Universidade Federal de Sergipe
Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Trabalho de Conclusão de Curso

A Matemática Financeira no Cotidiano de um Aluno de uma Escola Pública

por

FRANCISCO SILVA DE AZEVEDO
Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. ALMIR ROGÉRIO SILVA SANTOS

São Cristóvão-SE
Abril de 2014

Universidade Federal de Sergipe
Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

A Matemática Financeira no Cotidiano de um Aluno de uma Escola Pública

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Sob orientação do Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos.

FRANCISCO SILVA DE AZEVEDO
Orientador: Prof. Dr. ALMIR ROGÉRIO SILVA SANTOS

São Cristóvão-SE, Abril de 2014.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

A Matemática Financeira no Cotidiano de um Aluno de uma Escola Pública

por

Francisco Silva Azevedo

Aprovada pela Banca Examinadora:

Almir Rogério Silva Santos

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos - UFS
Orientador

Débora Lopes da Silva

Prof. Dr. Débora Lopes da Silva- UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves - UFRPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 14 de abril de 2014

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus que sempre me abençoou com saúde e disposição para chegar até aqui.

Aos meus pais, Humberto "Manaia"e Zenaide que estão agora no plano espiritual, pelos quais sinto eternas saudades.

Aos meus familiares, Principalmente minha esposa Maria Percília e meus filhos Vitor Emanuel, Luís Felipe e Rafaela pela compreensão por ficarem vários momentos sem a atenção devida de um esposo e pai.

Aos meus irmãos: Carlos Alberto(Serra), Eládio(Zangão), Gildázio(Pangaré), Adeilson(Lengo), Etevaldo e Ione, pela confiança e por acreditarem plenamente no meu potencial.

Ao Professor Dr. Almir Rogério Silva Santos, pela firmeza de seus posicionamentos e, ao mesmo tempo, por conduzir-me com bastante clareza e sabedoria com suas orientações.

Agradeço ao Professor Sérgio Dantas, Diretor do Colégio Módulo por ceder gentilmente os espaços do seu estabelecimento de ensino para o nosso grupo de estudos durante está caminhada.

Aos colegas da turma 2012, pela troca de experiências e convivência durante o curso, destaco pelos estudos em equipe e incentivos mútuos os colegas Marcone Borges, Flávio Teijeira e Luiz Gomes (Zé Luiz). Ao colega Luiz Gomes quero fazer um destaque em especial para ele, além de parceiro, tive a honra de ter sido seu professor de Matemática no Ensino Médio, e hoje estamos concluindo como amigos e parceiros de uma bela vitória.

Aos professores da Universidade Federal de Sergipe do Departamento de Matemática, pela transmissão dos conhecimentos que foram adquiridos durante todo o curso, em particular agradeço ao Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo, pela simplicidade, incentivos e cordialidade com todos os seu alunos.

À CAPES, pelo incentivo financeiro e por acreditar que a educação básica precisa de investimentos.

DEDICÁTORIA

A todos que compõem a minha família: Esposa e filhos: Cila , Vitor Emanuel, Luis Felipe e Rafaela. Os irmãos: José Carlos (prof. Laranjeiras), Carlos Alberto, José Massilon, Gildázio, Eládio, Adeilson, Etevaldo e Ione. Os sobrinhos: Lorena, Leonardo, Vinicius, Breno Cezar, Victor; Cryslene, Tâmara, Maíra, Willis, Heloisa, Eleide, Edlane, Elielson e Elisângela. A(o)s cunhada(o)s: Miralda; Graça; Sônia; Zélia, Altran; Pois a família é a base de sustentação de toda uma sociedade. Aos meus amigos pela certeza da reciprocidade. Aos alunos por proporcionar conhecimentos essenciais e experiências profissionais adquiridas ao longo dos anos de trabalho. Ao meu irmão José Carlos Azevedo (Prof. Laranjeiras) *In Memorian* por ter aberto um caminho por onde procurei sempre trilhar e ter apresentado um Norte no qual sigo até hoje. Obrigado meu irmão!

Suba o primeiro degrau com fé. Não é necessário que você veja toda a escada. Apenas dê o primeiro passo.

Martin Luther King

Conteúdo

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo contribuir com uma pequena parcela de informação dentro do contexto educacional, principalmente no tocante ao ensino da Matemática Financeira do Ensino Médio de uma escola da rede Pública; contemplando sua importância no cotidiano do aluno, favorecendo na formação e consolidação da sua cidadania. Este trabalho é constituído de dois momentos. O primeiro faz um relato da Matemática e o conteúdo Matemática Financeira, fazendo um paralelo desde sua origem até os momentos atuais e suas aplicações práticas no cotidiano das pessoas. No segundo momento é feita uma análise voltada para o campo pedagógico, ensino-aprendizagem num ambiente escolar, onde estão envolvidos os elementos constitutivos dessa investigação, relacionando a problematização, os objetivos, hipóteses e questionamentos levantados. Nesse contexto são apresentadas reflexões teórico-metodológicas sobre o tema abordado e ações pretendidas pelo educador dentro do processo de aprendizagem, adequando este processo às sugestões pretendidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM, que estão centrados na educação para a cidadania. Acredita-se que a educação é o melhor caminho para a contribuir na formação do cidadão completo em todos os aspectos. Entendemos que a Matemática Financeira pode ser um tema de grande relevância e importância, que seja trabalhada de maneira contextualizada, interdisciplinar, como preconiza os Parâmetros Curriculares Nacionais PCNs, que reorienta o estudo valorizando a formação e a aquisição das competências e habilidades requeridas para um novo mundo no qual criatividade, autonomia e capacidade de solucionar problemas são cada vez mais indispensáveis.

Palavras-chave: Matemática Financeira – Cidadania – Contextualização - Cotidiano - Porcentagem.

ABSTRACT

The present work has as objective to contribute some information in the educational context, mainly when it refers to the Financial Mathematics learning in Secondary Education of a Public School; contemplating its importance in pupil's daily life, favoring in a decisive form the formation and the consolidation of its citizenship. This work is constituted of two stages. The first one makes a account of Mathematics and the Financial Mathematical content, making a comparison since its origin until the current days and its practical applications in the daily life of people. The second stage makes an analysis directed toward the pedagogical area, teach-learning and everything what is related to the educative context in a school environment, where the constituent elements of this research are involved, relating problems, objectives, hypotheses and questionings. In this context, theoretic-methodological reflections on the mentioned subject are presented actions by the educator inside the learning process, adjusting this process to the intended suggestions by "PCNEM" that are approached in education for the citizenship. It is believed that education is the best way to contribute to the formation of full citizens in all aspects. Understand that Financial Mathematics which must be worked in a contextualized way, interdisciplinary as the National Curriculum Standard (PCNs) recommends, which reorients the study valuing the formation and the acquisition of required competence and abilities to a new world in which creativity, autonomy and capacity to solve problems are more and more indispensable.

Key Words: Financial Mathematics - daily life – citizenship - contextualization - percentage.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Este trabalho tem como foco a Matemática Financeira no cotidiano do aluno, estando inserida nesta, os conceitos referentes a Porcentagem por estar presente em situações do seu dia-a-dia e pelo papel importante como tema integrador, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. O ensino da Matemática, como vem sendo executado, não condiz com a realidade brasileira, e vem acompanhado de muitas fórmulas, regras e algoritmos que desestimulam os alunos. Geralmente os professores de Matemática ainda ensinam de maneira conteudista – centrada em passar somente os conteúdos - visando quem sabe, atender uma necessidade imediata que são os vestibulares.

Entende-se que o ensino da Matemática nos dias atuais deve se preocupar em criar estratégias que possibilitem aos alunos construir significados e conceitos matemáticos, não somente calcular e resolver listas de exercícios.

O interesse em aprofundar num estudo sobre a abordagem de conteúdos da Matemática Financeira numa escola Pública de Ensino Médio, foi fruto da minha vivência de quase 30 anos como professor de Matemática em dois ambientes escolares distintos: uma instituição do setor privado, onde pude vivenciar a abordagem de alguns temas de Matemática Financeira voltados a preparação dos alunos para o vestibular, visto que o plano de estudo desse setor contempla conteúdos que constituem os componentes exigidos atualmente no ENEM[1], enquanto a do segundo setor, o público, na maioria das vezes os alunos têm interesse em concluir o Ensino Médio visando adquirir um trabalho.

Os alunos com os quais foram feitas as abordagens são alunos do segundo ano A, do Ensino Médio, em torno de 42 alunos, ano letivo 2013, do turno vespertino do Ensino Médio numa Escola da rede Pública Estadual, Colégio Estadual Santos Dumont, localizado no bairro Atalaia (zona urbana) de Aracaju. Este colégio conta com cerca de 923 alunos, sendo 490 no Ensino Fundamental e 433 no Ensino Médio. O Ensino Fundamental funciona nos turnos manhã e tarde, e o Ensino Médio tarde e noite. A grande parte dos alunos desta escola é oriunda de bairros vizinhos e povoados, visto que é o único com Ensino Médio nas proximidades.

[1]Exame Nacional do Ensino Médio

Justificativa

Este estudo justifica-se pela necessidade de se tentar encontrar uma resposta que justifique a confirmação ou não, de forma concreta, se os alunos envolvidos neste trabalho sabem resolver problemas de Porcentagem ligada ao seu dia-a-dia. Percebendo que após aplicação de exercícios na lousa sobre problemas simples envolvendo Porcentagem, o conjunto dos alunos do segundo ano A, do Ensino Médio, apresentava certa fragilidade no que se refere este conteúdo da Matemática Financeira, onde os mesmos sentiam dificuldades em resolverem problemas simples de Porcentagem, como o cálculo de descontos ou lucros, presentes no seu cotidiano.

A todo o momento os alunos estão sendo bombardeados com inúmeras informações de caráter comercial e financeiro por meio de jornais, rádio, televisão, encartes, cartazes e faixas. Estes alunos não conseguem distinguir as mais diversas situações problemas a eles apresentadas. A Matemática Financeira desempenha um papel muito importante no preparo e na formação do cidadão, pois ele adquire habilidades relacionadas ao gerenciamento responsável de suas finanças pessoais, somado a isso, podem participar corriqueiramente das decisões de caráter econômico, cada vez mais comum na sociedade moderna.

Objetivos

Os objetivos desse trabalho têm o propósito de verificar como os alunos, dessa turma escolhida, lidam com situações reais que envolvem Porcentagem no seu dia-a-dia; identificar metodologias e adotá-las em sala de aula no Ensino Médio, com vistas a uma intervenção positiva na disciplina Matemática, com a perspectiva de implantar alternativas que favoreçam um melhor desempenho dos alunos em Porcentagem, conteúdo constitutivo e fundamental da Matemática Financeira; e sugerir estratégias de ensino que aprimorem a aprendizagem.

Objetivos Específicos

Especificamente, deseja-se que os alunos da segunda série A do Ensino Médio, desenvolvam competências e habilidades em: Calcular o valor de um aumento ou desconto de x% sobre um determinado valor; Determinar o valor total de uma quantia após um aumento de x%..

O avanço tecnológico das últimas décadas possibilitou o desenvolvimento em diversas áreas tais como: saúde, engenharia, economia e administração. Como conseqüência, provocou mudanças na sociedade e na forma de viver do ser humano. O mercado de trabalho tornou-se extremamente competitivo requisitando profissionais que devem atender aos novos padrões de qualidade e modernidade.

A Matemática é uma ciência exata e componente imprescindível nas áreas descritas acima. Entende-se que o seu ensino nos moldes que é ministrado hoje, particularmente na segunda série A do Nível Médio, onde o aluno ouve, repete e resolve listas de exercícios a partir de modelos resolvidos pelo professor, provoca a falta de interesse e estímulo ao aluno. Sem a implantação da contextualização[2] nos temas matemáticos, como a Matemática Financeira e Porcentagem, ao invés de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, aumentam cada vez mais o desinteresse e o desestímulo desses jovens estudantes, tornando, assim, a Matemática de difícil compreensão e aceitação.

Questões Norteadoras

Algumas questões focais e norteadoras dessa investigação possibilitaram elementos essenciais e constitutivos ao objeto de estudo, tais como: Os alunos da 2ª série A do Ensino Médio têm conhecimento básico na resolução de problemas simples envolvendo Porcentagem vinculada a situações do seu dia a dia?

- Como calcular o valor de um aumento ou desconto de x% sobre um determinado valor?
- Como determinar o valor total de um salário após um aumento de x%?
- Como calcular a taxa de aumento ou desconto sobre um produto?
- Como calcular o valor de um Imposto como o IPTU[3] ou taxa sobre um determinado serviço?

Estrutura deste Trabalho

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos: O primeiro capítulo contempla o contexto histórico e as fundamentações teóricas envolvendo a Matemática propriamente dita, assim como a sua associação com as tecnologias, transitando então pela Matemática Financeira, seus conteúdos e enfoques pertinentes, como Porcentagem, os juros e os impostos, os juros e as progressões, abordando os cálculos dos juros compostos e do montante, o valor do dinheiro no tempo, apresentando e determinando suas respectivas fórmulas. Completamos este capítulo dando uma certa ênfase para os Financiamentos e os sistemas de amortizações, destacando os principais e os de maior utilização no mercado financeiro, exemplificando com situações problema e representando as soluções em tabelas ou planilhas e também por gráficos comparativos.

[2] A Contextualização de forma geral é o ato de vincular o conhecimento à sua origem e à sua aplicação.

[3] IPTU-Imposto Predial Territorial Urbano

Ao segundo capítulo expõem-se o lado descritivo do ensino da Matemática no Ensino Médio, descrevendo o cenário, as matrículas juntamente com as ações governamentais e Documentos Oficiais. O segundo capítulo continua mostrando o perfil das escolas, as salas de aulas, os conteúdos e enfoques, Vestibular e ENEM, os livros didáticos e as relações professor-aluno-Matemática.

O terceiro capítulo apresenta o desenvolvimento propriamente dito deste trabalho, refere-se as ações procedimentais, metodológicas e pedagógicas, voltada para o campo ensino-aprendizagem num ambiente escolar, destacando-se a Ação na Escola, a ação prática e efetiva dos alunos, a análise qualitativa e quantitativa dos dados coletados e depois de tabulados e representados em gráficos para facilitar possíveis discussões, ponderações e conclusões.

Por fim, no quarto capítulo apresentam-se as considerações finais e suas implicações, possíveis contribuições e caminhos para novos acréscimos e sugestões para continuidade de estudos visando melhorar a qualidade de ensino e a aprendizagem, pois não há ensino sem aprendizagem.

Vejamos então porque proporcionar um capítulo inteiro dedicado a Matemática Financeira, visto que nas ações em sala de aula foram abordados cálculos com Porcentagem. Talvez por ser o cálculo de Porcentagens parte da Matemática das primeiras séries, a maioria das pessoas se considera como plenamente capaz de fazê-los. A verdade é bem outra: boa parte dos prejuízos das pessoas ao fazerem negócios ou compras, resulta da falta de domínio no cálculo de Porcentagens. Isso trás a falsa impressão de que os alunos sabem Matemática Financeira. Como a Porcentagem é um componente fundamental da Matemática Financeira, é interessante que se comece fazer um trabalho que propicie o favorecimento do pleno domínio deste conteúdo imprescindível para a mesma.

A Matemática Financeira possui certos componentes ligados a outros conceitos matemáticos, além da Porcentagem, como por exemplo: P.A , P.G, Logaritmos; Função Exponencial, Função Linear, esses conceitos matemáticos servem como suporte teórico ou embasamento para justificar a determinação das fórmulas de juros simples e juros compostos, assim como as equivalências entre taxas e capitais. Estas fórmulas assim obtidas são comprovadas por indução Matemática, favorecendo uma melhor compreensão e evitando assim as chamadas fórmulas prontas.

As pessoas vivenciam a todo o momento com eventos ligados a nossa realidade, com ações que envolvem compras, vendas, pagamentos, prestações, aluguéis, parcelamentos entre outros. Neste sentido, visando dar uma maior ênfase à Matemática Financeira e seus conteúdos constitutivos de maior relevância, destacamos as Capitalizações Contínuas; os Financiamentos e as Amortizações. Esses assuntos geralmente não são abordados nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, e não fazem parte do componente curricular do Ensino Médio da rede pública do Estado de Sergipe.

Na contramão deste cenário espera-se que o professor não se deixe levar pelo fato desses conteúdos não constar nos livros didáticos e não fazer parte do componente curricular, que ele siga em frente com atitudes que venham enriquecer suas aulas, como por exemplo, nos segundos anos do ensino médio, visto que os alunos têm os conteúdos prévios vistos no primeiro ano do Ensino Médio e que são usados nos cálculos de Amortizações, Capitalizações Contínuas, e Financiamentos, tornando assim a Matemática Financeira mais compreensível e atraente para o aluno.

Capítulo 1

CONTEXTO HISTÓRICO E FUNDAMENTAÇÕES

1.1 A Matemática

Muitos anos foram necessários para se distinguir conceitos abstratos e situações concretas, o que indica a dificuldade de se estabelecer uma base para a Matemática, além disso, há inúmeras perguntas sobre a sua origem ainda sem respostas. O conceito da Matemática como ciência experimentou sucessivas extensões em seu significado, à medida que a solução de novos problemas o exigia ou à medida que o aprimoramento do rigor lógico das novas teorias Matemáticas o permitia. Os números foram criados pelos homens como um recurso para auxiliá-los nas diversas contagens que precisavam fazer no seu dia-a-dia.

O ensino da Matemática tinha uma grande dependência dos livros didáticos e do quadro negro, e hoje de certa forma ainda tem, mas não com tanta intensidade como antes. Atualmente o ensino da Matemática pode ser beneficiado pelo avanço tecnológico tornando as pesquisas cada vez mais amplas, graças ao auxílio de equipamentos eletrônicos e informatizados. (MACHADO-2005)[1] esclarece que:

> "A presença de computadores nas escolas abre uma ampla porta para viabilização do trabalho interdisciplinar, tanto em razão da linguagem informacional, que perpassa o conteúdo das diversas disciplinas quanto em decorrência dos múltiplos recursos que oferecem para a realização de pequenos projetos de pesquisa pelos alunos."(MACHADO, 2005, p. 254).

Mas, com toda essa inovação tecnológica, ampliam-se não só as fontes de pesquisa, mas, também, ferramentas que auxiliam no ensino-aprendizado. Através de *softwares*, por exemplo, consegue-se dependendo do caso, fazer com que um aluno entenda melhor o assunto e de maneira menos complicada. Com essa idéia se remete ao pensamento de (MACHADO-2005)[1] :

> A expectativa de que o computador deixe de ser um instrumento que assusta, às vezes muito mais o professor do que o aluno, é que fundamenta a busca de uma conscientização. O fundamental seria colocar o equipamento na sala de aula e começar a manejá-lo, a usar *softwares* interessantes, tal como são utilizados um televisor ou um DVD. (MACHADO, 2005, p. 236).

1.1.1 A Matemática e as Tecnologias

No ensino da Matemática o uso de tecnologias deve ser vista como mais um recurso didático que auxiliará o professor na transmissão do saber ou conhecimento para o aluno. Para tanto não basta valer-se das tecnologias se não souber usá-la de maneira produtiva e efetiva em sala de aula. (D'AMBRÓSIO)[5] afirma que:

> A Matemática e a tecnologia, entendida como a convergência do saber [ciência] e do fazer [técnica], são intrínsecas à busca solidária de sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto, ser dissociada da tecnologia disponível.

Na concepção de (D'AMBRÓSIO)[5] a Matemática e a tecnologia sempre caminham juntas numa perfeita simbiose:

.... Ao longo da evolução da humanidade, Matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbiótica.

Porém, não se pode desfazer o uso do tradicional quadro negro, pois certos ensinamentos necessitam dele, no entanto, os *softwares* serão úteis para auxiliar a fixação do conteúdo. É bom ressaltar o fato, de que quando se fala em tecnologia não se deve referir somente a informática, mas também, equipamentos audiovisuais, como projetores, vídeos, lousas digitais e outros como estão ilustrados na Figura (1.1) .

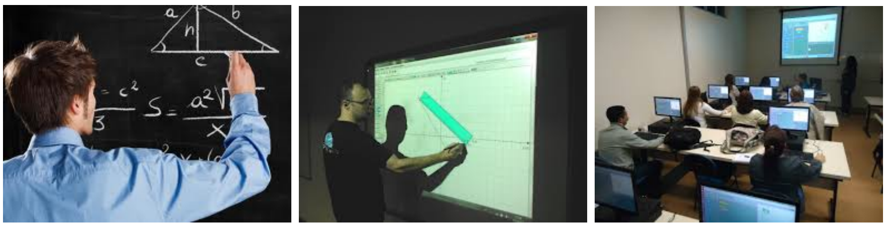

Figura 1.1: Tecnologias em sala de aula

1.2 A Matemática Financeira

Ao dar enfoque a Matemática Financeira, estamos considerando contextos onde esteja envolvido dinheiro, podendo, por exemplo, estar ligado a consumo, trabalho, contas, operações bancárias entre outros assuntos. A Matemática Financeira é considerada uma poderosa ferramenta que permite a análise de problemas de investimento, sejam estes simples, como a aquisição de um produto de uso imediato, aplicações na Caderneta de Poupança; no financiamento de um veículo ou uma casa ou, então na análise de um projeto de investimento num empreendimento industrial que custa milhares de reais, assim ilustrados na Figura (1.2).

Estes problemas estão de qualquer forma, ligados ao dia-a-dia do cidadão e são expostos para os alunos facilitando a sua compreensão. Refletindo sobre a influência que o dinheiro exerce sobre a humanidade, temos uma visão de como é importante conhecer a Matemática Financeira para o pleno exercício da cidadania.

Figura 1.2: Cédulas e Moeda de Real e o Sonho de Consumo do Cidadão

1.3 Embasamento Matemático necessário para a Matemática Financeira: Razão, Proporção e Porcentagem

1.3.1 Razão

A palavra **razão** vem do latim *rátio* e significa a divisão ou quociente entre dois números, logo razão, entre a e b é igual a: $\frac{a}{b}$, sendo $b \neq 0$ (le-se a está para b), onde a é o antecedente e b é o consequente, sendo o significado, para cada a unidades correspondem a b unidades.

Exemplo 1.3.1. *Em uma sala de aula estudam 5 moças e 20 rapazes. Dizemos que a razão é* $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$*, ou seja, para cada moça existem 4 rapazes.*

1.3.2 Proporção

Proporção é a igualdade entre duas razões. A proporção entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é a igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, onde a e d são chamados de extremos, b e c são chamados de meios. A propriedade fundamental das proporções afirma que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\boxed{b \cdot c = a \cdot d} \tag{1.1}$$

Exemplo 1.3.2. *Meu carro faz 13 km por litro de combustível, então para 26 km preciso de 2L, para 39 km preciso de 3L e assim por diante.*

$R_1 = \frac{26}{2} = \frac{13}{1}$ e $R_2 = \frac{39}{3} = \frac{13}{1}$

Logo R_1 = R_2 ou seja, as Razões são iguais.

1.3.3 Porcentagem

É frequente o uso de expressões que refletem acréscimos ou reduções em preços, números ou quantidades, sempre tomando por base 100 unidades. Alguns exemplos:

- A gasolina teve um aumento de 15%. *(Significa que em cada R$100,00 houve um acréscimo de R$15,00)*;
- O cliente recebeu um desconto de 10% em todas as mercadorias. *(Significa que em cada R$100,00 foi dado um desconto de R$10,00)*;
- Dos jogadores que jogam no Mengão, 80% são craques. *(Significa que em cada 100 jogadores que jogam no Mengão, 80 são craques.)*

1.3.4 Razão centesimal

Toda a razão que tem para conseqüente o número 100 denomina-se razão centesimal. Alguns exemplos: $\frac{7}{100}; \frac{18}{100}; \frac{75}{100}; \frac{125}{100}$.

Podemos representar uma razão centesimal de outras formas:

- $\frac{7}{100}$=$0,07$=7% (Lê-se "sete por cento")
- $\frac{18}{100}$=$0,18$=18% (Lê-se "dezoito por cento")
- $\frac{75}{100}$=$0,75$=75% (Lê-se "setenta e cinco por cento")

- $\frac{125}{100}$=$1,25$=125% (Lê-se ”cento e vinte e cinco por cento”)

As expressões 7%, 18%, 18% e 125% são chamadas **taxas centesimais** ou **taxas percentuais**. Estas taxas percentuais são usadas em cartazes ou faixas com um grande apelo chamativo para os descontos concedidos nas lojas do comércio com o objetivo de atrair os consumidores, taxas estas ilustradas na Figura(1.3).

Figura 1.3: Taxas Percentuais de descontos

Exemplo 1.3.3. *Considere o seguinte problema:*

Felipe vendeu 40% dos seus 60 CD's. Quantos CD's ele vendeu?

Para solucionar esse problema devemos aplicar a taxa percentual 40% sobre o total de CD's. $40\% = \frac{40}{100}$

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{60} \Rightarrow 100 \cdot x = 60 \cdot 40 \Rightarrow 100 \cdot x = 24000 = \frac{2400}{100} \Rightarrow x = 24 \text{ CD's}$$

Logo, Felipe vendeu 24 CD's, que representa a porcentagem procurada.
Portanto, chegamos a seguinte definição:

Porcentagem é o valor obtido ao aplicarmos uma taxa percentual a um determinado valor.

Exemplo 1.3.4. *Calcular 40% de 300.*

$$40\% = \frac{40}{100}$$

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{300} \Rightarrow 100 \cdot x = 300 \cdot 40 \Rightarrow 100 \cdot x = 12000 \Rightarrow x = \frac{1200}{100} \Rightarrow x = 120$$

Exemplo 1.3.5. *Calcular 25% de 600 Kg.*

$$25\% = \frac{25}{100}$$
$$\frac{25}{100} = \frac{x}{600} \Rightarrow x = \frac{1500}{100} \Rightarrow x = 150Kg$$

Logo, 150 kg é o valor correspondente à porcentagem procurada.

1.4 Os Juros e os Impostos

Os juros e os impostos estão presentes desde a época dos primeiros registros de civilizações existentes na Terra. Um dos primeiros indícios apareceu já na Babilônia no ano 2000 a.C. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas; muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo, devolução de sementes de outros produtos agrícolas.

Em seu trabalho (GONÇALVES)[4] relata que:

> A História também revela que a idéia tinha tornado tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.C., com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. Os juros não são apenas uma das nossas mais antigas aplicações da Matemática Financeira e Economia, mas também, seus usos sofreram poucas mudanças ao longo dos tempos. Como em todas as instruções que têm existido por milhares de anos, algumas das práticas relativas a juros têm sido modificadas para satisfazerem às exigências atuais, mas alguns dos antigos costumes ainda persistem de tal modo que o seu uso nos dias atuais ainda envolve alguns procedimentos incômodos. Entretanto, deve-se lembrar que todas as antigas práticas que ainda persistem foram inteiramente lógicas no tempo de sua origem. Por exemplo, quando as sementes eram emprestadas para a semeadura de certa área, era lógico esperar o pagamento na próxima colheita no prazo de um ano. Assim, o cálculo de juros numa base anual era mais razoável; tão quanto o estabelecimento de juros compostos para o financiamento das antigas viagens comerciais, que não poderiam ser concluídas em um ano. Conforme a necessidade de cada época foi se criando novas formas de se trabalhar com a relação tempo-juro (juro semestral, bimestral, diário etc.

O desenvolvimento das trocas comerciais levou ao aparecimento de um termo que marcou de forma absoluta a história da economia: Capitalismo. No momento em que a situação permitiu a realização de poupanças consideráveis por parte de alguns, o papel do capital (moeda) passou a ser preponderante na produção da riqueza. De início, o capitalismo se diz comercial, indicando que o regime está sob o império dos negociantes, que controlam a distribuição e a produção. Já o capitalismo financeiro, surge num segundo momento, com o aumento extraordinário dos negócios e das necessidades de produção. Com o capitalismo financeiro, os bancos assumem o papel de destaque na economia. Os bancos já existiam desde o século XIII, e no século XVIII assumiram uma forma definitiva, mais ou menos como existem, ainda hoje. No entanto, os primeiros bancos de que se tem notícia surgiram por volta de 1200/1300 d.C. A história do mercado de capitais no Brasil é muito recente. O primeiro banco criado no Brasil foi o Banco do Brasil fundado em 1808 com a vinda da família real portuguesa para o Brasil.

Figura 1.4: Carga tributária e Símbolo do Imposto de Renda

O trabalho com dinheiro envolve vários tipos de percentagens: taxas de juros, descontos etc. Boa parte das perdas de dinheiro que as pessoas têm ao fazer negócios ou compras, resulta da falta de domínio no cálculo de porcentagens.

1.5 Os juros e as progressões

Os juros estão associados de certa forma às progressões aritméticas e às progressões geométricas.

1.5.1 Progressão Aritmética

Entende-se por Progressão Aritmética (P.A) toda seqüência numérica (a_n) em que cada termo a partir do segundo é obtido somando o termo anterior a_{n-1} com um número fixo (r) chamado razão da progressão.

Por exemplo, a seqüência (5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45) é uma (P.A) finita de razão (r=4).

O Termo Geral de uma Progressão Aritmética $(a_1;\ a_2;\ a_3\,;a_4;\ a_5;\ldots;a_n\ldots)$ Sendo dado primeiro termo a_1 e a razão r define-se recorrentemente

$$a_n = a_{n-1} + r, \quad \text{se}\, n \geq 2.$$

Temos então

$$a_2 = a_1 + r;$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r;$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r;$$
$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r;$$
$$a_6 = a_5 + 4r = a_1 + 5r;$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Portanto a fórmula do termo geral de uma P.A. conhecendo o seu primeiro termo a_1 e a razão r, será determinada por:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}, \quad para\ todo\ n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Vamos provar sua validade por indução para todo n natural.

Primeiro verificamos a validade da fórmula para n = 1, pois

$$a_1 = a_1$$

Suponhamos que a fórmula (1.2) seja válida para algum n e vamos provar que também é válida para $n + 1$.
Somando r aos dois membros da equação (1.2), temos

$$a_n + r = a_1 + (n-1) \cdot r + r$$

O que implica:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1) \cdot r + r = a_1 + n \cdot r$$

Isto mostra que a fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ é verdadeira para $n + 1$, portanto, ela é verdadeira também para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notação:

- a_1 é o primeiro termo
- r é a razão
- n é a ordem do termo
- a_n é o termo geral.

A Soma dos n primeiros termos de uma (P.A) é dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}} \tag{1.3}$$

A demonstração desta fórmula segue também por indução sobre n.

Para uma melhor compreensão e entendimento das fórmulas (1.2) e (1.3) faremos dois exemplos:

Exemplo 1.5.1. *Achar o número de múltiplos de 5 compreendidos entre 21 e 623.*

Solução:
Sabemos que a seqüencia é (25; 30; 35; 40;. . . ; 620) logo:

- $a_1 = 25$
- $r = 5$
- $n = ?$
- $a_n = 620$

Aplicando a equação (1.2) da fórmula do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow 620 = 25 + (n-1).5$$

$$620 = 25 + 5n - 5 \Rightarrow 600 = 5n \Rightarrow n = 120$$

Portanto temos 120 múltiplos de 5 entre 21 e 623.

Exemplo 1.5.2. *Determine a soma dos 30 primeiros termos da P.A. (2; 5; 8; . . .).*

Solução:

- $a_1 = 2$
- $r = 3$
- $n = 30$

Calculamos inicialmente a_{30}, usando (1.2), e após calculamos S_{30}, usando (1.3).

$$a_{30} = a_1 + 29 \cdot r \Rightarrow a_{30} = 2 + (29) \cdot 3 = 2 + 87 \therefore a_{30} = 89$$

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} \Rightarrow \frac{(2 + 89) \cdot 30}{2} = 1365 \therefore S_{30} = 1365$$

.

1.5.2 Progressão Geométrica

Entende-se por Progressão Geométrica (P.G.) toda seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior com um numero fixo (q) chamado razão da progressão.

Fórmula do termo geral de uma P.G.

Por exemplo, a seqüência (3; 6; 12; 24; 48; 96) é uma PG finita de razão (q= 2).
Se uma PG tem n termos $n \geq 2$ com $n \in$ N e razão q, cujo primeiro termo é denotado por a_1, então a PG será expressa por :

$$\{a_1;\ a_1 \cdot q;\ a_1 \cdot q^2;\ a_1 \cdot q^3; \ldots;\ a_1 \cdot q^{n-1}\}$$

Nesse caso, o termo geral da P.G. é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \tag{1.4}$$

Vamos provar a validade de (1.4) por indução sobre n.

Primeiro verificamos a validade da fórmula (1.4) para n = 1, pois

$$a_1 = a_1.$$

Suponhamos que a fórmula (1.4) seja válida para algum n e vamos provar que também é válida para $n + 1$.
Multiplicando por q os dois lados da equação (1.4);

$$a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q\ ,$$

Implicando que:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^n,$$

O que mostra que a fórmula $a_n = a_1.q^{n-1}$, é verdadeira para $n + 1$, portanto ela é verdadeira também para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notação:

- a_1 é o primeiro termo
- q é a razão
- n é a ordem do termo
- a_n é o termo geral.

Soma dos n primeiros termos de uma P.G. finita

Para obtermos a soma dos n primeiros termos de uma PG usamos a Fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \text{ para } q \neq 1} \tag{1.5}$$

No caso de uma P.G. com razão igual a 1, como por exemplo $(2, 2, 2, 2, 2)$, essa fórmula não funciona, pois o denominador seria zero. Assim sendo, a soma é igual ao número de termos multiplicado pelo 1º termo:

$$S_n = n \cdot a_1$$

Vamos demonstrar que a fórmula (1.5) representa a expressão matemática para determinar a soma dos n primeiros termos de uma P.G com para $q \neq 1$.

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Utilizando o método da indução temos: para $n = 1$

$$S_1 = a_1$$

Supondo que para algum n; a fórmula $S_n = \dfrac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$ seja válida. vamos provar que ela também é válida para $n + 1$. A soma de $S_{(n+1)}$ será a soma de todos os termos até n ou seja S_n, mais o termo $a_1 \cdot q^n$, obtendo assim

$$S_{(n+1)} = S_n + a_1 \cdot q^n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} + a_1 \cdot q^n$$

Colocando o fator a_1 em evidência e somando os termos internos no segundo lado da igualdade:

$$S_{(n+1)} = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} + a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot \left[\frac{(q^n - 1) + q^n \cdot (q - 1)}{q - 1}\right]$$

$$S_{(n+1)} = a_1 \cdot \left[\frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1}\right]$$

Logo:

$$S_{(n+1)} = a_1 \cdot \left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right]$$

O que mostra que a fórmula $S_n = \dfrac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$, é verdadeira para $n + 1$, portanto ela é verdadeira também para todo $n \in \mathbb{N}$.

Soma dos termos de uma P.G. infinita

Se considerarmos uma P.G. com a razão q sendo um número entre -1 e 1, ou seja, $-1 < q < 1$, pode-se determinar a fórmula do limite da soma dos infinitos termos de uma PG, mediante condições de existências. Acontece que para $-1 < q < 1$, à medida que o número de elementos n da P.G. aumenta indefinidamente (tende ao infinito), a expressão q^n se aproxima muito de zero (tende a zero). Dessa forma,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Então temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-a_1}{q-1}$$

Que pode ser reescrita como:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{1.6}$$

A condição $-1 < q < 1$ é necessária para a convergência da sequência, mas se $a_1 = 0$ esta condição se torna desnecessária.
Mas, se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência $(S_1, S_2, S_3, \ldots)$ não converge e se torna impossível calcular a soma dos termos desta P.G.

Para uma melhor compreensão e entendimento vamos ilustrar estas situações com os seguintes exemplos:

Exemplo 1.5.3. *Determine o oitavo termo da P.G. (2, 8, 32, 128, . . .)*

Solução:

temos que $a_1 = 2$; $q = 4$ e $n = 8$

Usando a equação (1.4) da Fórmula do termo geral de uma P.G.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

disto:

$$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = 2 \cdot (4^7) = 2 \cdot (16384) = 32768$$

Exemplo 1.5.4. *Dada a progressão geométrica* $(1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \ldots)$, *Calcular a soma dos seus 6 primeiros termos.*

Solução:
Dados: $a_1 = 1$; $q = 3$ e $n = 6$
Sabemos, de (1.5) que

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$$

$$S_6 = \frac{1 \cdot (3^6 - 1)}{3-1} = \frac{1 \cdot (729 - 1)}{2} = \frac{(728)}{2} = 364 \therefore S_6 = 364$$

Exemplo 1.5.5. *Determine a soma dos infinitos termos da progressão geométrica*

$$(25,\ 5,\ 1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \ldots)$$

Solução:
Dados: $a_1 = 25; \quad q = \dfrac{1}{5}$
Da equação (1.6)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{1-\dfrac{1}{5}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{25}{\dfrac{4}{5}} \Rightarrow 25 \cdot \frac{5}{4} = 31,25$$

1.6 O Valor do Dinheiro no Tempo

O conceito do valor do dinheiro no tempo surge da relação entre juros e tempo, porque o dinheiro pode ser remunerado por uma certa taxa de juros num investimento, por um período de tempo, sendo importante o reconhecimento de que uma unidade monetária recebida no futuro não tem o mesmo valor que uma unidade monetária disponível no presente. É importante chamar atenção que a variação do dinheiro ao longo do tempo exerce um papel fundamental na Matemática Financeira. (LIMA)[9] Enfatiza que

> *Não se pode comparar quantias em datas diferentes, mas apenas aquelas que se referem à mesma época. Se o valor atual é representado por **A**, o valor futuro **F**, depois de **n** períodos de aplicação a uma taxa **i**, é dado por:*
>
> $$F = A(1+i)^n. \tag{1.7}$$

Para um melhor entendimento e praticidade (LIMA)[9], estrategicamente, faz as seguintes relações:

- Para obter valor futuro **F**, basta **multiplicar** o valor atual **A** por $(1+i)^n$.
- Para obter o valor atual **A**, basta **dividir** o valor futuro **F** por $(1+i)^n$.

Estas relações estratégias sugeridas por (LIMA)[9] ficam bem caracterizadas nas Figuras (1.5) e (1.8) mostrando a variação do dinheiro com o tempo ou períodos de aplicação.

A figura (1.5) mostra a variação da quantia de R$100,00 após n períodos com uma taxa $i = 10\%$ por período, onde cada valor poderá ser determinado pela equação (1.8).

$$F_n = A(1+i)^n = 100.(1,1)^n. \tag{1.8}$$

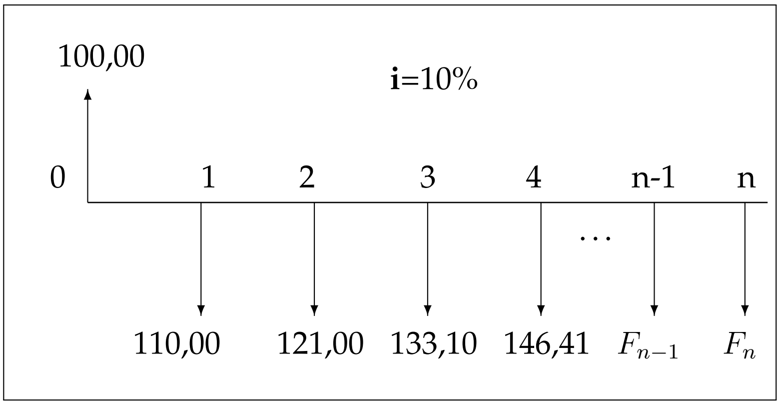

Figura 1.5: Linha indicando a variação R$ 100,00 com o tempo

1.6.1 O que se entende por juros?

O que se entende por juros? Supondo que uma pessoa deseje comprar uma geladeira e não disponha de dinheiro suficiente para pagamento à vista. Nessas condições, ela pode efetuar a compra a prazo ou tentar um empréstimo em um banco. Em qualquer um dos casos, a pessoa geralmente paga uma quantia além do preço da geladeira, sob o título de "juros". O valor desses juros é justificado pelo prazo obtido para pagamento do dinheiro emprestado.

Há outras situações em que aparecem juros, se uma pessoa dispõe de uma importância em dinheiro, ela pode aplicá-la em uma caderneta de poupança ou em algum outro investimento. Ao fim de certo tempo, ela receberá do banco a importância aplicada acrescida de um valor referente aos juros da aplicação. Normalmente, quando se realiza uma operação desse tipo, fica estabelecida uma taxa de juros por um período (dia, mês, ano) que deverá incidir sobre o valor da transação chamada de capital.

1.7 Juros Simples

1.7.1 Definição de Taxa de Juros

Taxa de juros, ou taxa de crescimento do capital, é a taxa de lucratividade recebida num investimento. De uma forma geral, é apresentada em bases anuais, podendo também ser utilizada em bases semestrais, trimestrais, mensais ou diárias, e representa o percentual de ganho realizado na aplicação do capital em algum empreendimento. A relação de taxa de juros e o período devem ser compatíveis e coerentes, caso contrário deve-se fazer conversões de unidades. A taxa de juros, convencionalmente representada pela letra **(i)** , pode ser também apresentada sob a forma unitária, ou seja 0,15 significa que para cada unidade de capital são pagos quinze centésimos de unidades de juros. Esta é a forma utilizada em todas as expressões de cálculo. Por exemplo, uma taxa de juros de 15% ao (ano, semestre, bimestre, mês) indica que para cada unidade monetária de R$ aplicada, um adicional de R$ 0,15 deve ser retornado após um (ano, semestre, bimestre, mês), como remuneração pelo uso daquele capital.

1.7.2 Taxas de juros

Taxa efetiva ou real

É aquela em que a unidade de referência do seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.
Exemplo:

- 3% a.m. capitalizados mensalmente.
- 4% a.d. capitalizados diariamente.

Taxa Nominal

É aquela em que não há coincidência entre unidade de referência do seu tempo com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. A taxa nominal em geral é fornecida em termos anuais e os períodos são mensais.
Exemplo:

- 12% a.a. capitalizados mensalmente. Isso significa uma taxa efetiva de 1% a.m.
- 24% ao semestre capitalizados mensalmente correspondem a uma taxa efetiva de 4% a.m.

1.7.3 Definição de Juros Simples e Fórmula

No regime de capitalização a juros simples, somente o capital inicial, também conhecido como principal ou Capital que representaremos por **C**, rende juros. Pode ser obtido através dos seguintes passos com base em (HAZZAN)[8]:

Juros após 1 período: $J_1 = C.i$
Juros após 2 períodos: $J_2 = C.i + C.i = (C.i).2$
Juros após 3 períodos: $J_3 = C.i + C.i + C.i = (C.i).3$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Juros após (n) períodos: $J_n = \underbrace{C.i + C.i + C.i + \ldots + C.i}_{n \ \ vezes} = (C.i).n$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{J{=}C.i.n}} \tag{1.9}$$

Vamos provar sua validade por indução para todo n natural.
Primeiro verificamos a validade da fórmula para n = 1

Suponhamos que a fórmula (1.9) seja válida para algum n e vamos provar que também é válida para $n+1$.
Queremos provar que $J(n+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$J_{n+1} = C \cdot i \cdot (n+1)$$

Tomando a igualdade

$$J_n = C \cdot i \cdot n.$$

e somando a ambos os membros $(C \cdot i)$ então temos:

$$J_n + C \cdot i = C \cdot i \cdot n + C \cdot i$$

Colocando ($C \cdot i$) em evidencia teremos:

$$J_n + C \cdot i = C \cdot i \cdot (n+1)$$

Mas pela conjectura vista anteriormente, temos Então:

$$J_{n+1} = C \cdot \ i \cdot (n+1)$$

Isso mostra que $J(n+1)$ é verdadeira toda vez que $J(n)$ é verdadeira. Portanto, a fórmula:

$$J_n = C \cdot i \cdot n$$

é válida para todo número natural $n.$

Exemplo 1.7.1. *Um capital de R\$ 12.000,00 foi aplicado por 3 meses, a juros simples. Calcule os juros auferidos no final deste período à taxa de 4 % a.m.*

Solução: *Sabemos que a taxa i=4% a.m.= $0,04$ a.m. e o tempo n=3 meses, são compatíveis pois a taxa de juros deverá estar na mesma unidade de tempo do período de aplicação. Logo teremos:*

J_3***=C.i.n***

J_3***=12000.(0,04).(3)*** $\Rightarrow J_3 = R\$ \ 1.440,00$

1.7.4 Cálculo do Montante de Juros Simples

Para determinarmos o Montante (M) de uma operação, considere um capital (C), aplicado a juros simples e à taxa (i), durante (n) períodos de tempo (períodos referentes à taxa). O Montante é o resultado da soma do Capital (C) com os Juros. Segundo (HAZZAN)[8], após a dedução da fórmula (1.9), dos juros simples, a fórmula do Montante (M) é dada por:

$$M = C + J \Rightarrow M = C + C \cdot i \cdot n \Rightarrow \boxed{M = C \cdot (1 + i \cdot n)} \tag{1.10}$$

Para um melhor entendimento do exposto acima, vamos exemplificar com uma situação problema:

Exemplo 1.7.2. *Consideremos uma situação* ***hipotética*** *que, em 2013, uma aplicação financeira tenha sido de 20% em cada um dos 5 primeiros meses do ano no regime de* ***juros simples****. Se uma pessoa aplicou R$100,00 em 01/01/2013, poderíamos montar uma planilha (1.1) para obter a quantia em R$ acumulada em 01/06/2013.*

Tempo	Data	Valor Principal	Juros	Montante $M = C + J$
0	01/01/2013	100,00	0	100,00
1	01/02/2013	100,00	20,00	120,00
2	01/03/2013	100,00	20,00	140,00
3	01/04/2013	100,00	20,00	160,00
4	01/05/2013	100,00	20,00	180,00
5	01/06/2013	100,00	20,00	200,00

Tabela 1.1: Capitalização de Juros simples

Taxas Proporcionais

Duas ou mais taxas são proporcionais quando ao serem aplicadas, sobre um mesmo Principal durante um mesmo prazo, produzirem um mesmo Montante M no regime de Juros Simples.

Exemplo: 12% a.a. = 6% a.s. = 3% a.t. =1% a.m. pois:

$$M = P(1 + i_a) = P(1 + i_m.12) = P(1 + i_t.4) = P(1 + i_d.360).$$

Onde (i_a), (i_m), (i_t), (i_d), representam respectivamente, as taxas ao ano, mês, trimestre e dia.

Exemplo 1.7.3. *Uma taxa de juros simples de 4% a.m. é equivalente a uma taxa de juros simples de 48% a.a?*

Supondo n igual a dois anos, capital $C = R\$100,00$ e taxa i igual a 4% ao mês. Temos:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

$$M = 100 \cdot (1 + 0,04 \cdot 24)$$

$$M = 100 \cdot (1,96)$$

$$M = R\$\ 196,00$$

Agora, vamos calcular o montante sendo a taxa i igual a 48% ao ano por dois anos:

$$M = 100 \cdot (1 + 0,48 \cdot 2)$$

$$M = 100 \cdot (1 + 0,96)$$

$$M = 100 \cdot (1,96)$$

$$M = R\$\ 196,00$$

Logo, a taxa de 4% ao mês é equivalente à taxa de 48% ao ano.

1.7.5 A Fábula de Morgado: O Contexto Ideal Para o Ensino dos Juros Simples.

Sendo de conhecimento ao menos de todos que trabalham com Matemática, que há dois tipos de juros: os juros simples e os juros compostos. Sobre o primeiro tipo: juros simples, apresentaremos as considerações de parte de uma aula dada no PAPMEM[1] pelo professor Augusto César Morgado, falecido em 2006, aos 62 anos. Nesta aula ele fala sobre o contexto ideal para se ensinar juros simples aos alunos. O texto a seguir transcrito quase exatamente nas palavras do professor MORGADO em uma aula que ocorreu em Julho de 2002 e foi retransmitida no PAPMEM de 2010 em homenagem ao professor (MORGADO)[2] .

[1]PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio)

> Havia um reino encantado e nesse reino havia um velho cheio da grana e um príncipe muito elegante, muito bonito e pobre. O príncipe pediu um empréstimo de 100 reais ao velho. Eles combinaram juros de 10% ao mês. Passado um mês o príncipe foi até o velho que lhe disse 'muito bem, veio me pagar os 110 reais?' E o príncipe respondeu 'Não! Não posso pagar os 110 reais porque não tenho dinheiro. Nesse exato momento, quando o velho ia ter um ataque nervoso, surge uma fada encantada. A fada joga um pouco de pó de pirlimpimpim no velho. Então o velho diz para o príncipe: 'tudo bem príncipe, nós prorrogamos o empréstimo mais um mês, nas mesmas condições: juros de dez por cento. Mas eu estou me sentindo muito bondoso e não vou cobrar os juros de 10% sobre os 110 que o senhor me deve agora, vou cobrar os juros só sobre os 100 que o senhor me devia no mês passado'. O príncipe acha ótimo.
> Passa mais um mês, o príncipe novamente vai até o velho. O velho está lá esfregando as mãos: 'veio me pagar hoje os 120 reais que me deve?' O príncipe diz: 'Não! Não vim, porque não tenho dinheiro'. Quando o velho ia ter novamente um ataque, a fada encantada surge outra vez e joga pó de pirlimpimpim no velho. A fada trabalha com doses crescentes de pó de pirlimpimpim. Ela agora coloca uma dose dupla de pó pirlimpimpim no velho, pois se ela colocasse uma dose simples, o velho provavelmente proporia que os juros corressem não sobre os 120 reais devidos atualmente, mas sim sobre os 110 reais passados. Contudo, como a dose é dupla, o velho propõe que os juros corram só sobre os 100 reais iniciais. O príncipe acha ótimo. Quando o príncipe voltou depois de um mês, a sua dívida era de 130 reais, mas daí o príncipe havia ganhado na loteria. Pagou o velho e foram felizes para sempre."

O professor MORGADO conclui:

> O contexto adequado a juros simples é exatamente esse: conto de fadas. Na vida real isso não existe. Professor, ao ensinar apenas juros simples é melhor não ensinar, assim pelo menos você não cria no aluno a falsa impressão de que ele entende daquilo. Desnecessário é perguntar se em algum problema de vida real os juros são compostos ou simples. Os juros são compostos! Que os professores sejam então cautelosos no ensino da 'matemática financeira' e que deixem claro aos alunos a inutilidade prática dos juros simples.

1.8 Juros compostos

Na concepção de (HAZZAN)[8], no regime de capitalização a juros compostos, os juros gerados a cada período são agregados ao montante do período anterior, passando esse novo montante, a produzir juros no período seguinte.

Considere um capital (C), aplicado a juros Compostos e à taxa (i), durante (n) períodos de tempo (períodos referentes à taxa). O Montante é o resultado da soma do Capital (C) com os Juros. Temos C o capital inicial

Montante, após 1 período, $n = 1 \Rightarrow M_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1+i)^1$;

Montante, após 2 períodos, $n = 2 \Rightarrow M_2 = M_1 + M_1.i = M_1 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^1 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2$;

Montante, após 3 períodos, $n = 3 \Rightarrow M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^3$;

O raciocínio oferece elementos para conjecturarmos que a expressão que dá o valor é dado pela fórmula após (n) períodos :

$$\boxed{M_n = C \cdot (1+i)^n} \tag{1.11}$$

Vamos provar sua validade por indução para todo n natural tal que $n \geq 1$.

Primeiro verificamos a validade da fórmula para n = 1

$$M_1 = C \cdot (1+i)^1 \ \Rightarrow M_1 = C \cdot (1+i)$$

Suponhamos que a fórmula (1.11) seja válida para algum n e vamos provar que também é válida para $n+1$. Suponha agora que, para algum n natural, $M(n)$ seja verdadeira, ou seja,

$$M_n = C \cdot (1+i)^n$$

Queremos provar que $M(n+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$M_{n+1} = C \cdot (1+i)^{n+1}$$

Tomando a igualdade

$$M_n = C \cdot (1+i)^n .$$

e multiplicando ambos os membros por $(1+i)$ teremos:

$$M_n \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)$$

Mas pela conjectura vista anteriormente, temos que

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2 \cdot (1+i) \Rightarrow M_n = M_{n-1} \cdot (1+i).$$

Então:

$$M_{n+1} = C \cdot (1+i)^{n+1}$$

Isso mostra que $M(n+1)$ é verdadeira toda vez que $M(n)$ é verdadeira. Portanto, a fórmula:

$$M_n = C \cdot (1+i)^n$$

é válida para todo número natural n.

O fator $(1+i)^n$, é chamado *Fator de acumulação de capital*, ou valor que atualiza o capital com o decorrer do tempo, este valor pode ser calculado diretamente através de Calculadoras Financeiras.
As *Calculadoras Financeiras HP 12C*, Figura(1.6), permitem calcular diretamente

quaisquer uma das quatro variáveis da fórmula, dados os valores das outras três:

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathrm{n}} \; ,$$

.

A terminologia utilizada é a seguinte:

- FV (do inglês *future value)* Representa o montante M.
- PV (do inglês *present value)* Representa o capital C.
- (i) Representa a taxa de juros.
- (n) Representa o números de períodos.

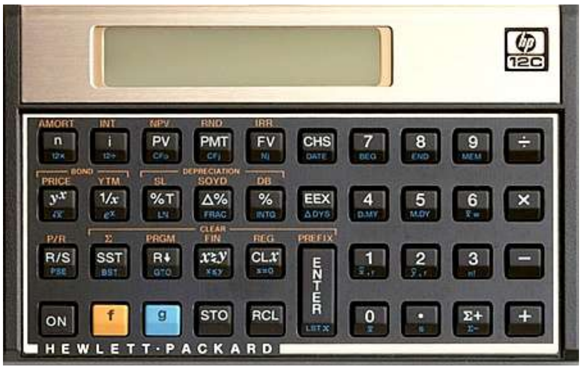

Figura 1.6: Calculadora Financeira HP 12C

Exemplo 1.8.1. *Consideremos uma situação hipotética que, em 2013 uma aplicação financeira tenha sido de 20% em cada um dos 5 primeiros meses do ano no regime de* ***juros compostos****. Se uma pessoa aplicou R\$100,00 em 01/01/2013, poderíamos montar uma tabela para obter a quantia em R\$ acumulada em 01/06/2013. Ver (Tabela 1.2)*

Tempo	Data	Valor Principal	Juros	$M = C.(1+i)^n$
0	01/01/2013	100,00	0	100,00
1	01/02/2013	100,00	20,00	120,00
2	01/03/2013	120,00	24,00	144,00
3	01/04/2013	144,00	28,80	172,80
4	01/05/2013	172,80	34,56	207,36
5	01/06/2013	207,36	41,47	248,83

Tabela 1.2: Capitalização de Juros Compostos

Pode-se analisar a planilha ou (Tabela 1.3) onde se faz um demonstrativo e um comparativo dos dois sistemas de capitalização: o sistema de capitalização simples e o sistema de capitalização composto, ambos com o mesmo capital inicial e a mesma taxa de juros e também os mesmos períodos. Então, é possível perceber que após o primeiro período da aplicação, no sistema de capitalização composto o montante cresce em progressão geométrica, enquanto o sistema de capitalização simples os juros são constantes e o montante cresce em progressão aritmética.

Tempo	Principal	$M = C.(1 + i.n)$	Principal	J.Comp.	$\mathbf{M = C.(1 + i)^n}$
0	100,00	100,00	100,00	0,00	100,00
1	100,00	120,00	100,00	20,00	120,00
2	100,00	140,00	120,00	24,00	144,00
3	100,00	160,00	144,00	28,80	172,80
4	100,00	180,00	172,80	34,56	207,36
5	100,00	200,00	207,36	41,47	248,83

Tabela 1.3: Comparativo dos sistemas de capitalização simples e composto

A partir das definições e exemplos produzidos acima, pode-se perceber os resultados de uma mesma operação sob o regime de juros simples, que evolui de forma linear, e sob o regime de juros compostos, que segue a forma exponencial. Isto pode ficar bem evidenciado na Figura (1.7).

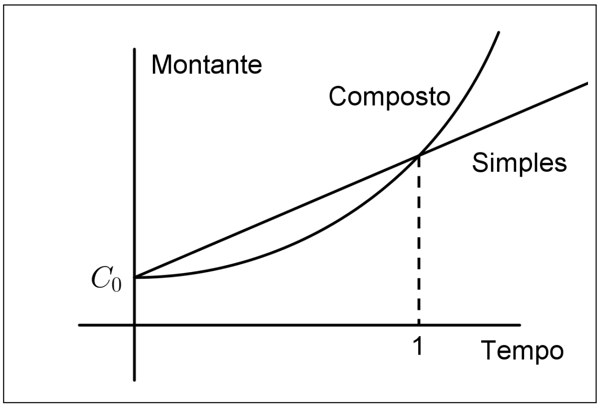

Figura 1.7: Capitalizações simples e composta.

São dois os regimes de capitalização de juros mais conhecidos: Regime de Juros Simples e Regime de Juros Compostos. Porem temos um outro menos conhecido e menos utilizado que os dois citados anteriormente, que é o regime de capitalização contínua. O primeiro sempre é calculado sobre o capital inicial emprestado ou aplicado, tendo um crescimento linear. O segundo é o Regime de Juros Compostos: os juros de cada intervalo de tempo é calculado a partir do saldo no início de correspondente intervalo e sua acumulação se dá de forma exponencial; ou seja, os juro de cada intervalo de tempo é incorporado ao capital inicial e passa a render juros,(ANATOCISMO)[2] também chamados de juros sobre juros.

[2]ANATOCISMO: (significa Juros sobre Juros, que na linguagem comum representa Juros Compostos.)

Os juros simples tem para períodos maiores que 1, crescimento menor que os juros compostos, como fica bem caracterizado no gráfico da Figura(1.7). Porém na prática o mercado financeiro trabalha com o Regime de Juros Compostos, como fica bem descrito e caracterizado no último parágrafo da (subseção 1.7.5), conhecida como a Fábula de Morgado. O regime de capitalização contínua será abordado na seção (1.9) .

Taxas Equivalentes no Regime de Capitalização Composta

No regime de Juros Compostos duas ou mais taxas são proporcionais quando ao serem aplicadas sobre um mesmo Principal durante um mesmo prazo produzirem um mesmo Montante M.

$$M = P(1 + i_a) = P(1 + i_m)^{12} = P(1 + i_t)^4 = P(1 + i_d)^{360}$$

Onde (i_a), (i_m), (i_t), (i_d), representam respectivamente, as taxas ao ano, mês, trimestre e dia. Por exemplo:
Uma taxa de 2% a.m. equivale a uma taxa de 6,12% ao trimestre. pois:

$$M = P(1 + i_t) = P(1 + i_m)^3$$
$$M = P(1 + i_t) = P(1 + 0,02)^3$$
$$(1 + i_t) = (1,02)^3$$
$$1 + i_t = 1,0612$$
$$i_t = 1,0612 - 1 = 0,0612 = 6,12\%\, a.t.$$

Vejamos uma outra situação:

Exemplo 1.8.2. *Uma taxa de juros compostos de 4% a.m. é equivalente a uma taxa de juros compostos de 48% a.a.?*

Supondo n igual a dois anos, capital $C = R\$100,00$ e taxa i igual a 4% ao mês.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M = 100 \cdot (1 + 0,04)^{24}$$
$$M = 100 \cdot (1,04)^{24}$$
$$M = 100 \cdot (2,5633)$$
$$M = R\$\ 256,33$$

Agora com taxa de 48% ao ano:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M = 100 \cdot (1 + 0,48)^2$$

$$M = 100 \cdot (1,48)^2$$
$$M = 100 \cdot (2,1904)$$
$$M = R\$\ 219,04$$

Logo, uma taxa de juros compostos de 4% a.m. não é equivalente a uma taxa de juros compostos de 48% a.a. , pois não transforma um mesmo capital C (R$ 100,00) em um mesmo montante M em um mesmo prazo (2 anos).

1.9 Capitalização Contínua

Sob um regime de capitalização contínua, o juro recebido ou pago sobre determinado montante de dinheiro aplicado é tratado da mesma forma que em um regime de juros composto. Na capitalização contínua, admite-se que os incrementos da variável (tempo) são infinitesimais, ou seja a capitalização é instantânea

Consideremos um capital de R$ 1.000,00, aplicado à taxa de 12% ao ano, durante um ano, e calculemos os montantes nas seguintes situações:

- Capitalização anual.

  Taxa efetiva: 12% a.a. = 0,12 a.a.
  $$M = 1.000 \cdot (1 + 0,12)^1 = 1.120$$

- Capitalização semestral.

  Taxa efetiva: $\frac{12\%}{2} a.s. = \frac{0,12}{2}$ a.s.
  $$M = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^2 = 1.123,60$$

- Capitalização trimestral.

  Taxa efetiva: $\frac{12\%}{4} a.t. = \frac{0,12}{4}$ a.t.
  $$M = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 = 1.125,51$$

- Capitalização mensal.

  Taxa efetiva: $\frac{12\%}{12} a.m. = \frac{0,12}{12}$ a.m.
  $$M = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} = 1.126,83$$

- Capitalização diária.

  Taxa efetiva: $\frac{12\%}{360}a.d. = \frac{0,12}{360}$ a.d.

$$M = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{360}\right)^{360} = 1.127,47$$

- Capitalização horária.

  Taxa efetiva: $\frac{12\%}{8.640}a.h. = \frac{0,12}{8.640}$ a.h.

$$M = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{8640}\right)^{8640} = 1.127,50$$

Segundo (HAZZAN)[8], Poderíamos pensar em capitalização por minuto, segundo, etc. A medida que diminui o período de capitalização, aumenta o número de capitalização por ano.

Genericamente, se houver k capitalizações ao longo do ano, a fórmula do montante será:

$$M = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{k}$$

Pode-se pensar que a medida que cresce k, o montante cresce indefinidamente. Entretanto, o Cálculo Diferencial e Integral nos ensina que o limite da função

$$f(x) = \left(1 + \frac{m}{x}\right)^{x}$$

quando x tende para infinito é precisamente e^m onde e é o número de Euler e vale aproximadamente $2,718282$, isto é:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^{x} = e^m$$

Confrontando com o nosso exemplo, como $M = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{k}$, podemos verificar o que acontece com M quando k tende a infinito. Temos,

$$\lim_{k\to\infty} 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{k} = 1.000 \cdot e^{0,12}$$

ou seja, quando k tende a infinito, o montante tende ao número

$$1.000 \cdot e^{0,12} = 1.127,50$$

Generalizando, podemos dizer que se um capital C é aplicado a uma taxa nominal i num certo período, e o número de capitalizações contínuas tende a infinito, o montante naquele período é dado por

$$\boxed{M = C \cdot e^{i}} \tag{1.12}$$

A fórmula (1.12) é chamada de *montante com capitalização contínua.* Caso tenhamos uma taxa i (por exemplo, anual) e o período de aplicação não seja 1, mas sim n, é possivel ver que o montante será dado por

$$\boxed{M = C \cdot e^{i \cdot n}} \tag{1.13}$$

de fato sendo k o número de capitalizações por período da taxa, tem-se

$$M = C \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k} \right]^{n} \Rightarrow M = C \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n \cdot k}$$

e

$$\lim_{k \to \infty} M = C \cdot e^{i \cdot n}$$

No regime de capitalização contínua, os valores monetários fluem contínua e uniformemente através do tempo, segundo uma função Matemática. Ela é muito usada por exemplo: no faturamento de um supermercado, na formação do custo de fabricação do processamento fabril, na formação de depreciação de um equipamento, na avaliação de projetos de investimentos, geração de custos e lucros da empresa e outras situações em que os fluxos monetários encontram-se distribuídos uniformemente no tempo. Na prática, muitas situações exigem o uso da capitalização contínua.

Exemplo 1.9.1. *Um capital de R\$ 5.000,00 é aplicado à taxa de 10% a.s., durante 2 anos, com capitalização contínua. Qual o valor do montante?*

Solução: temos

- $C = 5.000,00$
- $i = 10\% a.s.$
- $n = 4$ anos

Logo, usando a fórmula (1.13)

$$M = C \cdot e^{i \cdot n}$$
$$M = 5.000 \cdot e^{0,1 \cdot 4}$$
$$M = 5.000 \cdot e^{0,4}$$
$$M = R\$\ 7.459,12$$

Exemplo 1.9.2. *Qual a taxa anual que, com capitalização anual, seja equivalente a 10% a.a., com capitalização contínua?*

Solução: chamando de i a taxa anual equivalente, devemos ter:

$$C(1+i)^1 = C \cdot e^{0,1}$$

$$1+i = e^{0,1}$$

$$i = e^{0,1} - 1 = 0,10517$$

Logo, a taxa equivalente i será de $10,517\%$ $a.a.$

Exemplo 1.9.3. *Uma plantação de eucaliptos para fabricação de celulose tem 8.000m^3 de madeira. O preço atual da madeira é de R\$20,00/m^3 e a taxa contínua de crescimento das árvores é de 20% ao ano.*

a) Calcular o valor da plantação após quatro anos;

b) Determinar em que prazo dobra o valor da plantação.

Solução: temos

- $C = 8.000m^3 \cdot R\$\,20,00$
- $i = 20\% a.a.$
- $n = 4$
- $M =?$

Como a capitalização é continua usaremos a fórmula (1.12)

$$M = C \cdot e^{i \cdot n}$$

$$M = 8.000 \cdot 20,00 \cdot e^{(0,2)\cdot(4)}$$

$$M = 160.000,00 \cdot e^{(0,8)}$$

$$M = 160.000,00 \cdot 2,225540928$$

$$M = R\$\ 356.086,54$$

O valor da plantação após quatro anos será de R\$ 356.086,54

Para determinar o prazo em que o valor da plantação dobrará, teremos a razão $M = 2C$.

$$M = C \cdot e^{i \cdot n}$$

$$2C = C \cdot e^{0,20 \cdot n}$$

$$2 = 1 \cdot e^{0,20 \cdot n}$$

$$2 = e^{0,20 \cdot n}$$

Aplicando a propriedade dos logarítmos $\ln(x) = e^x$, temos:

$$\ln 2 = \ln e^{0,20 \cdot n}$$

$$0,6931 = 0,20 \cdot n$$

$$n = \frac{0,6931}{2} = 3,47$$

O valor da plantação irá dobrar em 3,47 anos ou 3,5 anos aproximadamente.

1.10 Série Uniforme de Pagamentos

Pode-se definir uma série uniforme de pagamentos como uma sucessão de recebimentos, desembolsos ou prestações, de mesmo valor, representados por P, divididos regularmente num período de tempo. O somatório do valor acumulado de vários pagamentos, o Montante, é calculado pela expressão representada pela equação (1.14)

Deduzindo esta fórmula: Inicialmente cosideremos uma série uniforme postecipada com n termos, representada no fluxo de caixa pela Figura(1.8). O valor presente ou atual A dessa série, calculado um período antes do primeiro termo, a uma taxa de juros compostos i, é dado por:

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n}$$

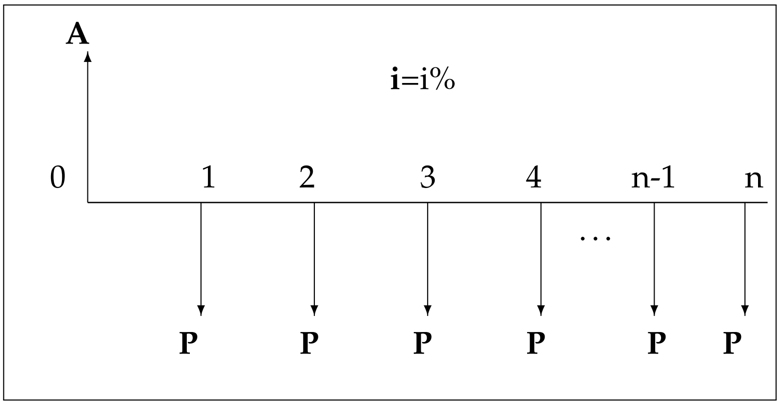

Figura 1.8: Diagrama do Valor Presente de uma Série Uniforme

Observa-se que os termos formados pelas parcelas no início do período formam uma progressão geométrica, cuja razão é $q = \frac{1}{1+i}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{1}{1+i}$

Escrevendo P em evidência no segundo membro temos:

$$A = P \cdot \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Portanto, usando a fórmula (1.5) para determinar a soma dos termos de uma progressão geométrica limitada, de razão $q = \dfrac{1}{1+i}$ e primeiro termo $a_1 = \dfrac{1}{1+i}$ teremos:

$$A = P \cdot \left[\frac{1}{1+i} \cdot \left(\frac{\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1}{\dfrac{1}{1+i} - 1} \right) \right]$$

$$A = P \cdot \left[\frac{1}{1+i} \cdot \left(\frac{\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\dfrac{-i}{1+i}} \right) \right]$$

$$A = P \cdot \left[\left(\frac{\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\dfrac{-i}{1}} \right) \right]$$

$$A = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]$$

Dividindo-se o numerador e o denominador por $(1+i)^n$ a expressão ficará igual a:

$$\boxed{A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]} \tag{1.14}$$

Esta equação (1.14) determina o valor capaz de liquidar antecipadamente, e de uma só vez, um empréstimo ou financiamento, assumido de forma a ser pago em prestações uniformes e periódicas. Temos então o valor presente ou atual que representamos por A, a uma taxa de juros compostos i por um período n.

O valor futuro A_n dessa série, calculado na data do último termo, à mesma taxa de juros compostos, é dado por:

$$A_n = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Esta expressão se justifica quando multiplicamos o valor atual A pelo fator de atualização de capital $(1+i)^n$:

$$A_n = A \cdot (1+i)^n$$

$$A_n = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot (1+i)^n$$

Então obtém-se:

$$\boxed{A_n = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]} \qquad (1.15)$$

A Figura (1.8) ilustra estas situações e as expressões (1.14) e (1.15) determinam respectivamente o valor presente e o valor futuro.

1.10.1 Rendas Perpétuas

Se o número de termos de uma renda for ilimitado a renda terá a designação de Perpétua, ou então dizemos que se tratar de uma Perpetuidades, que aparecem com frequência em locações e aluguéis, esclarecidos na concepção de (LIMA)[9]

> ...Com efeito, quando se aluga um bem, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, digamos, mensal. Então, a série dos aluguéis constitui uma renda perpétua ou perpetuidade cujos termos são iguais ao valor do aluguel. O valor do imóvel deve ser igual ao valor da série de aluguéis.

Para obter o valor atual de uma renda perpétua, basta fazer n tender para infinito na fórmula (1.14)

$$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

O valor de uma perpetuidade de termos iguais a P, um termo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros,

$$\boxed{A = \frac{P}{i}} \qquad (1.16)$$

Exemplo 1.10.1. *Se o dinheiro vale 1% ao mês, por quanto deve ser alugado um imóvel que vale R$ 120.000,00?*

Solução: Temos os dados do problema:

- $A = R\$\ 120.000,00$
- $i = 1\%\, a.m.$

- $P = ?$

Um imóvel quando é alugado, é cedida a posse do mesmo em troca de de uma renda perpétua, então para determinar o valor do aluguel usaremos a equação (1.16):

$$A = \frac{P}{i}$$
$$P = A \cdot i$$
$$P = 120.000 \cdot 0,01$$
$$P = 1.200,00$$

O imóvel deverá ser alugado por R$ 1.200,00.

1.11 Os Financiamentos e Amortizações

Quando se contrai um empréstimo ou se recorre a um financiamento por exemplo de um carro ou um imóvel ou outro bem de valor, evidentemente, o valor recebido nesta operação, ou seja, o principal, terá que ser restituído à respectiva instituição financeira, acrescido da sua remuneração, que são os juros. As formas de devolução do principal mais juros são denominadas de Sistemas de Amortização.

1.11.1 Sistemas de Amortização

Um sistema de amortização é um processo pelo qual um capital emprestado (chamado principal e denotado por VP) é devolvido por meio de pagamentos periódicos (prestações do financiamento), segundo um planejamento, de tal forma que, ao término do prazo estipulado, o débito seja liquidado.

Os Sistemas de Amortização mais conhecidos e utilizados são:

- **Sistema de Amortização Constante (SAC)**: A Amortização da dívida é constante e igual em todos os períodos.
- **Sistema Francês ou (PRICE)**: Os pagamentos (prestações) são iguais.
- **Sistema de Amortização Misto (SAM):** Os pagamentos são as médias dos sistemas SAC e PRICE.
- **Sistema de Amortização Crescente (SACRE):** Atualmente utilizado pela Caixa Econômica Federal na concessão de financiamentos para a aquisição de terrenos e da casa própria.
- **Sistema Americano**: Pagamento no final com os juros calculados período a período.

- **Sistema Alemão**: Os juros são pagos antecipadamente com prestações iguais, exceto o primeiro pagamento que corresponde aos juros cobrados no momento da operação.

- **Sistema de Pagamento Único**: Um único pagamento no Final

O que tem em comum todos esses sistemas?
Resposta: Em todos eles cada pagamento (P) é a soma do valor amortizado (A) com os juros (J) do saldo devedor. Que representaremos por:

$$\boxed{\text{PAGAMENTO = AMORTIZAÇÃO + JUROS}}$$

$$\boxed{\text{P = A + J}}$$

1.11.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

O Sistema de Amortização Constante, bastante utilizado atualmente em financiamentos de imóveis, no sistema financeiro de habitação brasileiro, bem como em financiamentos de longos prazos. Caracteriza-se pelo fato que cada parcela da prestação referente à amortização tem o mesmo valor, As prestações do Sistema SAC são sucessivas e decrescentes em progressão aritmética, cujo valor de cada prestação é composto por uma parcela de juros e outra de amortização constante do capital.

Exemplo 1.11.1. *O Sr. Vitor Emanuel fez um empréstimo de R$ 30.000,00 pelo sistema SAC, a uma taxa de 4% a.m. e prazo de 5 meses. Calcular os valores das parcelas de juros e amortizações referentes a este empréstimo feito pelo Sr. Vitor Emanuel.*

RESOLUÇÃO:

- A prestação (P) igual à soma da amortização(A) e juros(J): $P = A + J$

- Cálculo da amortização constante: $A = 30.000,00/5 = R\$\ 6.000,00$

- Os juros no 1º mês usando a fórmula $J_1 = C.i.n$, sobre o saldo devedor: $J_1 = 30.000.(1).(0,04) = R\$\ 1.200,00$ (e de forma análoga calcula-se os juros dos períodos subsequentes. . .)

Fazendo a redistribuição desses valores em uma tabela, é notório o entendimento da evolução dos componentes em cada período. Ver (Tabela 1.4): Pode-se notar perfeitamente que neste sistema a amortização é constante, ao passo que os juros e as parcelas decrescem, ver (Figura 1.9)

MÊS	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO
0	30.000,00	-	-	-
1	24.000,00	6.000,00	1.200,00	7.200,00
2	18.000,00	6.000,00	960,00	6.960,00
3	12.000,00	6.000,00	720,00	6.720,00
4	6.000,00	6.000,00	480,00	6.480,00
5	0,0	6.000,00	240,00	6.240,00
Total	-	30.000,00	3.600,00	33.600,00

Tabela 1.4: Planilha de amortização sistema SAC

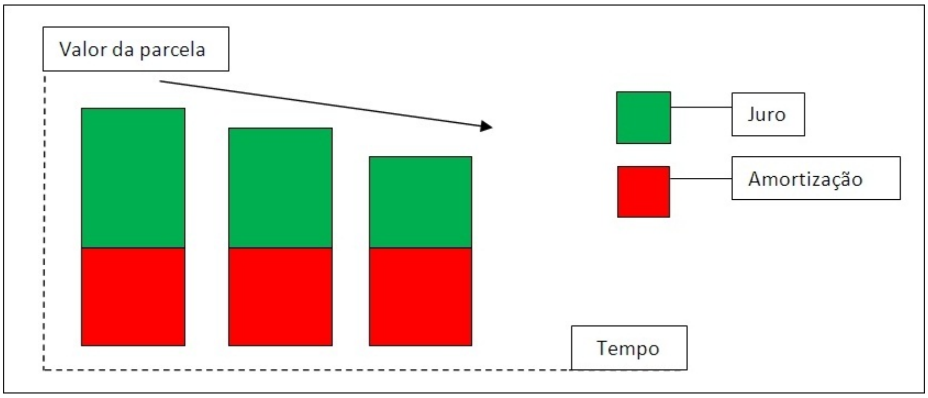

Figura 1.9: Juros e parcela decrescente e Amortização constante

1.11.3 Sistema Price de Amortização (Sistema Francês)

Este sistema também é conhecido como Sistema Price e é muito utilizado em todos os setores financeiros, principalmente nas compras a prazo de bens de consumo, através do crédito direto ao consumidor. No Sistema Price, as prestações são iguais e sucessivas, onde cada prestação é composta por duas parcelas: juros e amortização do capital; cujo cálculo baseia-se numa série uniforme de pagamentos. Diferentemente do SAC, em que o valor de cada prestação é calculado a partir dos valores da amortização e do juro, no SAF será calculado inicialmente o valor (constante) das prestações. A partir daí e dos valores calculados dos juros, serão obtidos os valores das parcelas de amortização.

Objetivando facilitar o entendimento vamos exemplificar com uma situação problema.

Exemplo 1.11.2. *Luís Felipe deseja comprar um carro popular e no momento não dispõe do dinheiro. Então Luís Felipe vai a uma instituição financeira e solicita uma concessão de um empréstimo no valor de R$ 30.000,00, pelo sistema PRICE para ser pago em 5 parcelas iguais, com vencimento da 1ª parcela em 30 dias e pagamentos periódicos mensais de amortização e juros de 4% a.m.*
Calcular os valores das parcelas de juros e amortizações referentes a este empréstimo.

SOLUÇÃO:

- A amortização é igual à subtração entre prestação e juros: $A = P - J$
- Cálculo do valor da prestação P e M é o montante do saldo devedor presentes na fórmula $P = M. \left[\dfrac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}\right] \Rightarrow$

  $\Rightarrow P = 30.000 \cdot [0,04 \cdot (1+0,04)^5]/[(1+0,04)^5 - 1] = R\$\ 6.737,35$
- Juros no 1º mês pela fórmula, sobre o saldo devedor: $J_1 = 30.000.(1).(0,04) = R\$\ 1.200,00$ (e de forma análoga calcula-se os juros dos períodos subsequentes ...)

Aqui mais uma vez fazendo a redistribuição desses valores em uma tabela ou (Planilha), percebe-se a evolução dos componentes em cada período. Ver (Tabela 1.5)

MÊS	SALDO DEVEDOR	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO
0	30.000,00	-	-	-
1	24.462,15	5.537,35	1.200,00	6.737,35
2	18.703,30	5.759,85	978,50	6.737,35
3	12.714,45	5.989,24	748,11	6.737,35
4	6.485,15	6.234,18	508,17	6.737,35
5	0,0	6.477,28	252,12	6.737,35
Total	-	30.000,00	3.686,75	33.686,75

Tabela 1.5: Planilha de amortização Sistema Price

1.11.4 Comparação entre os Sistemas de Amortizações: SAC e Price

Na comparação entre os dois sistemas de amortizações SAC e SAF ou Price, pode-se dizer que no SAC as parcelas de amortização são iguais entre si e as prestações são contínuas e decrescentes assim como os juros. No sistema Price as prestações são iguais entre si e calculadas de tal modo que uma parte paga os juros e a outra parte paga o principal (amortiza). A dívida fica completamente saldada na última prestação.

Em seu trabalho (Vergasta)[20] reforça que:

> ... É bastante comum questionar qual dos dois sistemas, SAC e SAF, é mais vantajoso para quem toma um empréstimo ou financiamento. Primeiramente, para se fazer a comparação entre eles deve ser feita uma análise sob as mesmas condições, ou seja, mesmo prazo e mesma taxa de juros. Pode-se verificar que o total dos juros pagos é menor no SAC do que no SAF, o que é ilustrado nos exemplos apresentados. Deve-se considerar, no entanto, a disponibilidade de recursos para pagar as primeiras prestações no SAC, que têm valores mais altos que as do SAF.

1.11.5 Sistema de Amortização Misto (SAM)

O Sistema de Amortização Misto (SAM) é um sistema baseado no (SAC) e no sistema Price, neste caso, a prestação é igual a média aritmética entre as prestações dos dois sistemas nas mesmas condições. Assim, para preencher uma planilha pelo (SAM), necessita-se fazer o estudo inicialmente do (SAC) e do (Price). Como as prestações são médias aritméticas das prestações, isto também ocorrerá com as parcelas de juro, com as cotas de amortização e com os saldos devedores. Cada prestação (pagamento) é a média aritmética das prestações respectivas no Sistemas (Price) e no Sistema de Amortização Constante (SAC).

$$P_{SAM} = \frac{P_{SAC} + P_{PRICE}}{2}$$

Uso: Financiamentos do Sistema Financeiro da Habitação.

Exemplo 1.11.3. *Na compra de um terreno, Alcides quer financiar a importância de R$ 30.000,00 em um banco que cobra uma taxa efetiva de juros de 4% a.m. Essa importância será amortizada, por Alcides, no sistema (SAM), em 5 prestações mensais e consecutivas, vencendo a primeira um mês após a compras. Construir a planilha desse financiamento.*

n	P_{SAC}	P_{PRICE}	$P_{SAM} = \frac{P_{SAC} + P_{PRICE}}{2}$
1	7.200,00	6.738,81	6.969,40
2	6.960,00	6.738,81	6849,40
3	6.720,00	6.738,81	6.729,40
4	6.480,00	6.738,81	6.609,40
5	6.240,00	6.738,81	6.489,40

Tabela 1.6: Planilha dos cálculos das médias dos pagamentos SAC e PRICE

A planilha ou (Tabela 1.6) mostra os valores das prestações que são as médias aritméticas dos pagamentos do sistema SAC e do Sistema PRICE.

n	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo Devedor
0	0	0	0	30.000,00
1	1.200,00	5.749,40	6.969,40	24.230,60
2	969,22	5.880,18	6.849,40	18.350,40
3	734,01	5.995,31	6.729,40	12.355,20
4	494,20	6.115,20	6.609,40	6.239,80
5	249,59	6.239,81	6.489,40	0
Totais	3.647,03	30.000,00	33.647,00	-

Tabela 1.7: SAM Sistema de Amortização Misto

A (Tabela 1.7) mostra a variação dos juros, pagamentos e a amortização crescente, e a Figura(1.10) ilustra essa evolução claramente.

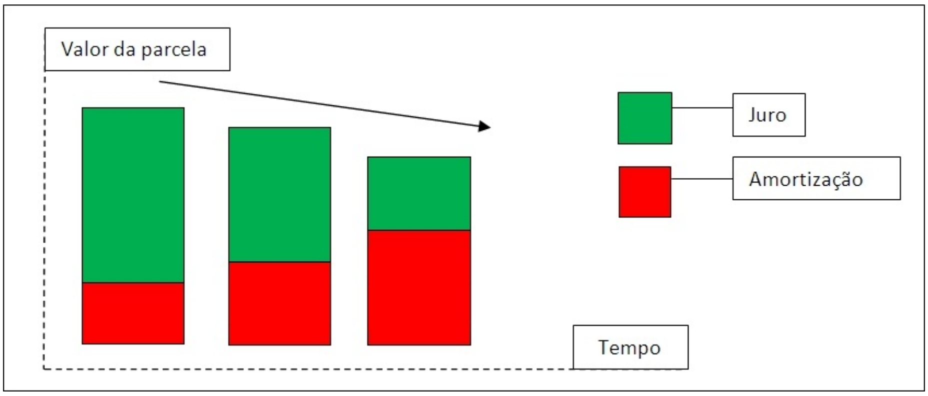

Figura 1.10: Juros e parcela decrescentes e Amortização crescente

1.11.6 Sistema de Amortização Crescente - SACRE

Atualmente utilizado pela Caixa Econômica Federal na concessão de financiamentos para a aquisição de terrenos e da casa própria. Esse tipo de plano de amortização tende a evitar o aparecimento do resíduo final. A dinâmica desse sistema é que o saldo devedor deverá ser refinanciado periodicamente conforme a seguinte regra:

- A prestação P é mantida constante durante o primeiro ano (dois anos em geral)
- A prestação é recalculada anualmente de acordo com o SAC, com base no Saldo devedor existente.

Exemplo 1.11.4. *Carlos deseja comprar um terreno que custa hoje R$ 30.000,00. Para isso terá que financiá-la pela Caixa Econômica Federal. As condições pra o financiamento são as seguintes: Sistema de Financiamento: SACRE; Taxa de Juros: 1,0% a.m. Período do Financiamento: 24 meses. Elabore um planilha de Amortização para este Financiamento sem correção monetária.*

SOLUÇÃO

A primeira linha da tabela de amortização é calculada pelo SAC, ou seja,

$$A_1 = \frac{30.000}{24} = 1.250,00;\ J_1 = 30.000.(0,01) = 300,00 \text{ e } P_1 = A_1 + J_1 = 1550,00.$$

O valor da parcela permanece constante pelo período de 12 meses. No final desse período o valor da parcela é recalculado utilizando a mesma metodologia tomando como base o Saldo devedor depois de 12 meses, ou seja sobre o valor de: $S_{12} = 11.400,00$. Assim sendo $P_{13} = 950,00$.

De forma Análoga calcularíamos os valores de S_{24} e P_{25}. ; S_{36} e P_{37}. e assim sucessivamente para empréstimos com períodos maiores que 24 meses. Os valores indicados para $n = 1$ e $n = 13$ estão distribuídos e destacados propositalmente em negrito na (Tabela 1.8); para mostrar que a partir dali ocorrem mudanças nos cálculos.

SACRE – SEM CORREÇÃO MONETÁRIA

n	PARCELAS	JUROS	AMORTIZAÇÕES	SALDO DEVEDOR
0	0	0	0	30.000,00
1	**1.550,00**	**300,00**	**1.250,00**	**28.450,00**
2	1.550,00	284,50	1265,50	26.900,00
3	1.550,00	269,00	1.281,00	25.350,00
4	1.550,00	253,50	1.296,50	23.800,00
5	1.550,00	238,00	1.312,00	22.250,00
6	1.550,00	222,50	1.327,50	20.700,00
7	1.550,00	207,00	1.343,00	19.150,00
8	1.550,00	191,50	1.358,50	17.600,00
9	1.550,00	176,00	1.374,00	16.050,00
10	1.550,00	160,50	1.389,50	14.500,00
11	1.550,00	145,00	1.405,00	12.950,00
12	1.550,00	129,50	1.420,50	11.400,00
13	**950,00**	**114,00**	**836,00**	**10.450,00**
14	950,00	104,50	845,50	9.500,00
15	950,00	95,00	855,00	8.550,00
16	950,00	85,50	864,50	7.600,00
17	950,00	76,00	874,00	6.650,00
18	950,00	66,50	883,50	5.700,00
19	950,00	57,00	893,00	4.750,00
20	950,00	47,50	902,50	3.800,00
21	950,00	38,00	912,00	2.850,00
22	950,00	28,50	921,50	1.900,00
23	950,00	19,00	931,00	950,00
24	950,00	9,50	940,50	(950,00)

Tabela 1.8: Planilha Sistema de Amortização Crescente SACRE

1.11.7 Sistema Americano de Amortização

Para o Sistema Americano de Amortização LAUREANO[7] afirma que o mutuário obriga-se a restituir o principal em um único pagamento, após certo prazo. Entretanto, periodicamente é pago o juro, de modo que o saldo devedor permaneça sempre igual até o momento da liquidação da dívida. Neste sistema, paga-se apenas os juros durante o período do empréstimo e o principal é amortizado ao final da operação. Trata-se um sistema utilizado em operações de curto prazo.

Exemplo 1.11.5. *Na compra de um terreno, Rafaela quer financiar a importância de R$ 30.000,00 em um banco que cobra uma taxa efetiva de juros de 4% a.m. Essa importância será paga de uma só vez, por Rafaela, dentro de 5 meses, e, durante esse período, mensalmente, será pago o juro calculado sobre o saldo devedor. Construir a planilha desse financiamento.*

Resolução: Como o juro é pago mensalmente, o saldo devedor permanece constante até o momento da liquidação total da dívida. ver (Tabela1.9)

n	juro	Amortização	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	30.000,00
1	1.200,00	-	1.200,00	30.000,00
2	1.200,00	-	1.200,00	30.000,00
3	1.200,00	-	1.200,00	30.000,00
4	1.200,00	-	1.200,00	30.000,00
5	1.200,00	30.000,00	31.200,00	0
Total	6.000,00	30.000,00	36.000,00	-

Tabela 1.9: Planilha Sistema Americano de Amortização

1.11.8 Sistema Alemão

O sistema Alemão consiste em liquidar uma dívida onde os juros são pagos antecipadamente com prestações iguais, exceto o primeiro pagamento que corresponde aos juros cobrados no momento da operação financeira. É necessário conhecer o valor de cada pagamento P e os valores das amortizações A_k onde $k = 1, 2, 3, ..., n$.

Fórmulas necessárias: Para $k = 1, 2, ..., n$.

$$P = \frac{C.i}{1-(1-i)^n} \quad A_1 = P.(1-i)^{n-1} \quad ; \quad A_k = \frac{A_1}{(1-i)^{k-1}} \tag{1.17}$$

Para ilustrar este tipo de sistema de amortização:

Exemplo 1.11.6. *Seja um financiamento de R$ 30.000,00 que será pago ao final de 5 meses à taxa mensal de 4% no sistema de amortização Alemão.:*

A prestação mensal do financiamento, pode ser calculada com as fórmulas das equações(1.17) e seus valores serão inseridos numa planilha constituindo assim a (Tabela1.10).

$P = (30.000 \times 0,04) \div [1-(1-0,04)^5] = 6.499,58$
$A_1 = 6.499,58 \times (1-0,04)^4 = 5.520,39$
$A_2 = 5.520,39 \div (1-0,04)^1 = 5.750,43$
$A_3 = 5.750,43 \div (1-0,04)^2 = 5.990,01$
$A_4 = 5.990,01 \div (1-0,04)^3 = 6.239,59$
$A_5 = 6.239,59 \div (1-0,04)^4 = 6.499,58$

1.11.9 Sistema de Pagamento Único

Segundo LAUREANO[7] Neste sistema, o mutuário deve pagar, após um certo prazo, o Principal mais o juro composto correspondente a esse prazo. Esta modalidade de pagamento é utilizada em Letras de Câmbio, Certificados a prazo fixo com

n	juro	Amortização	Prestação	Saldo Devedor
0	1.200,00	0	1.200,00	30.000,00
1	979,18	5.520,39	6.499,58	24.479,60
2	749,16	5.750,41	6.499,58	18.729,19
3	509,56	5.990,01	6.499,58	12.739,17
4	259,98	6.239,59	6.499,58	6.499,58
5	0	6.499,58	6.499,58	0
Total	3.697,90	30.000,00	33.697,90	-

Tabela 1.10: Planilha Sistema Alemão de Amortização

renda final(Investimentos), Títulos descontados em bancos comerciais, etc. Este é o sistema mais simples e é muito utilizado para financiamentos. O tomador simplesmente paga os juros e amortiza o principal no final do empréstimo. Para calcular o total a ser pago relativo a um empréstimo ou investimento C, a uma taxa efetiva de juros de i por período, num prazo de n períodos, basta aplicar a fórmula:

$$M = C.\,(1+i)^n$$

Exemplo 1.11.7. *Na compra de um terreno, Rafaela quer financiar a importância de R$ 30.000,00 em um banco que cobra uma taxa efetiva de juros de 4% a.m. Rafaela deverá quitar a sua dívida dentro de 5 meses, com um único pagamento que incluirá o principal mais o juro composto desse período. Determinar o pagamento único e preencher a planilha.*

Resolução:

Temos: $M = C.\,(1+i)^n \;\Rightarrow M = 30.000.(1,04)^5 \Rightarrow M = R\$\,36.499,58$ Para preencher a planilha, devemos calcular o juro do saldo devedor, mês a mês. Como não há amortização alguma, o saldo devedor cresce, e juntamente com o principal como mostra a (Tabela 1.11) , logo Rafaela pagará o juro composto do período, de uma única vez.

n	Juro	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	-	-	-	30.000,00
1	1.200,00	-	-	31.200,00
2	1.248,00	-	-	32.448,00
3	1.297,20	-	-	33.745,92
4	1.349,83	-	-	35.095,75
5	1.403,83	30.000,00	36.499,58	0
Total	6.499,58	30.000,00	36.499,58	-

Tabela 1.11: Planilha Sistema de pagamento Único

1.12 Aplicações e Produtos Financeiros

O banco é a ponte entre quem precisa de recursos e quem tem dinheiro em mãos e quer fazê-lo render. Eles aplicam os recursos de pessoas e empresas que possuem reservas, remunerando-as por isso e emprestando esses mesmos recursos para quem precisa de crédito, cobrando juros para financiar famílias e empresas. Os dois tópicos seguintes descrevem quais as principais aplicações financeiras do mercado assim como os principais produtos ofertados no mercado.

1.12.1 As principais aplicações financeiras do mercado

Segundo o Banco Central do Brasil (BCB) as aplicações mais comuns no mercado financeiro são **a Poupança, o Certificado de Depósito Bancário (CDB), o Recibo de Depósito Bancário (RDB) e os Fundos de Investimento.** Toda aplicação financeira está sujeita a riscos. Para reduzi-los, deve-se procurar informações sobre o tipo de aplicação, sobre a instituição financeira e sobre as variáveis econômicas que podem influenciar o resultado esperado. Geralmente os rendimentos são maiores nas aplicações de maior risco. Algumas aplicações são parcialmente garantidas pelo Fundo Garantidor de Créditos - FGC.

As regras para a remuneração dos depósitos de **Poupança** são estabelecidas no artigo 12 da Lei 8.177, de 1991, alterada pela Lei 12.703, de 2012. Os valores depositados e mantidos em depósito por prazo inferior a um mês não recebem nenhuma remuneração.

Os **Certificados de Depósito Bancário (CDB)** e os **Recibos de Depósito Bancário (RDB)** são títulos privados, emitidos pelos bancos comerciais e representativos de depósitos a prazo feitos pelo cliente e o prazo mínimo varia, dependendo do tipo de remuneração contratada. A principal diferença entre CDB e RDB é que o CDB pode ser negociado por meio de transferência, o RDB é inegociável e intransferível.

Fundo de investimento é um tipo de aplicação financeira em que o aplicador adquire cotas do patrimônio de um fundo administrado por uma instituição financeira. O valor da cota é recalculado diariamente. A remuneração varia de acordo com os rendimentos dos ativos financeiros que compõem o fundo. Não há, geralmente, garantia de que o valor resgatado será superior ao valor aplicado. Todas as características de um fundo devem constar de seu regulamento.

Os tipos de fundos de investimento financeiro podem ser classificados em função do prazo de carência para resgate ou de remuneração de suas cotas, do nível de risco, do segmento em que atua, ou dos ativos que compõem o seu patrimônio. Todo tipo de fundo de investimento é acompanhado e fiscalizado pela Comissão de Valores Mobiliários (CVM).

1.12.2 Principais produtos financeiros existentes ofertados no mercado

(SCHNEIDER-2008)[19] com o objetivo de ilustrar e esclarecer destaca alguns dos principais produtos financeiros existentes no mercado para compras a prazo, empréstimos e financiamentos, direcionados a pessoas físicas assim distribuídos:

1. **COMÉRCIO**
   - Crediário direto da loja;
   - Financiamento através de financeira da rede de lojas ou conveniadas;
   - Empréstimo pessoal (dinheiro) por financeira;
   - Cartão de crédito da loja para pagamento a vista (até 35 dias) ou parcelado;
   - Consórcio de eletrodomésticos, veículos e imóveis (carta de crédito).
2. **FINANCEIRAS**
   - Financiamentos de bens (automóveis, motos e caminhões);
   - Empréstimos de dinheiro a aposentados ou pensionistas (vinculado ao benefício);
   - Empréstimos consignados em folha de pagamento (funcionários de empresas);
   - Empréstimos do tipo CDC (crédito direto ao consumidor);
   - Refinanciamentos e/ou transferência de dívidas em outras instituições.
3. **BANCOS**
   - Financiamento de bens (veículos, máquinas, equipamentos);
   - Financiamento para aquisição de material de construção (reformas, ampliações);
   - Financiamento para aquisição e construção da casa própria;
   - Empréstimos consignados em folha de pagamento;
   - Empréstimos para aposentados e pensionistas;
   - Empréstimos do tipo CDC, sem destinação específica ou vínculo de garantia;
   - CDC renovação (refinanciamento da dívida);
   - Crédito para parcelamento de fatura do cartão de crédito;
   - Adiantamentos sobre receita futura (IRPF e 13º salário);
   - Leasing para uso (arrendamento) de bens ou veículos;
   - Cheque especial (limite na conta corrente);

- Cartão de crédito (parcelamento de compras e limite para saque);
- Consórcio de bens e carta de crédito.

Para obtenção destes termos foram consultados pela internet os site ou portal de Uma loja de departamentos (com rede e financeira), uma financeira e um banco.

Capítulo 2

A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

2.1 O Cenário

Num mundo onde cada vez mais se faz sentir os efeitos dos avanços tecnológicos, não há dúvida de que um dos grandes desafios é o preparo adequado das novas gerações para o acompanhamento do contínuo processo da evolução tecnológica com todas as suas conseqüências. Um dos suportes básicos para essas conquistas tecnológicas é a Matemática. O mundo moderno está exigindo do trabalhador uma escolaridade cada vez maior. As mudanças tecnológicas são atualmente tão velozes que requerem do trabalhador uma rápida adaptabilidade e, isto promete dar a educação um novo rumo, dando formação mais generalista[1] e menos especialista[2].

2.2 Matrículas no Ensino Médio

Diante das necessidades de adaptarem-se às novas mudanças tecnológicas do mundo, os jovens procuraram aumentar o seu grau de estudos. A oferta no Ensino Médio em 2012 no Brasil totalizou 8.376.852 matrículas, 0,3% menor que em 2011. Assim como em anos anteriores, a rede estadual continua a ser a maior responsável pela oferta de Ensino Médio, com 85% das matrículas. A rede privada atende 12,7% e as redes federal e municipal atendem juntas pouco mais que 2%. De acordo com resultados divulgados e informações levantadas pelo (INEP)[3] do MEC ajudam a traçar o quadro do Ensino Médio no Brasil. Ver (Tabela 2.1):

O Ensino Médio: inclui matrículas no Ensino Médio integrado à educação profissional e no Ensino Médio normal/magistério.

[1]generalista: O que tem conhecimentos gerais, e não especializados, em determinada matéria.
[2]especialista: O que tem habilidade ou prática especial em determinada coisa.
[3]INEP:Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

ANO	ENSINO MÉDIO	População: Idade 15 a 17 anos
2007	8.369.369	10.262.468
2008	8.366.100	10.289.624
2009	8.337.160	10.399.385
2010	8.357.675	10.357.874
2011	8.400.689	10.580.060
2012	8.376.852	-

Tabela 2.1: (Número de Matrículas do Ensino Médio, População Idade de 15 a 17 Anos – Brasil – 2007-2012)
Fonte: MEC/Inep/ IBGE

Nota-se no entanto que não estão sendo relatados os valores das matrículas referentes ao ano de 2013, visto que o MEC ainda não divulgou os dados oficialmente. Analisando a (Tabela 2.1), nota-se que o aluno do ensino médio regular, mantidos os valores acima, a estimativa é que a situação de equilíbrio da matrícula esteja em torno de 10,6 milhões de alunos, que corresponde à população na faixa etária de 15 a 17 anos, contra os atuais quase 8,4 milhões de matriculados.

O relatório ou resumo técnico do Censo Escolar da Educação Básica 2012 do (MEC/INEP) chama atenção para o destaque percebido neste Censo, que foi a confirmação da trajetória de expansão da matrícula na educação profissional, que em 2007 era de 780.162 e atingiu, em 2012, 1.362.200 matrículas – crescimento de 74,6% no período. Ainda de acordo com o (MEC/INEP): Esse comportamento está em sintonia com as políticas e ações do MEC, no sentido do fomento ao fortalecimento, à expansão e à melhoria da qualidade da educação profissional no País. No estado de Sergipe os números são de 79.794 em 2010 ; 79.668 em 2011, e de 77.742 em 2012, de acordo com os dados fornecidos pelo (INEP-2010 a 2012).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Ensino Médio (BRASIL)[11], a compreensão da Matemática e de seus temas é essencial para o cidadão tomar decisões em sua vida profissional e pessoal, agindo com prudência frente às relações de consumo. Neste sentido, o documento ressalta a importância da Matemática para o jovem do Ensino Médio afirmando que:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 1999, p. 251).

Na busca por mais informações e discussões sobre a Matemática no Ensino Médio, foi encontrado um artigo em que (IMENES e LELLIS)[10] debatem alguns aspectos sobre uma proposta de trabalho com alguns conteúdos matemáticos, considerados por eles como facilitadores para a construção da cidadania:

> Quando se considera Matemática essencial para o dia-a-dia do cidadão educado, são citados os seguintes tópicos: Matemática Financeira, Probabilidades e Estatística. Na Matemática Financeira, seria conveniente tratar de juros compostos e amortizações. (IMENES e LELLIS, 2001, p. 45).

O aluno do Ensino Médio é um cidadão consumidor, que também está ou será integrado ao mercado de trabalho. E, na qualidade de consumidor ou de trabalhador, é importante que tenha conhecimentos mínimos sobre comércio e finanças para que possa tomar suas decisões com mais segurança. Sabe-se que o setor financeiro aproveita-se do escasso conhecimento do consumidor neste assunto e, muitas vezes, explora esse fato de forma ilegal e desumana. Para enfrentar o mundo do trabalho e consumo, o estudante necessita dominar determinados conceitos e tecnologias.

Há, portanto, necessidade de romper com modelos tradicionais para que se alcancem os objetivos propostos para o Ensino Médio. A perspectiva é de uma aprendizagem permanente, de uma formação continuada, considerando como elemento central desta formação a construção da cidadania em função dos processos sociais que se modificam.

2.3 A Ação Governamental

Tentando dar uma resposta à grande demanda de alunos para o Ensino Médio, o poder público implantou algumas ações e regras reguladoras, tais como: A Lei de Diretrizes e Bases-(LDB) 1996, que institui ao Ensino Médio a função de complementar o Ensino Fundamental, tendo agora um caráter generalizado, formativo e não profissional; as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM/CNE[4], 1998) ; Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM/SEMTEC[5], 1997) ; e o Plano Nacional de Educação (PNE MEC/INEP, 1998).

De acordo com os PCNs, as Diretrizes Pedagógicas para o Ensino Médio deverão dar ênfase à autonomia das escolas; formação geral; formação básica para o trabalho; interdisciplinaridade; contextualização e discussão de temas transversais. Diante do exposto acima, entende-se que a Matemática do Ensino Médio tende seguir essas diretrizes, em outras palavras, deverá associar às suas aplicações no cotidiano e ao contexto em que vivem os alunos.

No entendimento de KUENZER[12]:

> A Matemática propicia eficientes ferramentas que permitem ao homem sintetizar, generalizar, modelar e submeter esses modelos a provas e verificações prévias, possibilitando ensaios, propiciando condições confiáveis de previsibilidade cujas aplicações e utilização cada vez mais freqüente tornam a Matemática imprescindível atualmente. (KUENZER, 2001, p. 162)

[4]CNE:Conselho Nacional de Educação.
[5]SEMTEC:Secretaria de Educação Média e Tecnologia.

As pessoas que utilizam seus cartões magnéticos nas agências bancárias, que vêem seus programas favoritos transmitidos via satélite, preparam suas refeições em fornos microondas, mandam seus e-mails, que ouvem CD, *disc-lasers*, DVD, MP3; falam e usam as mais diversas funções de seus celulares ou *Smartphones* , são usuários inconscientes, na maioria das vezes, dos frutos de muita e sofisticada Matemática.

Os PCNs sugerem uma organização curricular na base nacional comum para o Ensino Médio: 1800 horas-aula em 3 anos de 200 dias letivos. Com a Lei Nº. 9394/96 (LDB) alteram-se, portanto, os objetivos de formação no nível do Ensino Médio. Prioriza-se a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.

Não há o que justifique reter, memorizar conhecimentos que estão sendo superados ou cujo acesso é facilitado pela moderna tecnologia. O que se deseja é que os estudantes desenvolvam competências básicas que lhes permitam desenvolver a capacidade de continuar aprendendo, é importante destacar, as considerações oriundas da Reunião da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI, incorporadas nas determinações da Lei Nº. 9394/96.

- A educação deve cumprir um triplo papel: econômico, científico e cultural.
- A educação deve ser estruturada em quatro alicerces: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser.

Os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) são uma proposta para o currículo, uma referência Nacional para o ensino básico e por apresentar uma proposta de contextualização e interdisciplinaridade que poderão ser usadas pelas escolas e professores como material para a programação do currículo para o grupo específico de alunos.

A Matemática Financeira pode ser trabalhada como instrumento para alcançar o indicado pelos PCNs , a partir de sua vinculação com o cotidiano do aluno. Pode-se destacar em **negrito** as finalidades do ensino da Matemática apresentadas pelos PCNs (p.78), onde enfatizam a importância da Matemática Financeira.

- Compreender a responsabilidade social associada à aquisição e uso do conhecimento matemático, sentindo se mobilizada para diferentes ações, seja em **defesa de seus direitos como consumidor**, dos espaços, equipamentos coletivos ou da qualidade de vida.
- Conhecer recursos, **instrumentos e procedimentos econômicos e sociais. para posicionar-se, argumentar e julgar sobre questões de interesse da comunidade**, como problemas de abastecimento, educação, saúde e lazer, percebendo que podem ser muitas vezes quantificados e descritos através do instrumental da Matemática e dos procedimentos da ciência.
- Adquirir uma **compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver** e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações.

- Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo,**comparando os cálculos feitos pelas máquinas** com aqueles feitos "com lápis e papel", e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento.

Nota-se que os PCNs apresentam indicações de trabalhar a Matemática, objetivando sua contextualização com informações do cotidiano e história, visando preparar os alunos para o trabalho e consumo, ou seja apontando para o exercício da cidadania. No parágrafo acima, nota-se que os PCNs indicam o uso de calculadora, apesar de ainda ser discutido por professores. Com esse entendimento, D'Ambrosio(1999)[6] esclarece:

> Uma vez aceita a calculadora sem restrições, estaria desfeito o nó górdio da Educação Matemática. Isto porque a calculadora sintetiza, na matemática, as grandes transformações de nossa era e a entrada de uma nova tecnologia em todos os setores da sociedade. Basta lembrar que com a adoção do sistema de numeração indo-arábico abriu-se, na Europa, toda uma nova organização mercantil. E dificilmente Newton teria avançado tanto sem as novas possibilidades que a invenção dos logaritmos abriu para os cálculos. Não consigo entender porque razão a calculadora ainda não se incorporou integralmente à matemática escolar e as aulas de matemática. Alguns admitem o uso das calculadoras, mas... E por conta desse "mas"vem as restrições, todas baseadas em idéias falsas, verdadeiros mitos na Educação Matemática. A incorporação de toda a tecnologia disponível no mundo de hoje é essencial para tornar a Matemática uma ciência de hoje. (1999)

2.4 As Escolas

O tipo de ensino praticado atualmente no Brasil, no curso médio, apresenta muitas diferenças como culturais, sociais e até mesmo econômicas, devido à vastidão do país e às diferenças regionais. As escolas são numerosas com perfis muito variados, públicas, privadas, as instalações, propostas pedagógicas etc. Há escolas noturnas para alunos que trabalham durante o dia, oferecendo três aulas de matemática por semana. Por outro lado, em certas escolas, principalmente da rede privada, ministram até seis aulas semanais de Matemática. No entanto, acredita-se que existe um tratamento comum na maioria das escolas em relação à Matemática. Para (IMENES e LELLIS, 2001):

> A Matemática é tratada como um conjunto de técnicas ou algoritmos ou procedimentos com o qual se obtém resultados. E isso se reflete na quantidade de exercícios que se resumem a calcular, obter, efetuar.(p.42)

2.5 O Vestibular

A palavra vestibular vem do latim *vestibulum*, que significa entrada. Antigamente usava-se a expressão "exame vestibular" (exame de entrada), com o passar do tempo passou-se a usar apenas "vestibular" para designar esse tipo de prova.

Em 1911 foi determinado que aquele que desejasse ingressar no Ensino Superior deveria se submeter a uma espécie de exame de estado. Apesar da determinação, que marca a origem do vestibular, o que na prática continuava a garantir a entrada nas faculdades eram os exames de fim de curso, os chamados "exames preparatórios". Só em 1915, é que os exames preparatórios foram pela primeira vez chamados de "vestibulares".

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1961 (Lei Nº 4024 de 20/12/61) concedeu autonomia aos estabelecimentos de ensino para que decidissem sobre critérios de habilitação e classificação para o ensino superior. Com isso, a lei fomentou a multiplicação dos modelos de avaliação, baseados em critérios diversos, provas e programas diferentes. As grandes modificações no vestibular só ocorreram em 1971, pelo Decreto Nº 68.908 de 13 de junho, determinando que o vestibular passaria a ter conteúdo único para todas as carreiras e caráter classificatório. Esse Decreto também definiu que o exame seria realizado ao mesmo tempo em todo o país, ou pelo menos, em algumas regiões, cujas provas deveriam ser as mesmas para todas as universidades, abrangendo questões objetivas sobre as disciplinas constantes do currículo do Ensino Médio (Núcleo Comum).

A partir de 1978, são introduzidas alterações importantes no exame de vestibular, como a inclusão obrigatória de prova ou questões de redação em língua portuguesa, prova de habilidades específicas para determinados cursos e a possibilidade de realização do vestibular em mais de uma etapa.

Atualmente, o vestibular unificado perdeu muito de seu caráter inicial de 1971, onde a unificação significa apenas dizer que um grupo de provas está sendo aplicado a diferentes grupos de candidatos ou instituições. Mas, felizmente, com o avanço da autonomia universitária, começam a ser testadas formas alternativas de acesso ao Ensino Superior.

2.5.1 O ENEM Vs. O NOVO ENEM

O Exane Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 e tinha como principal objetivo avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica. Podiam participar do exame alunos que tinham concluído o Ensino Médio em anos anteriores, independentemente da idade ou do ano do término do curso. Em 2009, o ENEM passou por mudanças consideráveis, necessárias à universalização a que se propõe.

O número de inscritos vem crescendo a cada ano segundo o INEP, ver (Tabela 2.2) e é cada vez maior o número de instituições de Ensino Superior que adotam o exame como forma de ingresso nos cursos.

Para ter o acesso ao Ensino Superior, um dos critérios alternativos de algumas instituições universitárias é a utilização do ENEM.

Ao participar do ENEM, o estudante, além de ter a oportunidade de testar seus conhecimentos, poderá concorrer a uma das vagas nos processos seletivos dos cur-

ANO	Inscrições Confirmadas
2009	4.148.721
2010	4.626.094
2011	5.380.857
2012	5.791.332
2013	7.173.574

Tabela 2.2: Evolução do Número de Inscrições no ENEM
Fonte: INEP

sos de graduação do País. As razões por que o ENEM mudou são várias, dentre as quais podemos citar: a necessidade de reformular o currículo de Ensino Médio, de promover uma melhor qualidade do Ensino Médio no país, uma vez que a preocupação da maioria das escolas era cumprir o extenso conteúdo programático exigidos nos vestibulares tradicionais das várias instituições Superiores de Ensino. Vejamos na (Tabela 2.3) um comparativo sobre as mudanças das provas do ENEM antes de 2009 e o NOVO ENEM 2009:

ENEM ANTES DE 2009	NOVO ENEM
63 questões e uma redação.	180 questões divididas em 4 áreas de conhecimento e uma redação.
Exigia a contextualização e a interdisciplinaridade entre as questões.	Alem da contextualização e a interdisciplinaridade, é exigido praticamente todo o conteúdo do Ensino Médio.
Servia apenas como forma de avaliação do aluno	Serve também como forma de ingresso em diversas instituições de Ensino Superior.

Tabela 2.3:

Como é de conhecimento que o ENEM tem como um dos principais objetivos reformar o Ensino Médio, fazendo com que as escolas abandonem a educação 'conteudista' e passem a fazer com que seus alunos compreendam fenômenos, resolvam problemas e elaborem propostas éticas e inovadoras de intervenção na sociedade, essa idéia é reforçada por (DANTE-2011)[16]

> O ENEM se propõe a melhorar a qualidade do Ensino Médio, uma vez que avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos, não isoladamente, mas de forma conjunta. Assim, o conteúdo ministrado no Ensino Médio passa a ser determinado pelos professores, coordenadores e diretores e não exclusivamente ditados pelas universidades.

2.6 A Sala de Aula: Conteúdos e Enfoques

O ensino da Matemática no Brasil, apesar das novas tecnologias presentes em algumas salas de aula, centra-se na aquisição de conteúdos. Assim sendo, para o pleno exercício da cidadania é conveniente que se traga para a sala de aula o cotidiano do aluno, favorecendo assim o processo ensino aprendizagem. Os conteúdos devem estar associados às atividades do quotidiano. Partindo dessa idéia (KUENZER-2001)[12] enfatiza que:

> A Matemática que vem sendo ensinada no atual ensino médio, na maioria das escolas, como também outras disciplinas, estão muito distantes daquela que é utilizada como suporte para a sofisticação das atividades do cotidiano. (p.162)

Podemos relatar os conteúdos abordados nas três séries do Ensino Médio: O programa de Matemática da primeira série tem como tema central as funções reais de uma variável real, estudadas sob ponto de vista elementar, isto é sem o uso do cálculo infinitesimal, visando uma preparação para as séries subseqüentes. São apresentadas noções de conjuntos, a idéia geral de função e os diferentes conjuntos numéricos como os conjuntos dos números Naturais, dos Inteiros e, principalmente, dos Reais. Completando com a Trigonometria no Triângulo Retângulo e as Funções Trigonométricas.

Para a segunda série, destacam-se as Progressões Aritmética e Geométrica; Noções de Matemática Financeira; Estudo das Matrizes; Determinantes; Análise Combinatória; Noções de Estatística; Probabilidades; Geometria Plana e Geometria Espacial.

Para a terceira série, são enfocados os seguintes assuntos: A Geometria Analítica - estudando a Reta, a Circunferência, e as Cônicas. Na parte algébrica, enfocam-se o Conjunto dos Números Complexos; Os Polinômios e as Equações Polinomiais, concluindo com Noções de limites.

Estes conteúdos acima citados visam atender e seguir o programa implantado por Universidades e Faculdades locais. Com o novo ENEM, estes conteúdos programáticos estão sendo reestruturados por coordenadores escolares juntamente com professores de Matemática, visando atender a nova estrutura do ENEM em virtude da grande adesão de Universidades Federais que utilizam o Exame como forma de ingresso dos alunos nas mesmas. Estas ações impactam diretamente na concepção de que por vezes, os alunos não conseguem assimilar e associar aquilo que aprendem com os problemas do seu quotidiano. Talvez assim estejamos caminhando para uma mudança da postura dos professores e alunos em sala de aula, onde o estudante ouve, repete e resolve os exercícios, a partir de exemplos dados pelos professores para serem cobrados em avaliações.

2.7 Matemática - Professor - Aluno: Um trinômio quase que perfeito.

Observar e refletir sobre o processo de ensino da Matemática no nível médio, vem colocando tanto professores de Matemática como também as instituições de ensino, diante de um dilema, que é a preparação dos jovens adolescentes para os vestibulares e o ENEM, e a expectativa de preparação para a vida. A Matemática enquanto ciência exata é um componente imprescindível na formação dos futuros cidadãos, pois é a partir da aplicação desta, que se explica em grande parte à dinâmica da vida. Sendo assim, pode-se dizer que os professores de Matemática podem contribuir significativamente na formação de profissionais e principalmente, de cidadãos competentes num mundo cada vez mais globalizado, contribuindo efetivamente para a construção de uma sociedade mais justa e humana.

Um dos maiores objetivos da Matemática consiste no auxílio ao indivíduo para resolver problemas que caracterizam seu cotidiano e de sua área de atuação profissional. No Ensino Médio, a Matemática apresenta um valor formativo, além de desempenhar um papel instrumental. No aspecto formativo, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, contribuindo para o desenvolvimento de processos cognitivos e a aquisição de atitudes, levando o aluno a desenvolver sua criatividade e a capacidade para resolver problemas. Deve-se criar o hábito de investigação e confiança para enfrentar situações novas e formar uma visão ampla da realidade.

A Matemática, assim como a língua materna, estão presentes no nosso dia-a-dia e suas presenças são sentidas por uma relação de transferência de termos, num contexto de uma para a outra. Partindo dessas idéias, (MACHADO-2005)[1], enfatiza em seu trabalho, exemplificando algumas expressões usadas no cotidiano, tais como: Chegar a um denominador comum; Dar as coordenadas; Aparar as arestas; Sair pela tangente; Ver de um outro ângulo; Numa fração de segundos; O xis da questão. Para (MACHADO-2005), esta relação explicitada da Matemática e a língua materna é uma relação quase "anfíbia[6]".

Em relação ao caráter instrumental, a Matemática deve ser vista como um conjunto de ferramentas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

O trabalho do professor geralmente é focado em aulas expositivas, com pouca participação dos alunos, onde os conteúdos vistos são apresentados no quadro negro e, posteriormente, cobrados em listas de exercícios para uma melhor fixação destes ou em eventuais avaliações futuras, provocando no aluno a falta de interesse. Um dos fatores preocupantes dessa situação é a condição de baixa estima por parte dessa categoria, a falta de motivação desses profissionais de ensino, o salário pouco atrativo, as condições de trabalho e a valorização do magistério.

Baseado em informações do censo escolar (MEC/INEP, 2012), o Brasil tem cerca de 2.1 milhões de professores no Ensino Fundamental e no Médio. Desses 2.1 milhões cerca de 548 mil professores atuam no Ensino Médio no Brasil, sendo que 78% têm o nível superior e 76% estão atuando em escolas públicas. Mais de 400 mil profissionais que atuam no magistério da educação básica também são alu-

[6]anfíbia:Aquele que tem sentimentos opostos, ou segue duas opiniões diferentes.

nos da educação superior, mostrando que está em curso um processo de melhoria da qualificação dos professores em exercício na educação básica. O quadro de formação docente tende a melhorar nos próximos anos, devido à enorme expansão dos cursos que oferecem licenciatura no País.

Diante deste contexto é que entra a parte mais interessante desse estudo, o aluno. Vê-se que a maioria dos alunos do Ensino Médio com intenção de enfrentar um vestibular, ENEM, na maioria das vezes não consegue entender ou associar os conteúdos com o seu quotidiano, fazendo indagações tais como: "para que serve este assunto?"; "onde eu uso isto na vida, professor?" Infelizmente o que se constata é que Ensino Médio é orientado para o vestibular e ENEM e estes traçam as diretrizes do Ensino Médio e, este por sua vez não está orientando os alunos para a vida.

2.8 Os livros Didáticos

Ao fazer uma análise superficial em algumas coleções de livros didáticos do Ensino Médio de editoras distintas sobre o tema Matemática Financeira, observou-se que em grande parte a abordagem pelos autores é feita da seguinte maneira: Definições, fórmulas, exercícios modelos resolvidos, em seguida exercícios propostos e testes de vestibulares. Estes exercícios muitas vezes são descontextualizados e sem haver vinculação ou conexão com a cidadania, são puramente exercícios conteudistas. Sobre o livro didático, ROMANATTO[13] explica que:

> A situação de sala de aula brasileira permite dizer que nem a palavra do professor e muito menos os modernos meios tecnológicos de comunicação podem substituir o livro didático nas atividades escolares; pois este acumula várias funções, como, por exemplo: a de ser instrumento de intercâmbio e inter-relação social, permitindo a comunicação no tempo e no espaço, assim como constitui vasta fonte de informações. (p. 04)

Para a escolha do Livro Didático os professores seguem as recomendações e sugestões de coleções pré avaliadas e aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Outra consideração importante que merece nossa atenção é a síntese avaliativa feita pelo(PNLEN-2012)[7] ao livro de Matemática adotado na turma em estudo:

> Na classificação dos conteúdos adotada no PNLD 2012, consideramos a **matemática financeira** no campo das funções pela importância das funções linear e exponencial como modelos para os problemas dessa área. No entanto, apenas uma das coleções aprovadas faz, explicitamente, tais conexões. Na **matemática financeira**, os conteúdos mais abordados são porcentagem, acréscimo e desconto, juros simples e compostos. Observamos, na abordagem desses tópicos, muita ênfase ao emprego direto de fórmulas, o que não é desejável. Esse é um assunto que deveria instrumentalizar o aluno para a cidadania, e isso pode ser feito por meio da exploração de problemas adequados e atuais. Dentre as coleções aprovadas, três destacam-se pelas contextualizações sugestivas.(PNLD, p.33)

[7]PNLEN:Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio de Matemática http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-m%C3%A9dio; acessado em 06 de fev. 2014.

Entretanto ROMANATTO[13] ressalta sobre os requisitos básicos do livro didático de Matemática:

> Os requisitos exigidos para um livro didático de Matemática seriam: papel e escrita adequados, seqüência lógica dos conteúdos, situações-problema relevantes e interessantes; possibilidades de desenvolver o raciocínio lógico para a compreensão e justificação dos conceitos; princípios e procedimentos matemáticos, formas variadas para a avaliação da aprendizagem, aplicações dos conceitos em diferentes situações reais, leituras complementares, utilização de materiais feitos pelos alunos ou pelo professor, linguagem com clareza e precisão, e condições de integração com outras disciplinas. (p. 07)

Capítulo 3

AÇÕES PROCEDIMENTAIS, METODOLÓGICAS e PEDAGÓGICAS

3.1 Embasamentos e Pressupostos Teóricos

Quando se considera a Matemática essencial para o dia-a-dia do cidadão, ela tem em particular tópicos que são de grande importância para o cotidiano do aluno, como a Matemática Financeira. O conceito de Porcentagem que está inserida na Matemática Financeira pode ser trabalhado com o aluno de maneira contextualizada e interdisciplinar por sua importância na vida. Merece aqui uma melhor explicação do que seja Contextualização e Interdisciplinaridade.

A Contextualização de forma geral é o ato de vincular o conhecimento à sua origem e à sua aplicação. A idéia de contextualização entrou em pauta com a reforma do Ensino Médio, a partir da (LDB)[1] , que orienta para a compreensão dos conhecimentos para uso cotidiano. Tem origem nas diretrizes que estão definidas nos (PCNs), que são guias para orientar a escola e os professores na aplicação do novo modelo. De acordo com esses documentos, orienta-se para uma organização curricular que, entre outras coisas, trata os conteúdos de modo contextualizado, aproveitando sempre as relações entre conteúdos e contexto para dar significado ao aprendido, estimular o protagonismo do aluno e estimulá-lo a ter autonomia intelectual.

Portanto, o novo currículo, segundo orientação do (MEC), está estruturado sobre os eixos da interdisciplinaridade e da contextualização, sendo que esta última vai exigir que todo conhecimento tenha como ponto de partida a experiência do estudante; o contexto onde está inserido e onde ele vai atuar como trabalhador, cidadão, um agente ativo de sua comunidade. A contextualização também pode ser entendida como um tipo de interdisciplinaridade, na medida em que aponta

[1](LDB) Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1996

para o tratamento de certos conteúdos como contexto de outros.

A idéia da contextualização requer a intervenção do estudante em todo o processo de aprendizagem, fazendo as conexões entre os conhecimentos. De acordo com o MEC, esse aluno que estará na vanguarda não será nunca um expectador, um acumulador de conhecimentos, mas um agente transformador de si mesmo e do mundo; trabalhando contextos que tenham significado para o aluno e possam mobilizá-lo a aprender, num processo ativo, em que ele é protagonista, acredita-se que o aluno tenha um envolvimento não só intelectual, mas também afetivo. Isso, de acordo com o novo currículo, seria educar para a vida.

A Interdisciplinaridade é uma perspectiva de articulação interativa entre as diversas disciplinas, no sentido de enriquecê-las através de relações dialógicas entre os métodos e conteúdos que as constituem. A interdisciplinaridade parte da idéia de que a especialização sem limites das disciplinas científicas culminou numa fragmentação crescente do conhecimento.

(MACHADO2000)[3] reforça que a interdisciplinaridade resulta de uma interação e da complementaridade nas ações envolvendo diferentes disciplinas. Dessa forma, pela interdisciplinaridade há um movimento constante que inclui a integração entre as disciplinas, mas a ultrapassa - o grupo é mais que a simples soma de seus membros. Supõe troca de experiências e reciprocidade entre disciplinas e áreas do conhecimento.

A interdisciplinaridade é uma orientação das Orientações e Diretrizes Nacionais Curriculares para o Ensino Médio, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), cujo objetivo é fazer da sala de aula mais do que um espaço para simplesmente absorver e decorar informações. Segundo a orientação do Ministério da Educação (MEC), a interdisciplinaridade não pretende acabar com as disciplinas, mas utilizar os conhecimentos de várias delas na compreensão de um problema, na busca de soluções, ou para entender um fenômeno sob vários pontos de vista.

A interdisciplinaridade é, portanto, um instrumento que na proposta de reforma curricular do ensino médio aponta para estabelecer - na prática escolar - interconexões e passagens entre os conhecimentos através de relações de complementaridade, convergência ou divergência (Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio 1998).

Podemos assim destacar que na visão de (MACHADO2000)[3]:

> A possibilidade de um trabalho interdisciplinar fecundo depende do reconhecimento, especialmente no que se refere à própria concepção de conhecimento, bem como de uma visão geral do modo através do qual as disciplinas se articulam, internamente e entre si. (Machado, 2000, p.180).

A interdisciplinaridade abre as portas para a contextualização, ou seja, ao pensar um problema sob vários pontos de vista, a escola libera professores e alunos para que selecionem conteúdos que tenham relação com as questões ligadas às suas vidas e à vida das suas comunidades. Com essa proposta, para que haja aprendizagem significativa, o aluno tem que se identificar com o que lhe é proposto e, com isso, poder intervir na realidade.

3.2 A Metodologia deste Trabalho

A metodologia usada para elaboração deste trabalho foi a Pesquisa-Ação. Uma pesquisa, segundo GIL(1991)[17], pode ser definida como o procedimento racional e sistemático cujo objetivo é proporcionar respostas aos problemas que são propostos.

GIL(1991)[17] apresenta uma classificação das pesquisas, porém adota o seguinte referencial: classificação das pesquisas com base em seus objetivos e classificação com base nos procedimentos técnicos adotados. Classificação com base nos objetivos - três grandes grupos: pesquisas exploratórias, pesquisas descritivas e pesquisas explicativas. Classificação com base nos procedimentos técnicos adotados (pois, para analisar os fatos do ponto de vista empírico, para confrontar a visão teórica com os dados da realidade, é necessário traçar o modelo conceitual e também o operatório): pesquisa bibliográfica, pesquisa documental, pesquisa experimental, (pesquisa *ex-pos-facto)*,[2] levantamento, estudo de caso e pesquisa-ação.

A proposta metodológica dessa investigação baseia-se através da orientação na elaboração individual de um Projeto de Pesquisa voltado para o estudo de um problema específico relacionado ao conteúdo curricular de Matemática do Ensino Médio. A intenção da realização do trabalho final de Mestrado, segue e tenta atender a proposta de **Pesquisa-Ação**, a partir de fichários de leitura de THIOLLENT[18], pode ser definida como:

> ... um tipo de pesquisa com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (Thiollent apud GIL, 1985, p. 60)

THIOLLENT[18] defende a **Pesquisa-Ação** como a abordagem mais eficaz para a análise das diferentes formas de ação, onde o conjunto dessas formas de ação constituem as etapas da Pesquisa-Ação. Estas etapas podem ser citadas como:

- Formulação do problema

[2]pesquisa *ex-pos-facto*: Traduzindo o termo *ex-post-facto*: "a partir do fato passado". Este tipo de pesquisa realiza a ocorrência de variações na variável dependente no curso natural dos acontecimentos. Neste caso, o pesquisador não possui controle sobre a variável independente, que constitui o fator suposto do fenômeno, porque ele já ocorreu. Portanto, o pesquisador identifica as situações que se desenvolveram naturalmente e trabalha sobre elas como se estivessem submetidas a controles. Ela tem o mesmo propósito que a pesquisa experimental por observar a existência de relações entre variáveis.

- Construção de hipóteses;
- Realização do seminário
- Seleção da amostra;
- Coleta de dados
- Análise e interpretação do dados;
- Elaboração do plano de ação
- Divulgação dos resultados.

3.3 A Ação na Escola

O trabalho com os alunos ocorreu num período de 24 dias perfazendo-se um total de 10 horas/aulas, (sendo que cada hora aula tem duração de cinqüenta minutos), com atividades executadas em sala de aula e fora do ambiente escolar.

Existem vários métodos de ensino que favorecem o processo ensino/aprendizagem propiciando um trabalho mais eficaz e participativo do aluno. No tocante a Matemática pode-se citar, entre outros métodos:

a) A aprendizagem por Descoberta (o aluno constrói seu conhecimento, seguindo uma visão construtivista);

b) A Modelagem Matemática (A aprendizagem Matemática relacionada com outras Ciências, onde um tema é escolhido e é transformado em um modelo matemático);

c) A Resolução de Problemas (método proposto por George Polya no seu livro *How to Solve it*, editado em 1945 pela universidade de Princeton).

A seqüência: teoria, exemplos, exercícios teóricos e problemas, constituem uma metodologia bastante utilizada nos dias atuais por grande parte dos professores de Matemática, refletindo assim fielmente o que se passa em uma sala de aula em atividades matemáticas. A aplicação de exercícios de raciocínio e de problemas desafiadores pode despertar o interesse dos alunos, e assim pode-se destacar que na visão de ZABALA(1998)[14]

> Os problemas desafiadores devem provocar e incentivar os alunos a fim de despertar seus interesses e motivações pelas questões que esta situação coloca. Buscando ainda, relacionar o conteúdo às suas aplicações práticas e dar a ele, sempre que possível um toque multidisciplinar. (p.151)

3.3.1 Primeiro Momento

Num primeiro momento foi feita em sala de aula de uma discussão sobre os conteúdos de Matemática Financeira e Porcentagem, com o objetivo de sensibilizar os alunos com relação aos conteúdos citados; uma vez que eles estão associados ao cotidiano deles, na forma de: anúncios de jornais, numa loja que anuncia uma liquidação, outra loja que promete dar um desconto para pagamento à vista, o aumento dos combustíveis, o aumento do salário mínimo, contas, talões de cheques, duplicatas, boletos bancários, contas de água, contas de energia elétrica e outros.

Na aula seguinte, foram apresentados aos alunos, cinco problemas simples envolvendo um conteúdo de Matemática Financeira, especificamente porcentagem, ligada ao dia-a-dia para resolvê-los individualmente. (considerada como primeira atividade avaliativa). Os problemas apresentados aos alunos foram os seguintes:

1) Se o seu salário era R$ 750,00 e teve um aumento de 10%, quanto você passou a ganhar?

2) Um produto está sendo vendido por R$ 440,00 após sofrer um aumento de 10%. Calcule o preço do produto, antes do aumento.

3) Um salário de R$ 1.850,00 teve um aumento de 8,5%. Calcule o valor do novo salário.

4) Uma conta de energia será paga após a data de vencimento e será cobrada uma multa pelo atraso de 4% sobre o valor de R$ 160,00, Qual o valor da fatura a ser paga com a multa?

5) A Loja "Ki Barato" dá desconto de 20% para pagamento à vista e aplica um acréscimo de 8% para pagamento a prazo. Num produto cujo preço anunciado na tabela era R$ 80,00, calcule:

a) Qual é o preço à vista?

b) Qual o preço desse produto para pagamento a prazo?

Para a resolução destes problemas os alunos poderiam fazer uso de calculadoras simples. Um fato interessante nesta ocasião fazia-se sentir, que os alunos não dispunham de calculadora e fizeram uso dos seus celulares nos quais existem o recurso de calculadora, pois na ocasião mais de 70% dos alunos dessa turma possuíam celular, utilizando assim dos recursos dessa tecnologia em favor do aprendizado dos alunos. Neste caso a tecnologia foi utilizada de maneira produtiva em sala de aula. Após o término desta tarefa, os trabalhos foram recolhidos para análise do professor.

3.3.2 Segundo Momento

Num segundo momento após uma breve discussão, foi feito em sala de aula uma explanação teórica dos conteúdos Matemática Financeira com maior ênfase para porcentagem, aplicando exercícios para que os alunos pudessem aprender fazer conversão de porcentagem para decimais. Foi mostrada aos alunos a utilização do "Fator de atualização" definido por DANTE(2005) como sendo a razão entre dois valores de uma grandeza em tempos diferentes (passado, presente e futuro).

(DANTE-2005)[15], em sua obra reforça que na divisão de dois valores quaisquer, só existem três resultados possíveis. Ou resulta 1, ou maior que 1, ou menor que 1. Quando o resultado da divisão é 1 significa que os dois valores são iguais, portanto, nenhum é maior que o outro. Um valor é 100% do outro. Por isso diz-se que o fator é igual a 1, fator neutro. Para um melhor entendimento pode-se fazer a divisão do "valor novo" pelo "valor velho" resultando em um fator (f), caso f seja maior que 1 tem-se um aumento, caso seja menor que 1 ocorre um desconto e se for igual a 1 não há variação. Por exemplo $\frac{A}{B} = 1,05$ pode-se entender de duas formas diferentes: primeiro, A é 5% maior que B ou A é 105% de B (portanto 5% maior). A técnica usada para este fim, foi a aula expositiva, apesar das críticas, é a mais usada no dia-a-dia da sala de aula. Na aula expositiva, se enfatizou, buscando os seus aspectos positivos e a melhor forma de utilizá-la.

3.4 Da Teoria à Prática

Foi sugerido a uma parte dos alunos que formassem grupos de três e no máximo quatro integrantes, de preferência os que morassem próximos um do outro para fazer uma pesquisa de campo. A Pesquisa consistia de em grupos de três ou quatro que fossem (fora do horário de aula), a dois supermercados diferentes ou mercearias e fizessem levantamento de preços de quinze ítens da cesta básica e anotassem em uma folha de papel para trazer na aula seguinte, e que viessem munidos de calculadoras simples. Para a outra parte foi sugerido que trouxessem jornais, revistas, *folders* promocionais, que contivessem temas relacionados com Matemática Financeira e porcentagem.

Na aula seguinte, pediu-se que os grupos se reunissem e de posse dos dados coletados construíssem uma tabela das tomadas de preços. Em seguida solicitou-se que calculasse as diferenças de preços desses produtos nos dois supermercados ou mercearias em termos percentuais e fizessem em seguida, uma análise de quais produtos do supermercado ou mercearia eram mais vantajosos de comprar.

Para a outra parte do grupo, foi solicitado que escrevessem nos cadernos as impressões e os conhecimentos que eles tinham diante das reportagens de jornais, *folders* promocionais e revistas para saber se os conteúdos em discussão, Matemática Financeira e Porcentagem tinham alguma relação com o seu cotidiano, cuja ação foi registrada como mostra a (Figura 3.1).

 

Figura 3.1: Alunos trabalhando com os *folders* promocionais

Estes trabalhos também foram recolhidos para análise do professor. Foram analisados mediante os seguintes critérios: Compreensão e entendimento; Familiaridade com o conteúdo de porcentagem. Após a análise dos trabalhos, os resultados foram levados para discussão entre o professor e cada grupo em sala de aula. Cada grupo apresentou sua conclusão na sala de aula aos outros grupos.

Em outro momento, findando as aplicações das propostas de ação desse trabalho, foram apresentados para os alunos outros cinco problemas envolvendo Matemática Financeira e Porcentagem, de caráter e contextos semelhantes àqueles cinco, anteriormente, apresentados no primeiro momento aos alunos (considerada como segunda atividade avaliativa):

1) Um funcionário recebeu um reajuste salarial de 15%. Quanto passará a receber se o seu salário atual é de R$ 750,00?

2) Um aluguel de uma casa passou de R$ 450,00 para R$ 504,00. Qual foi a porcentagem de aumento?

3) Um vendedor tem 3% de comissão nos negócios que realiza. Qual foi sua comissão em uma venda de R$ 36.000,00?

4) Paulo prestou um serviço para uma empresa no valor de R$ 800,00. Quanto ele receberá se sofreu um desconto de 5% devido ao Imposto Sobre Serviços (ISS) tributado pelo Município?

5) Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: À vista com 5% de desconto ou a prazo com acréscimo de 10%. Por quanto sairá um artigo que custa R$ 180,00:
a) À vista
b) A prazo?

A aplicação desta Segunda Atividade foi com o intuito de fazer uma comparação com os resultados obtidos da Primeira Atividade e assim poder tirar algumas conclusões referentes aos questionamentos previamente levantados.

3.5 Considerações e Ponderações Procedimentais

Ao implantar esta ação nessa turma, foram feitas algumas adaptações no tocante aos conteúdos ministrados em sala de aula. O conteúdo que estava sendo ministrado era Progressão Aritmética e na seqüência, Progressão Geométrica, (que são componentes dos juros simples e juros compostos da Matemática Financeira), foi feita esta adaptação com a concepção que não causaria prejuízos para o aluno; uma vez que o conteúdo Matemática Financeira faz parte do currículo da segunda série do Ensino Médio, apenas foi feita uma antecipação de um conteúdo sem perder a idéia de continuidade.

Com relação à participação dos alunos foi bastante satisfatória, visto que quase todos se empenharam na formação dos grupos para a coleta dos preços, criação da tabela e nos cálculos de Porcentagem, isso após a promessa de que valeria ponto extra é claro! O que deixou a desejar, foi o fato de que a escola não possuía uma sala de informática com computadores, para que os alunos pudessem representar os dados tabelados em gráficos com uma maior precisão e usufruir de mais um dos benefícios das novas tecnologias; porém, isso não afetou ou desviou do foco principal que era a aprendizagem da Matemática Financeira por parte dos alunos.

No geral, foi muito gratificante porque os alunos sentiram que conteúdo Matemática Financeira realmente faz parte do seu cotidiano e que tiveram uma abordagem desse tema de uma forma diferente, mais atrativa, participativa e contextualizada.

3.6 Resultados e Discussões

Neste tópico será feita uma amostragem do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, que tem como objetivo contribuir com uma pequena parcela de informação dentro do contexto educacional da disciplina em discussão onde possa de, certa forma, favorecer no processo ensino-aprendizagem da Matemática e a aplicação dos seus conteúdos, principalmente Matemática Financeira e seus usos nos problemas do dia-a-dia, de uma maneira criativa e simples.

As atividades utilizadas aqui como elementos constitutivos dessa enquete são as mencionadas nos parágrafos anteriores, como: primeira e segunda atividades avaliativas. O material produzido pelos alunos foi utilizado como instrumento de registro de uma experiência empírica simples, desenvolvida em sala de aula, sob um olhar crítico e avaliativo nas atividades e métodos desempenhados pelos alunos, com base na proposta da Pesquisa-ação. As atividades consistiram da resolução de problemas, vinculadas ao cotidiano de forma simples.

Os resultados serão apresentados em tabelas e gráficos, onde os valores de referências estarão propositadamente inseridos em termos percentuais, forma de privilegiar e valorizar o tema focal desse trabalho. Na (Tabela 3.1), intitulada de Primeira Atividade Avaliativa, indica as cinco questões aplicadas a um grupo de 37 alunos no primeiro momento e os respectivos valores percentuais de acertos, erros e questões em branco, seguida do gráfico correspondente ver (Figura3.2). Esta atividade pode ser considerada como uma avaliação diagnóstica.

PRIMEIRA ATIVIDADE AVALIATIVA

Questão	% de Acertos	% de erros	% em Branco
1	73	24	3
2	11	89	0
3	35	65	0
4	48	52	0
5	42	58	0

Tabela 3.1: Primeira Atividade Avaliativa
Fonte:Dados da prórpia pesquisa (outubro/2013)

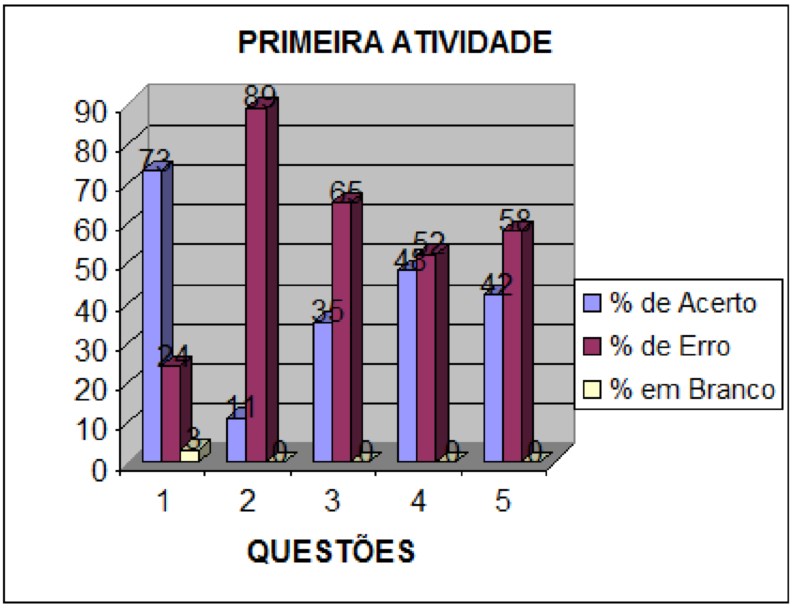

Figura 3.2: Resultados da Primeira Atividade

Observando os resultados obtidos na primeira atividade avaliativa, mostrados na (Tabela 3.1) e (Figura3.2), tinha-se uma grande expectativa na quantidade de acertos e erros, pois a partir desses resultados teria uma resposta a indagação feita inicialmente: se esse grupo de alunos sabiam resolver problemas simples, envolvendo Matemática Financeira associados ao seu dia-a-dia? Percebe-se que a quantidade de erros foi maior do que o número de acertos em 80% das questões aplicadas. Com base nestes resultados, que não foram satisfatórios, novas abordagens de ensino foram aplicadas, como a contextualização, resolução de problemas contextualizados, aplicação de problemas desafiadores como sugere (ZABALA)(1998)[14], trabalho de pesquisa de preços em supermercados e mercearias, já descritas anteriormente nas ações procedimentais.

Na (Tabela 3.2), intitulada de segunda Atividade Avaliativa indica as cinco questões de caráter e contexto semelhantes às primeiras, aplicadas a um grupo de 33 alunos no momento final, cujos respectivos valores percentuais de acertos, erros e questões em branco, são:

SEGUNDA ATIVIDADE AVALIATIVA			
Questão	% de Acertos	% de erros	% em Branco
1	79	21	0
2	85	15	0
3	76	24	0
4	82	15	3
5	79	18	3

Tabela 3.2: Segunda Atividade Avaliativa
Fonte:Dados da própria pesquisa (outubro/2013)

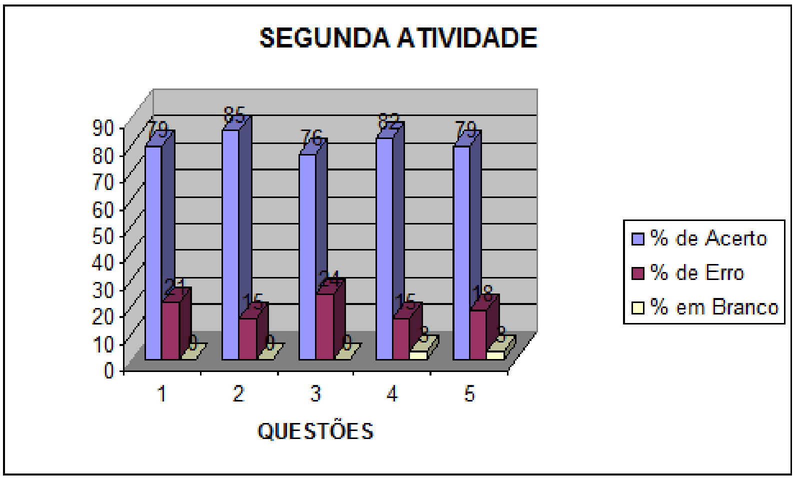

Figura 3.3: Resultados da Segunda Atividade

Observando atentamente os resultados da (Tabela 3.2) e da (Figura 3.3) nota-se que são realmente surpreendentes, pois mostraram uma sensível e significante melhora em relação aos resultados da primeira atividade. Percebe-se, no entanto que o número de acertos superou em todas as questões o número de erros, revertendo drasticamente assim, o quadro de valores insatisfatórios da primeira atividade.
Diante dos dois resultados pode-se concluir que realmente houve uma melhora sensível após as aplicações das ações pedagógicas, fazendo com que os objetivos gerais e específicos desse trabalho fossem contemplados efetivamente. Os objetivos traçados ao elaborar o projeto em grande parte foram atendidos no decorrer do processo, entre eles destacamos:

- Implantar alternativas que favoreçam um melhor desempenho dos alunos em Matemática Financeira.

- Calcular o valor de um aumento ou desconto de x% sobre um determinado valor.

- Determinar o valor total de uma quantia após um aumento de x%.

Com isso não se deve dar-se por satisfeito, visto que foi trabalhado apenas um conteúdo matemático, espera-se que sejam apreciados outros conteúdos e na medida do possível, procurar apresentar outras novas propostas pedagógicas para propiciar condições aos alunos de exercitar cada vez mais a sua cidadania.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como se sabe a Matemática surgiu para suprir as necessidades do homem. Desde o início, sempre esteve presente no dia-a-dia do homem, foi usada como uma excelente ferramenta para resolver problemas ligados ao cotidiano das pessoas.

Este trabalho foi concebido com o objetivo de contribuir com uma pequena parcela de informação dentro do contexto, no qual está inserido o tema central ou o foco dessa pesquisa que é a Matemática Financeira no cotidiano do aluno. E que de certa forma venha levar professores, escolas e alunos, para uma discussão mais ampla sobre a questão do ensino de Matemática como um todo; pois só com a educação, sem dúvida, é o caminho mais eficiente para se alcançar uma melhor qualidade de vida e para determinar a formação do cidadão.

Há também que se precaver no sentido de não dificultar as coisas, ou seja, evitando exemplos complicados que, ao invés de facilitar o aprendizado, possam acabar desestimulando os alunos. No interesse de contribuir com o processo ensino-aprendizagem do aluno no Ensino Médio, apresentamos algumas considerações:

- O uso adequado das tecnologias pode favorecer o ensino-aprendizagem da Matemática, além de preparar o aluno para a inserção numa sociedade atual, que utiliza diversas tecnologias.

- Para o exercício pleno da cidadania é necessário trazer para a sala de aula o cotidiano do aluno.

- Utilizar problemas desafiadores na introdução dos tópicos Matemáticos

- Aplicar exercícios contextualizados.

- Utilizar na medida do possível às propostas sugeridas pelos PCN e pelas DCNEM que propõem uma educação básica voltada para o desenvolvimento da cidadania e para a qualificação do trabalho

Portanto, espera-se que este trabalho possa deixar uma contribuição e um caminho para novos acréscimos de sugestões, visando sempre a melhoria na qualidade do ensino e na aprendizagem da disciplina Matemática, em qualquer grau de ensino. E que a Matemática não seja ensinada para aprovar alunos nos vestibulares e ENEM, seja ensinada para aprovar o aluno na vida, tornando-o um cidadão completo como um todo e em todos os aspectos.

Bibliografia

[1] MACHADO, Nilson José, *Epistemologia e Didática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*, 6.ª ed., São Paulo: Cortez, 2005. xviii, lxviii

[2] MORGADO, Augusto César. Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio. Vídeoaula disponível para download em: http://video.impa.br/index.php page=janeiro-de-2010-2. Acesso em 09/01/2013 . Fonte: Blog Manthano. (http://manthanos.blogspot.com) xxxv

[3] MACHADO2000, Nilson José; *Epistemologia e Didática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente , 4ª ed. , São Paulo, editora Cortez,, ano , 2000 .* lxxii

[4] GONÇALVES, Jean Piton; *A História da Matemática Comercial e Financeira*; http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php. Acessado em 18/01/2014, as 09:00 h. xxiii

[5] D'AMBRÓSIO, Ubiratan D'Ambrósio; *A Influência da Tecnologia no Fazer Matemático ao Longo da História*; http://professorubiratandambrosio.blogspot.com.br/2011/02/influencia-da-tecnologia-no-fazer.html. xix

[6] D'AMBRÓSIO, Ubiratan D'Ambrósio; *DO SABER MATEMÁTICO AO FAZER PEDAGÓGICO. O DESAFIO DA EDUCAÇÃO; II ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO,* , Conferência de abertura, Macaé, RJ, 21/10/99. lxiv

[7] LAUREANO, José Luiz, Olimpio Vissoto Leite; *Os Segredos da Matemática Financeira*, 1.ª ed., São Paulo: Ed. Ática, 1987. liv, lv

[8] HAZZAN, Samuel, Pompeo, José Nicolau; *Matemática Financeira: Métodos Quantitativos*, 3.ª ed., São Paulo: Atual Editora, 1988. xxxii, xxxiv, xxxvi, xlii

[9] LIMA, Elon Lages, MORGADO, Augusto César; et al; *TEMAS E PROBLEMAS ELEMENTARES*, Rio de Janeiro: SBM, 2005. xxx, xlvii

[10] IMENES; Luiz Marcio; LELIS, Marcelo; *A Matemática e o Novo Ensino Médio, ,Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática; São Paulo, Agosto /2001. p.40-49* lxi

[11] BRASIL; Ministério da Educação *Parâmetros Curriculares Nacionais.,Brasília MEC/SEF, 1999.* lxi

[12] KUENZER; Acácia Zeneida (Org.) *Ensino Médio: Construindo uma proposta para os que vivem do trabalho.;2ª ed., São Paulo: Cortez, 2001.* lxii, lxvii

[13] ROMANATTO, M. C; *A noção de número natural em livros didáticos de Matemática: comparação entre textos tradicionais e modernos Dissertação (Mestrado) – São Carlos / S.Paulo: Universidade Federal de São Carlos, 1987* lxix, lxx

[14] ZABALA, Antoni; A prática educativa.; Porto Alegre: ARTMED, 1998. lxxiv, lxxix

[15] DANTE. Luiz Roberto; *Matemática Contexto e aplicações*; Volume Único, 2ª ed., S. Paulo: Ática, 2005. lxxvi

[16] DANTE-2011. Luiz Roberto; *Manual Pedagógico do Professor do livro Matemática Contexto e aplicações*; Volume 1, 1ª ed., S. Paulo: Ática, 2011. lxvi

[17] GIL, Antonio Carlos; *Como elaborar projetos de pesquisa*; 3ª ed., São Paulo: Ed. Atlas, 1991. lxxiii

[18] THIOLLENT, Michel. *Metodologia de pesquisa-ação*; São Paulo, Ed. Cortez, 1985. lxxiii

[19] SCHINEIDER; Ido José; *Matemática financeira: um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas* Dissertação (Mestrado) ; Passo Fundo -2008. lviii

[20] VERGASTA; Enaldo Silva; Marcia, Glória; Arlego; Jodália, *Financiamentos Utilizando o Excel, Encontro RPM 2011.* li

[21] http://www.bcb.gov.br/?APLICACOESFAQ; (Acessado em 21 de março de 2014)