000 | 200,0m |
| 1: 50.000 | 25,0m | 1: 10.000.000 | 500,0m |

## 5.6 Erros de interpretação gráfica nas Curvas de Nível

Alguns erros podem ocorrer quando deseja-se confeccionar ou analisar curvas de nível. Destacam-se alguns:

- Uma curva de nível não pode desaparecer repentinamente, pois sempre é uma linha fechada, exceto quando representam uma parcela do terreno;

- Duas curvas de nível não podem se cruzar;

- O fundo de um vale não pode ter uma mesma cota, pois este não pode ser horizontal;

- Duas ou mais curvas de nível jamais poderão convergir para formar uma curva única, com exceção das paredes verticais da rocha;

## 5.7 Métodos de obtenções das Curvas de Nível

Segundo Garcia e Piedade [12], após o levantamento planimétrico do terreno pode-se empregar um dos três métodos abaixo para a obtenção de curvas de nível:

**Quadriculação**

- É o mais preciso dos métodos.

- É o mais dispendioso e demorado método.

- Recomendado para pequenas áreas.

- Consiste em quadricular (com piquetes) um terreno e nivelá-lo.

- A quadriculação é feita com a ajuda de um teodolito/estação (para marcar as direções perpendiculares) e da trena/estação (para marcar as distâncias entre os piquetes).

- O valor do lado do quadrilátero é escolhido em função: da sinuosidade da superfície; das dimensões do terreno; da precisão requerida; e do comprimento da trena.

- Logo após, as quadrículas são lançadas em escalas apropriadas, os pontos de cota inteira são interpolados e as curvas de nível são traçados.

**Irradiação taqueométrica**

- Método indicado para áreas grandes e relativamente planas.

- Consiste em levantar poligonais maiores (principais) e menores (secundárias) interligadas.

- Das poligonais (principal e secundárias) irradiam-se os pontos notáveis do terreno, nivelando-os e determinando a sua posição através de ângulos e distâncias horizontais.

- Esta irradiação é feita através de teodolito e régua ou estação total.

- Logo após, as poligonais são calculadas e desenhadas, os pontos irradiados são locados e interpretados e as curvas de nível são desenhadas.

**Seções transversais**

- Método utilizado na obtenção de curvas de nível em faixas, ou seja, em terrenos estreitos e longos.

- Consiste em implantar e levantar planialtimetricamente os pontos definidores das linhas transversais à linha longitudinal definida por uma poligonal aberta.

- Logo após, a poligonal aberta e as transversais são determinadas e desenhadas, os pontos de cada seção são interpolados e as curvas de nível são traçadas.

## 5.8 Interpolação

Segundo Borges [13], a interpolação de curvas de nível pode ser gráfica ou numérica.

**Interpolação Gráfica.**

Esse método consiste em determinar, entre dois pontos de cotas fracionárias, o ponto de cota cheia ou inteira e o múltiplo da equidistância vertical.

Ou seja, dois pontos **A** e **B** de cotas conhecidas e cuja distância horizontal também se conhece. O método consiste em traçar perpendiculares ao alinhamento **AB**, pelo ponto **A** e pelo ponto **B**, respectivamente.

Sobre essas perpendiculares lançam-se: o valor que excede a cota inteira (sentido positivo do eixo, pelo ponto **A** ou **B**, aquele de maior cota); e o valor que falta para completar a cota inteira (sentido negativo do eixo, pelo ponto **A** ou **B**, aquele de menor cota). Sabendo que este lançamento pode ser feito em qualquer escala.

Os valores lançados sobre as perpendiculares por **A** e **B** resultam nos pontos **C** e **D**, que determinam uma linha.

A interseção dessa linha **CD** com o alinhamento **AB** é o ponto de cota inteiro procurado.

**Interpolação Numérica.**

O método consiste em determinar os pontos de cota inteira e múltiplos da equidistância vertical por semelhança de triângulos.

Na Figura 5.8, temos os pontos **C** e **D** que pertencem a um terreno inclinado. O ponto **E** é a interseção de um plano horizontal e esse terreno. Os segmentoss **AC** e **BD** são segmentos perpendiculares a esse plano.

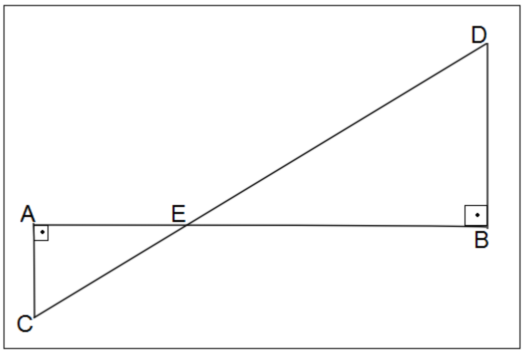


Figura 5.18:

Essa mesma figura também pode ser representada segundo a Figura 5.8.

Assim, temos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AE} + \overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$$

$$\overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{AE} \cdot \overline{BD} - \overline{AE} \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \overline{AB}$$
$$\overline{AE} \cdot (\overline{BD} - \overline{AC}) = \overline{AC} \cdot \overline{AB}$$
$$\overline{AE} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{\overline{BD} - \overline{AC}}$$

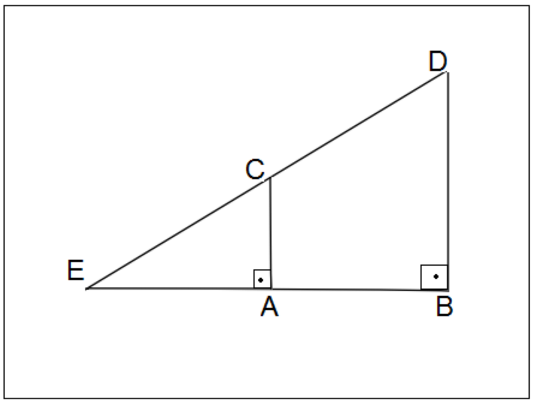


Figura 5.19:

Desta forma pode-se determinar a cota desejada.

# Capítulo 6

# Experimento em sala de aula

Geometria plana e espacial através de curvas de nível.

## 6.1 Objetivo

Com o objetivo de incentivar a noção espacial dos alunos, nesta atividade são sugeridas discussões e ações que possibilitam aos alunos conhecer, interpretar e confeccionar mapas topográficos a partir da composição e decomposição de relevos, ajustando uma importante experiência de aplicação do conhecimento geométrico à situações de caráter prático.

## 6.2 Desenvolvimento

Projeto vivenciado na Escola Estadual Nossa Senhora Aparecida, no município de Jatobá-PE.

A atividade cria um ambiente favorável para o entendimento de aplicações muito variadas, tais como: na agronomia - melhor conhecimento do terreno no intuito de melhorar a qualidade e a produtividade de lavouras, rebanhos e produtos agroindustriais para ou até proteger terrenos contra erosão; na medicina - realização de tomografia simples computadorizada, utilização do SMT(Sistema de Modelagem Topográfica) pelos especialistas em córnea para produzir um mapa da curvatura da superfície do olho; na comunicação - triagem de lugares para se colocar antenas ou torres de transmissão; na produção de energia eólica - seleção de lugares para assentamento de torres; em atividades militares - leitura adequada de mapas topográficos para definir estratégias de defesa ou ataque; dentre várias outras aplicações.

O trabalho proposto permite uma atividade em grupo de forma que os alunos confeccionem relevos com a utilização de massa de modelar. Por se tratar de um material de fácil manuseio, possibilitará a construção de terrenos e, consequentemente,a obtenção de cortes no relevo criado. Após esses cortes, serão desenhadas as curvas de nível correspondentes e, em seguida, reproduzidas em placas de acrílicos para obter o perfil topográfico do relevo, ou seja, será criada uma representação plana do espaço tridimensional e, através dessa representação,a reconstrução do relevo (confeccionado ou produzido) trabalhado.

### 6.2.1 Roteiro

No dia 14 de fevereiro de 2014 ocorreu o primeiro contato dos alunos do 9$^o$ ano do Ensino Fundamental dos alunos da Escola Estadual Nossa Senhora Aparecida acerca do referido trabalho.

Figura 6.1: Retas

Figura 6.2: Reta e plano

Neste dia, foi feita uma revisão de alguns conteúdos prévios necessários para o desenvolvimento do projeto. Assuntos de Geometria Básica como Ponto, Reta, Plano, Curvas, Posições relativas entre entes geométricos dentre outros foram discutidos e exemplificados em sala de aula.Na sequência, foi esclarecido o conceito e importância de Curvas de Nível. Experiências foram trocadas quanto a necessidade do homem conhecer bem o ambiente físico em que vive ou trabalha. Ambiente esse que podemos chamar de um ambiente tridimencional ou um ambiente espacial.

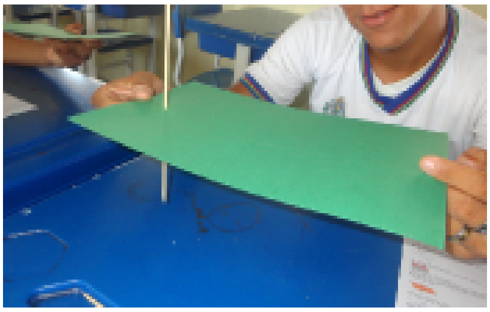

Figura 6.3: Reta e plano

Figura 6.4: Planos

Figura 6.5: Curvas abertas

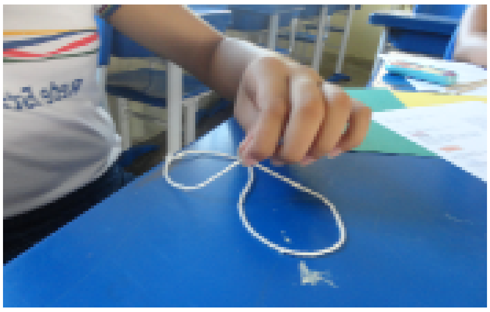

Figura 6.6: Curvas fechadas

Após compreenderem a proposta da atividade, discutiu-se sobre como e com o que o trabalho seria realizado. Abriu-se um espaço para que fossem sugeridos os materias que seriam necessários para o trabalho ocorresse como planejado e com uma considerada qualidade. A massa de modelar e outros materias como bacia para água, cano de PVC, palito de churrasco, linha de nylon facilitariam a execução.

Figura 6.7: Massa de modelar

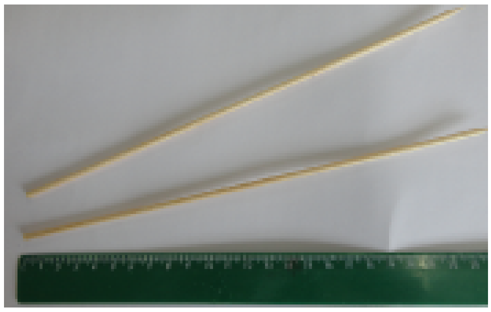

Figura 6.8: Palitos e régua

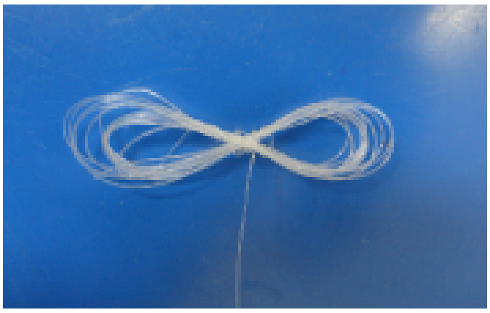

Figura 6.9: Fio de Nylon

Figura 6.10: Pincéis

Figura 6.11: Balde

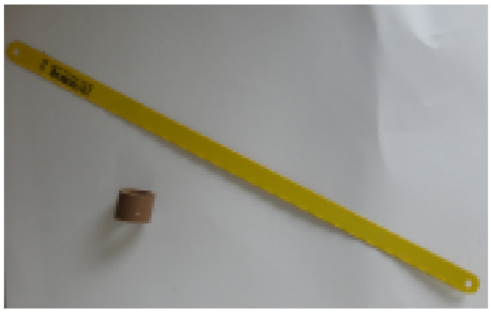

Figura 6.12: Serra e cano de pvc

No dia 19 do mesmo mês, já de posse do material sugerido pela turma, o projeto é iniciado em sua parte prática. Literalmente é o momento de mão na massa. Com várias caixas de massa de modelar, os alunos confeccionaram uma montanha sobre uma peça de cerâmica. A montanha deveria possuir o máximo de imperfeições possíveis, algo que foi sugerido pelos estudantes.

O próximo passo seria determinar a altura dessa montanha. Como as laterais da montanha eram inclinadas, eles tiveram a ideia de colocá-la dentro de uma bacia e, em seguida, colocar água nessa bacia até que a montanha ficasse totalmente coberta. Assim, com um palito de churrasco, perpendicular à cerâmica da base da montanha, imergido na água, poderia medir tal altura.

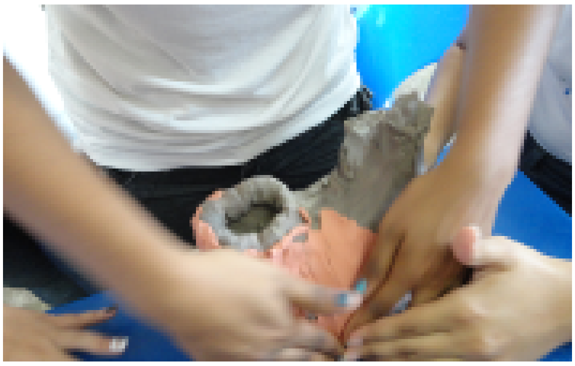

Figura 6.13: Construção da montanha

Figura 6.14: Água na bacia

Figura 6.15: Medindo altura

De uso do palito como a marcação da altura, determinou-se quantas cotas seriam marcadas na montanha. Assim, foram feitas marcações no palito e o mergulhado novamente de forma perpendicular para dentro da mesma bacia com água e com a montanha. Com um copo foi-se retirada água até cada marcação do palito e a cada marcação alcançada, foi feita, com outro palito, a marcação que a água desenhava na montanha. Tal processo apresentou uma montanha com várias curvas desenhadas.

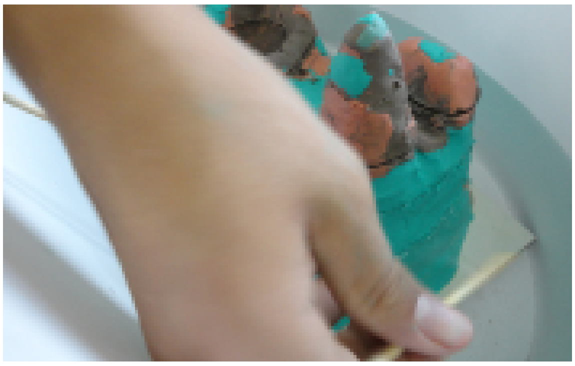

Figura 6.16: Marcando os níveis

Figura 6.17: Níveis marcados

A tarefa seguinte era desenhar essas curvas em transparências. Após o desenho foi sugerido que, com um fio de nylon, fossem feitos cortes na montanha que coincidissem com as curvas desenhadas. E assim foi feito. Nas curvas, de maior altitude às de menor altitude, foram realizados tais cortes e, após cada cortes, cada peça da montanha foi retirada e imediatamente a curva foi decalcada em uma transparência.

Figura 6.18: Cortes nos níveis

Figura 6.19: Curvas em transparências

Figura 6.20: Montanha cortada

Figura 6.21: Curvas em transparências

De posse dessas transparências e sobrepondo-as, visualizamos ali a montanha planificada. Então, cada curva contida nas transparências foi redesenhada em uma peça de acrílico.

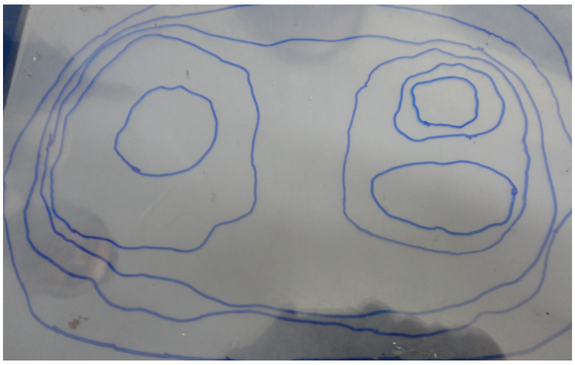

Figura 6.22: Planificação da montanha

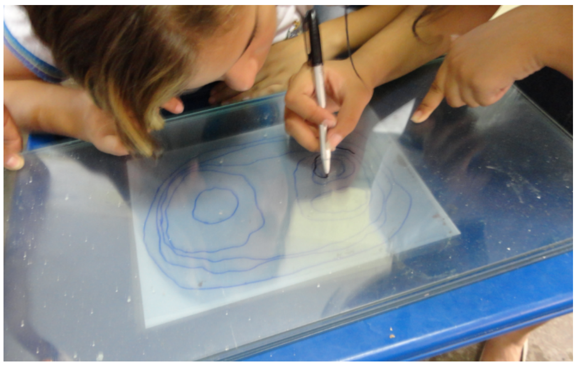

Figura 6.23: De transparências para acrílicos.

Para posicionar essas peças de acrílico de tal forma que a montanha pudesse ser vista novamente na forma espacial, foi cortado um cano de pvc em tamanhos que coincidissem com os espaçamentos marcados no palito de churrasco. Pondo essas peças de acrílico com os espaçamentos relativos, a montanha pôde ser novamente contemplada pelos alunos. Algo que gerou grande contentamento entre eles.

Figura 6.24: Montanha no acrílico

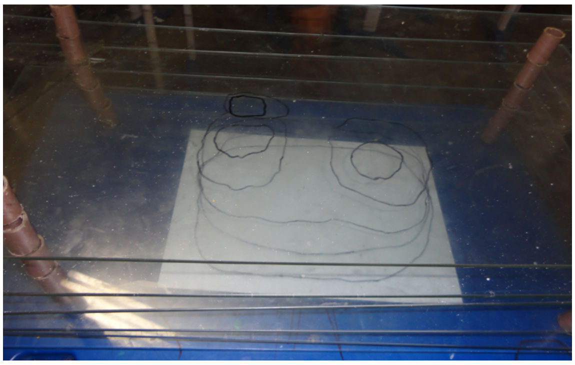

Figura 6.25: Montanha no acrílico

### 6.2.2 Material utilizado

- Massa de modelar.
- Placas de acrílico
- Cordões de nylon.
- Cano de pvc.
- Folhas para transparência.
- Bacia.
- Palitos de churrasco.
- Pincéis.

## 6.3 Conteúdos abordados

- Ponto, Reta e Plano.
- Curvas.
- Posições relativas entre retas.
- Posições relativas entre reta e plano.
- Posições relativas entre planos.
- Escalas.

## 6.4 Conclusão

Houve uma grande receptividade por parte dos estudantes, principalmente quando perceberam que a atividade representava em muito o cotidiano deles.

Entenderam a função das Curvas de Nível, reforçando assim, a conscientização da importância do estudo da Geometria para seu sucesso escolar e, principalmente, para o seu dia-a-dia. Desenvolveu-se, desse modo, o raciocínio geométrico plano e espacial.

# Referências Bibliográficas


[1] Boyer, Carl B., *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher LTDA, 2a. edição, 1996.

[2] Barbosa, João L. M., *Geometria Euclidiana Plana*, SBM, 11a. edição, 2012.

[3] Piaget, J. ,Garcia, R., *Psicogêneses e História das Ciências*, Ciência Nova, Nº 6, Lisboa: Dom Quixote, 1987.

[4] Munkres, James R., *Topology : A First Course.*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[5] Doubek, A., *Topografia*, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1989.

[6] McComarc, Jack C., *Topografia*, Editora LTC, 2007.

[7] Iezzi, Gelson, *Fundamentos de Matemática Elementar*, Editora Atual, 5a. edição, 2007.

[8] Kline, M., *Mathematical Thought from Anciente to Modern Times*, Oxford Univ. Press. London-N.York. 1972.

[9] Jordan, Camille, *Cours d'Anayse de l'Ecole Polytechnique*, 3 edition, nouveau tirage, Gauthier-Villars. Paris, 1959.

[10] Espartel, L., *Curso de Topografia*, Globo, 9a. edição, Rio de Janeiro, 1987.

[11] Domingues, F. A. A., *Topografia e astronomia de posição para engenheiros e arquitetos*, Editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1979.

[12] Garcia, G. J., Piedade, G. C. R., *Topografia aplicada às ciências agrárias*, Nobel, 5a. ed., São Paulo, 1984.

[13] A. C., *Topografia aplicado à Engenharia Civil*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1992.

# Páginas consultadas na Web

www.ibge.gov.br (Último acesso:26/03/2014)

www.cartografia.org.br (Último acesso:26/03/2014)

www.cartografica.ufpr.br (Último acesso:26/03/2014)

www.sogeografia.com.br (Último acesso:26/03/2014)