Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Construção dos Números Reais

Noções fundamentais e sugestões ao Ensino Básico

por

Welton de Souza Dutra

Mestrado Profissionalizante em Matemática – Ilhéus/BA

Orientador:

Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva

Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes obtido através da SBM.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Construção dos Números Reais

Noções fundamentais e sugestões ao Ensino Básico

por

Welton de Souza Dutra

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva

Ilhéus/BA
2014

WELTON DE SOUZA DUTRA

Construção dos Números Reais

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 25 de abril de 2014.

Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva (UESC)

Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira (UESC)

Prof. Dr. Jailson de Araújo Rodrigues (IFBA)

Ilhéus - 2014

DEDICATÓRIA

Para minhas filhas Naylla e Laura. Para minha esposa Nelciane. E especialmente para os meus pais, Joaquim Lopes e Ana Torres, que bem souberam apontar o caminho cheio de desafios para as nossas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva, por ter aceitado orientar este trabalho, por ter sido o professor desta disciplina e ter dado criteriosas sugestões e pistas, que foram fontes fundamentais nesta investigação.

Ao Prof. Dr. Jailson de Araújo Rodrigues que prontamente aceitou participar da banca como orientador externo e também por ter sido meu professor no curso de Licenciatura em Matemática.

Ao Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira por ter ministrado criteriosamente a disciplina álgebra linear e ter aceitado participar desta Banca.

Ao Prof. Dr. Sérgio Mota Alves e ao Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa, por coordenarem este curso com seriedade e organização, garantindo bolsa a todos os cursistas.

À Universidade Estadual de Santa Cruz, nomeadamente ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, pelas condições de trabalho que me proporcionou.

Ao professor Mário Sérgio Alves dos Santos, pela valiosa contribuição em resgatar a história dos números me informado as fontes de pesquisa. Ao professor Alexandre Amaral Silvares pela leitura minuciosa do trabalho e pelas sugestões.

Agradeço a todos os professores do curso e aos tutores. Para Rosana Queiroz, secretária do PROFMAT/UESC, que nos atendeu com benevolência e presteza.

À minha família, em especial, aos meus pais Joaquim Lopes Dutra e Ana Torres de Souza Dutra, que fizeram todo o esforço para que seus filhos estudassem. À minha Esposa Nelciane por me apoiar nesta jornada durante estes dois anos. Para Naylla e Laura, minhas maravilhosas filhas, fonte de inspiração.

Para todos os meus colegas de curso, em especial aos colegas Alexandre Amaral Silvares, Danilo Porto Rusciolelli, Ivanildo Rocha Porto e Gedeilton Santos Maciel, que foram mais que colegas de curso, se tornaram verdadeiros amigos e companheiros de viagem.

Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.
Linha é o que tem comprimento sem largura.
As extremidades da linha são pontos.
Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.
Superfície é o que tem comprimento e largura.
As extremidades da superfície são linhas.
Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma tinha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

Os Elementos - Livro I - Euclides

RESUMO

A Construção dos Números Reais

Noções fundamentais e sugestões ao Ensino Básico

Utilizamos pesquisa descritiva, explicativa, com caráter bibliográfico, para investigar e conceituar o papel do conjunto dos números reais e a sua construção dentro dos modelos numéricos que estão nos compêndios de matemática do Ensino Básico. Inicialmente fizemos um breve retrospecto histórico sobre a construção dos números mostrando a matemática como uma ciência construída pelo homem para contar, medir e descrever as formas no espaço. Apresentamos noções preliminares de conjuntos, cardinalidade, funções, corpos e sequências. Fizemos uma breve apresentação axiomática dos números naturais a partir dos axiomas de Peano. Definimos as operações através do princípio da indução e apontamos as suas características principais. Em seguida fizemos uma ampliação do conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros através de uma relação de equivalência para que seja definida a operação de subtração. Com a finalidade de introduzir a divisão fizemos a ampliação do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais, também através de uma relação de equivalência. O ponto culminante do trabalho é a delicada passagem dos números racionais para os números reais. Richard Dedekind faz a ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais utilizando os cortes de Dedekind, enquanto Cantor utiliza as sequências de Cauchy para fazer esta mesma ampliação. Finalmente, conhecendo as etapas da construção dos números reais, é importante que este seja caracterizado como um corpo ordenado e completo.

Área de concentração: Matemática

Palavras-chave: Números Reais, Cortes de Dedekind e Sequências de Cauchy, Corpo Ordenado Completo

ABSTRACT

The Construction of Real Numbers

Fundamental concepts and suggestions to the Basic Education

We used descriptive and explanatory research with bibliographical, to investigate and conceptualize the role of the set of Real Numbers and its construction within the numerical models that are in mathematics textbooks for basic education. Initially we did a brief historical retrospect on the construction of Numbers showing Mathematics as a Science Constructed by man to count, measure and describe the shapes in space. We present preliminary notions of sets, cardinality, functions, sequences and bodies. We made a brief presentation of the axiomatic natural numbers from the Peano axioms. We define the operations through the Principle of Induction and pointed its main features. Then we did an expansion of the set of natural numbers to the set of integers through equivalence relation so that the subtraction operation is defined. In order to enter the division did the expansion of the set of integers to the set of rational numbers numbers, also through an equivalence relation. The culmination of the work is the delicate transition of rational numbers to the real numbers. Richard Dedekind zooms the set of rational numbers to the set of real numbers using Dedekind cuts, while Georg Cantor uses the Cauchy sequences to make this same magnification. Finally, knowing the stages of construction of the real numbers, it is important that this be characterized as an ordered and complete field.

Area of Concentration: Mathematics

Keywords: Real Numbers, Dedekind cuts and Cauchy sequences, Sorted Full Field

LISTA DE SÍMBOLOS

Os principais símbolos utilizados neste trabalho são:

Alfa	α
Beta	β
Conjunto dos Números Inteiros	$\mathbb{Z}$
Conjunto dos Números Irracionais	$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
Conjunto dos Números Naturais	$\mathbb{N}$
Conjunto dos Números Reais	$\mathbb{R}$
Conjunto dos Números Racionais	$\mathbb{Q}$
Connjunto Vazio	$\varnothing$
Está contido	$\subset$
Equivale a	$\sim$
Infinito	∞
Interseção	$\cap$
Menor que ou igual a	$\leqslant$
Ômega	ω
Pertence a	$\in$
União	$\cup$

LISTA DE SIGLAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional .... **PROFMAT**
Princípio Fundamental da Contagem .... **PFC**
Sociedade Brasileira de Matemática .... **SBM**
Teorema Fundamental da Aritmética .... **TFA**
Universidade Estadual de Santa Cruz .... **UESC**

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O fato é que a história dos homens avança juntamente com a história dos números. Os números com suas operações e o espaço com a sua geometria são os *objetos* de estudo da matemática. E não há que se negar que grandes feitos na ciência pós-moderna deve-se a avanços na matemática, em particular nestes dois ramos, teoria dos números e geometria. O embrião do projeto genoma, por exemplo, está na geometria do DNA, assim como a teoria atômica, é fundamentada na geometria do átomo. De modo que para sistematizar essa relação das grandezas e suas dimensões é que o homem foi criando os conceitos de contagem, medida e forma. Os registros iniciais desta história épica se perdem pelos longos séculos. Mas dos registros que ficaram, nota-se que o homem se ergueu de grande esforço para construir teorias para o entendimento de tais conceitos, originando assim os conhecimentos de geometria e aritmética.

As teorias tanto da geometria quanto da aritmética foram desenvolvidas independentemente em várias épocas e lugares. Este desenvolvimento se caracteriza por uma subdivisão cada vez mais crescente do conhecimento matemático, ao mesmo tempo que essas ramificações são unificadoras. Um teorema demonstrado na época de Tales de Mileto continua válido em nossos dias. As ideias do filósofo e matemático grego Eudoxo para esclarecer a controvérsia dos pitagóricos sobre a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário foi a mesma que Richard Dedekind utilizou para construir formalmente os números reais. Um teorema, uma vez demonstrado, será eternamente um teorema para os matemáticos de qualquer época. Então, na medida que os conceitos primitivos da matemática foram evoluindo, novas propriedades foram descobertas e novos desafios foram colocados. Isso exige então repensar sobre sua fundamentação.

As questões práticas e imediatas de que se ocupavam os homens antigos com a matemática é que foram verdadeiros *insights* para sua evolução teórica. A aceitação dos números irracionais, por exemplo, que foram descobertos na época da escola pitagórica e que desafiou a mente humana pelos milênios que se sucederam foi o embrião para a criação do conjunto dos números reais. Na época surgiu uma conceituação mesmo que imprecisa mas muito evoluída que culminou no desenvolvimento da geometria analítica e do cálculo diferencial e integral, que são os dois pilares da matemática contemporânea.

A geometria já havia recebido dos gregos uma fundamentação axiomática compatível e estruturada. O que ainda não havia sido feita com a aritmética. Esta discussão foi reaberta na metade do século XIX com a fundamentação mais rigorosa da noção de continuidade de funções. Nesta época a noção de número real não permitia demonstrar o teorema do valor intermediário, por exemplo. Esforços foram empreendidos no intuito de se aprofundar ainda mais em teoria dos números e coube a Richard Dedekind e Georg Cantor fazer a construção formalizada do conjunto dos números reais que, até o momento, atende aos desafios postos pelo desenvolvimento atual da matemática.

A importância de estudar os números reais se deve ao fato deste tema fazer parte da maioria dos conteúdos do Ensino Básico, e por que não dizer do Ensino Superior, onde o grau de formalidade é muito mais rigoroso. É claro também que para haver uma evolução na matemática é preciso que haja uma boa fundamentação em seus alicerces: os números e as figuras do espaço. A relevância do tema juntamente com a dificuldade de que se tem para ensinar os números reais no Ensino Básico é que se deve a esta abordagem que faremos nos capítulos que sucedem este trabalho.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1 é feita uma abordagem histórica com o objetivo de afastar esta visão anacrônica que se tem da matemática. É importante que se tenha noção do processo de evolução dos conceitos e porque não dizer da própria teoria. Este capítulo também serve como referência para a introdução dos números reais em sala de aula. A abundância de detalhes que a história da matemática nos oferece deve estar aliada ao processo de ensino-aprendizagem no Ensino Básico.

No capítulo 2 destacamos as definições preliminares para a leitura deste trabalho. Inicialmente os requisitos básicos são a compreensão da linguagem dos conjuntos, que facilita substancialmente a comunicação das ideias matemáticas. A relação de equivalência, que é a ferramenta que vamos nos apoiar para expandir os números naturais para os inteiros e dos inteiros para os racionais. É de fácil compreensão e é com ela que vamos chegar até o corpo dos racionais. Um pouco da noção de funções para podermos construir o conjunto dos números naturais através da função sucessor, para estabelecermos a relação biunívoca entre conjuntos analisando a cardinalidade entre eles. E finaliza com a noção fundamental sobre corpos, que é a máxima atribuída ao conjunto dos números reais: um "Corpo Ordenado Completo".

No capítulo 3 construímos minuciosamente o conjunto dos números naturais a partir dos axiomas de Peano. Estabelecemos o princípio da indução para definir recursivamente as operações de adição e mulplicação. Expandimos o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros através de uma relação de equivalência com o objetivo de dar sentido matemático a todas as expressões do tipo $a-b$ com $a, b \in \mathbb{N}$. De modo análogo, fizemos a ampliação do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais também através de uma relação de equivalência para dar sentido matemático a toda expressão do tipo $a \cdot X = b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Neste capítulo estudamos também as principais propriedades dos conjuntos dos naturais, inteiros e racionais, bem como estabelecemos a relação de ordem. Em algumas passagens demonstramos minuciosamente os resultados, em outras remetemos o leitor para consultar as referências citadas neste trabalho.

O capítulo 4 é o principal deste trabalho. Tudo o que foi feito nos capítulos anteriores almejava chegar na transição do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais. Não há um motivo evidente para que façamos essa passagem dos racionais para os reais. Até o presente momento a utilização que se faz dos números é contar, quando a grandeza é discreta. Ou medir, quando a grandeza é contínua. Para contar, o conjunto dos números naturais é suficiente. E para medir, com uma precisão satisfatória, o conjunto dos números racionais exerce este papel muito bem. De forma que não necessitamos de uma ampliação evidente para o conjunto dos números reais. Mas esta ampliação existe, e já era sinalizada desde a época dos pitagóricos, com o ponto culminante da sua construção na segunda metade do século XIX, para suprir os avançados estudos do campo de Análise. É importante destacar o trabalho de dois matemáticos na ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais. Cantor fez a ampliação do conjunto dos números racionais para os reais através das Sequências de Cauchy. Já o Dedekind utilizou as ideias de Eudoxo (o matemático grego que tentou por fim na controvérsia pitagórica dos incomensuráveis), estabelecendo os números reais a partir dos chamados "Cortes de Dedekind".

No capítulo 5 coletamos e organizamos uma lista de problemas que podem despertar o interesse pelo aprofundamento sobre o estudo dos números reais. São situações instigantes que deixam o estudante curioso para achar uma solução. Apresentamos o problema da duplicação da área do quadrado e o problema da duplicação do volume do cubo. São problemas de cunho histórico, formulados pelos gregos antigos, que por sinal não conseguiram resolver. Tratamos também sobre a natureza das dízimas periódicas. Afinal, por que $0,999\cdots = 1$? utilizamos a soma de uma sequência que no Ensino Básico é conhecida como soma de uma PG. Abordamos uma questão que deixa curiosos professores de matemática do Ensino Básico. É o fato de justificar que dada a reta real e tivermos que "flechar"um número racional esta chance é muito pequena, ou seja, na reta real os irracionais aparecem com muito mais frequência.

CAPÍTULO 1

OS NÚMEROS REAIS NO DECORRER DA HISTÓRIA

É claro que apresentar uma história concisa da Matemática em um trabalho das dimensões deste é uma tarefa um tanto arriscada. Primeiro tem o problema de se dizer, com razoável precisão, quando foi que o homem descobriu os números, suas primeiras propriedades e as diversas operações que levaram à construção do edifício matemático do qual todas as pessoas, direta ou indiretamente, utilizam em suas atividades diárias. Em um segundo momento, também seria incorreto tentar dizer o nome de um local ou mesmo de uma determinada civilização que tenha contribuído, em maior ou menor grau de importância, com a preocupação pelo estudo dos números e de suas propriedades. Todavia, ainda assim, se pode traçar um breve histórico baseado no pensamento e nas realizações dos homens que contribuiram para o surgimento desta importante Ciência, fruto do pensamento humano.

1.1 Das Origens até Tales de Mileto

Para Eves (2002), ao se fazer um relato cronológico do desenvolvimento da Matemática, a questão de por onde começar se impõe. Deve se iniciar com as primeiras deduções sistemáticas em Geometria, tradicionalmente creditadas a Tales de Mileto, por volta de 600 a.C.? Ou se deve recuar mais no tempo e iniciar com a obtenção de certas fórmulas de mensuração feitas pelas civilizações pré-helênicas da Mesopotâmia e do Egito? Ou se deve recuar ainda mais no tempo e iniciar com os primeiros esforços tateantes feitos pelo homem pré-histórico visando à sistematização das ideias de grandeza, forma e número? Ou se pode dizer que a Matemática teve início em épocas pré-humanas com a manifestação de senso numérico e reconhecimento de modelos, embora muito limitadamente, por parte de alguns animais, pássaros e insetos? Ou mesmo antes disso, nas relações numéricas e espaciais das plantas? Ou até antes, nas nebulosas espiraladas, nas trajetórias de planetas e cometas e na cristalização de minerais em épocas pré-orgânicas? Ou será que a Matemática, como acreditava Platão[1], sempre existiu, estando meramente a aguardar sua descoberta?

O último questionamento é de grande interesse para o presente estudo: Será que a Matemática sempre existiu, estando meramente a aguardar a sua descoberta? Interesse este pautado no fato de que esta questão foi lançada por um estudioso grego, o que já revela que foi este povo da Antiguidade (os gregos) que se preocupou, mais amiúde, em estudar o pensamento matemático vigente e não apenas enxergar a Matemática como um Conjunto de Técnicas para a medição de terras, controle das populações de rebanhos ou mesmo para a elaboração de Calendários como faziam, preferencialmente, os habitantes da Mesopotâmia e os egípcios.

> A matemática grega é certamente uma dentre meia dúzia das supremas façanhas intelectuais da história humana. Pitágoras iniciou-a, não no sentido prático dos funcionários públicos da Babilônia e do Egito, mas em si mesma, como uma disciplina mental capaz de elevar a mente em altos níveis de ordem e clareza. Antes dele existiam apenas poucas regras isoladas em Geometria, concluídas empiricamente e sem nenhuma sugestão de que poderia haver relações lógicas entre elas. Pitágoras parece ter criado o modelo de definições, axiomas, teoremas e provas, segundo o qual a estrutura intrincada da Geometria é obtida de um pequeno número de afirmações explicitamente feitas e da ação de um raciocínio dedutivo rigoroso. (SIMMONS, 1987, p.673)

Ao se dar crédito ao que ensina Heródoto[2], havia certo faraó chamado Sesóstris que dividiu todas as terras do Egito dando a cada súdito um pedaço com a seguinte ordem: se as cheias derrubarem os marcos da terra e a colheita for prejudicada, que o agricultor se dirija ao faraó, exponha o seu problema, e este último enviará medidores que calcularão o imposto devido ao soberano com base no pedaço de terra que sobrou. Para Heródoto, então, as técnicas desenvolvidas pelos medidores egípcios, com um caráter prático de mensuração de terras, ou mesmo a construção de monumentos, acabaram chegando aos helenos com o nome grego de Geometria. Em outras palavras, isto significou para a civilização ocidental, a aquisição, por parte da Matemática, do espírito grego de análise e fundamentação sem

[1]Platão foi um pensador grego bastante original. Vivendo na Antiguidade grega clássica era oriundo de uma família de aristocratas atenienses e durante sua juventude foi bastante influenciado pelas palavras e atitudes do filósofo Sócrates. Consta-se que no pórtico de entrada de sua escola em Atenas podia ser lida a inscrição: Que aqui não entre quem não souber Geometria.

[2]Chamado de O pai da História Heródoto viajou bastante durante toda sua vida se interessando pelos costumes e pelo modo de vida dos povos que visitou. Foi em uma de suas viagens pelo Egito que aprendeu junto aos escribas a história acima mencionada

interesse nas aplicações práticas e imediatas, o que foi para a Matemática o mesmo que as asas são para os pássaros: um meio de voar mais alto.

Mileto, como se sabe, foi uma rica colônia grega situada na Jônia. Neste ambiente de profunda troca de conhecimentos entre povos e de intenso comércio se destaca a quase lendária figura de Tales[3] de Mileto. Este grego de ascendência fenícia, segundo consta, tornou-se um comerciante bem sucedido, mas que pouco antes disto realizou demonstrações matemáticas de importância considerável. O cálculo da altura da famosa pirâmide de Queóps é de sua autoria. Revela-se que para isto este apaixonado pela matemática fez comparar a sombra projetada por uma vareta de altura conhecida e fincada no solo com a sombra que era projetada, no mesmo instante, pelo famoso monumento. Observa-se então que só era desconhecida a altura da pirâmide. Mas que, por dedução, foi obtida pelo matemático. Para muitos nasce desta experiência, o popular Teorema de Tales, o qual afirma, em linguagem moderna, que duas retas transversais dividem um feixe de retas paralelas em segmentos proporcionais. Tales estudou também os triângulos e no dia em que descobriu que a soma de seus ângulos internos era 180 graus matou um boi em comemoração à sua descoberta. Foram, portanto, os esforços de Tales que acabaram por inaugurar uma Geometria de caráter dedutivo e que foi coroada com êxito por volta de 300 a.C. com os trabalhos do matemático grego Euclides que escreveu um Compêndio chamado Os Elementos.

1.2 Pitágoras de Samos

> Se Pitágoras permanece uma figura muito obscura isto se deve em parte à perda de documentos daquela época. Várias biografias de Pitágoras foram escritas na Antiguidade, inclusive uma de Aristóteles, mas se perderam. Outra dificuldade para caracterizar claramente a figura de Pitágoras provém do fato de que a ordem que ele fundou era comunitária, além de secreta. Conhecimento e propriedade eram comuns, por isso atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras, mas antes das contribuições dos pitagóricos, embora na Antiguidade fosse usual dar todo crédito ao mestre (BOYER, 1976, p.33)

É com Pitágoras de Samos (580 - 500 a.C.)que a Matemática passa a ficar mais parecida com o que seria nos próximos milênios: uma Ciência que busca o rigor, as provas lógicas, a confirmação e que demonstra, cada vez mais, uma confiança quase absoluta nos números como maneira de se descrever os diversos fenômenos da natureza. Enquanto Tales foi

[3] A história lembra sempre de Tales como o primeiro matemático no sentido real da palavra que é o de organizador original e sintetizador de linhas de pensamento. A Geometria Dedutiva é uma obra iniciada por ele.

homem de negócios, Pitágoras foi um místico e professor. Fundou uma espécie de ordem semi-secreta que ainda se encontra, ainda hoje, envolto em profundos mistérios.

Para os pitagóricos os números estavam na raiz primeira de todas as coisas e na explicação última da ordem do universo. Entendiam, portanto, os números da mesma maneira que um pesquisador moderno entende de átomos. Estudaram a relação entre o comprimento de cordas vibrantes quanto tensionadas em pontos específicos, pesquisaram o conceito de harmonia, acreditaram que todas as medidas poderiam ser expressas como a relação entre dois números inteiros quaisquer e sistematizaram o conhecido Teorema de Pitágoras[4].

Mas foi justamente o estudo das propriedades do triângulo retângulo que causou uma das maiores crises na seita pitagórica: pois se os lados do triângulo têm uma unidade qualquer de lado, o próprio Teorema de Pitágoras mostra que a medida da hipotenusa será $\sqrt{2}$ que não pode ser escrito como uma razão entre dois números inteiros. Assim, em meio a avanços e dilemas a Matemática pitagórica e ocidental seguia avançando rumo ao seu amadurecimento enquanto Ciência. Era necessário agora um sintetizador: Euclides.

1.3 Euclides, Arquimedes e Apolônio

O êxito de Euclides, como organizador de toda a Matemática conhecida em seu tempo, está no fato de que como estudioso da famosa Universidade de Alexandria soube, como poucos, trabalhar com demonstrações e provas rigorosas de tudo o que afirmou em seus livros. Tal procedimento fez com que a Matemática, a partir de então, se tornasse uma Ciência altamente rigorosa consigo própria. E, de certa maneira, este rigor nas provas e demonstrações encontra-se exatamente o mesmo após 2200 anos de Euclides.

Ele se preocupou, o tanto quanto era possível, em trabalhar com definições precisas. E destas construiu todo um universo matemático que, ao longo dos séculos, pareceu a todos os que estudavam totalmente acabado e perfeito. Tal universo seguiu reinando absoluto perante a humanidade nos muitos séculos seguintes sendo apenas ameaçado pelo surgimento das Geometrias Não-Euclidianas[5].

> Coube a Euclides a tarefa máxima de sintetizar em um único trabalho todo o conhecimento matemático do seu tempo. Com rigor científico e demonstrações que permaneceram inatacadas ao longo dos séculos Os Elementos de Euclides são uma pequena obra prima de exposição e argumentação. (SIMMONS, 1987, p.500).

[4]Certamente as propriedades dos triângulos retângulos já eram conhecidas por outros povos da Antiguidade, mas coube, contudo, aos pitagóricos o crédito histórico pela sistematização do seu estudo.

[5]Surgem da negação dos principais postulados da Geometria Euclidiana como o que afirma que por entre dois pontos colineares passam uma única reta. Na atualidade estas Geometrias têm encontrado interessantes aplicações como na Teoria da Relatividade proposta por Albert Einstein.

A história soube ser bastante simpática com este estilo de Euclides e Os Elementos serviram de base para o estudo de matemáticos de muitas gerações pós-euclidianas. Afirma-se, na verdade, que se excetuando apenas a Bíblia Sagrada, Os Elementos de Euclides são o livro com maior número de edições de toda a história da civilização ocidental. Sucedendo ao grande Euclides temos outros matemáticos de renome como, por exemplo, Apolônio de Perga. Apolônio viveu na mesma época que Arquimedes e é o iniciador de assuntos que desempenham importante papel na Matemática atual: a elipse, a parábola e a hipérbole. Infelizmente sua morte assinala o momento em que a Matemática grega começa o seu declínio. Percebe-se então que a Matemática era, nesta época, uma espécie de espelho fiel da realidade e aquele que a dominasse poderia ter, igualmente, o domínio absoluto do mundo físico. Conforme tão bem demonstrou a vida e principalmente as realizações de Arquimedes. Segundo Eves (2002), Arquimedes era natural da cidade grega de Siracusa, situada na ilha da Sicília, figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos e certamente foi o maior da Antiguidade. Nasceu por volta de 287 a.C. e morreu durante o saque de Siracusa em 212 a.C.. Era filho de um astronômo e desfrutava de alto prestígio junto ao rei Hierão (de quem fosse parente). Há registros segundo os quais ele esteve algum tempo no Egito, provavelmente na Universidade de Alexandria, pois contavam, entre seus amigos, Cônon, Dositeo e Erastóstenes. Os dois primeiros foram sucessores de Euclides e o último foi bibliotecário da Universidade. Arquimedes comunicou muitas de suas descobertas matemáticas a esses homens.

Talvez por ter sido a causa de profunda dor de cabeça aos generais romanos que tentaram se apoderar de Siracusa por cerca de dois anos, Arquimedes, o grande matemático, é lembrado por muitos historiadores de origem romana. Sendo abundantes os relatos de seus feitos intelectuais tanto no campo da Matemática, especialmente quando se tratava de desenvolver aplicações práticas como na tarefa de descobrir se a coroa do rei Hierão[6]era realmente de ouro puro ou na construção de dispositivos militares que manteram os romanos bem ocupados com relação a questão da já citada conquista de Siracusa.

Arquimedes aproximava-se então, em suas investigações sobre a natureza, de um físico moderno. Inaugurou a hidrostática, estudou as polias, alavancas e construiu um dispositivo interessante para a elevação de água que passou à história com o nome de Parafuso de Arquimedes[7]. Mas ele era inquestionavelmente um matemático. Tanto que ao que parece,

[6]Este rei era aparentado de Arquimedes e querendo saber, após ter entregado uma determinada massa de ouro ao ourives, se este a empregara total e justamente na confecção de sua nova coroa pediu a Arquimedes que encontrasse uma maneira de resolver o problema sem desmanchar a peça. Este último, por sua vez, encontrou a solução ao observar, durante um banho, que o volume de água deslocado por um corpo é exatamente o volume do mesmo. Imaginou então um jeito engenhoso de resolver o enigma da coroa. Feliz pela descoberta deste método excelente esqueceu-se de vestir e saiu gritando de alegria pelas ruas de Siracusa: Eurekha, eurekha!(achei, achei!).

[7]Além de sua habitual aplicação como bomba de água, o Parafuso de Arquimedes, encontrou na indústria moderna inúmeras aplicações como, por exemplo, nos elevadores de grãos das modernas colhe-

considerava suas realizações mecânicas como obras secundárias dentro de sua produção intelectual.

Arquimedes estudou muitas figuras geométricas. Também imaginou um jeito de representar os números extremamente grandes e refinou o método para encontrar o valor do número π sendo, por isso, considerado um dos precursores mais remotos do Cálculo Integral[8]. Arquimedes também é o que se pode chamar de um pesquisador moderno. Pois em uma época em que as comunicações ou mesmo os meios de transporte não contavam com a mesma eficiência da atualidade se correspondia, frequentemente, com seus amigos da Universidade de Alexandria comunicando a estes homens muitas de suas obras.

Os romanos foram um povo estéril em realizações matemáticas ao passo que foram bons e persistentes guerreiros. E sua persistência foi coroada com uma invasão e tomada bem sucedida da cidade de Siracusa. Ao dar crédito a maioria dos historiadores, o ancião Arquimedes morreu como viveu: mergulhado no estudo de importantes e interessantes problemas matemáticos. Desenhava figuras na areia quando um soldado romano o perturbou em seus racicínios. Após ter repreendido o soldado recebeu o golpe fatal. Marcelo, o general romano da invasão, ficou triste ao saber do ocorrido já que havia ordenado aos soldados que a vida de tão valoroso inimigo fosse poupada. Como já foi mencionado, os romanos não deram nenhum novo impulso na Matemática recebida dos gregos, sendo, portanto, muito provável que o ato de Cícero de mandar limpar o túmulo do grande Arquimedes tenha sido a única contribuição de um romano antigo para a Matemática.

1.4 A Matemática Árabe

O golpe de misericórdia na Matemática grega ocorreu em *10 de dezembro de 641d.C.*, quando a cidade de Alexandria, até então, último reduto do saber grego cai sobre o ataque dos muçulmanos. O imperio criado pelos árabes passa a se expandir muito e voltando-se para a Índia acaba por encontrar matemáticas menos aparentadas com a Geometria grega: álgebra e aritmética.

Na Índia os árabes se deparam com um símbolo completamente novo: *o zero.* E com as facilidades do cálculo efetuados apenas com dez símbolos. O reconhecimento de que estavam diante de um sistema de cálculo melhor do que o utilizado pelos gregos não demorou a vir e os chamados Algarismos Indo-Arábicos[9] passaram a se espalhar

tadeiras de cereais.

[8] Ramo da Matemática que usa a integralização (adição) das áreas de figuras inscritas como técnica para se descobrir a área real de uma figura maior (circunscrita). Atualmente a "integralização" tem aplicações nas mais vastas áreas do conhecimento humano desde a já citada descoberta do valor de uma área até chegar à Economia, Administração, Química, Física, Ciências Militares, etc.

[9] Descobertos pelos árabes durante suas incursões pela Índia se espalharam rapidamente por todo o império muçulmano facilitando, e muito, os cálculos convencionais.

por todo o mundo árabe e pelas nações por estes conquistadas. Um livro famoso foi o *Aldschebr Walmakabala* (Restauração e confronto) do matemático árabe *Mohamed Ibn Musa Alchwarizmi*[10] – foi o nome deste livro que acabou sendo traduzido entre os europeus com o nome de Álgebra.

1.5 A Matemática Europeia

Em solo europeu a matemática dos antigos gregos aliada à matemática dos hindus e árabes ressurgiu com força, mostrando do que era capaz nos trabalhos de Leonardo de Pisa. Em seu livro Liber Abaci ele ensina como resolver equações de 1º, 2º e 3º graus, o que era um avanço considerável para a matemática que acabava de sair da Idade Média. A álgebra vai se tornando mais formal, as letras passam ser utilizadas para representar números desconhecidos. Sinais como (+) e (-) aparecem nos trabalhos do alemão Jordanus Nemorarius só que com as letras m (minus) e p(plus). Michael Stifel é quem deu início a utilização do (+) e do (-) como é utilizado modernamente. Na europa, obra de renome foi a Álgebra Speciosa de François Viète[11] nela as letras já eram largamente utilizadas para representar os números, quantidades, pontos, retas e outros entes de natureza quantitativa ou geométrica.

> Sem dúvida foi na Álgebra que Viète deu suas mais importantes contribuições, pois foi aqui que chegou mais perto das ideias modernas. A matemática é uma forma de raciocínio, e não uma coleção de truques, como outros presumiam; no entanto a Álgebra durante o tempo dos árabes e o começo do período moderno não tinham ido longe no processo de libertação do uso de tratar casos particulares. (BOYER, 1976, p.208)

Foi, portanto Viète quem melhor contribuiu com o surgimento da Álgebra Moderna ao ver claramente as inúmeras aplicações deste ramo da matemática na resolução de diversos tipos de problemas. Todavia, couberam ainda a outros contribuições tão notáveis quanto as suas. O século XVI inaugura o nascimento da Geometria Analítica com os trabalhos de René Descartes[12] e Pierre de Fermat[13]. Tanto Descartes quanto Fermat não tinham a matemática como ponto central de suas vidas se o primeiro muito mais um filósofo e

[10]Um dos maiores nomes da matemática árabe foi um divulgador, em tempo integral, do sistema de numeração utilizado pelos hindus

[11]Não foi um matemático em tempo integral, todavia isto não o impediu de registrar seu nome entre um dos maiores matemáticos da história.

[12]Filósofo, cientista, militar e matemático. Descartes foi o modelo de um mundo cansado de aceitar um conhecimento acumulado e sem provas que era seguido apenas por tradição. *"Cogito, ergo Sun."*, costumava dizer.

[13]Como Viète, não era matemático por profissão. Suas pesquisas com números nos momentos de lazer já deram muito trabalho para gerações de matemáticos (basta lembrar-se do Último Teorema de Fermat).

o segundo um homem do legislativo. Ainda assim, a Geometria Analítica, contribuição máxima deixada de forma independente pelos dois, guiou os passos da matemática nos anos vindouros.

O século XVII surge como uma época dourada para o desenvolvimento da matemática, especialmente no que diz respeito a Álgebra. Novos ramos surgem, cabendo destacar a Análise. Pela mesma época Galileu Galilei[14] passa a utilizar fortemente a matemática na resolução de problemas de física o que culmina na invenção do Cálculo por Sir Isaac Newton e que também foi redescoberto de maneira independente por Leibniz.

A criação do Cálculo fez com que a matemática tivesse um desenvolvimento espetacular. Além das aplicações nos problemas decorrentes do estudo da natureza as demais ciências passaram a fazer uso desta ferramenta como instrumento para a análise e resolução de diversos problemas. Os avanços e as conquistas da matemática, nos vários campos do conhecimento humano, acabaram exigindo por parte dos matemáticos, uma revisão dos conceitos fundamentais desta ciência. O trabalho de revisão dos Fundamentos foi levado adiante por nomes como Cauchy, Lagrange, Abel, Hilbert, etc. Todos matemáticos de renome e cujas contribuições para a matemática se tornam inquestionáveis. Paralelamente surgiram outras geometrias que pela primeira vez questionavam os princípios da Geometria Euclidiana. O trabalho de Galois[15], somente publicado em 1846, deu origem a chamada “Teoria dos Grupos” e à denominada “Álgebra Moderna”, dando também grande impulso à teoria dos números. A Álgebra passou a ser utilizada, inclusive, para o estudo da Lógica. Tendo sido criada, então, a Lógica Matemática.

Durante toda esta evolução os dispositivos de cálculo não paravam de avançar. E o antigo ábaco, apesar de ainda muito utilizado em algumas partes do globo, cedeu lugar, pouco a pouco para os ossos de Napier, para os logaritmos, para as máquinas mecânicas de cálculo como as feitas por Pascal e Leibniz; para as réguas de cálculo e a partir de 1975 para as cálculadoras eletrônicas. Georg Cantor criou a Teoria dos Conjuntos que bem serviu para unificar os vários ramos da Matemática. A este ponto convém destacar que a Teoria dos Conjuntos de Cantor deu a matemática o aspecto de maior precisão e generalidade, pois, os conjuntos sustituíram as propriedades e as condições injetando uma álgebra própria tais como a reunião, interseção e a inclusão.

Atualmente a matemática com suas várias ramificações se encontra em seu momento de maior esplendor. Enquanto as aplicações práticas se multiplicam de um lado, por outro diversos conceitos abstratos são mais e mais pesquisados lembrando o interesse grego por

[14]Galileu Galilei fazia tanto uso da matemática em seu trabalho que chegou a dizer que sua Física não passava de uma Geometria.

[15]Apesar da morte prematura (em um duelo) Galois foi um matemático brilhante. Encontrou maneiras de resolver certas equações e de classificar aquelas que não podiam ser resolvidas com manipulações algébricas. Sua teoria dos grupos é peça chave para o entendimento da Álgebra Moderna.

uma Matemática Pura e despreocupada de aplicações imediatas e práticas o que leva um avanço maior ainda de toda a Ciência.

> Nenhuma bola de cristal seria capaz de revelar as linhas futuras do desenvolvimento da matemática, nem tampouco parece sensato, em vista do insucesso de tentativas do passado, arriscar predições a respeito do assunto. A história nos dá conta de áreas da matemática bastante ativas em determinados momentos que, subitamente, se apagaram e de outras que pareciam exauridas, mas que, de repente, voltaram a produzir com abundância. Isso sem falar na criação de campos novos e totalmente imprevistos como, por exemplo, as recentes teorias dos fractais e das catástrofes. Quem, no começo do século, poderia prever o progresso fantástico recente na área das calculadoras e dos computadores eletrônicos? (EVES, 2002, p.695)

O que é preciso esclarecer é que a Matemática possui um papel fundamental na era em que se vive. Todos os cientistas fazem o uso de suas ferramentas e é mediante ela que o cidadão comum consegue calcular o valor das prestações do novo apartamento; o quanto se deve depositar para se aposentar com uma certa quantia mensal e outros tantos números que tornam possível a vida em comunidade. Também os computadores devem ser um estímulo para que novos ramos se desenvolvam e áreas antes impossíveis se serem pesquisadas, devido ao volumoso trabalho de cálculo, podem finalmente serem melhor exploradas pelos matemáticos dos próximos anos.

CAPÍTULO 2

DEFINIÇÕES PRELIMINARES

2.1 Conjuntos

A teoria dos conjuntos foi desenvolvida por Georg Cantor[1] por volta do ano 1872. Dentre outras tantas contribuições dadas a matemática por essa teoria, destacam-se as definições precisas dos conceitos de *infinito* e *infinitésimo*. No início do século XX, a teoria de Cantor obteve um auxílio inestimável do matemático, filósofo e sociólogo inglês Bertrand Russell, que através da *teoria dos tipos* eliminou alguns paradoxos da teoria dos conjuntos.

Assumimos aqui que o leitor já tenha uma certa familiaridade com a *Linguagem dos Conjuntos*. A Matemática atual está formulada na linguagem de conjuntos, portanto sendo esta a mais fundamental, por ser a mais simples das ideias e por expressar todos os conceitos matemáticos. Vale notar que isto é algo bem recente, que matemáticos como Gauss, Cauchy e outros de sua época não utilizaram a linguagem de conjuntos em seus trabalhos. A importância da utilização da linguagem dos conjuntos na matemática é por esta trazer maior precisão e generalidade, onde condições e propriedades são substituidas

[1]**Georg Cantor** (1845-1918), pertencia a uma família de israelitas que imigrou de Portugal para a Dinamarca, fixando-se a seguir na Rússia. Cantor nasceu em Saint Pétersburg em 3 de março. Teve sua formação inicial na Rússia, mas sua educação foi feita na Alemanha a partir dos 15 anos. Contrariando os planos de seu pai, quem imaginava faze-lo engenheiro, resolveu dedicar-se à investigação científica. Foi aluno de Kummer, Weierstrass e Kronecher. Sofria de depressão profunda, falecendo na Alemanha em 1918. Teve a admiração de Dedekind, quem o estimulou a pesquisar matemática. Cantor investigou sobre a teoria dos conjuntos infinitos, definindo o conceito de cardinal ou potência de um conjunto, desenvolvendo a aritmética dos números cardinais dos conjuntos infinitos. No estudo das Séries de Fourier, encontrou inspiração para desenvolver sua teoria dos conjuntos. Semelhantemente a Dedekind, também, construiu uma teoria dos números reais, baseada na noção de sucessão de racionais. A ideia de Cantor aparece no estudo dos espaços métricos, enquanto a de Dedekinkd, poder-se-ia dizer que foram os construtores e organizadores da Análise Matemática do século XIX e início do século XX.

por conjuntos e operados por uma álgebra própria, tais como a união e a interseção. Linguagem de Conjuntos é um assunto tratado pelos compêndios de matemática logo no início do Ensino Médio, tal como é apresentado em [22].

2.1.1 Pertinência, Inclusão e Conjunto das Partes

Define-se um conjunto, de maneira ingênua, como uma coleção de objetos. Tais objetos, quando pertencem ao conjunto, são os seus elementos. Para exprimir que um elemento x pertença a um conjunto X, escreve-se $x \in X$. Para dizer o contrário, que x não pertence ao conjunto X, escreve-se $x \notin X$. Portanto, assim fica estabelecida a relação de pertinência de um elemento x sobre um conjunto X. Um conjunto X está bem definido quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário x pertence ou não a X.

Usa-se a notação $X = \{a, b, c, \dots\}$ para representar o conjunto X cujos elementos são os objetos $a, b, c, \cdots$. A maioria dos conjuntos encontrados em matemática não são definidos especificando-se um a um os seus elementos. O método mais frequente de definir um conjunto é por meio de uma propriedade comum e exclusiva dos seus elementos. Assim, por exemplo, se quisermos descrever o conjunto X dos números naturais pares onde sabemos que este conjunto possui infinitos elementos escrevemos:

$$X = \{x \in \mathbb{N};\ \ x \text{ é par}\}$$

Quando não há elementos para um conjunto $X = \{x \in X;\ x \text{ goza da propriedade } P\}$ que goze da propriedade P, então X não possui elementos. Tal fato define um conjunto vazio. Por exemplo:

$$X = \{x \in \mathbb{N};\ \ 1 < x < 2\} = \varnothing$$

Dados os conjuntos A e B, diz-se que A é subconjunto de B quando todo elemento de A é também elemento de B. Para indicar este fato usa-se:

$$A \subset B$$

Quando $A \subset B$, diz-se também que A é parte de B. Ou ainda que A está contido ou incluído em B. Esta relação se chama relação de inclusão.

É possível também, dado um conjunto X com n elementos, encontrarmos todos os subconjuntos de X, conhecido como o conjunto das partes de X como está apresentado em [22]. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, onde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são os elementos de X, temos a cada elemento x_i $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ pode pertencer ou não ao subconjunto dado. Logo há duas possibilidades para cada elemento x_i, que pelo Princípio Fundamental da

Contagem, como apresentado em [5], temos:

$$\underbrace{2.2.2.\cdots.2}_{nfatores} = 2^n \text{ subconjuntos}$$

2.1.2 União, Interseção, Diferença e Complementar

A união (ou reunião) de dois conjuntos A e B que indicaremos por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A ou a B. Representa-se a união por:

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ ou } \ x \in B\}$$

A interseção de dois conjuntos A e B, que indicaremos por $A \cap B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A e a B, respectivamente. Representa-se a interseção por:

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ e } \ x \in B\}$$

A diferença de dois conjuntos A e B, nessa ordem, que indicaremos por $A - B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A e não pertencem a B. Representa-se a diferença entre dois conjuntos A e B, por:

$$A - B = \{x;\ x \in A \text{ e } \ x \notin B\}$$

Não se exige que B esteja contido em A para formar a diferença $A - B$. Quando A e B são disjuntos, nenhum elemento de A pertence a B, portanto, $A - B = A$. Em qualquer caso, tem-se $A - B = A - (A \cap B)$.

Quando se tem $B \subset A$, a diferença $A - B$ chama-se o complementar de B em relação a A. Representa-se o complementar de B em relação a A por:

$$\mathcal{C}_A^B = A - B$$

Para demonstrar as propriedades da União, Interseção, Diferença e Complementar de dois ou mais conjuntos consulte [15], [16], [22], entre outras referências.

2.2 Par Ordenado e Produto Cartesiano

Definição 2.1. Seja A um conjunto. O *conjunto das partes* de A, ou *conjunto potência* de A, denotado por $P(A)$, é o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A.

Assim, por exemplo, se tomarmos $A = \{1, 2, 3\}$, temos:

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

Definição 2.2. Dados um conjunto não vazio A e $a, b \in A$, definimos o *par ordenado* (a, b) como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Observe que $(a, b) \subset P(A)$. Esta definição tem por objetivo tornar preciso matematicamente o conceito de par ordenado que, desde os anos finais do Ensino Fundamental, admitimos intuitivamente como *um par de objetos onde a ordem tem importância.*

Proposição 2.3. *Sejam A um conjunto e $a, b, c, d \in A$. Temos:*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Demonstração: Se $a = c$ e $b = d$, então é claro que $(a, b) = (c, d)$. Reciprocamente, suponhamos $(a, b) = (c, d)$, isto é, que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

Há dois casos a considerar:

1^0 **caso:** $a = b$. Nesta situação, $(a, b) = (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. Assim, nossa hipótese fica $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Então o conjunto $\{c, d\}$ é um elemento de $\{\{a\}\}$, logo só pode ser igual a $\{a\}$, o que acarreta $c = d = a$. Como $a = b$, obtemos $a = c$ e $b = d$.

2^0 **caso:** $a \neq b$. Analisemos então a igualdade $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$: Se fosse $\{a, b\} = \{c\}$, teríamos $a = b = c$, contradizendo a hipótese $a \neq b$. Logo $\{a, b\} = \{c, d\}$, de onde se pode concluir que $c \neq d$. Daí, o elemento $\{a\}$ não pode ser $\{c, d\}$, logo $\{a\} = \{c\}$, de onde obtemos que $a = c$. De $\{a, b\} = \{c, d\}$, como $b \neq a = c \neq d$, segue que $b = d$.

Definição 2.4. Dados os conjuntos A e B, denomina-se produto cartesiano, de A por B, ao conjunto $A \times B$ definido como a coleção de todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$. Representa-se simbolicamente por

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \;\; e \;\; y \in B\}$$

2.3 Relação de Equivalência

Dado um conjunto arbitrário A, indica-se por R uma relação em A e, para indicar que dois elementos $a, b \in A$ estão relacionados, escrevemos aRb.

Uma relação R tal que, para todo $a \in A$ vale aRa, diz-se reflexiva. Uma relação R diz-se uma relação simétrica se, para todo par de elementos $a, b \in A$, tem-se que: se aRb, então vale bRa. Finalmente, uma relação R diz-se transitiva se, para toda terna de elementos $a, b, c \in A$, tem-se que aRb e bRc, então, aRc. Um caso particularmente importante em matemática é o daquelas relações que verificam simultaneamente as três propriedades já citadas.

Definição 2.5. Uma relação binária R num conjunto A diz-se uma relação de equivalência se ela é reflexiva, simétrica e transitiva. Vamos utilizar o simbolo $(\sim)$ para indicar uma relação de equivalência. Utilizando adequadamente o símbolo apresentado, temos, uma relação binária num conjunto A, que indicaremos por $\sim$ diz-se uma relação de equivalência se, para quaisquer $a, b, c \in A$, tem-se que:

(a) *Reflexiva*: $a \sim a$

(b) *Simétrica*: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(c) *Transitiva*: $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Devido à propriedade transitiva, dada uma relação de equivalência $\sim$ num conjunto A, todos os elementos equivalentes a um elemento $a \in A$ são equivalentes entre sí. Por isso é razoável tentar agrupá-los em subconjuntos.

Definição 2.6. Seja A um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em A. Para cada elemento $a \in A$, chama-se classe de equivalência de a o conjunto

$$\mathcal{C}(a) = \{x \in A; x \sim a\}$$

Chamamos *Conjunto Quociente* de A por $\sim$ o conjunto formado por todas as classes de equivalência determinadas pela relação $\sim$ no conjunto A. Em símbolos, temos:

$$A/\sim\, = \{\mathcal{C}(a);\ a \in A\}$$

A importância de estabelecer as classes de equivalência é devido ao fato de que as diferentes classes de uma relação de equivalência num conjunto A nos fornecem uma decomposição de A em subconjuntos mutuamente disjuntos, não-vazios, cuja união é o conjunto A todo. De maneira recíproca, dada uma decomposição de A como união de subconjuntos mutuamente disjuntos, não-vazios, pode-se definir uma relação de equivalência em A cujas classes sejam, precisamente, os subconjuntos dados.

2.4 Funções e cardinalidade

O conceito de função é um dos mais amplos e unificadores de toda a matemática atual. Tal conceito se faz presente em praticamente todos os seus ramos tal como Álgebra, Geometria, Análise, Combinatória, Probabilidade, etc. Diversas noções importantes - das mais elementares às mais sofisticadas - admitem formulações em linguagem de funções. Mas isto não foi sempre assim, para se expandir e dar conta de toda esta generalidade, o conceito de função sofreu significativas mudanças ao longo do seu desenvolvimento histórico. Observe como era dada a definição por dois grandes matemáticos dos séculos XVIII e XIX, Leonhard Euler[2](1707 - 1783) e Bernhard Riemann[3](1826 - 1866), respetivamente:

> Uma função de uma variável é uma expressão analítica composta de maneira qualquer de quantidades variáveis e de números ou quantidades constantes. (L.Euler, 1748)

> Suponhamos que z seja uma quantidade variável que possa assumir, gradualmente, todos os possíveis valores reais, então, se para cada um desses valores corresponde um único valor da quantidade indeterminada w, então w é chamada uma função de z. Não faz qualquer diferença, se define-se a dependência da quantidade w da quantidade z como sendo arbitrariamente dada, ou como sendo determinada por certas operações das quantidades. (B. Riemann, 1852)

A notação mais abrangente e atual dada para o conceito de função pelos Bourbaki[4] é exposta na definição a seguir.

Definição 2.7. Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento

[2]Leonard Euler foi o mais importante cientista suíço e um dos três grandes matemáticos de nossa época(os outros dois foram Gauss e Riemann). Ele foi talvez o autor mais prolixo de todos os tempos e em qualquer área. De 1727 a 1783, seus escritos irromperam como uma fonte aparentemente inesgotável, constantemente acrescentando conhecimento a todos os ramos conhecidos da Matemática pura e aplicada, e também aos que não eram conhecidos até que ele os criou. Ele teve em média 800 páginas escritas por ano durante sua longa vida, e apesar disso nunca pareceu enfadonho. Durante os últimos 17 anos de sua vida, Euler sofreu de cegueira total, mas com a ajuda de sua poderosa memória e fértil imaginação e com auxiliares que por meio do ditado escreveram seus livros e artigos científicos, ampliou sua pródiga produção.

[3]Nenhuma grande mente do passado exerceu uma influência tão profunda sobre os matemáticos do século XX quanto Bernhard Riemann, o filho de um pobre clérigo do norte da Alemanha. Ele estudou os trabalhos de Euler e de Legendre quando ainda estava no curso secundário, e diz-se que ele dominou o tratado de Legendre sobre a Teoria dos Números em menos de uma semana. Mas ele era tímido e modesto, com pouca consciência de suas habilidades extraordinárias, tanto que aos dezenove anos foi para a Universidade de Göttingen com o objetivo de estudar Teologia e tornar-se também um clérigo. Felizmente, essa proposta vantajosa logo subiu-lhe à garganta, e com a permissão de seu pai mudou para a Matemática.

[4]falta pesquisar

$x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a *imagem* de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \longmapsto f(x)$ para indicar que f transforma x em $f(x)$.

Como ficou estabelecido acima, uma função é um terno constituído por elementos: *domínio, contradomínio e lei de associação* (segundo a qual os elementos do domínio estão associados aos do contradomínio). Para que uma função esteja bem definida, é necessário que estes três elementos sejam dados. Além disso, a lei de associação é definida arbitrariamente. Não é necessário que seja uma expressão matemática, basta somente satisfazer a duas condições fundamentais:

Existência: estar definida em todo elemento do domínio;

Unicidade: não fazer corresponder mais de um elemento do contradomínio a cada elemento do domínio;

Duas funções $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$ são iguais se, e somente se, $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Ou seja, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\}$$

Segue-se da definição de igualdade entre funções que duas funções são iguais, se e somente se, possuem o mesmo gráfico. Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja o gráfico de uma função $f : A \to B$, é necessário e suficiente que, para cada $x \in A$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x.

Uma função $f : A \to B$ chama-se *injetiva* quando, dados x, y quaisquer em A, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Uma função $f : A \to B$ chama-se *sobrejetiva* quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Uma função $f : A \to B$ chama-se *bijetiva* quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

2.4.1 Operações ou Leis de Composição Internas

Consideremos uma aplicação $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x, y) = x + y$. Dados dois números x e y naturais, ao par (x, y) a aplicação f associa sua soma $x + y$. Esta aplicação é conhecida como *Operação de Adição sobre* $\mathbb{N}$.

Seja a aplicação $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x \cdot y$, isto é, f associa a cada par (x, y) de números reais o seu produto $x \cdot y$. Esta aplicação é conhecida com o nome de *Operação de Multiplicação sobre* $\mathbb{R}$.

Sendo A uma coleção de conjuntos, consideremos a aplicação $f : A \times A \to A$ tal que $f(X, Y) = X \cap Y$, isto é, a aplicação que associa ao par de conjuntos (X, Y) a sua interseção $X \cap Y$. Esta aplicação é conhecida com o nome de *Operação de Interseção sobre A*.

Definição 2.8. Sendo A um conjunto não vazio, toda aplicação $f : A \times A \to A$ recebe o nome de *Operação sobre A* ou *Lei de Composição Interna em A*.

2.5 Noção fundamental sobre Corpos

Um *corpo* é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas *axiomas de corpo*, abaixo especificadas. A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$ sua soma $x + y \in K$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in K$. Os axiomas de corpo são os seguintes:

- Axiomas da Adição:

  Associatividade: quaisquer que sejam $x, y, z \in K$ tem-se $(x+y)+z = x+(y+z)$;

  Comutatividade: quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$;

  Elemento Neutro: Existe um único $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in K$;

  Simétrico: todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x+(-x) = 0$;

- Axiomas da Multiplicação:

  Associatividade: dados quaisquer x, y, z em K tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

  Comutatividade: seja quais forem $x, y \in K$, vale $x \cdot y = y \cdot x$;

  Elemento Neutro: existe um único $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in K$;

  Inverso multiplicativo: todo $x \neq 0$, no conjunto K, possui um inverso x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$;

- Axioma da distributividade

  Distributividade da multiplicação em relação à adição: Dados x, y, z quaisquer, em K, tem-se $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;

2.5.1 Corpos Ordenados

Um *corpo ordenado* é um corpo K, no qual se destacou um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos *elementos positivos* de K, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x+y \in P$ e $x \cdot y \in P$;

(2) Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: $x + 0$, $x \in P$ ou $-x \in P$;

Indicando por $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos $K = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os cojuntos P, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ chamam-se negativos.

Num corpo ordenado, se $a \neq 0$ então $a^2 \in P$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso, $a^2 = a \cdot a \in P$. No segundo caso $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in P$. Em particular, num corpo ordenado $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ é sempre positivo.

Num corpo ordenado K, escreve-se $x < y$, e diz-se que x é *menor do que* y, para significar que $y - x \in P$, ou seja, que $y = x + z$, onde $z \in P$.

Em particular $x > 0$ significa que $x \in P$, isto é, que x é positivo, enquanto $x < 0$ quer dizer que x é negativo, isto é, que $-x \in P$. Se $x \in P$ e $y \in -P$ tem-se sempre $x > y$.

A relação de ordem $x < y$ num corpo ordenado K goza das seguintes propriedades:

Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

Tricotomia: dados $x, y \in K$, ocorre exatamente uma das alternativas seguintes: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$;

Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in K$, tem-se $x + z < y + z$;

Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$, tem-se $x \cdot z < y \cdot z$. Se, porém, for $z < 0$, então $x < y$ implica $x \cdot z > y \cdot z$;

Para acompanhar as demonstrações basta consultar a página 67 de [16].

2.5.2 Imersão em K

Num corpo ordenado K, como $1 > 0$, temos $1 < 1+1 < 1+1+1 < \cdots$ e o subconjunto de K formados por estes elementos é, portanto, infinito. Mais precisamente, vamos mostrar como se pode considerar o Conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, naturalmente imerso em K.

Temporariamente, indiquemos com o símbolo $1'$ o elemento unidade do corpo ordenado K. Definamos uma função $f : \mathbb{N} \to K$ pondo $f(1) = 1'$, $f(2) = 1' + 1'$, etc. A maneira correta de definir f é por indução:

$$f(1) = 1' \tag{2.1}$$

$$f(m+1) = f(m) + 1' \tag{2.2}$$

Por indução, verifica-se que $f(m+n) = f(m) + f(n)$ e que

$$m < p \Rightarrow f(m) < f(p)$$

Assim, a função $f : \mathbb{N} \to K$ define uma bijeção do Conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais sobre um conjunto $\mathbb{N}' = f(\mathbb{N})$, formado pelos elementos: $1'$, $1' + 1'$, $1' + 1' + 1'$, etc. Costuma-se identificar $\mathbb{N}'$ com $\mathbb{N}$ e considerar os números naturais contidos em K. Isto é o que faremos. Temos $\mathbb{N} \subset K$ e voltamos a escrever 1, em vez de $1'$.

Dado o corpo ordenado K e considerando $\mathbb{N} \subset K$, como estamos fazendo, os simétricos $-n$ dos elementos $n \in \mathbb{N}$ e mais o zero ($0 \in K$) constituem um grupo abeliano[5], que se identifica com o grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Assim, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset K$.

Mais ainda, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, existe o inverso $n^{-1} \in K$. Podemos, portanto, nos referir ao conjunto formado por todos os elementos $m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n} \in K$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Este conjunto é um subcorpo de K, isto é, as operações de K quando aplicadas a elementos deste conjunto dão resultados ainda no conjunto. Trata-se do menor subcorpo de K. Com efeito, todo subcorpo deve conter pelo menos 0 e 1. Por adições sucessivas de 1, todo subcorpo de K deve conter $\mathbb{N}$. Por tomadas de simétricos, deve conter $\mathbb{Z}$ e, por divisões em $\mathbb{Z}$, deve conter o conjunto das frações $\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Evidentemente, este menor subcorpo de K identifica-se ao corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Logo, dado um corpo ordenado K, pode-se considerar, de modo natural, as inclusões

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$$

2.5.3 Intervalos

Num corpo ordenado K, existe a importante noção de intervalo. Dados $a, b \in K$, como $a < b$, usaremos a notação abaixo:

[5]Quando vale a comutatividade da soma em um grupo, este é chamado de grupo abeliano. Que neste caso, é claro $m + n = n + m$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in K; a \leq x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in K; a \leq x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in K; a < x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in K; a < x < b\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in K; x \leq b\} \\
(-\infty,b) &= \{x \in K; x < b\} \\
[a,+\infty) &= \{x \in K; a \leq x\} \\
(a,+\infty) &= \{x \in K; a < x\} \\
(-\infty,+\infty) &= K
\end{aligned}
$$

Quando considerarmos um intervalo de extremos a e b, vamos sempre supor $a < b$, com uma exceção que destacaremos agora. Ao tomarmos o intervalo fechado $[a,b]$ é conveniente admitir o caso em que $a = b$. O intervalo $[a,a]$ consiste em um único ponto a e chama-se *intervalo degenerado.*

Proposição 2.9. *Todo intervalo não-degenerado é um conjunto infinito.*

Demonstração: Basta observar o seguinte: num corpo ordenado K se $x < y$, então, $x < \frac{x+y}{2} < y$. Assim, se I for um intervalo contendo os elementos a, b, como $a < b$, podemos obter uma infinidade de elementos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ em I, tomando

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a+b}{2} \\
x_2 &= \frac{a+x_1}{2} \\
x_3 &= \frac{a+x_2}{2} \\
\cdots &= \cdots \\
x_n &= \frac{a+x_{n-1}}{2}
\end{aligned}
$$

Isto nos mostra que podemos inserir infinitos pontos em um intervalo $[a, b]$

$$a < \cdots < x_n < \cdots < x_3 < x_2 < x_1 < b$$

2.5.4 Conjuntos limitados e a propriedade arquimediana

Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se *limitado superiormente* quando existe $b \in K$ tal que

$$x \in X \Rightarrow b \geq x$$

Em outras palavras, tem-se $X \subset (-\infty, b]$. Cada $b \in K$ com esta propriedade chama-se uma *cota superior* de X.

De maneira análoga, $X \subset K$ diz-se *limitado inferiormente* quando existe $a \in K$ tal que

$$x \in X \Rightarrow a \leq x$$

Um elemento $a \in K$ com esta propriedade chama-se uma *cota inferior* de X. Tem-se, então, $X \subset [a, b]$.

Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se *limitado* quando é limitado inferior e superiomente, isto é, quando existem $a, b \in K$ tais que $X \subset [a, b]$.

Proposição 2.10. *Num corpo ordenado K, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente;*

2. *dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;*

3. *dado qualquer* $a > 0$ *em* K*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2)**:** Como $\mathbb{N}$ é ilimitado, dados $a > 0$ e $b \in K$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} < n$ e, portanto, $b < a \cdot n$.

(2) $\Rightarrow$ (3)**:** Dado $a > 0$, existe, em virtude de (2) um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > 1$. Então $0 < \frac{1}{n} < a$.

(3) $\Rightarrow$ (1)**:** Dado qualquer $b > 0$ existe, por (3) um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{b}$, ou seja, $n > b$. Assim, nenhum elemento maior que zero em K pode ser cota superior de $\mathbb{N}$. Evidentemente, um elemento menor do que ou igual a zero também não pode. Portanto, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Um corpo ordenado k chama-se *arquimediano* quando nele é válida qualquer das três condições equivalentes citadas na proposição 2.10.

CAPÍTULO 3

OS NÚMEROS NATURAIS, INTEIROS E RACIONAIS

3.1 Os Números Naturais

A ideia intuitiva de Número Natural é um dos conceitos mais antigos da matemática. É algo que retoma as civilizações primitivas da história. Apesar de ser uma ideia antiga, a sua evolução de uma noção intuitiva para um conceito mais elaborado foi progredindo muito lentamente. Apenas no final do século XIX, quando os fundamentos da matemática foram inteiramente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais elementares.

Uma exposição sistemática do Conjunto dos Números Reais utilizados no Ensino Básico e também no Ensino Superior pode ser feita a partir dos números naturais, através de sucessivas extensões do conceito de número: inicialmente amplia-se $\mathbb{N}$ para obter o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros; em seguida estende-se $\mathbb{Z}$, passando ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, deste se passa para cojunto $\mathbb{R}$ dos reais. Essa elaboração é bem instrutiva ao mesmo tempo que é um processo bem demorado. Inicialmente vamos descrever os números naturais através dos Axiomas de Peano. Os Axiomas de Peano exibem os números naturais como "Números Ordinais", ou seja, são objetos que ocupam lugares determinados numa sequência ordenada. Por outro lado os números naturais também podem ocorrer como "Números Cardinais", ou seja, como resultado de uma contagem. Do ponto de vista de Peano, os números naturais não são definidos. É apresentada uma lista de propriedades gozadas por eles e tudo decorre daí.

3.1.1 Axiomas de Peano

São dados, como objetos não-definidos, um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *Números Naturais* e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, valor que a função s assume no ponto n, é chamado o *sucessor* de n.

A função s satisfaz os seguintes axiomas:

(P1) $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é *injetiva*. Noutras palavras: $m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$. Ou ainda, dois números que possuem o mesmo sucessor são iguais.

(P2) $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ consta de um só elemento. Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama "um" e é representado pelo símbolo 1. Assim, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $1 \neq s(n)$. Por outro lado, se $n \neq 1$ então existe um (único) $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $s(n_0) = n$.

(P3) *(Princípio da Indução).* Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Um outro modo de enunciar o Princípio da Indução é dizer que seja P uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 gozar da propriedade P e se, do fato de um número natural n gozar de P puder-se concluir que $n + 1$ goza da propriedade P, então todos os números naturais gozam dessa propriedade. Uma demonstração na qual o axioma (P3) é empregado, chama-se uma demonstração por *indução.*

O Princípio da Indução é muito útil para demonstrar as proposições referente aos números naturais. Tão importante demonstrar as proposições por indução é saber definir os objetos indutivamente ou recursivamente. As definições por indução se baseiam na possibilidade de se iterar uma função $f : X \to X$ um número arbitrário, n, de vezes. Mais precisamente, seja $f : X \to X$ uma função cujo domínio e contradomínio são o mesmo conjunto X. A cada $n \in \mathbb{N}$ podemos, de modo único, associar uma função $f^n : X \to X$ de maneira que

$$\begin{aligned} f^1 &= f \\ f^{s(n)} &= f \circ f^n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Em particular, se chamarmos

$$\begin{aligned} 2 &= s(1) \\ 3 &= s(2) \\ 4 &= s(3) \\ &\cdots \\ n+1 &= s(n) \end{aligned} \tag{3.2}$$

temos:

$$\begin{aligned} f^2 &= f \circ f \\ f^3 &= f \circ f \circ f \\ f^4 &= f \circ f \circ f \circ f \\ &\cdots \\ f^n &= f \circ f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f \end{aligned} \tag{3.3}$$

Admitamos portanto que, dada uma função $f : X \to X$, sabemos associar, de modo único, a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, uma função $f^n : X \to X$, chamada a *n-ésima* iterada[1] de f, de tal modo que

$$\begin{gathered} f^1 = f \\ f^{s(n)} = f \circ f^n \end{gathered} \tag{3.4}$$

3.1.2 Adição de números naturais

Vamos utilizar o Princípio da Indução para definir a operação de adição no conjunto dos Números Naturais. Para isto, usando as iteradas da função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, define-se a adição de números naturais. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sua soma $m + n \in \mathbb{N}$ é definida por:

$$m + n = s^n(m) \tag{3.5}$$

Assim, somar m com 1 é tomar o sucessor de m enquanto que, em geral, somar m

[1] Observe que neste momento, apenas com os Axiomas de Peano, não seria possível definir f^n siplesmente como $f \circ f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n vezes) pois “n vezes”é uma expressão sem sentido no contexto dos Axiomas de Peano, que apresenta os números naturais apenas como números ordinais.

com n é partir de m e iterar n vezes a operação de tomar o sucessor. Em outras palavras, temos, por definição:

$$m + 1 = s(m) \tag{3.6}$$
$$m + s(n) = s(m + n) \tag{3.7}$$

Assim, se quisermos, poderemos dispensar a notação $s(n)$ para indicar o sucessor de n e usar a notação definitiva n+1 para representar esse sucessor. Segue-se com esta nova notação, que a igualdade 3.7 pode ser reescrita como

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1 \tag{3.8}$$

3.1.3 Propriedades da adição de números naturais

As propriedades formais da adição são relacionadas abaixo:

Associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$;

Comutatividade: $m + m = n + m$

Lei do corte: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$;

Tricotomia: dados $m, n \in \mathbb{N}$, exatamente uma das três alternativas podem ocorrer: ou $m = n$, ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$, ou, então, existe $q \in \mathbb{N}$ com $n = m + q$

Demonstração: Vamos demonstrar apenas a Associatividade, que assim como as demais, são feitas por indução. Seja X o conjunto dos números naturais p tais que $m + (n + p) = (m + n) + p$, para $m, n \in \mathbb{N}$. Da igualdade 3.8 vimos que $1 \in X$. Além disso, se $p \in X$, então

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n + p) && (3.9)\\ &= s(m + (n + p)) \\ &= s((m + n) + p) \\ &= (m + n) + s(p) && (3.10) \end{aligned}$$

Usamos a hipótese de que $p \in X$ e a definição de soma. E chegamos à conclusão de que

$$p \in X \Rightarrow s(p) \in X$$

Como $1 \in X$, conclui-se por indução que $X = \mathbb{N}$, isto é, $m + (n + p) = (m + n) + p$, quaisquer que sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$.

3.1.4 Relação de ordem

A relação de ordem em $\mathbb{N}$ é feita em termos da adição. Sejam os naturais m, n, diz-se que "*m é menor do que n*" para explicitar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Para expressar tal fato, escrevemos

$$m < n$$

Segue-se deste mesmo fato que "*n é maior do que m*" e expressa-se por

$$n > m$$

A relação de ordem em $\mathbb{N}$ goza das seguintes propriedades:

(P1) *Transitividade:* se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$;

(P2) *Tricotomia:* dados m, n, exatamente uma única alternativa das seguintes pode ocorrer: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$;

(P3) *Monotonicidade da adição:* se $m < n$ então, para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se $m+p < n+p$;

Vamos omitir as demonstrações aqui certo de que o faremos na oficina de aplicações em sala de aula. Observe ainda que $m < n$ significa que, para um certo $p \in \mathbb{N}$, temos

$$n = s^p(m)$$

Isto é, n é o sucessor de m tomando p iterações da função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

3.1.5 Multiplicação de números naturais

Do mesmo modo que a soma $m + n$ foi definida do resultado que se obtém quando se itera n vezes, a partir de m, a operação de tomar o sucessor, define-se o *produto* $m \cdot n$ como a soma de n parcelas iguais a m. De outra maneira, é o mesmo que adicionar a m, $n - 1$ vezes, o mesmo número m.

Em termos precisos, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $f_m(p) = p + m$ (f_m é a função "somar m"). Vamos utilizar esta função para definir a multiplicação de números naturais.

O *produto* de dois números naturais é definido assim:

$$m \cdot 1 = m \tag{3.11}$$
$$m \cdot (n+1) = (f_m)^n(m) \tag{3.12}$$

Deste modo, multiplicar um número m por 1 não o altera. Multiplicar m por um número maior que 1, ou seja, por um número da forma $n+1$ é iterar n vezes a operação de somar m, começando com m. Assim, por exemplo:

$$m \cdot 2 = f_m(m) = m + m$$

$$m \cdot 3 = (f_m)^2(m) = m + m + m$$

$$\cdots$$

$$m \cdot (n+1) = (f_m)^n(m) = \underbrace{m + m + m + \cdots + m}_{n+1 \quad parcelas}$$

Em relação à definição de $(f_m)^n$, o produto está definido por indução pelas seguintes propriedades:

$$m \cdot 1 = m \tag{3.13}$$
$$m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \tag{3.14}$$

3.1.6 Propriendades da multiplicação de números naturais

As principais propriedades que caracterizam o produto de números naturais são:

Associatividade: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;

Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$;

Lei do corte: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$;

Distributividade: $m(n+p) = m \cdot n + m \cdot p$;

Monotonicidade: $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$;

Demonstração: Seja X o conjunto dos números $p \in \mathbb{N}$ tais que $m(n+p) = m \cdot n + m \cdot p$ sejam quais forem $m, n \in \mathbb{N}$. Da igualdade 3.14 observa-se que $1 \in X$. Além disso, se $p \in X$, temos:

$$\begin{aligned}(m+n)\cdot(p+1) &= (m+n)\cdot p+m+n\\ &= m\cdot p+n\cdot p+m+n\\ &= m\cdot p+m+n\cdot p+n\\ &= m(p+1)+n(p+1)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Nas igualdades acima utilizamos a definição de produto, a hipótese de que $p \in X$, a associatividade e a comutatividade da adição. E concluímos que $p+1 \in X$. Assim, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m(n+p) = m\cdot n + m\cdot p$ para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$.

3.2 Os Números Inteiros

Esta seção objetiva dar sentido matemático a todas as expressões do tipo $a-b$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, de maneira a poder tratar como entes do mesmo conjunto tanto aquelas como $7-3$ quanto $3-7$, por exemplo. Nesse sentido convém observar primeiro que subjacente a cada "diferença" $a-b$ está o par ordenado $(a, b) \in \mathbb{N}$. Além disso é fácil ver que, por exemplo, a igualdade em $\mathbb{N}$, $5-3 = 9-7$ equivale a $5+7 = 9+3$. De uma maneira geral, se $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ e $c \geq d$, vale a equivalência:

$$a-b = c-d \Leftrightarrow a+d = c+b$$

Estas considerações, aliadas ao fato de que o conjunto dos inteiros a ser construído, deve ser uma ampliação de $\mathbb{N}$, ajudam a entender o caminho que tomaremos.

No conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ consideremos a relação definida da seguinte maneira: para quaisquer (a, b) e (c, d) em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a+d = b+c$$

Para a relação $\sim$ valem as propriedades:

a) Reflexiva, pois, como para todo $(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se verifica $a+b = b+a$, então $(a, b) \sim (a, b)$;

b) Simétrica, ou seja, se $(a, b) \sim (c, d)$, então $(c, d) \sim (a, b)$. De fato, $(a, b) \sim (c, d)$ implica em $a+d = b+c$. Mas isto equivale a $d+a = c+b$, que consequentemente $c+b = d+a$, o que implica em $(c, d) \sim (a, b)$.

c) Transitiva, pois, se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então $a+d = b+c$ e $c+f = e+d$; daí $a+d+f = b+c+f$ e $c+f+b = e+d+b$, o que implica $a+d+f = e+d+b$ e portanto $a+f = e+b$, ou seja: $(a, b) \sim (e, f)$.

Logo $\sim$ é uma Relação de Equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e, por conseguinte, determina uma partição neste conjunto em classes de equivalência. Para cada $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indicaremos por $\overline{(a, b)}$ a classe de equivalência determinada por $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim:

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (x, y) \sim (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x + b = y + a\}$$

O conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por $\sim$, ou seja, o cojunto de todas as classes $\overline{(a, b)}$, para qualquer $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, será indicado por $\mathbb{Z}$. Então:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = \{\overline{(a, b)} | (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

.

Por exemplo:

$$\overline{(4, 2)} = \{(2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3); \dots\}$$

$$\overline{(2, 4)} = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5); \dots\}$$

$$\overline{(1, 5)} = \{(0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7); \dots\}$$

É claro que:

$$\overline{(a, b)} = \overline{(c, d)} \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Em particular vale o seguinte: se $a \geq b$, então $\overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$, pois $a + 0 = (a - b) + b$; e se $b \geq a$, então $\overline{(a, b)} = \overline{(0, b - a)}$, uma vez que $a + (b - a) = b + 0$. Assim, se $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$, então $\overline{(a, b)} = \overline{(c, 0)}$ ou $\overline{(a, b)} = \overline{(0, c)}$, para algum $c \in \mathbb{N}$. E essa maneira de representar o elemento $\overline{(a, b)}$ é única pois, por exemplo, se $\overline{(c, 0)} = \overline{(d, 0)}$, então $c + 0 = d + 0$ e daí $c = d$.

3.2.1 Adição de números inteiros

Consideremos os números naturais 4 e 3 escritos na forma:

$$4 = 5 - 1$$

$$3 = 7 - 4$$

Então:

$$4 + 3 = (5 - 1) + (7 - 4) = (5 + 7) - (1 + 4)$$

Essa observação ajuda a entender a definição a seguir:

Definição 3.1. Sejam m $= \overline{(a, b)}$ e n $= \overline{(c, d)}$ elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$. Chama-se soma de m com n, e se indica por $m+n$, o elemento de $\mathbb{Z}$ definido por:

$$m+n=\overline{(a+c,b+d)}$$

3.3 Os Números Racionais

É fácil observar que, se $a,b\in\mathbb{Z}$ com $b\neq 0$ a equação

$$bX=a \tag{3.16}$$

nem sempre tem solução em $\mathbb{Z}$. Isso acontece se, e somente se, $b|a$.

Neste ponto, essa limitação de $\mathbb{Z}$ é muito importante para assim iniciarmos a construção de um conjunto mais amplo que abrigue todas as soluções da Equação 3.16. A necessidade de novos números foi sentida desde muito cedo na história da matemática, sugerida naturalmente por problemas práticos.

Os egípcios já empregavam frações, embora possuíssem apenas notações para aquelas que têm numerador igual a 1. As demais frações expressavam-se como soma de frações de numerador unitário. Assim, por exemplo, no papiro *Rhind*[2], achamos as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{13}$ expressas a partir das seguintes decomposições:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{15}\\ \frac{2}{13} &= \frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\end{aligned}$$

Entre os babilônios, que já sabiam resolver equações de primeiro e segundo grau, também era comum o uso de frações e, em tabuletas de argila provenientes do período babilônico antigo (1900 a 1600 a.C.) encontra-se tabelas de números incluindo frações.

Entre os gregos, casos particulares de proporções (média aritmética, geométrica e a proporção áurea) eram familiares desde a época dos pitagóricos e, no livro V de *Os Elementos* de Euclides, achamos a Teoria das Proporções de Eudoxo de Cnido (aprox. 408 a 335 a.C.) que não somente sugere a definição atual de igualdade de frações

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc \tag{3.17}$$

[2]Uma das melhores fontes de nosso conhecimento atual sobre a matemática egípcia. Comprado em 1848 à beira do Nilo por Henry Rhind, de quem leva o nome, trata-se de um documento feito em 1650 a.C. por um escriba de nome Ahmes, que afirma tê-lo copiado de um original de aproximadamente 2000 a.C. Por esta razão também é conhecido como Papiro Ahmes.

como é muito próxima às definições de número real surgidas no século XIX.

A solução de uma equação do tipo $bX = a$, com $b \neq 0$, indica-se pela fração $\frac{a}{b}$, e um número dessa forma chama-se número racional. O objetivo destas notas é definir cuidadosamente essa noção a partir da noção de numero inteiro. vale ainda lembrar que uma mesma fração pode ser escrita de diversas formas. Assim, por exemplo, sabemos que

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \tag{3.18}$$

quer dizer, um mesmo racional pode ser representado por diversos pares de números. No caso do Exemplo 3.18, diríamos que os pares (3, 6), (5, 10) e (1, 2) são todos representantes de um mesmo número racional.

3.3.1 Definição formal de números racionais

As idéias já discutidas sugere que podemos nos apoiar na noção de relação de equivalência, introduzida na Definição 2.5, para elaborar nossa teoria. Indicaremos por $\mathbb{Z}^*$ o conjunto de todos os inteiros exceto o número *zero* e começaremos por considerar o conjunto

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b); a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$$

isto é, o conjunto de todos os pares ordenados de números inteiros com segunda componente não nula. Neste conjunto introduzimos uma relação, que indicaremos por $\sim$, do seguinte modo:

Definição 3.2. Dados dois elementos (a, b) e (c, d) do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, diremos que $(a, b) \sim (c, d)$ se e somente se, $ad = bc$.

Proposição 3.3. *A relação apresentada na Definição 3.2 é uma relação de equivalência.*

Demonstração: Precisamos demonstrar que a nossa relação verifica as três condições da Definição 2.5 :

1. Para todo par $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que $(a, b) \sim (a, b)$, já que $ab = ba$.

2. Sejam agora $(a, b), (c, d)$ pares tais que $(a, b) \sim (c, d)$. Temos, então, que $ad = bc$, donde também $cb = da$. Da última igualdade e da definição acima, vem que $(c, d) \sim (a, b)$.

3. Sejam agora $(a, b), (c, d)$ e (e, f) pares tais que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$. Então, temos $ad = bc$ e $cf = de$. multiplicando a primeira igualdade por f e a segunda por b obtemos

$$adf = bcf$$

$$bcf = bde$$

donde

$$adf = bde$$

Como $d \neq 0$ (pois é a segunda componente de um par), podemos cancelar e obter $af = de$, o que implica que $(a, b) \sim (e, f)$.

Podemos agora considerar o conjunto quociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/ \sim)$, isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência. Para representar a classe do par (a, b), utilizaremos o símbolo $\frac{a}{b}$. Temos, assim,

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y) \sim (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; xb = ya\}$$

O símbolo $\frac{a}{b}$ chama-se fração de numerador a e denominador b.

Definição 3.4. Indicaremos por $\mathbb{Q}$ o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/ \sim$ e chamaremos números racionais os elementos de $\mathbb{Q}$.

3.3.2 Adição de números racionais

Naturalmente, para que o conjunto construído acima seja útil para os nossos propósitos, precisamos definir operações de soma e produto nele. Faremos isso apoiando-nos nas operações de $\mathbb{Z}$.

Definição 3.5. Sejam α e β elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos a soma[3] de α e β da seguinte forma: escrevendo $\alpha = \frac{a}{b}$ para algum par $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e $\beta = \frac{c}{d}$ para algum par $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definimos $\alpha + \beta$ como sendo o racional

$$\alpha + \beta = \frac{ad + bc}{bd}$$

A soma em $\mathbb{Q}$ tem as seguintes propriedades[4]:

Associativa: Para toda terna (α, β, γ) de números racionais, tem-se que $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Existência do Neutro: Existe um único elemento que, chamaremos de Elemento Neutro da Adição, que indicaremos por 0, tal que $0 + \alpha = \alpha$ para todo racional α.

Existência do Oposto: Para cada racional α existe um único elemento, que chamaremos de oposto de α e indicaremos por $-\alpha$, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.

---

[3] Consulte [20], p.160, para verificar que esta soma é única e independe da escolha arbitrária de qualquer representante da classe de equivalência $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

[4] Para as demonstrações remetemos o leitor para [20], p.162;

Comutativa: Para todo par (α, β) de números racionais, tem-se que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

3.3.3 Multiplicação de números racionais

Definição 3.6. Sejam α e β elementos de $\mathbb{Q}$. O produto de α por β será o racional $\alpha\beta$ obtido da seguinte forma: escrevendo $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$, definimos $\alpha\beta = \frac{ac}{bd}$.

Vale notar que o produto da Definição 3.6 independe dos representantes escolhidos. Na multiplicação em $\mathbb{Q}$ valem as seguintes propriedades:

Associativa: Para toda terna (α, β, γ) de números racionais, tem-se que $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Existência de Neutro: Existe um único elemento, que chamaremos de Elemento Neutro da Multiplicação e indica-se por 1, tal que $1 \cdot \alpha = \alpha$ para todo α em $\mathbb{Q}$.

Existência de Inverso: Para cada racional α diferente de 0 existe um único elemento que chamaremos de *inverso* de α e denotaremos por α^{-1} tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1$.

Comutativa: para todo par (α, β) de racionais, tem-se que $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Além disso, há ainda as importantes propriedades: Cancelativa do produto em $\mathbb{Q}$ e a Distributiva em $\mathbb{Q}$. Vamos enunciá-las em seguida, e remeteremos o leitor para [20], p.163 até p.165, onde estão expostas as demonstrações.

Cancelativa do Produto: Dada uma terna (α, β, γ) de números racionais, com $\alpha \neq 0$, se $\alpha\beta = \alpha\gamma$, então $\beta = \gamma$.

Distributiva Dada uma terna (α, β, γ) de números racionais, tem-se que $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Agora estamos em condições de demonstrar que o nosso objetivo inicial, aquele que nos levou à construção de um novo conjunto de números, foi de fato atingido.

Proposição 3.7. *Toda equação da forma $\beta X = \alpha$, onde α e β são números racionais, com $\beta \neq 0$, tem solução em $\mathbb{Q}$. Ainda mais, essa solução é única.*

Demonstração: Como $\beta \neq 0$ sabemos que existe um inverso de β, isto é, um elemento β^{-1} tal que $\beta\beta^{-1} = \beta^{-1}\beta = 1$. Mostraremos que o racional $\gamma = \beta^{-1}\alpha$ é uma solução. Com efeito, substituindo-o na equação dada vem que $\beta\gamma = \beta(\beta^{-1}\alpha) = (\beta\beta^{-1})\alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

Suponhamos agora que $\omega \in \mathbb{Q}$ é outra solução da equação. Isso significa que $\beta\omega = \alpha$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por β^{-1} vem $\beta^{-1}\beta\omega = \beta^{-1}\alpha = \gamma$. Portanto, $\omega = \gamma$.

3.3.4 Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$

Acabamos de provar que uma equação da forma $\beta X = \alpha$ tem solução em $\mathbb{Q}$ quando α e β são números racionais, com $\beta \neq 0$. Porém, nosso problema inicial era construir um conjunto de números onde uma equação de $bX = a$ com coeficientes inteiros tivesse solução. É claro que $X = \frac{a}{b}$ é solução, pois, $b \cdot \frac{a}{b} = a$.

Entretanto, para sermos cuidadosos em nossas definições, devemos notar que o produto de um racional por um inteiro ainda não foi definido. Para superar este impasse, basta notar que $\mathbb{Q}$ contém uma cópia de $\mathbb{Z}$.

Com efeito, seja $\mathbb{Z}' = \{\frac{a}{1}; a \in \mathbb{Z}\}$, que obviamente é subconjunto de $\mathbb{Q}$ e consideremos a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}'$ definida por $a \longmapsto \frac{a}{1}$.

É fácil verificar que f é uma função bijetora. E ainda mais, ela copia as operações ou, mais precisamente, verifica:

a) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para $a, b \in \mathbb{Z}$.

b) $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$, para $a, b \in \mathbb{Z}$.

De fato, temos:

a') $f(a) + f(b) = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a \cdot 1 + 1 \cdot a}{1 \cdot 1} = \frac{a+b}{1} = f(a + b)$.

b') $f(a) \cdot f(b) = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1 \cdot 1} = \frac{ab}{1} = f(ab)$

Dessa forma, podemos identificar os inteiros como racionais de $\mathbb{Z}'$ através da função f. Dada uma equação da forma $bX = a$, interpretando-a como a equação $\frac{b}{1}X = \frac{a}{1}$, faz sentido dizer que sua única solução em $\mathbb{Q}$ é $X = \frac{a}{b}$.

3.3.5 Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$

Vamos observar inicialmente que todo racional α tem algum represntante com denominador positivo. De fato, dado $\alpha = \frac{a}{b}$, se $b < 0$ temos que α também é representado pelo par $\frac{-a}{-b}$ e, nesse caso, temos $-b > 0$.

Definição 3.8. Dados dois números racionais α e β, diremos que α é *menor ou igual a* β, e escrevemos $\alpha \leq \beta$ se, tomando representantes com denominadores positivos $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ para α e β respectivamente, tivermos $ad \leq bc$.

Podemos enunciar, de modo equivalente, a definição acima na forma:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$$

3.3.6 Densidade e Propriedade Arquimediana de $\mathbb{Q}$

Proposição 3.9. *(Densidade de $\mathbb{Q}$) Sejam α e β racionais tais que $\alpha < \beta$. Então, sempre existe um racional γ tal que $\alpha < \gamma < \beta$.*

Demonstração: Sejam $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$ em que b e d são positivos. Mostraremos que $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ atende aos requisitos da tese. De fato, temos:

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} = \frac{ad+bc}{2bd}$$

Como $\alpha < \beta$, temos $ad < bc$, logo:

$$2ad < ad + bc$$

Portanto:

$$2adb < (ad + bc)b$$

e consequentemente:

$$\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd}$$

isto é, $\alpha < \gamma$. De modo análogo, segue que $\gamma < \beta$.

Proposição 3.10. *(Propriedade Arquimediana) Sejam α e β racionais positivos. Então, existe um inteiro positivo n tal que $n\alpha \geq \beta$.*

Demonstração: Sejam $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$. Como α e β são positivos, podemos assumir que os inteiros a, b, c, d são todos positivos.

Como vale a propriedade arquimediana em $\mathbb{Z}$, sabemos que existe um n tal que

$$n(ad) \geq bc$$

Portanto, $\frac{na}{b} \geq \frac{c}{d}$ ou $n \cdot \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$.

CAPÍTULO 4

OS NÚMEROS REAIS

Aproximadamente dois milênios e meio passaram-se desde a descoberta pelos pitagóricos da irracionalidade de $\sqrt{2}$ até a construção rigorosa dos números reais realizada pela escola alemã na segunda metade do século XIX.

Ao descobrir a existência dos irracionais, os pitagóricos viram ruir a sua crença de que os números inteiros eram suficientes para tratar os problemas matemáticos. Cerca de um século depois, o matemático grego, discípulo de Platão, Eudoxo (408 - 355 a.C.) criava a sua teoria das proporções para fundamentar o uso das grandezas irracionais em geometria. Mas a teoria proposta por Eudoxo, apesar de brilhante, era essencialmente geométrica, e não levava, como seria desejável, à criação de novos números para expressar a razão entre grandezas incomensuráveis. Os trabalhos de Eudoxo foram expostos por Euclides nos Elementos, sendo praticamente tudo que existe na direção da conceituação dos números reais até o século XIX.

A preocupação com os fundamentos dos números reais só voltou na primeira metade do século XIX, motivada pelo desenvolvimento da análise matemática realizado principalmente por Gauss, Abel e Cauchy. A teoria foi ultimada na segunda metade daquele século com duas construções diferentes dos números reais realizadas por Dedekind e Cantor.

> Os dois métodos têm em comum apenas o ponto de partida, o corpo ordenado dos números racionais e não é passível de ser utilizado em outras situações. O método de Cantor é muito engenhoso e baseia-se no uso de sequências convergentes e de cauchy de números racionais. A construção de Cantor tem a vantagem de ser aplicável em muitos outros contextos, enquanto a de Dedekind só serve para construir os reais a partir dos racionais.(HEFEZ, 2011, p.146)

A construção e compreensão dos números reais propiciou um impressionante desenvolvimento da análise matemática registrado durante o século XX.

4.1 Medida de um segmento de reta

Estuda-se agora de que modo o processo de medição das grandezas ditas contínuas conduz à noção de número real. O modelo utilizado é o de determinar o comprimento de um segmento de reta. O fato de medir um segmento de reta é tão significativo que o conjunto dos números reais também é conhecido como a *reta real*

Sejam dois segmentos de reta AB e CD. Suponha que em CD seja possível determinar n pontos: $A_1, A_2, \cdots, A_n$, onde $A_n = D$, de maneira que $CA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ sejam todos congruentes a AB. Podemos então dizer que CD é *múltiplo* de AB e escrevemos:

$$CD = n \cdot AB$$

Figura 4.1: CD é múltiplo de AB

A Figura 4.1 mostra o segmento CD divido em n segmentos iguais a AB. Em particular, um segmento de reta é sempre multiplo dele mesmo, basta tomar $n = 1$.

Por definição, $0 \cdot AB$ é o segmento de reta nulo, para quaisquer pontos A e B.

Também, pelo conceito de soma de segmentos, pode-se concluir que:

$$r \cdot AB + s \cdot AB = (r + s) \cdot AB$$

para quaisquer $r, s \in \mathbb{N}$ e para todo segmento de reta AB.

4.1.1 Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Dois segmentos de reta AB e CD se dizem *comensuráveis* se é possível encontrar um segmento EF não nulo e $m, n \in \mathbb{N}$, de maneira que:

$$
\begin{aligned}
AB &= m \cdot EF \\
CD &= n \cdot EF
\end{aligned}
$$

Os segmentos AB e CD mostrados na Figura 4.2 são comensuráveis, pois:

$$
\begin{aligned}
AB &= 3 \cdot EF \\
CD &= 5 \cdot EF
\end{aligned}
$$

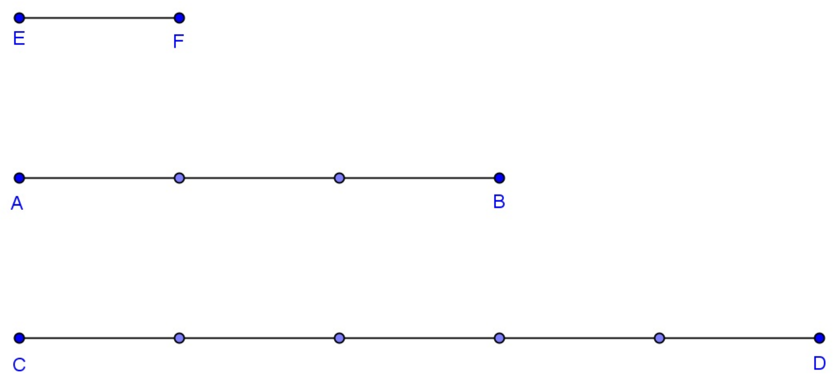

Figura 4.2: Os segmentos AB e CD são comensuráveis

O objetivo é focalizar agora a noção de medida de um segmento de reta AB. Para tanto é preciso antes fixar um segmento de reta u, tomado como *unidade de comprimento.* A ideia é procurar saber “quantas vezes”u cabe em AB.

Inicialmente, procede-se para quando u e AB são comensuráveis. Tomando algum segmento EF, não nulo, como unidade de comprimento e $r, s \in \mathbb{N}$, temos:

$$
\begin{aligned}
u &= r \cdot EF \\
AB &= s \cdot EF
\end{aligned}
$$

Basta então tomar $EF = \frac{1}{r} \cdot u$ e concluir que:

$$\begin{aligned} AB = s \cdot EF \quad &\Rightarrow \quad AB = s \cdot (\frac{1}{r} \cdot u) \\ &\Rightarrow \quad AB = \frac{s}{r} \cdot u \end{aligned}$$

Neste caso, a medida do segmento AB é $\frac{s}{r}$.

É importante observar que, dado um segmento de reta u e dados $r, s \in \mathbb{N}^*$, sempre há segmentos de reta cuja medida é $\frac{s}{r}$ tomando u como unidade de comprimento.

Examinaremos apenas o caso de $s > r$. Para isto, tome $u = AB$, como na Figura 4.3, e considere $A_1, A_2, A_3, ..., A_{r-1}, A_r, A_{r+1}, ..., A_s$ na semirreta AB de maneira que $A_r = B$ e $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{r-1}A_r, A_rA_{r+1}, ..., A_{s-1}A_s$ sejam congruentes entre sí, o que sempre é possível no âmbito da geometria euclidiana.

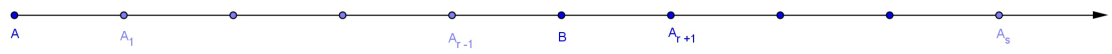

Figura 4.3: Sempre há segmentos cuja medida é $\frac{s}{r}$

Como:

$$\begin{aligned} AA_1 &= \frac{1}{r} \cdot AB \\ AA_s &= s \cdot AA_1 \end{aligned}$$

Então:

$$AA_s \quad = \quad s \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot AB\right) = \frac{s}{r} \cdot AB$$

E considerando que $u = AB$, temos:

$$AA_s = \frac{s}{r}$$

Ao passo que, nem sempre é possível, escolhida a unidade de comprimento u, o segmento de reta que se quer "medir"e o segmento u são comensuráveis. É o que ocorre quando u é o lado de um quadrado e AB é a sua diagonal. Este fato está demonstrado na Equação 4.1.

Dois segmentos de reta que não são comensuráveis se dizem *incomensuráveis*. É atribuida à escola pitagórica o mérito da descoberta de segmentos incomensuráveis, como é o caso da diagonal do quadrado. Para tratar o caso das grandezas incomensuráveis é que se faz necessário a ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais. É a tarefa das próximas seções. Por enquanto, existe uma maneira eficiente de trabalhar com aproximações de grandezas incomensuráveis que o leitor pode encontrar em [7], página 219, que não entraremos em detalhes.

4.2 Cortes de Dedekind

Até o momento, formalizamos a ideia de número natural através dos axiomas de Peano, como visto na Seção 3.1. Ao construir o conjunto dos números naturais e estabelecer as operações de soma e produto, esbarramos na impossibilidade de se realizar a subtração. Então a solução foi ampliar o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros através de uma relação de equivalência, para então realizar a subtração, como visto na Seção 3.2. Por um motivo semelhante, tivemos que ampliar o conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais, para efetivamente realizar a operação de divisão, como foi visto na Seção 3.3. O modo de fazer já sabemos que também é por uma relação de equivalência.

A partir de agora estamos fazendo a ampliação do conjunto dos racionais para o conjunto dos números reais. Mas o motivo não é semelhante ao da ampliação dos naturais e dos inteiros. O problema aqui se inicia com a dificuldade de se resolver a equação

$$x^2 - 2 = 0$$

Suponha que exista $x \in \mathbb{Q}$ que satisfaça a equação. Podemos escrever $x = \frac{m}{n}$ e tentar resolvê-la

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 && (4.1) \\ \left(\frac{m}{n}\right)^2 &= 2 \\ m^2 &= 2n^2 && (4.2) \end{aligned}$$

Chegamos a uma contradição. Do lado esquerdo da Equação 4.2 temos uma quantidade par de fatores primos e do lado direito uma quantidade ímpar de fatores primos, contrariando assim o teorema fundamental da aritmética, que diz que a decomposição de um número em fatores primos é única.

O passo fundamental e mais delicado é tratado a seguir. A solução da Equação 4.1 não é um número racional. Este fato motiva uma ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais.

4.2.1 Cortes em $\mathbb{Q}$

Seja $A \subset \mathbb{Q}$, com $A \neq \varnothing$. Um elemento $a \in A$ é chamado *mínimo* de A se $a \leq x$, para todo $x \in A$. A propriedade anti-simétrica da relação $\leq$ garante que um subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{Q}$ não pode ter mais que um mínimo. Usa-se a notação:

$$a = \min A$$

Um elemento b de um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{Q}$ se diz *máximo* de A se, para todo $x \in A$, $x \leq b$. A propriedade anti-simétrica da relação $\leq$ garante também que A não pode ter mais que um máximo. Usa-se a notação: $b = \max A$.

Definição 4.1. Um corte de Dedekind[1], no corpo $\mathbb{Q}$, é um par (A, B) de classes de racionais satisfazendo as seguintes condições:

(D1) A e B contém todos os racionais $\mathbb{Q}$ de modo que cada número racional ou pertence a A ou a B;

(D2) Cada racional de A é menor que cada racional de B.

Analisando um *corte* qualquer de $\mathbb{Q}$ como na Definição 4.1, deduz-se as seguintes alternativas:

(a) A classe A possui máximo (B não possui mínimo);

(b) A classe B possui mínimo (A não possui máximo);

(c) A não possui máximo nem B possui mínimo;

Nos casos (a) e (b) o par (A, B) define o número racional α que é o máximo de A ou o mínimo de B. Suponha, por exemplo, A o conjunto dos números racionais $x \leq \frac{3}{4}$ e B o conjunto dos racionais $y > \frac{3}{4}$. Logo, (A, B) é um corte em $\mathbb{Q}$ definindo o racional $\frac{3}{4}$.

[1] **Richard Dedekind** (1831-1916), nasceu em Brunswich, Alemanha, foi aluno de Gauss com quem estudou integrais eulerianas, assunto de sua tese de doutourado. Seu primeiro trabalho como professor foi no Politécnico de Zurich, onde trabalhou de 1857 a 1861. Nesta ocasião, tendo dúvidas sobre o texto que deveria seguir com seus alunos, criou os números irracionais, para tornar inteligível suas aulas de Análise Matemática. Na verdade, ele fez uma organização matemática dos números irracionais e definiu os irracionais por um método que denominou *cortes*. Atualmente, conhecido sob a denominação de *Cortes de Dedekind*. A construção do método de Dedekind baseia-se essencialmente na noção de ordem dos números racionais. A contribuição de Dedekind na construção da Matemática, não se limita apenas aos cortes. Ele investigou e contribuiu na Teoria dos Números e foi determinante no estudo dos fundamentos da matemática do final do século XIX. Dentre as várias contribuições, registra-se que a noção de *ideal*, de tanta importância em Álgebra e Análise, foi criado por Dedekind, ao investigar propriedades dos números inteiros.

No caso (c) não há máximo em A nem mínimo em B. Como em $\sqrt{2}$, diz-se que o par (A, B) define um novo objeto denominado o número *irracional*.

O método empregado para definir $\sqrt{2}$ por cortes de Dedekind pode ser adotado também para definir $\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}$, etc. Portanto, quando se pensa em número irracional pensa-se no corte (A, B) como na *Definição 3.3.1.* Diz-se que o número α=(A, B) é o separador das classes de racionais e não pertence nem a A e nem a B.

Com este processo o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais foi aumentado dos irracionais pelo método dos cortes de Dedekind constituindo um novo corpo, denominado corpo dos números *reais* e representado por $\mathbb{R}$

4.3 Sequências de Cauchy

Seja a função $f : A \to B$. Quando A é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, a função $f : \mathbb{N} \to B$ denomina-se uma *sequência*. No caso particular de $B = \mathbb{Q}$, a sequência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ é chamada de sequência de números racionais. Se $B = \mathbb{R}$, a sequência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é de números reais. Vamos utilizar, por simplicidade, a seguinte notação para uma sequência: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (a_n). Estudar uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste em conhecer o seu comportamento para valores *grandes* de $n \in \mathbb{N}$, ou habitualmente como se diz, quando n tende para o *infinito*, cuja notação é $n \to \infty$.

Uma sequência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ de números racionais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada quando existem dois números racionais α e β tais que

$$\alpha \leq a_n \leq \beta$$

onde a_n é um termo[2] da sequência (a_n).

A sequência (a_n) é *crescente* se, e somente se, para todo número natural j:

$$a_j \leq a_{j+1}$$

A sequência (b_n) é decrescente se, e somente se, para todo número natural j:

$$b_{j+1} \leq b_j$$

4.3.1 Pares de Cauchy

Vamos analisar as seguintes situações:

[2]Quando escrevemos a_n estamos nos referindo a um termo da sequência (a_n), para algum $n \in \mathbb{N}$.

Problema 1: Dado o número natural n e um número racional α, achar dois números racionais a_n e b_n com denominador 10^n, tais que:

$$\begin{aligned} a_n &< \alpha \\ \alpha &< b_n \\ b_n - a_n &= \frac{1}{10^n} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Problema 2: Dado o número natural m, achar dois números racionais a_m e b_m com denominador 10^m, tais que:

$$\begin{aligned} (a_m)^2 &< 2 \\ 2 &< (b_m)^2 \\ b_m - a_m &= \frac{1}{10^m} \end{aligned}$$

No problema 1 quando o número natural n vai "percorrendo"o conjunto dos números naturais, as soluções a_n formam uma sequência crescente (a_n) e as soluções b_n formam uma sequência decrescente (b_n). E os termos a_n e b_n vão ficando cada vez mais próximos à medida que o valor de n aumenta, pois, a diferença

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$$

vai ficando pequena. Isto quer dizer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

O problema 2 também exibe um fenômeno parecido. Este fenômeno merece a nossa atenção para este tipo de objeto matemático: Os pares de Cauchy. Um par de sequências de números racionais $\{(a_n), (b_n)\}$ tais que (a_n) é crescente, (b_n) é decrescente e $a_n \leq b_n$ para todo número natural n, a diferença $b_n - a_n$ se aproximando de zero à medida em que n aumenta é o que chamaremos de Par de Cauchy.

Definição 4.2. Dizemos que duas sequências (a_n) e (b_n) de números racionais formam nessa ordem o par de Cauchy $\{(a_n), (b_n)\}$ se as seguintes condições são verificadas:

a) (a_n) é crescente, (b_n) é decrescente;

b) Para todo $n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$;

c) Dado qualquer número racional $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$: $b_n - a_n < \epsilon$

Dado um par de Cauchy $\{(a_n), (b_n)\}$, vamos supor que exista um número racional α tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq \alpha \leq b_n$$

queremos saber se é possível existir um outro número racional β, diferente de α, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq \beta \leq b_n$$

a resposta é negativa. Se existisse um tal número β diferente de α, então $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.

Vamos verificar que β não pode ser maior que α. De fato, se $\beta > \alpha$ então $\beta - \alpha > 0$. De acordo com o item (c) da Definição 4.2, podemos tomar $\epsilon = \beta - \alpha$ e então existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se que

$$0 \leq b_n - a_n < \epsilon$$

ou seja:

$$b_n - a_n < \beta - \alpha$$

Logo:

$$b_n + \alpha < \beta + a_n$$

Mas estamos supondo que $a_n \leq \beta \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então:

$$b_n + \alpha < \beta + a_n \leq b_n + a_n$$

e portanto

$$b_n + \alpha < b_n + a_n$$

isto é,

$$\alpha < a_n$$

Isso é absurdo pois por hipótese, $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para $n \in \mathbb{N}$. A demonstração de que β não pode ser menor que α é feita de modo análogo.

Chega-se a conclusão que, dado um par de Cauchy $\{(a_n), (b_n)\}$, se existir um número racional α de modo que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para $n \in \mathbb{N}$, então α é o único número que está relacionado com o par de Cauchy $\{(a_n),(b_n)\}$.

Definição 4.3. Dados o par de Cauchy $\{(a_n),(b_n)\}$ e o número racional α, diz-se que $\{(a_n),(b_n)\}$ determina α se, e somente se, $a_n \leq \alpha \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caberia então perguntar, se dado um par de Cauchy $\{(a_n),(b_n)\}$ sempre existe um número racional α tal que $\{(a_n),(b_n)\}$ determina α no sentido da definição 4.3?

Para responder que nem sempre isto acontece, vamos dar um exemplo de um par de Cauchy $\{(a_n),(b_n)\}$ que não determina nenhum número racional α.

Observe o seguinte caso: vamos tomar, para todo $n \in \mathbb{N}$

- a_n é a maior fração de denominador 10^n tal que $a_n^2 \leq 2$;
- b_n é a menor fração positiva de denominador 10^n tal que $b_n^2 \geq 2$

É claro que, da relação 4.3 do problema 1, temos $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para $n \leq n_0$, $\frac{1}{10^n} < \epsilon$, isto é,

$$|b_n - a_n| < \epsilon$$

Pode-se verificar que (a_n) é crescente e (b_n) é decrescente. E do fato de que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\{(a_n),(b_n)\}$ como um par de Cauchy.

Vamos então verificar que não existe nenhum número racional α tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq \alpha \leq b_n$$

De fato, se existisse um racional α deveria acontecer um destes três casos:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 2 \\ \alpha^2 &< 2 \\ \alpha^2 &> 2 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que nenhum destes casos é possível:

a) Não existe nenhum número racional α tal que $\alpha^2 = 2$. Este fato está demonstrado na Equação 4.1.

b) Vamos mostrar que $\alpha^2 < 2$ também é impossível. Como $b_n = (b_n - \alpha) + \alpha$

$$\begin{aligned} b_n = (b_n - \alpha) + \alpha \quad &\Rightarrow \quad [(b_n - \alpha) + \alpha]^2 = b_n > 2 \\ &\Rightarrow \quad (b_n - \alpha)^2 + 2\alpha(b_n - \alpha) + \alpha^2 > 2 \end{aligned}$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$$

e ainda que

$$a_n \leq \alpha \leq b_n$$

então:

$$0 < b_n - \alpha \leq b_n - a_n \quad \Rightarrow \quad 0 < b_n - \alpha \leq \frac{1}{10^n}$$

4.4 Os números reais e a noção de corpo ordenado completo

Seja K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ chama-se *supremo* do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K.

Assim, para que $b \in K$ seja supremo de um conjunto $X \subset K$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

(S1) Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

(S2) Se $c \in K$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A condição S_1 diz que b é cota superior de X, enquanto S_2 afirma que qualquer outra cota superior de X deve ser maior do que ou igual a b.

É imediato que se dois elementos b e $b^{'}$ em K cumprem as condições $S1$ e $S2$ acima, deve-se ter $b \leq b'$ e $b' \leq b$, ou seja, $b = b'$. Portanto, o supremo de um conjunto, quando existe, é unico. Escrevemos $\sup X$ para indicá-lo. As condições que caracterizam o supremo podem, portanto, ser escritas assim:

(S1) $x \in X \Rightarrow x \leq \sup X$;

(S2) $c \geq x$ para todo $x \in X \Rightarrow c \geq \sup X$;

(S2') Se $c < \sup X$ então existe $x \in X$ tal que $c < x$

Se $X = \varnothing$ então todo $b \in K$ é cota superior de X. Como não existe menor elemento num corpo ordenado K, segue-se que o conjunto vazio $\varnothing$ não possui supremo em K. O mesmo se aplica para o ínfimo, que estudaremos a seguir.

Analogamente, um elemento $a \in K$ chama-se *ínfimo* de um conjunto $Y \subset K$ é necessário e suficiente que as condições abaixo estejam satisfeitas:

(I1) Para todo $y \in Y$ tem-se $a \leq y$;

(I2) Se $c \in K$ é tal que $c \leq y$ para todo $y \in Y$ então $c \leq a$. O ínfimo de Y, quando existe, é único e escreve-se $a = \inf Y$. A condição $I2$ acima pode ser reformulada nos seguintes termos:

(I2') Dado $c \in K$ com $a < c$, existe $y \in Y$ tal que $y < c$. Isso significa que um elemento $c \in K$, que seja maior do que a, não pode ser cota inferior de Y.

A insuficiência mais grave dos números racionais, para efeitos da análise matemática, é o fato de que alguns conjuntos limitados de números racionais não possuem supremo (ou ínfimo). Este fato está ligado à inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros, mas é uma dificuldade que vai muito mais além dessa falta.

Um corpo ordenado K chama-se *completo* quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K.

Resulta da definição que, num corpo ordenado completo, todo subconjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset K$, possui um ínfimo. Com efeito, dado K, seja $X = -Y$, isto é, $X = \{-y; y \in Y\}$. Então X é não-vazio e limitado superiormente; logo existe $a = \sup X$. Como se vê facilmente, tem-se $-a = \inf Y$.

Axioma 4.4. *Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado o corpo dos números reais.*

Examinaremos agora algumas propriedades dos números reais que resultam imediatamente da definição de $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo.

Existe em $\mathbb{R}$ um número positivo a tal que $a^2 = 2$. Este número é representado pelo símbolo $\sqrt{2}$. É claro que só existe um número positivo cujo quadrado é 2, pois $a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow 0 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \Rightarrow a + b = 0$ ou $a - b = 0$. No primeiro caso, $a = -b$ (logo não podem ser a e b ambos positivos) e no segundo $a = b$. Como demonstrado na referida proposição, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Aos elementos do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, aos números reais que não são racionais, chamaremos *números irracionais*. Assim, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Provaremos agora que, dados $a > 0$ em $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, existe um único número real $b > 0$ tal que $b^n = a$. O número b chama-se a raiz n-ésima de a e é representado pelo símbolo $b = \sqrt[n]{a}$. De fato, consideremos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0, x^n < a\}$. O conjunto X não é vazio (pois $0 \in X$) e é limitado superiormente. Se $a < 1$, então, 1 é cota superior de X.

Seja $b = \sup X$. Afirmamos que $b^n = a$. Isto se baseia nos seguintes fatos:

(A) O conjunto X não possui elemento máximo: Dado $x \in X$ qualquer, provaremos que é possível tomar $d > 0$ tão pequeno que ainda se tenha $(x + d)^n < a$, isto é, $x + d \in X$. Para isto, usaremos um fato auxiliar, que demonstraremos por indução. Trata-se do seguinte: dado $x > 0$ existe, para cada n, um número real positivo A_n (dependendo de x) tal que $(x + d)^n \leq x^n + A_n$, seja qual for d com $0 < d < 1$. Isto é claro para $n = 1$. Supondo verdadeiro para n, temos $(x+d)^{n+1} = (x+d)^n(x+d) \leq (x^n + A_n.d)(x+d) = x^{n+1} + A_n.d.x + d.x^n + A_n.d^2 = x^{n+1} + (A_n.x + x^n + A_n.d).d < x^{n+1} + (A_n.x + x^n + A_n).d$ (posto que $0 < d < 1$). Tomando $A_{n+1} = A_n.x + x^n + A_n$, obtemos $(x + d)^{n+1} < x^{n+1} + A_{n+1}.d$.

Agora, se $x \in X$, isto é, $x \geq 0$ e $x^n < a$, tomamos d tal tal que $d < 1$ e $0 < d < \frac{a-x^n}{A_n}$. Teremos $x^n + A_n.d < a$ e, por conseguinte, $(x + d)^n < a$, o que prova que X não possui elemento máximo.

(B) O conjunto $Y = \{y \in \mathbb{R}; y > 0, y^n > a\}$ **não possui elemento mínimo:** Seja $y \in Y$ escolheremos d, com $0 < d < y$, tal que $(y - d)^n > a$, isto é, $y - d \in Y$. Para tal observemos que, sendo $0 < d < y$, temos $(y - d)^n = y^n(1 - \frac{d}{y})^n > y^n(1 - n.\frac{d}{y}) = y^n - ny^{n-1}.d$, como resulta da desigualdade de Bernoulli, com $x = -\frac{d}{y}$. Se tomarmos $0 < d < \frac{y^n-a}{n.y^{n-1}}$ obteremos então $y^n - ny^{n-1}.d > a$ e, portanto, $(y - d)^n > a$. Isto mostra que Y não possui elemento mínimo.

(C) Se $x \in X$ **e** $y \in Y$ **então** $x < y$**:** De fato, nestas condições $x^n < a < y^n$ e, como x e y são positivos, vem $x < y$.

Deduz-se dos itens anteriores (A), (B) e (**C**) que o número $b = supX$ satisfaz à condição $b^n = a$. Com efeito, se fosse $b^n < a$ então b pertenceria ao conjunto X do qual é supremo, logo b seria o elemento máximo de X, o que contradiz o item (**A**). Também não pode ser $b^n > a$ porque então $b \in Y$ e, pelo item (**B**), Y não possui elemento mínimo, haveria um $c \in Y$ com $c < b$. Por **C**, temos $x < c < b$ para todo $x \in X$. Logo c seria uma cota superior de X menor do que $b = \sup X$. Outra contradição. Portanto, nos resta a opção de ser $b^n = a$.

Teorema 4.5. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja (a, b) um intervalo aberto qualquer em $\mathbb{R}$. Devemos mostrar que existem um número racional e um número irracional em (a, b). Como $b - a > 0$, existe um número natural p tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. Os números da forma $\frac{m}{p}, m \in \mathbb{Z}$, decompõe a reta $\mathbb{R}$ em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}$. Como $\frac{1}{p}$ é menor do que o comprimento $b - a$ do intervalo (a, b), algum dos números $\frac{m}{p}$ deve cair dentro de (a, b). Esta é a ideia intuitiva da demonstração. Raciocinemos agora logicamente. Seja $A = \{m \in \mathbb{Z}; \frac{m}{p} \geq b\}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, A é um conjunto não-vazio de números inteiros, limitado inferiormente por $b.p.$ Seja $m_0 \in A$ o menor elemento de A. Então $b \leq \frac{m_0}{p}$ mas, como $m_0 - 1 < m_0$, tem-se $\frac{m_0-1}{p} < b$. Afirmamos que $a < \frac{m_0-1}{p} < b$. Com efeito, se não fosse assim, teríamos $\frac{m_0-1}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0}{p}$. Isto acarretaria $b - a \leq \frac{m_0}{p} - \frac{m_0-1}{p} = \frac{1}{p}$, uma contradição. Logo, o número racional $\frac{m_0-1}{p}$ pertence ao intervalo (a, b). Para obtermos um número irracional no intervalo (a, b), tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$, ou seja $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Os números da forma $\frac{m\sqrt{2}}{p}$, onde $m \in \mathbb{Z}$, são (exceto $m = 0$) irracionais e dividem a reta $\mathbb{R}$ em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{p}$. Como $\frac{\sqrt{2}}{p}$ é menor do que o comprimento $b - a$ do intervalo (a, b), conclui-se que algum $\frac{m\sqrt{2}}{p}$ deve pertencer a (a, b). Esta é a ideia intuitiva. A demonstração formal se faz como no caso dos racionais. Se m_0 for o menor inteiro tal que $b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p}$ então o número irracional $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}$ pertence ao intervalo (a, b).

Teorema 4.6. *Seja $\mathbf{I_1} \supset \mathbf{I_2} \cdots \supset \mathbf{I_n} \ldots$ uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $\mathbf{I_n} = [a_n, b_n]$. A interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{I_n}$ não é vazia. Isto é, existe pelo menos um número real x tal que $x \in \mathbf{I_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, temos $\bigcap \mathbf{I_n} = [a, b]$, onde $a = \sup a_n$ e $b = \inf b_n$.*

Demonstração: Para $n \in \mathbb{N}$, temos $\mathbf{I_{n+1}} \subset \mathbf{I_n}$, o que significa $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Chamemos de A o conjunto dos a_n e B o conjunto dos b_n. O conjunto A é limitado: a_1 é uma cota inferior e cada b_n e cada b_n é uma cota superior de A. De modo análogo, B também é limitado. Sejam $a = \sup A$ e $b = \inf B$. Como cada b_n é cota superior de A, temos $a < b_n$ para todo n. Assim, a é cota inferior de B e, portanto, $a \leq b$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a \leq b \leq \ldots b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Concluímos que a e b pertencem a todos os $\mathbf{I_n}$, donde $[a, b] \subset \mathbf{I_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{I_n}$. Mais ainda, nenhum $x < a$ pode pertencer a todos os intervalos $\mathbf{I_n}$. Com efeito, sendo $x < a = \sup A$, existe algum $a_n \in A$ tal que $x < a_n$, ou seja, $x \notin \mathbf{I_n}$. Do mesmo modo, $y > b \Rightarrow y > b_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, donde $y \notin \mathbf{I_m}$. Portanto, $\bigcap \mathbf{I_n} = [a, b]$.

O Teorema 4.6 dos intervalos encaixados que acabamos de demonstrar é útil para provar que o conjunto dos números reais não é enumerável. É claro que os conjuntos até então vistos: Naturais, Inteiros e Racionais são enumeráveis. A não enumerabilidade é também uma característica de $\mathbb{R}$.

Teorema 4.7. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

Demonstração: Dados um intervalo limitado, fechado $\mathbf{I} = [a, b]$

4.5 Expressão decimal de um número real

Uma maneira eficiente para representar e efetuar as operações básicas utilizando os números reais é representá-los por meio de expressões decimais. Para isto vamos tomar somente os números reais positivos. Os números reais negativos basta acrescentar o sinal de menos e tratá-los de forma análoga.

Definição 1 *Uma expressão decimal de um número real é um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$$

em que a_0 é um número inteiro tal que $a_0 \geq 0$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n, chamado n-ésimo dígito da expressão decimal α. O número natural a_0 chama-se a parte inteira de α.

Podemos citar os números:

$$\begin{aligned} \alpha &= 13,428\overline{000}\ldots \\ \beta &= 25,129129\overline{129}\ldots \\ \pi &= 3,14159265\ldots \end{aligned}$$

que são exemplos de expressões decimais de números reais. Nos dois primeiros casos está claro como se obter os dígitos não explicitados. No caso de π (medida da área da circunferência quando se toma o raio como unidade), a maneira como foi escrito aqui não deixa explicíta uma regra para se achar os demais dígitos. Mas, claro, através de métodos numéricos e com os computadores de nossa era é possível encontrar uma infinidade de casas decimais de π.

Podemos questionar agora de que forma uma sequência de dígitos, precedida de um número inteiro, representa um número real? É possível encontrar um número real para cada expressão decimal? A resposta é afirmativa. As expressões:

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots \tag{4.4}$$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots \tag{4.5}$$

representa o número real e vice-versa. Podemos, então, unificar as duas expressões em uma somente

$$a_0, a_1a_2a_3\dots a_n\dots \quad = \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

Resta somente o problema de dar um sentido as reticências do final de cada expressão decimal. Elas dão a entender de que se trata de uma soma com infinitas parcelas. Isto é uma coisa que não tem sentido, pelo menos em princípio. O significado preciso da igualdade

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

é o seguinte: o número real α tem por valores aproximados os números racionais

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n},\ \text{com } n \in \mathbb{N}$$

Quando se substitui α por α_n, o erro que se comete não é superior a $\frac{1}{10^n}$, como se vê as seguir:

$$\alpha - \alpha_n = (a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots) - (a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n}) =$$

$$= \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \dots + \frac{a_{n+k}}{10^{n+k}} \le \frac{1}{10^n},\ com\ n, k \in \mathbb{N}$$

Portanto, $\alpha_0 = a_0$ é o maior número natural contido em α, seguido por:

a_1 é o maior dígito tal que

$$\alpha_0 \le \alpha_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \le \alpha$$

a_2 é o maior dígito tal que

$$\alpha_1 \le \alpha_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \le \alpha$$

a_3 é o maior dígito tal que

$$\alpha_2 \le \alpha_3 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \le \alpha,\ etc.$$

Deste modo, tem-se uma sequência não-decrescente de números racionais

$$\alpha_0 \le \alpha_1 \le \alpha_3 \le \dots \le \alpha_n \le \dots$$

que são valores cada vez mais próximos do número real α. Mais precisamente, tem-se

$$0 \leq \alpha - \alpha_n \leq \frac{1}{10^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Diz-se que o número real α é o limite desta sequência de números racionais. O fato de que existe sempre um número real que é limite desta sequência é uma forma de dizer que o conjunto dos números reais é completo. Encerrando, portanto, a caracterização do conjunto dos números reais através do axioma da completeza.

Axioma da Completeza *Toda expressão decimal representa um número real e todo número real pode ser representado por uma expressão decimal.*

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Para complementar a proposta de apresentar as noções básicas da construção dos números reais, o trabalho propõe que a introdução do estudo dos números reais no Ensino Básico seja feita com problemas que sejam desafiadores para o aluno. Estes problemas podem fazer parte de uma oficina de matemática com o tema "Números Reais". Podem também serem apresentados para despertar o interesse pelo conteúdo durante as aulas. Ou então, para generalizar conhecimentos sobre os números reais após a explanação do assunto.

5.1 Duplicação da área do quadrado

Calcular o lado de um quadrado cuja área seja o dobro da área de um quadrado conhecido.

Utilizamos aqui a Figura 5.1 para ilustrar este problema. Segue-se então que estamos procurando a medida b do lado do quadrado maior em função da medida a do lado do quadrado menor. Sabe-se que a área do quadrado maior é o dobro da área do quadrado menor. Temos ainda, a área do quadrado maior é b^2 e a área do quadrado menor a^2. Baseado nestas informações, podemos modelar nosso problema:

$$\begin{aligned} b^2 = 2a^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{b^2} = \sqrt{2a^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{b^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2} \\ &\Leftrightarrow \quad b = a\sqrt{2} \end{aligned}$$

Podemos então fazer a verificação. De fato, a área do quadrado de lado a, como

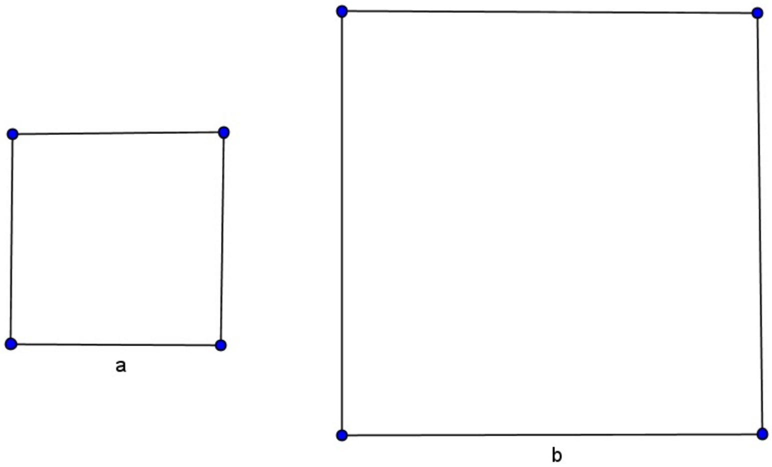

Figura 5.1: Quadrados de lados a e b

sabemos, é a^2. A área do quadrado de lado b é

$$b^2 = (a\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 a^2 = 2a^2$$

Evidenciando o fato de ser o dobro da área do quadrado de lado a.

Cabe, ainda, explorar este problema fazendo as seguintes perguntas:

1. Qual deve ser a medida do lado de um quadrado para que ele tenha o dobro da área de um quadrado de lado 1? E de lado 2?

2. Qual deve ser a medida do lado de um quadrado para que ele tenha o triplo da área de um quadrado de lado a? E o quíntuplo?

3. Qual é a relação entre as áreas de dois quadrados onde um mede o dobro do lado do outro? Ou seja, tomando como exemplo a Figura 5.1, como expressar a em função de b? Como expressar b em função de a?

Ao propor estes problemas não estamos fazendo o inverso de que fazem os compêndios de matemática? Primeiro mostramos uma relação geral, para depois estudar os casos particulares. Quais os requisitos básicos para se estudar este problema? Algo que um aluno de 9 ano pode fazer e compreender.

5.2 Duplicação do altar na ilha de Delos

Conta-se que no templo de Apolo, situado na ilha de Delos (Grécia), existia um altar com forma geométrica de uma figura que hoje é conhecida como cubo. Havendo uma peste em Atenas um habitante da cidade, em busca de auxílio divino, dirigiu-se à Delos para consultar sobre a extinção da peste. A divindade respondeu que se fosse edificado um altar no templo de Apolo cujo volume medisse o dobro do existente, mantendo-se a mesma forma, a peste seria eliminada.

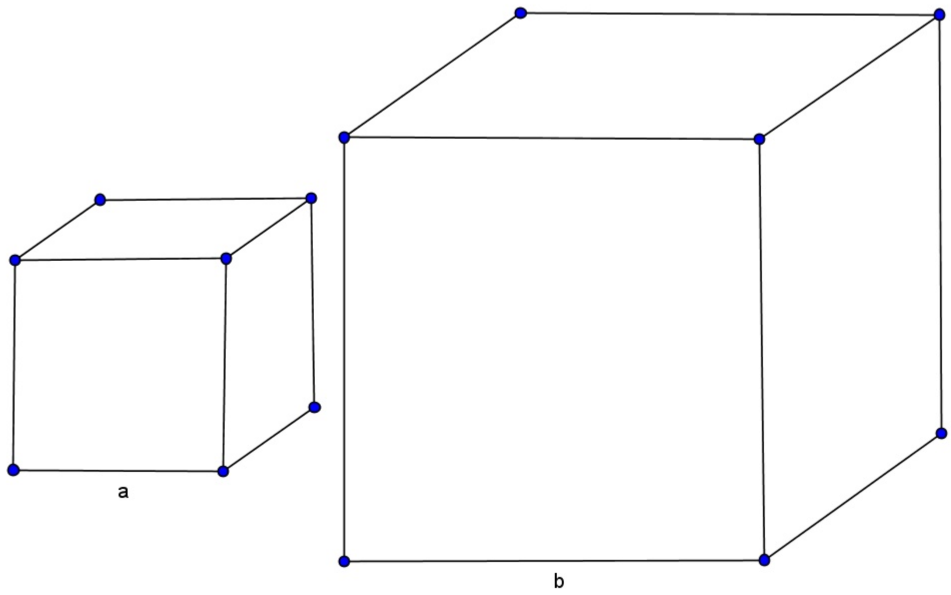

Figura 5.2: Duplicaçao do volume de um cubo

A Figura 5.2 mostra dois cubos que modela o problema apresentado. O cubo menor, de lado com medida a, representa o altar do templo de Apolo. O cubo maior, de lado com medida b, representa o altar recomendado pela divindade. É importante notar que na época em que foi proposto, os gregos não conseguiram resolver este problema.

A solução deste problema é escrever a medida da aresta b em função da aresta de medida a. Sabe-se que o volume do cubo menor é a^3 e que o volume do cubo maior é b^3. E ainda, que o volume do cubo maior é o dobro do volume do cubo menor. Em linguagem matemática, temos:

$$\begin{aligned} b^3 = 2a^3 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{2a^3} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{a^3} \\ &\Leftrightarrow \quad b = a\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

A verificação deste fato é imediata. Basta fazer a substituição:

$$b^3 = (a\sqrt[3]{2})^3 = 2a^3$$

Cabe fazer então alguns questionamentos a respeito deste problema:

1. Por que os gregos não conseguiram resolver este problema?

2. Se a medida da aresta do cubo for 1, qual será a medida da aresta do cubo que possui o dobro do volume do cubo de aresta 1?

3. É possível estabelecer uma relação semelhante triplicando o volume do cubo?

5.3 Mostrar que $0,999\ldots$ é igual a 1

O número decimal $0,999...$ é uma outra representação do número real 1. Em outras palavras, os números $0,999...$ e 1 representam a mesma ideia, ou, ainda, que ambos possuem a mesma localização na reta, que é a representação geométrica do conjunto dos números reais. Diversos conceitos importantes da matemática são utilizados nesta demonstração: progressões geométricas, limites, números racionais, etc.

Seja uma progressão geométrica de termos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ com n termos. Sabemos encontrar recursivamente os termos de uma progressão geométrica dado o seu primeiro termo. Tomando um número real q não nulo e diferente de 1, cada termo é obtido a partir do produto do termo anterior por q (razão da progressão geométrica).

Estamos interessados em encontrar a soma desta progressão para n termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \tag{5.1}$$

Multiplicando S_n por q obtemos:

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n+1} \tag{5.2}$$

Das Equações 5.1 e 5.2, estabelecemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
S_n - qS_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) - (a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n+1}) \\
S_n - qS_n &= a_1 - a_{n+1} \\
S_n - qS_n &= a_1 - a_1 q^n \\
(1-q)S_n &= a_1(1-q^n) \\
S_n &= a_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Vamos utilizar a Fórmula 5.3 para demonstrar que $0,999... = 1$. Para isto, escrevemos:

$$0,999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ... \qquad (5.4)$$

Observe que trata-se de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = \frac{9}{10}$ e razão $q = \frac{1}{10}$. Logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
0,999... &= \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}}\right) \\
&= \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1-(\frac{1}{10^n})}{\frac{9}{10}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{10^n} \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Para dar sentido a Expressão 5.5 temos que analisar o valor de n para valores muito grandes. Ou seja, quando a progressão tende a uma quantidade infinita de termos:

$$0,999... = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{10^n}) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1 \qquad (5.6)$$

Após esta demonstração utilizando a soma de termos de uma progressão geométrica, pode-se então utilizar de ideias intuitivas para convencer aos alunos do Ensino Básico da validade 0,999...=1.

Primeiro pode se explicar sobre as frações geratrizes para uma dízima periódica simples. Depois que o aluno se convencer de que $\frac{1}{3}$ vale 0,333..., então basta proceder do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,333... \\ 3 \times \frac{1}{3} &= 3 \times 0,333... \\ \frac{3}{3} &= 0,999... \\ 1 &= 0,999... \end{aligned}$$

Pode se também, supor que $x = 0,999...$ e manipular as igualdades:

$$\begin{aligned} x &= 0,999... \\ 10x &= 9,999... \\ 10x &= 9 + 0,999... \\ 10x &= 9 + x \\ 10x - x &= 9 \\ 9x &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

É fácil o aluno se convencer de que $0,xxx... = \frac{x}{9}$. A partir deste raciocínio pode se concluir que ao tomar $x = 9$ temos:

$$\begin{aligned} 0,xxx... &= \frac{x}{9} \\ 0,999... &= \frac{9}{9} \\ 0,999... &= 1 \end{aligned}$$

5.4 Mostrar que existem mais números irracionais do que racionais

Para isto é necessário que se apresente um método para enumerar todos os números racionais que existem. A Definição 3.4 apresenta os números racionais como classes de equivalência. Inicialmente, basta separar o conjunto das classes de equivalência dos racionais em três conjuntos: os racionais negativos, o zero e os racionais positivos. Para efeito desta demonstração vamos tomar apenas os racionais positivos. Para os racionais negativos o procedimento é feito de modo análogo.

O diagrama a seguir apresenta o conjunto das classes de equivalência que representa todos os racionais positivos. Na primeira coluna estão todas as frações de denominador 1, na segunda coluna estão as frações de denominador 2, e assim por diante. Para estabelecer uma sequência de racionais positivos o diagrama faz uma diagonalização que inclui uma única vez todas as classes de equivalência. Tomando apenas o representante de cada classe de equivalência, que neste caso o ideal é tomar a fração simplificada, pode se estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto das classes de equivalência dos racionais positivos.

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[r] & (1,4) \arrow[dl] & (1,5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(2,1) \arrow[d] & (2,2) \arrow[ur] & (2,3) \arrow[dl] & (2,4) \arrow[ur] & (2,5) \arrow[dl] & \cdots \\
(3,1) \arrow[ur] & (3,2) \arrow[dl] & (3,3) \arrow[ur] & (3,4) \arrow[dl] & (3,5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(4,1) \arrow[d] & (4,2) \arrow[ur] & (4,3) \arrow[dl] & (4,4) \arrow[ur] & (4,5) \arrow[dl] & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

Agora, já que os racionais são enumeráveis, se pode, sem perda de generalidade, estabelecer uma sequência de racionais:

$$\mathbb{Q} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\} \tag{5.7}$$

E então, para mostrar que existem no conjunto dos números reais, mais números irracionais do que racionais, toma-se apenas um representante dos irracionais e faz a soma entre este representante e cada elemento da sequência dos racionais. Por simplicidade escolhe-se o π. Temos agora uma nova sequência:

$$\alpha_1 + \pi, \alpha_2 + \pi, \alpha_3 + \pi, ...$$

onde cada elemento é um número irracional. Esta nova sequência é cardinalmente equivalente com o conjunto dos números racionais. Acrescentando a esta sequência os demais números irracionais, fica como queríamos demonstrar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não é objetivo deste trabalho esgotar todas as discussões sobre a Construção dos Números Reais. Pelo contrário, despertar o interesse pelo tema faz desta pequena obra algo muito relevante, dado que o Conjunto dos Números Reais é objeto de estudo do Ensino Básico aos estágios mais avançados da Matemática. Falar intuitivamente dele é simples, ao passo que construí-lo logicamente escapa aos domínios de muita gente educada matematicamente. Adotar este tema não foi uma atitude fácil. Primeiro pela dificuldade de ser prolixo em abordar o tema. Alguns autores tentam e os que aprofundam sobre o tema são muito sucintos. Depois, pela dificuldade em decidir por onde começar. Se adotasse a postura de tomar o conjunto dos números reais apenas como um corpo ordenado completo, deixaria de ver a beleza da sua construção como um todo. Ao passo que, conhecendo as etapas desta construção, aí sim, basta que tome o conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo que tem por modelo a reta real, e tudo que se queira demonstrar para o interesse da Análise, decorre deste fato.

As apresentações sobre números reais que temos nos compêndios de matemática atuais por vezes exageram muito na formalidade, por vezes muito vazio de ideias intuitivas. O contato que o estudante possui do estudo sobre números reais é feito de maneira supeficial no Ensino Básico e quando se chega no Ensino Superior é visto para quem cursa as disciplinas de cálculo, onde os números reais é supostamente conhecidos e quando cursa Análise, onde a construção de $\mathbb{R}$ é feita a partir do conjunto dos números racionais.

Finalmente, o ensino de matemática no Ensino Básico tem cumprido o papel de apresentar os fatos matemáticos: suas definições e propriedades, para em seguida resolver uma grande quantidade de exercícios com a manipulação destes fatos. Ora, a proposta da construção dos números reais já é uma opção de fugir desta linha de ensino. Definir os objetos recursivamente, reduzir as definições a uma pequena quantidade de axiomas, manipular algebricamente os fatos mais elementares e justificar aqueles em que os alunos do

Ensino Básico tenha condições de compreendê-los é algo fundamental na transformação para o ensino de qualidade. Nesse sentido, o trabalho atingiu o seu objetivo que é apontar para algumas caracteríscas importantes dos números reais e propor sua aplicação em sala de aula. Até então, trabalhar os números racionais, tem sido o ponto de evidência dos autores pesquisados. Ao passo, quando o assunto é número irracional, há muito pouco na literatura. Isto justifica a escolha de problemas de cunho histórico para despertar o interesse e a compreensão sobre os números irracionais.

Este trabalho é indicado a todos aqueles que tenham interesse pela teoria dos números. Principalmente aos colegas professores do Ensino Básico e aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática. A leitura pode ser feita de forma agradável, sem ter que recorrer a outros materiais de apoio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALENCAR FILHO, Edgard de. *Elementos de Teoria dos Anéis*. São Paulo: Nobel, 1990.

[2] ALVARENGA, Célio W. Manzi. *Construção dos números reais*. Disponível em: http://www.mat.unb.br/grad/pet/CNR-NET.pdf. Acesso em: 14/04/2014.

[3] BOYER, C.B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher/Edusp, 1976.

[4] BRASIL, M.E.D. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. SEF: Brasília, 1997.

[5] CARVALHO, Paulo C.P. et. al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[6] DOMINGUES, Hygino Hungueros e IEZZI, Gelson. *Álgebra Moderna*. Rio de Janeiro: ATUAL, 1982.

[7] DOMINGUES, Hygino Hungueros. *Fundamentos de Aritmética*. 13^a ed. São Paulo: ATUAL, 1991.

[8] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino Hugueros Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.

[9] FERREIRA, Jamil. *A Construção dos Números*. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[10] GUIMARÃES, Rita Santos. *Quadrado da diferença de dois números*. Portal do Professor, Brasil, 23/01/2010. Disponível em: portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=16149. Acesso em: 12/04/2014.

[11] HEFEZ, Abramo. *Curso de Álgebra*. 4^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[12] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética.* - 2^a ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[13] HEFEZ, Abramo.VILLELA, Maria Lúcia Torres. *Polinômios e Equações Algébricas.* 5^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] LIMA, Elon Lages. *Análise Real.* volume 1. Funções de uma variável. 11^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[15] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 1. 9^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[16] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* Volume 1. 13^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[17] LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino.* Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[18] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* 5^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[19] MEDEIROS, Luiz. *Lições de Análise.* Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2005.

[20] MILIES, César Polcino. COELHO, Sônia Pitta. *Números.* Uma Introdução à Matemática. 3^a ed. São Paulo, SP: Edusp, 2003.

[21] NERI, Cássio. *Curso de Análise Real.* 1^a edição. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2006.

[22] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática (2 grau).* Volume 1. São Paulo: MODERNA, 1995.

[23] PITOMBEIRA, João Bosco. ROQUE, Tatiana. *Tópicos de História da Matemática.* 5^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[24] RIPOLL, J.B., RIPOLL, C.C., SILVEIRA, J.P.F. *Números Racionais, Reais e Complexos.* Editora UFRGS.

[25] SÁ, Ylidio Pereira de. $0,999\cdots$ *é igual a 1?.* Disponível em: http://magiadamatematica.com/unifeso/0999IGUALA1.pdf. Acesso em: 12/04/2014.

[26] SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica.* Tradução de Sérgio Hariki. São Paulo, SP: McGraw-Hill, 1987.

Índice Remissivo