Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e pesquisa
Programa de pós-graduação em Matemática - PROMAT
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Derivadas no Ensino Médio: Reflexões e Propostas

por

Janaina Oliveira Mota

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Fábio dos Santos

Abril de 2014

Janaina Oliveira Mota

Derivadas no Ensino Médio: Reflexões e Propostas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Sob orientação do Professor Fábio dos Santos

São Cristovão
Abril de 2014

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Derivadas no Ensino Médio: Reflexões e Propostas

por

Janaina Oliveira Mota

Aprovada pela Banca Examinadora:

Fábio dos Santos

Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS
Orientador

Ademakson Souza Araújo

Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo - UEFS
Primeiro Examinador

Veleida Anahi da Silva

Prof. Dr. Veleida Anahi da Silva - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 14 de abril de 2014

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Agradecimentos

A Deus, pelas oportunidades que me deu e pelos relacionamentos que possibilitam que eu cresça a cada dia.

Ao meu orientador Fábio, que foi meu professor na graduação e sempre admirei tanto como professor quanto como pessoa.

Aos professores do programa de PROFMAT-UFS, por toda dedicação e pelos ensinamentos.

Aos colegas da minha turma de 2012, em especial a Allan que foi meu grande parceiro, tanto nos estudos como na hora de descontrair.

À minha família, por torcerem pela realização deste trabalho, em particular, à minha mãe Júlia que é a maior responsável por quem eu sou. Sem esquecer, claro, dos meus irmãos Gilmar *(in memorian)*, Gilma, Gilvaneide, Genicleide, Sara, Ivan e Dayane.

Aos meus amigos, que amo tanto e que acompanhou esses anos de dedicação, alguns mais de perto do que outros, mas todos na torcida verdadeira e com tanto carinho. Minhas amigas desde sempre Vanessa, Ana Paula e Laís. Alguns amigos que fiz na profissão: Adriana, Lucialda, Walesca, Grace, André, Geise, Marcella, Andreia e Sidney. E meus amigos desde a graduação: Lígia, Janisson, Leonel e Filipe, os quais admiro muito.

Aos meus professores de Matemática do Ensino Básico, eles que são inesquecíveis e que fizeram despertar em mim essa paixão pela Matemática, em especial Gilvan Luz e Eduardo Rollemberg.

Ao meu grande amor, Rone, por todo carinho e compreensão que foram, sem dúvidas, fundamentais para esta conquista.

Resumo

Esta pesquisa busca defender uma proposta de inserção de conceitos de Cálculo Diferencial ainda no Ensino Médio, proposta esta que já vem sendo abordada por diversos pesquisadores, tais como Ávila (1991, 1993, 2006), Duclos (1992), Machado (2008), Rezende (2003) e outros. Inicialmente, mostraremos dados atuais que apresentam o alto índice de reprovação nas diversas turmas de Cálculo I da Universidade Federal de Sergipe (UFS), justificando assim a necessidade da melhor compreensão desse conteúdo. Em seguida, apoiados nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e nas leituras a cerca do tema, apresentaremos alguns esclarecimentos de como seria possível colocar em prática esta proposta. É levado em consideração que há muitos livros didáticos contemporâneos do Ensino Médio que reservam alguns capítulos para tratar deste conteúdo, porém os mesmos só fazem menção a essa proposta na terceira série de forma, muitas vezes, isolada. Nossa ideia seria de uma apresentação de Derivadas já na primeira série juntamente com estudo de Funções e paralelamente com o estudo da Cinemática na Física. Como ferramenta tecnológica utilizamos o *software* de geometria dinâmica, Geogebra, para auxiliar no entendimento dos conceitos de maneira experimental. Dessa maneira o conteúdo pode ser apresentado, sempre desfrutando e enriquecendo o conhecimento prévio a fim de otimizar o tempo na resolução de problemas e formalizar os conceitos desejados.

Palavras-Chave: Cálculo, Ensino Médio, Derivadas, GEOGEBRA.

Abstract

This research seeks to defend a proposal to the concepts of Differential Calculus still in the high school, a proposal that has already been addressed by many researchers, such as Avila (1991, 1993, 2006), Duclos (1992), Machado (2008), Rezende (2003) and others. Initially, we will current data show that present the high failure rate in various classes of Calculus from Federal University of Sergipe (UFS), justifying the need for better understanding about that content. Then backed by the guidelines of the National Curriculum Parameters and readings about the topic, we will present some explanations of how it would be possible to put this proposal into practice. It is considered that there are many contemporary textbooks of High School that reserve a few chapters to address this content, but they only make mention of this proposal in the third grade in a isolated way. Our idea would be a presentation of Derivatives in the first grade with the study of functions in parallel with the study of kinematics in physics. As technological tool, we use dynamic geometry software, Geogebra, to help understand the concepts experimentally. This way the content can be presented, always enjoying and enriching prior knowledge in order to optimize the time in solving problems and formalize the desired concepts.

Keywords: Calculus, High School, Derivative, GEOGEBRA.

Sumário

Introdução

Um cenário não muito satisfatório de aprovações nas disciplinas de Cálculo no Ensino Superior e a possibilidade de uma introdução ao cálculo no Ensino Médio constituem o tema motivador para o surgimento da proposta desse trabalho. Os diversos textos analisados tais como Ávila (1991, 1993, 2006), Duclos (1992), Machado(2008) e Rezende (2003) relatam a necessidade e a possibilidade da inserção das ideias intuitivas de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. Rezende(2003) *apud* Molon(2013) demonstra sua indignação chamando esse cenário de "fracasso":

> Um dos grandes desafios no ensino superior de matemática ainda é, sem dúvida, o tão propalado "fracasso no ensino de Cálculo". Creio que, se investigarmos a origem histórica de tal "fracasso", verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo (REZENDE, 2003 *apud* MOLON, 2013, p.14).

Faremos primeiramente uma análise das estatísticas da disciplina Cálculo I, de dois semestres de 2013, na Universidade Federal de Sergipe (UFS), para podermos entender melhor a preocupação dos pesquisadores a cerca dessa temática.

Uma Análise das Reprovações na disciplina Cálculo I na UFS

De acordo com dados cedidos pela diretoria do Centro de Ciências Exatas e Tecnologias (CCET) da UFS, de fato existe um número alto de reprovações e trancamento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I dos diversos cursos. As tabelas 1 e 2 mostram os índices de todas as turmas ofertadas nos períodos 2013-1 e 2013-2 respectivamente. As tabelas estão organizadas de forma que na primeira coluna de cada tabela está o nome das turmas, na segunda, o total de alunos matriculados em cada turma, na terceira, o percentual de aprovados, na quarta, o percentual de trancados, na quinta o percentual de reprovados por média e na sexta coluna, o percentual de alunos cancelados. É importante salientar que em todas as turmas o número de reprovação por faltas foi nulo, por isso não achamos necessário uma coluna com esses números.

Tabela 1: Desempenho dos estudantes de Cálculo UFS 2013-1

TURMA	TOTAL*	AP (%)	TR (%)	RM (%)	CA (%)
T01	47	61,7	23,4	12,77	2,13
T02	38	44,74	13,16	42,11	0
T03	57	21,05	19,3	52,63	7,02
T04	36	63,89	13,89	22,22	0
T05	42	19,05	16,67	64,29	0
T06	45	73,33	15,56	11,11	0
T07	22	9,09	36,36	54,55	0
T08	51	52,94	7,84	39,22	0
T09	23	13,04	34,78	52,17	0
T10	38	39,47	7,89	50	2,63
T11	38	39,47	18,42	39,47	2,63
T12	47	59,57	6,38	34,04	0
T13	26	26,92	15,38	57,69	0
T14	38	42,11	23,68	34,21	0
T15	34	41,18	23,53	32,35	2,94
T16	40	32,5	27,5	37,5	2,5
T17	47	$27,91$	$18,60$	$53,49$	0
T18	59	37,29	3,39	59,32	0
T19	34	14,71	70,59	14,71	0
T20	59	49,15	1,69	47,46	1,69
T21	39	61,54	23,08	12,82	2,56
T22	42	45,24	16,67	35,71	2,38
T23	44	38,64	15,91	40,91	4,55
T24	45	26,67	8,89	62,22	2,22
T25	46	69,57	0	21,74	8,7
MÉDIA		40,43	18,50	39,4	1,68

AP: aprovado, TR: trancado, RM: Reprovado por média e CA: Cancelado

* Total de alunos matriculados em cada turma

Tabela 2: Desempenho dos estudantes de Cálculo UFS 2013-2

TURMA	TOTAL*	AP (%)	TR (%)	RM (%)	CA (%)
T01	34	58,82	8,82	32,35	0
T02	38	26,32	18,42	50	5,26
T03	39	48,72	15,38	35,9	0
T04	31	35,48	25,81	38,71	0
T05	48	31,25	31,25	35,42	2,08
T06	40	15	35	47,5	2,5
T07	20	45	40	15	0
T08	26	61,54	11,54	26,92	0
T09	58	22,41	10,34	67,24	0
T10	25	44	28	24	4
T11	68	17,65	10,29	70,59	1,47
T12	36	47,22	13,89	38,89	0
T13	68	16,18	8,82	75	0
T14	29	20,69	24,14	55,17	0
T15	24	20,83	29,17	50	0
MÉDIA		34,07	20,72	44,18	1,02

AP: aprovado, TR: trancado, RM: Reprovado por média e CA: Cancelado

* Total de alunos matriculados em cada turma

Observando os dados apresentados percebemos que os índices de não aprovação são altos, é importante observar que o alto índice de trancamento pode ser um indicador de que os alunos desistem já no começo do período, este índice variou de 0% a 70,59% no primeiro semestre, com uma média de 18,5%. Já em 2013-2, variou entre 8,82% a 31,25%, com uma média de 20,72%. A reprovação por média tem números ainda mais preocupantes, pois mesmo apresentando, na primeira tabela, uma turma com 11,11%, quase a metade das turmas apresentou o índice de reprovação maior que 40%. A segunda tabela mostra que a turma com menor índice de reprovação por média foi de 15%, apresentando uma turma com 70,59% como índice.

Acreditamos que um dos principais responsáveis por esses números expressivos pode estar relacionado com as dificuldades que os estudantes enfrentam ao ingressar na universidade e se deparar com as primeiras aulas Cálculo I. Essas dificuldades, relacionadas aos conceitos abordados inicialmente nessa disciplina, podem levá-los a não acompanhar a sequência do desenvolvimento dos conteúdos. Em função disso, os alunos passam a trancar à disciplina adiando sua participação e atrasando seu curso, contribuindo para os altos índices apresentados. Destaca-se que, essas dificuldades podem surgir, principalmente, em razão da falta de uma boa base ainda no Ensino Médio, base essa que supra os pré-requisitos para o entendimento de limites, derivadas e integrais. Este número de trancamento soma-se ao número de reprovados por média aumentando o número de alunos não aprovados.

Rezende (2003) *apud* André (2008) faz o seguinte comentário:

> De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do "esconderijo forçado" a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo.[...] (Rezende 2003 *apud* André 2008, p 5.)

Nas tabelas 3 e 4 apresentaremos estes números de uma maneira mais resumida, considerando apenas as opções: APROVADOS e NÃO APROVADOS, em que, aprovados são aqueles que atingiram a média mínima exigida pela UFS, e reprovados são os discentes que trancaram, não atingiram a média e aqueles que por algum motivo tiveram suas matrículas canceladas. Assim, podemos verificar qual, de fato, é relação entre esses valores.

Tabela 3: Desempenho dos estudantes de Cálculo UFS 2013-1

TURMA	AP (%)	NAP (%)
T01	61,7	38,3
T02	44,74	55,26
T03	21,05	78,95
T04	63,89	36,11
T05	19,05	80,95
T06	73,33	26,67
T07	9,09	90,91
T08	52,94	47,06
T09	13,04	86,96
T10	39,47	60,53
T11	39,47	60,53
T12	59,57	40,43
T13	26,92	73,08
T14	42,11	57,89
T15	41,18	58,82
T16	32,5	67,5
T17	27,91	72,09
T18	37,29	62,71
T19	14,71	85,3
T20	49,15	50,85
T21	61,54	38.46
T22	45,24	54,76
T23	38,64	61,36
T24	26,67	73,33
T25	69,57	30,43
MÉDIA	40,43	59,57

AP: aprovado, NAP: não aprovado

Tabela 4: Desempenho dos estudantes de Cálculo UFS 2013-2

TURMA	AP (%)	NAP (%)
T01	58,82	41,18
T02	26,32	73,68
T03	48,72	51,28
T04	35,48	64,52
T05	31,25	68,75
T06	15	85
T07	45	55
T08	61,54	38,46
T09	22,41	77,59
T10	44	56
T11	17,65	82,35
T12	47,22	52,78
T13	16,18	83,82
T14	20,69	79,31
T15	20,83	79,17
MÉDIA	34,07	65,93

AP: aprovado, NAP: não aprovado

Na tabelas 3, das vinte e cinco turmas de 2013-1, apenas as turmas T01, T04, T06, T08, T12, T21 e T25 tiveram a maioria dos alunos aprovados e na tabela 4 podemos observar que no segundo semestre de 2013, de um total de 15 turmas, somente as turmas T01 e T08 tiveram mais de 50% dos alunos aprovados, fica então bem claro que há uma necessidade de buscar melhorias nesta estatística. Como se trata de uma disciplina de primeiro período, um dos fatores pode estar ainda no Ensino Médio.

Segundo Carvalho (1996), uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral já fez parte do currículo das escolas secundárias do Brasil por duas vezes: a primeira em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República e uma segunda vez, no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando do currículo escolar oficialmente até 1961. Devido a influência do movimento da Matemática Moderna, nas décadas de 60 e 70, o Brasil e outros países excluíram alguns conteúdos, como o cálculo, dos antigos programas.

Uma medida tomada pelo Departamento de Matemática (DMA) é o "Pré-Cálculo", que ainda está em caráter experimental, e é uma espécie de curso introdutório direcionada aos alunos recém ingressados nos cursos de ciências exatas que tem a finalidade de fazer uma revisão dos conteúdos matemáticos que foram ensinados no ensino médio aos alunos aprovados no vestibular, fazendo um paralelo aos conteúdos a serem ensinados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I.

Projeto de monitoria também é uma alternativa da coordenação do DMA. A monitoria pode ser vista como um reforço de determinadas disciplinas. Trata-se de uma atividade realizada paralelamente com o trabalho do professor em sala de aula, em que os próprios alunos, que já tenham cursado a disciplina e se identificou, por meio de processo seletivos, darão um suporte para o desenvolvimento da disciplina em horários alternativos.

Estas medidas estão sendo tomadas para amenizar e melhorar as estatísticas, mas o ideal seria que o Ensino Básico já fosse, de fato, o pré-requisito necessário para o acesso ao Nível Superior.

O Cálculo no Ensino Médio

Muitos livros do Ensino Médio ainda trazem em seus útimos capítulos noções de Cálculo, como o estudo de Limites, Derivadas e suas aplicações, a exemplo de Dante (2007); Bonjorno (2011); Giovanni(2012); Paiva (1995); Barreto Filho e da Silva (2003); Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo, Almeida (2001).[1] Acreditamos, que os autores veem isso como um elo entre o Ensino Médio e o Superior. Contudo, um dos principais focos dos estudantes nesse nível de ensino, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), não faz nenhuma referência direta a esses conteúdos em seu edital. Diante disso as escolas, professores e alunos acabam dando prioridade aos conteúdos contemplados nesse exame, o que é compreensível, visto que há um imediatismo dos estudantes e uma busca de resultados (aprovações nos vestibulares) das escolas e professores.

O presente trabalho não faz crítica a essa prática docente nem ao ENEM, mas queremos sugerir uma reorganização da grade curricular de Matemática, procurando valorizar o raciocínio do aluno e relegar conhecimentos pontuais que não acrescentam muito por não auxiliar o discente a compreender novos conceitos ou realizar atividades de forma eficiente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2002) traz uma preocupação com o ensino de funções que é excessivamente formal, fazendo com que os docentes e discentes acabem deixando de lado conteúdos mais importantes:

[1] Uma versão mais atualizada deste material, de 2010, não traz os conteúdos de cálculo.

> [...]Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares (BRASIL, 2002, p.121).

E ainda sobre o ensino de funções, agora particularmente, logaritmicas e exponenciais, há uma orientação afim de otimizar o que for de maior relevância:

> As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas (BRASIL, 2002, p.121).

Os PCNEM mostram uma preocupação com a atual grade curricular de Matemática, isto fica claro no trecho "linguagem excessivamente formal" a cerca do estudo de funções. E quando sugere suprimir ou enfatizar menos propriedades de características e mantissas no caso do ensino de logarítmos.

Cabe ressaltar que há um estudo que apresenta uma preocupação a cerca da aprendizagem dos conceitos de funções já no final da década de 1980. Ávila (1985) relata que esta dificuldade que a maioria dos alunos possuem gera uma tendência ao fracasso caso o aluno opte a realizar as primeiras disciplinas de um curso na área de Exatas, principalmente, Cálculo I.

Diante do exposto, vê-se a necessidade de, sem sobrecarregar, retomar ao Ensino Médio uma introdução ao cálculo, com ideias intuitivas de Limites e uma breve introdução as Derivadas com uma interdisciplinaridade com a Física a fim de facilitar o entendimento e de alguns conhecimentos da própria disciplina, bem como auxiliar no entendimento da Cinemática e ainda preparar o aluno para um futuro nível superior. Como mensionado, não é necessário um aprofundamento, mas uma apresentação significativa de tais conteúdos.

Ávila (1991), que é um defensor desta temática, defende que seria interessante para os alunos e para o professor de Física se já tivessem passado por noções de Derivadas quando estivessem estudando o movimento uniformemente variado.

> É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea (ÁVILA, 1991, p. 4).

Neste sentido, verifica-se a necessidade e a possibilidade de inserir algumas noções de Cálculo já na 1ª série do Ensino Médio, visto que pode ser estudado juntamente com o ensino de funções. Também cabe salientar que é nesta série que Cinemática é estudada na Física, o que favorece a tão sonhada interdisciplinaridade.

Uma maneira de tornar o conteúdo significativo é começando com aplicações e só aos poucos formalizando, sem muitas complexidades, pois o interesse seria apenas de Derivadas de algumas funções polinomiais para facilitar o estudo da Cinemática e de problemas de crescimento e decrescimento de funções e ainda problemas de otimização.

Nos próximos capítulos apresentaremos uma proposta baseada nos próprios livros didáticos para o Ensino Médio, mas é importante ressaltar que pretendemos apenas mostrar que é possível colocar em prática o que foi exposto teoricamente, e que este material não é um guia de ensino de Derivadas. Para o desenvolvimento usaremos recursos tecnológicos como o computador, que está cada vez mais presente no ambiente escolar.

Capítulo 1

Noções de derivadas para uso no Ensino Médio

Derivadas deve ser introduzida de maneira sutil, de forma a servir como um subsídio para o estudo de Matemática e Física no Ensino Médio, fortalecendo a base para o Ensino Superior. É um estudo que pode ser incorporado ao conteúdo de funções, começando com estudo de Taxa de Variação Média que é uma maneira muito intuitiva para compreender crescimento ou decrescimento de uma função em um determinado intervalo. O professor pode conduzir o aluno a diminuição desse intervalo para compreender melhor o comportamento de uma curva de uma maneira mais pontual e assim, fazer uma analogia ao coeficiente angular da reta tangente a curva em um determinado ponto.

A maioria dos livros de Ensino Médio já trazem o conteúdo em sua grade, alguns como Paiva (2004) e Dante (2007) iniciam com a definição de derivada de uma função em um ponto, que por ser um conteúdo sugerido para a 3ª série do Ensino Médio é uma maneira que se aproxima muito da definição apresentada nos cursos de cálculo do Ensino Superior. Como a proposta do presente trabalho é que o conteúdo citado seja trabalhado ainda na 1ª série, usaremos, a princípio, livros didáticos que abordam do Ensino Médio, com isso podemos perceber que não é uma realidade distante.

1.1 Taxa de Variação Média (TVM)

O material de (Giovane & Bonjorno, 2011) aborda de maneira bem intuitiva, principalmente na introdução por Taxa de Variação Média em que o mesmo faz uma ligação com velocidade Escalar Média.

De modo geral, a taxa de variação média de uma função $y = f(x)$ em relação a x, em um intervalo $[x_0, x_1]$ é dada pela razão:

$$T_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Chamando a variação de y de $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ e a variação de x de $\Delta x = x_1 - x_0$, temos:

$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

A taxa de variação média corresponde, então, à variação média de y por unidade de x no intervalo entre x_0 e x_1.

Vejamos o exemplo:

No gráfico da figura 1.1 a taxa de variação da função $y = f(x)$ entre $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$ é:

$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{17 - 5}{7 - 3} = \frac{12}{4} = 3$$

Isto significa que, no intervalo entre $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$, o valor de y variou em média 3 unidades. De acordo com essas informações esta variação é mesma para diferentes funções, desde que tenham imagens iguais para $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$. Como ilustrado na figura 1.2.

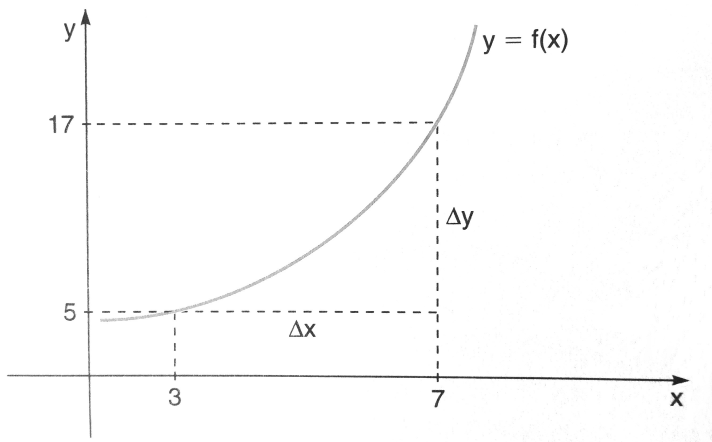

Figura 1.1: Função com taxa de variação igual a 3

A taxa de variação média nos mostra com que rapidez a função varia, isto é, ela se refere a um intervalo de valores de x em relação ao valor de $f(x)$. Analisando a situação proposta, podemos concluir que em algumas frações do intervalo o gráfico pode ter variado muito, ou seja, pode ter aumentado ou diminuído muito mais rapidamente do que o indicado pela taxa de variação média. Ou seja, por se tratar de uma média, em casos de um intervalo muito grande pode-se ter casos onde a função teve um comportamento diferente do mencionado como a média.

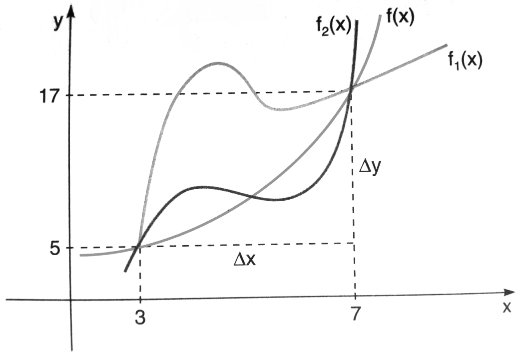

Figura 1.2: Funções com taxa de variação igual a 3 no intervalo $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$

A única exceção é para a função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, cuja imagem gráfica é uma reta e a taxa de variação média é constante e igual a a para qualquer intervalo;

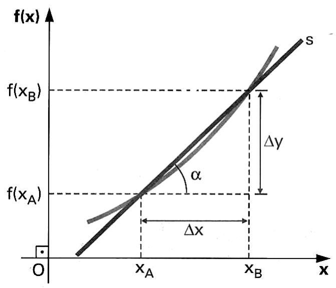

Figura 1.3: Secante

Seja $f(x) = ax + b$, então a TVM em um intervalo entre x_0 e x_1, com $x_0 < x_1$ é:

$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a$$

Fazendo uma analogia com a cinemática, se considerarmos um móvel que em um intervalo entre t_0 e t_1 se desloca da posição s_0 para a posição s_1, conforme a figura a seguir, a taxa de variação média no referido intervalo seria a *velocidade escalar média* do móvel.

A velocidade escalar média é a velocidade que o carro assumiria se tivesse em um movimento uniforme. Ainda poderia estender a analogia entre velocidade escalar média e taxa de variação média a outros conceitos, como por exemplo: aceleração escalar média, crescimento médio, preço médio entre outros.

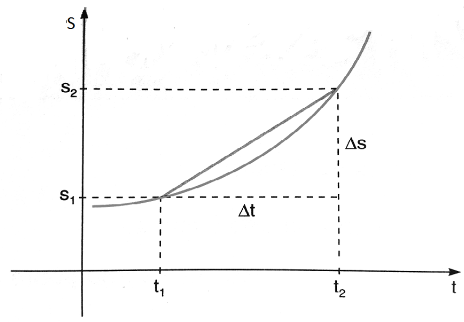

Figura 1.4: Taxa de variação média

1.2 Reta tangente

Neste momento julgamos necessária uma apresentação da definição formal de reta tangente a um gráfico ligado a derivada da sua função.

Rezende(2003) *apud* Pereira(2009) defende a associação entre os aspectos geométricos e físicos relacionados a derivadas.

> Calcular exaustivamente derivadas de funções através das regras usuais de derivação não leva o aluno a construir efetivamente o significado desta operação. Interpreta-la tão somente como "coeficiente angular" da reta tangente significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza - esse foi inclusive, o grande problema perseguido inicialmente pelos filósofos escolásticos. Com efeito, derivada, é sobretudo, taxa de variação instantânea. A interpretação geométrica não esgota completamente a idéia essencial de derivada; existe todo um campo de significações importante para a tecedura da noção de derivada: pensar velocidade instantânea como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $s = s(t)$ é conseqüência, e não causa, da ação de interpretá-la como limite de velocidades médias, quando fazemos Δt cada vez mais próximo de zero. Na verdade ambas as interpretações se complementam e contribuem para a significação do conceito de derivada. Eximir a interpretação dinâmica do conceito de derivada é, além de um contra-senso histórico, um atentado ao seu próprio significado (REZENDE 2003 *apud* PEREIRA 2009, p.53)

É considerável uma apresentação experimental e formal da reta tangente pois a noção intuitiva do cálculo é reforçado pela interpretação geométrica, e no caso de derivadas essa interpretação está diretamente ligada à reta tangente.

> O Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos. É perfeitamente possível, em uma única aula, introduzir a noção de reta tangente a uma curva e a de derivada de uma função (ÁVILA, 1991, p. 4).

Baseado no livro didático Contexto & Aplicações do autor Dante (2007), apresentaremos uma definição formal da interpretação geométrica da derivada.

O coeficiente angular de uma reta **r** é dado por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

em que $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são dois pontos quaisquer de uma reta r. Chamando de α o ângulo que r forma com o eixo x, o coeficiente m é a tangente de α, ou seja:

$$m = \tan \alpha$$

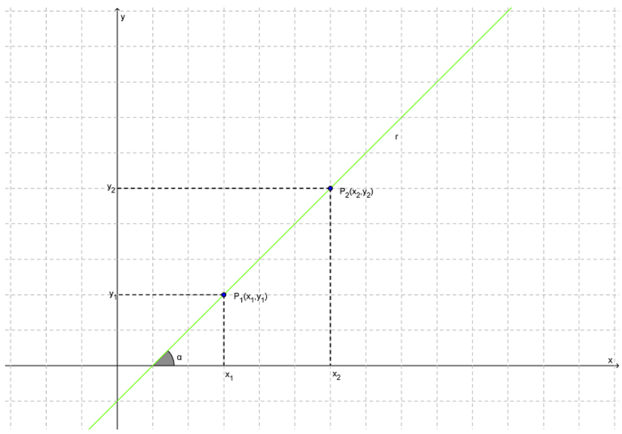

Figura 1.5: Reta tangente

Consideramos α a partir do eixo x, em direção a r no sentido anti-horário. Note que não existe m quando r é paralela ao eixo y.

Intuitivamente *a inclinação de uma função* $y = f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$ é a *inclinação* da reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ ou simplesmente em $f(x_0)$.

Esse coeficiente angular é $f'(x_0)$, a derivada da função f no ponto $f(x_0)$. Portanto, existindo $f'(x_0)$, existirá a reta tangente e: $f'(x_0) = \tan\alpha$

Observações:

a) Para admitir reta tangente em um determinado ponto, o gráfico da função não pode dar "salto" (não pode ser descontínuo nele) nem mudar bruscamente de direção (formar "bicos") nesse ponto. Por exemplo, não admitem tangente em x_0, os seguintes gráficos de funções, Figura 1.6:

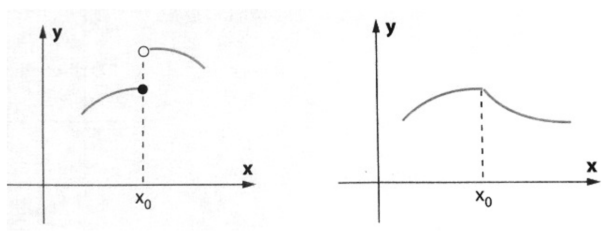

Figura 1.6: Contexto & Aplicações, p. 232

b) Retas verticais não têm coeficiente angular, pois $m = \tan 90^o$ não está definido. Assim, se a tangente ao gráfico de uma função num ponto é paralela ao eixo y, a função também não admite derivada nesse ponto e dizemos que não existe a tangente ao gráfico por esse ponto, Figura 1.7.

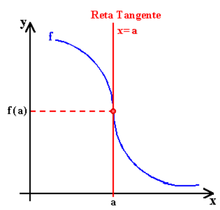

Figura 1.7: Função que não admite tangente em x_0

Observando algebricamente temos, no caso da tangente paralela ao eixo y, $x_1 = x_2$ tornando assim, a expressão $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ indeterminada. Logo é importante entender que nem sempre uma função possui reta tangente em determinados pontos consequentemente também não tem derivada. E isso pode ser verificado algebricamente e também a partir da visualização de seu gráfico.

1.3 Taxa de Variação Instantânea (TVI)

Diante do exposto na seção 2.1 podemos notar que quanto maior for o intervalo podemos ter valores mais distantes da média em alguns trechos do intervalo. Assim, quanto menor for o intervalo a ser analisado de uma função, mais significativa será a análise da variação no intervalo em questão. Para isso vamos analisar a taxa de variação de uma função $y = f(x)$ em um ponto, ou seja, vamos calcular a *taxa de variação instantânea* de uma função em um ponto.

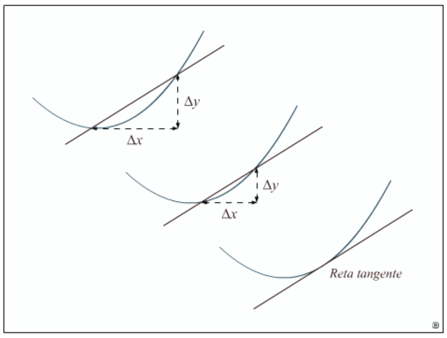

Figura 1.8: Taxa de Variação Instantânea de uma função em um ponto

Geometricamente, esta taxa de variação instantânea é representada pelo coeficiente angular da reta tangente à curva da função f no ponto x_0.

Uma maneira interessante de se observar essa variação instantânea é baseada em uma noção de retidão local[1]. Que pode ser trabalhada com auxílio de *software* de geometria dinâmica. Em que o próprio aluno pode manipular e em fim extender o conceito de variação instantânea para derivada.

Tall (2000) *apud* André (2008) dá uma a atenção especial a noção de retidão local porque, segundo os mesmos, permite que a função derivada seja vista como a mudança de gradiente do próprio gráfico.

Sobre retidão local, considera-se:

> A noção de *local straightness* se baseia na ideia de que as curvas diferenciáveis estudadas nos cursos iniciais de cálculo se parecerão com uma reta quando altamente magnificadas na vizinhança de um ponto. A derivada é portanto apresentada como o coeficiente angular desta reta. O organizador genérico associado é um programa de computador que possibilite ao usuário traçar gráficos de funções, mudar janelas gráficas e observar as consequentes mudanças de aspecto nas curvas (GIRALDO & CARVALHO, 2002, p.105).

[1]local straightness- em inglês

Note que, somente agora, na execução da proposta o termo "derivada" foi utilizada, isto propositalmente, tornando assim uma apresentação sutil e natural por meio de exemplos práticos.

Pereira (2000) acredita que o conceito para os estudantes se tornará enriquecida com o entrelaçamento entre da reta tangente e a taxa de variação instantânea e para isso defende a proposta do uso de um *software* para que seja, de maneira experimental, introduzida a ideia da reta tangente à uma curva.

> Partindo da noção de retidão local, esperamos que os alunos visualizem a reta tangente em um determinado ponto, como a reta que melhor se aproxima a função nas proximidades deste ponto. Em contrapartida, trabalharemos para que o estudante seja capaz de, ao visualizar o gráfico de uma função globalmente, traçar a reta tangente em um determinado ponto (PEREIRA, 2000, p.54).

Giraldo apud André (2008, p.35) resume afirmando que derivada de uma função é apresentada como a inclinação da reta com a qual seu gráfico se confunde quando submetido a um processo de magnificação local através da mudança de janelas gráficas

Um *software* de geometria dinâmica em que se possa aproximar ou afastar gráficos de funções pode ser um grande aliado para entender o comportamento de uma função quando olhada muito de perto, daí inferir o conceito de retidão local.

O *software* que será usado nesta proposta é o Geogebra[2] , um programa gratuito e livre, além de ser intuitivo, apresenta uma interface simples e de fácil acesso para um aluno de ensino médio. Visto que, em geral, os alunos estão cada vez mais familiarizados com os recursos tecnológicos.

"Uma linha curva pode ser considerada como uma coleção de infinitos segmentos, todos de comprimento infinitesimal, ou seja, pode ser aproximada por uma linha poligonal com quantidade infinita de lados, todos de comprimento infinitesimal" (de L Ĥospital (1696), Postulados, *apud*, André, 2008).

André (2008) faz experiência a seguir em seu trabalho com um outro *software* e conclui que ao aproximar curva adquire o aspecto de um "segmento de reta", logo podemos analisar a função no intervalo em questão, observando o comportamento do "segmento de reta" com o qual a curva se confunde. Desta forma, a derivada de uma função pode ser apresentada como inclinação da reta com a qual seu gráfico se confunde quando submetido

[2] *Software* livre, disponível em http://www.geogebra.org/

a um processo de magnificação local. Esta similaridade leva-nos a fazer uma análise do comportamento da função num ponto x_0 qualquer do domínio através de uma aproximação linear local, ou seja, através da análise do comportamento da reta que contém este "segmento de reta" que passaremos a chamar de *tangente*.

A ideia não é abandonar a definição formal, até porque ele necessitará desta no Ensino Superior, mas torná-la mais significativa e familiar. Por isso, este trabalho apresentará tal definição, sem muita complexidade e aproveitando os atuais livros didáticos do Ensino Médio, assim podemos perceber que não é uma realidade distante.

A sequência de imagens está logo após a descrição do exemplo.

Veremos o exemplo da magnificação da curva $f(x) = 0,5x^2$ para no ponto $x = 1$.

Primeiramente, vamos traçar o gráfico da função $f(x) = 0,5x^2$ digitando os comandos no canto inferior esquerdo da tela, como na Figura 1.9. Podemos notar na figura 1.10 que imagem gráfica da função $f(x) = 0,5x^2$ é uma parábola, vamos observar o comportamento desta curva nas proximidades do ponto $x = 1$ com auxílio dos comandos do *software*.

Podemos observar na Figura 1.10 o gráfico da parábola $f(x) = 0,5x^2$. Se ampliarmos a imagem, neste caso próximo ao ponto $x = 1$, cada vez mais ficará perceptível a semelhança com um segmento de reta, Figura 1.11, Figura 1.12 e Figura 1.13.

E, ainda para observamos melhor a aproximação com a reta tangente podemos ainda, traçar a tangente à curva no ponto analisado, como na Figura 1.14 e ampliar a imagem, Figura 1.15 e Figura 1.15.

Esse mesmo processo pode ser utilizado para compreender casos em que a função não possui derivada em algum ponto, como por exemplo, as funções que ocorrem "bicos" ou descontinuidades, em que podemos aproximar e não teremos uma retidão local nesses "bicos".

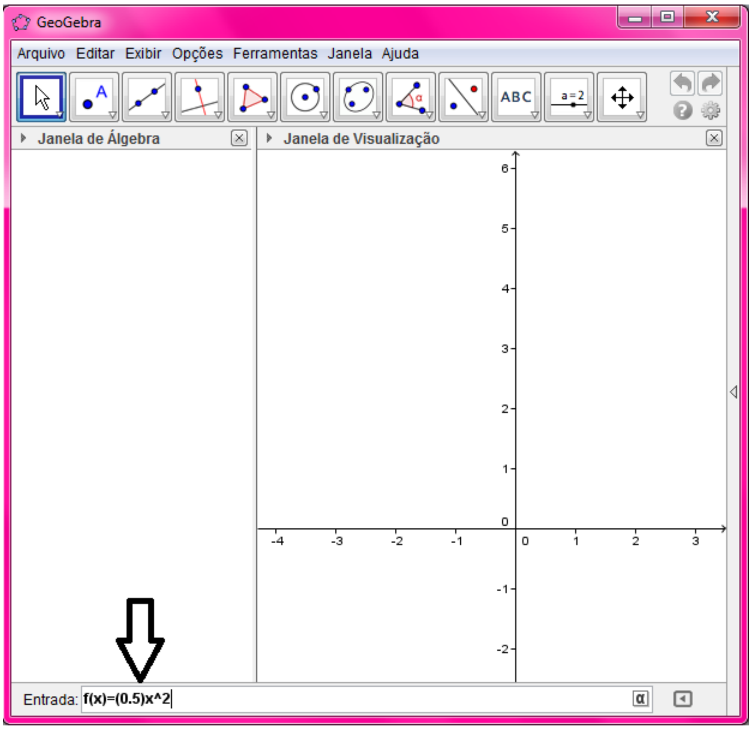

Figura 1.9: Introduzindo o gráfico da função $f(x) = 0,5x^2$

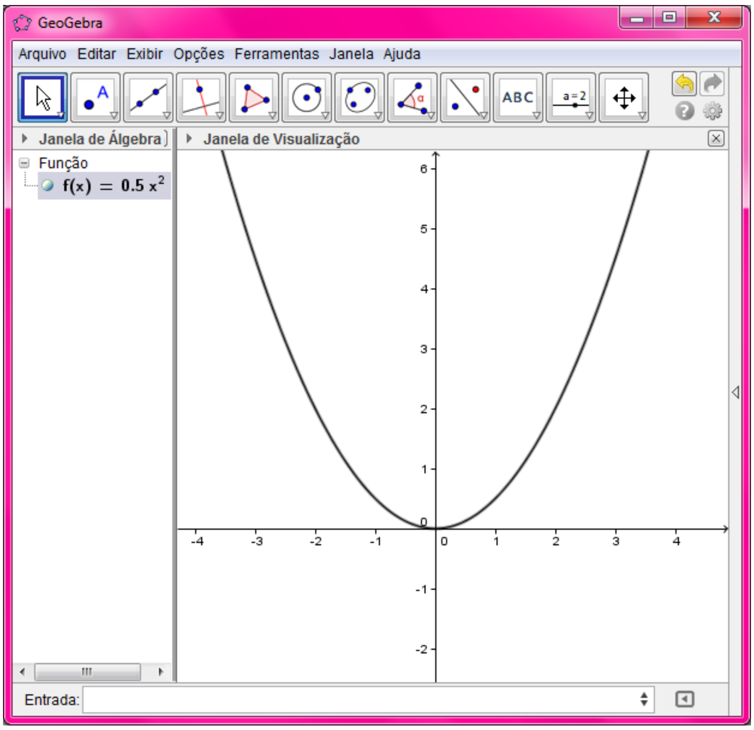

Figura 1.10: gráfico da função $f(x) = 0,5x^2$

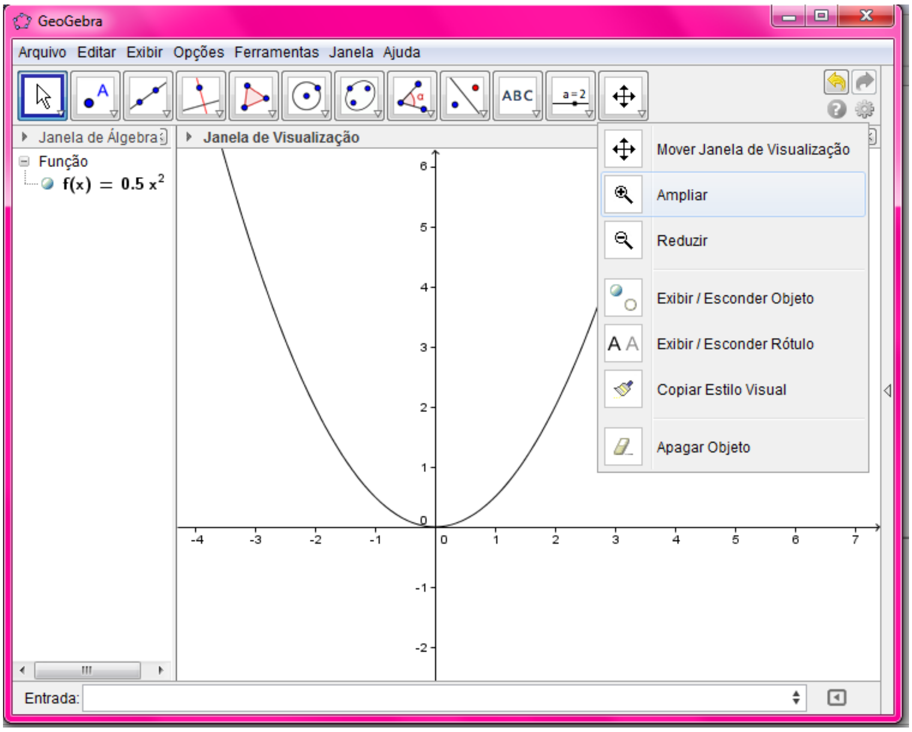

Figura 1.11: Ampliando o gráfico

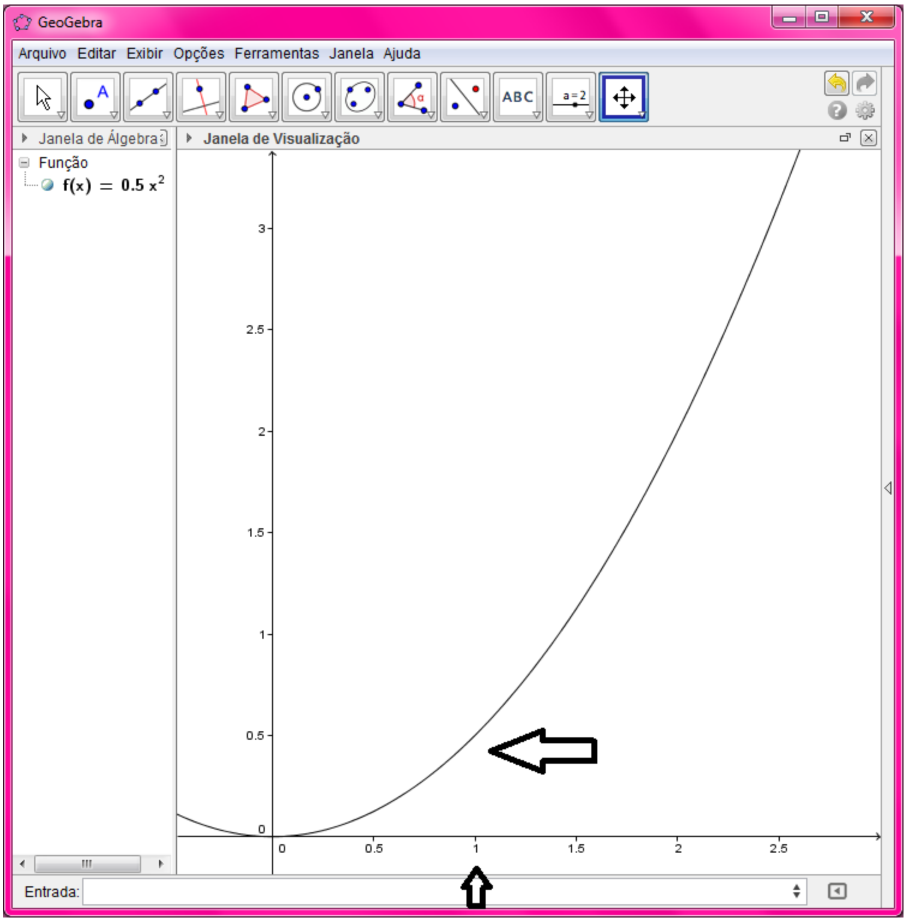

Figura 1.12: Ampliando a imagem próximo ao ponto $x = 1$

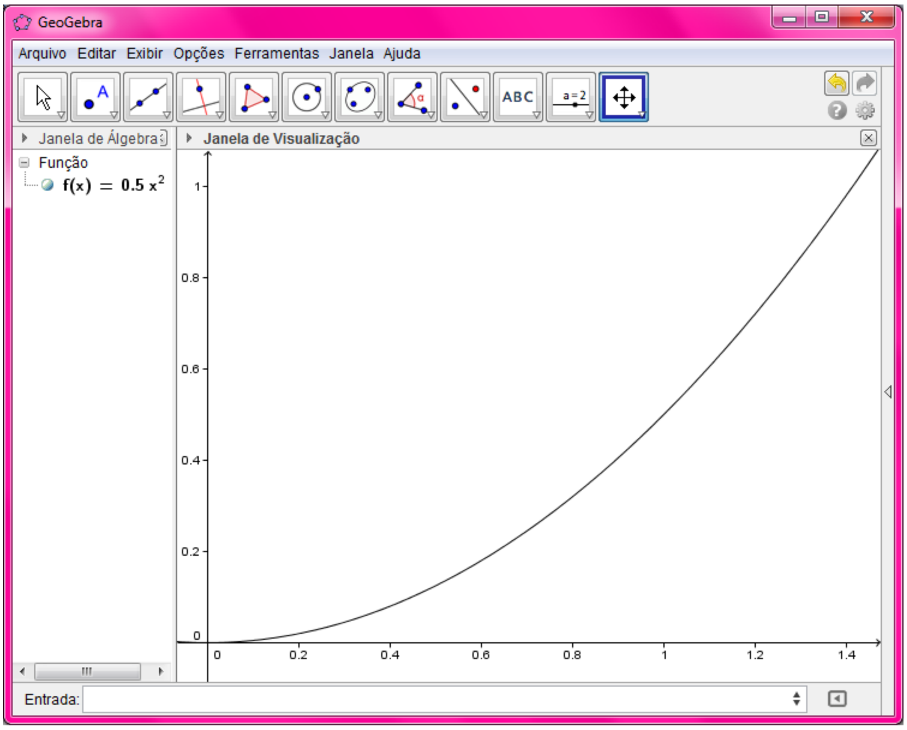

Figura 1.13: Noção de Retidão Local

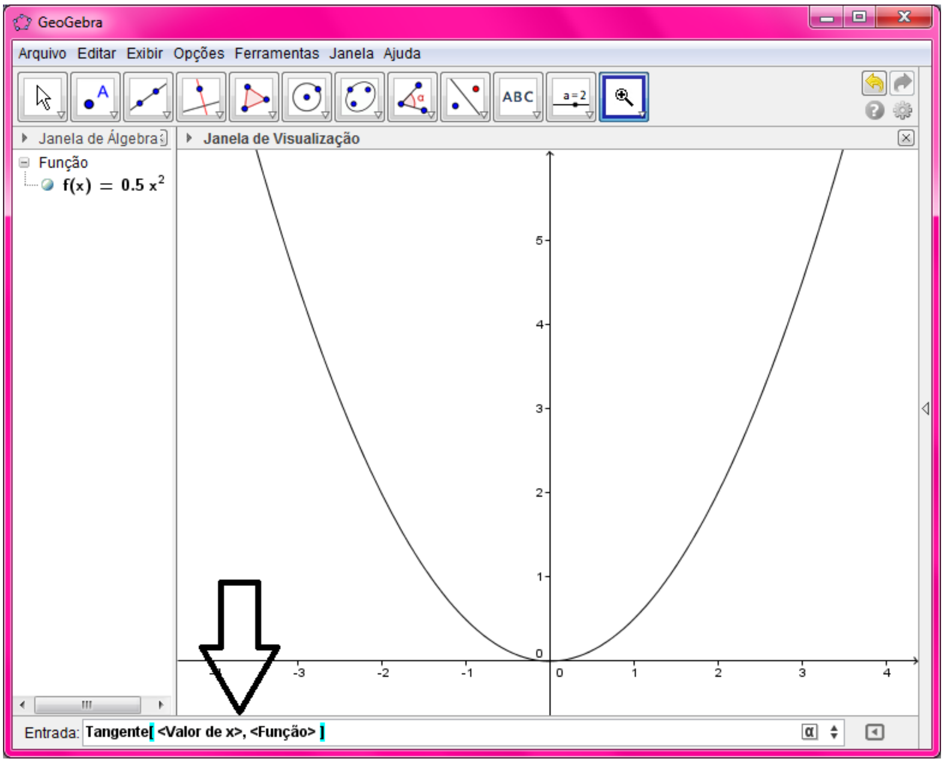

Figura 1.14: Noção de Retidão Local

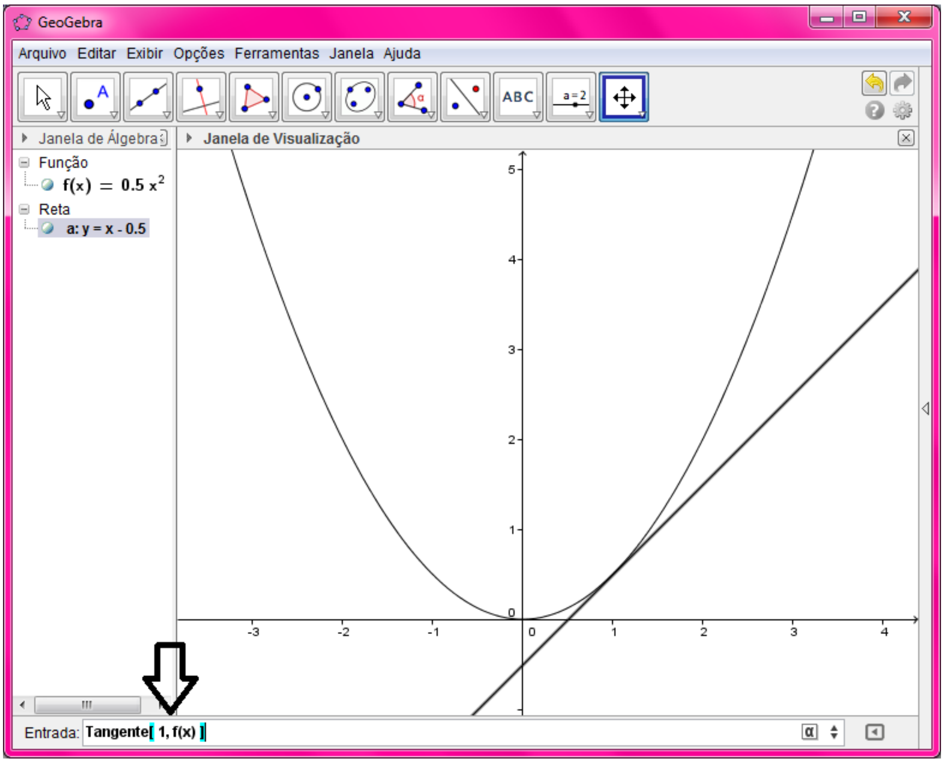

Figura 1.15: Noção de Retidão Local

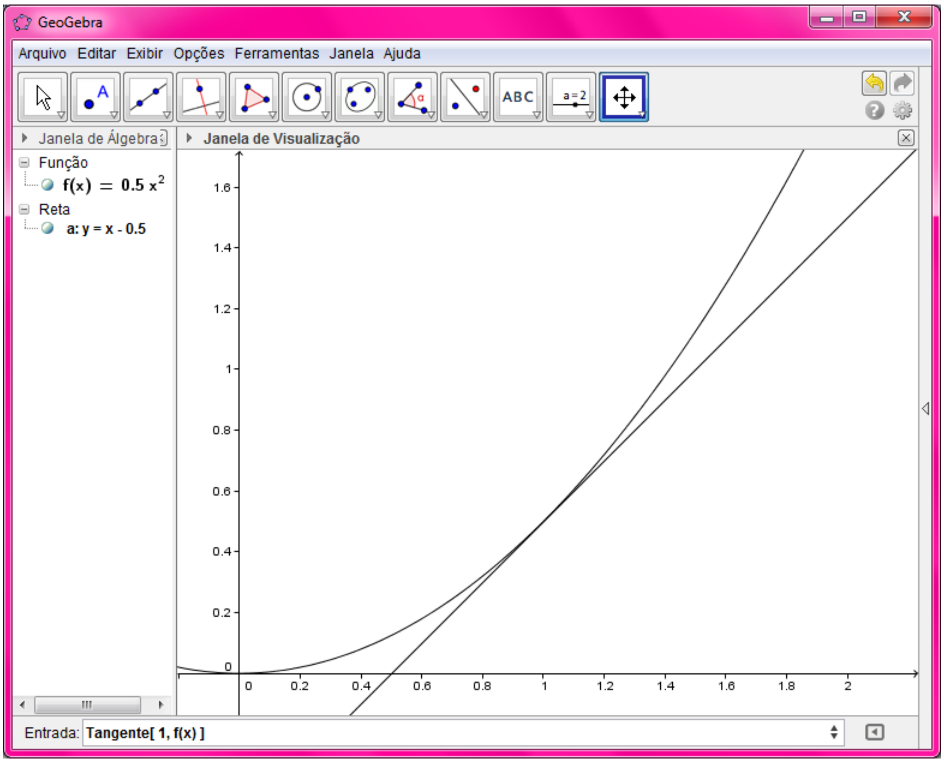

Figura 1.16: Noção de Retidão Local

Capítulo 2

Regras Básicas de Derivação e Derivadas de Funções Elementares

Nossa intenção não é produzir um material de Derivadas, mas não podemos esquecer da parte formal que é indispensável. Elencaremos, de maneira resumida, as derivadas de algumas funções elementares. Elas são as que consideramos importantes para a proposta, pois são funções já conhecidas ou que os alunos conhecerão na primeira série do Ensino Médio.

2.1 Regras de Derivação

Algumas funções, muitas vezes, são formadas de outras funções, a partir, de somas, diferenças, produtos e outras operações entre funções, e suas derivadas podem ser encontradas facilmente se conhecidas algumas propriedades de derivações. Então, nem sempre será necessário aplicar a definição de derivadas para poder calcular a derivada de algumas funções.

Considerando todas as funções f, g e h diferenciáveis:

a) Multiplicação por constante

   Seja $g(x) = cf(x)$, então: $g'(x) = cf'(x)$

b) A Regra da Soma e da Diferença

   Seja $h(x) = f(x) \pm g(x)$, temos então: $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

c) Regra do Produto

   Se f e g forem deriváveis e $h(x) = f(x).g(x)$, então: $h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

d) Regra do Quociente

Se f e g forem deriváveis e $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, então: $h'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

2.2 Derivadas de Funções Elementares

Como a proposta tem como foco o Ensino Médio, nos limitaremos ao estudo de funções triviais como as funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas.

Vamos expressar algebricamente a taxa de variação instantânea, ou melhor, a derivada de uma função f, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset D(f)$, em que $\Delta x \neq 0$ e $\Delta x \to 0$. Usaremos a notação $f'(x)$ para a taxa de variação instantânea ou derivada de $f(x)$.

a) Se $f(x) = c$, onde c é uma constante, então $f'(x) = 0$. Em palavras, a derivada de uma função constante é igual a zero;

b) Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$. Em palavras, a derivada da função identidade é igual a 1;

c) Dada a função $f(x) = x^n$, em que $n \in \mathbb{N}$ temos que $f'(x) = nx^{n-1}$.

2

d) Toda função polinomial é diferenciável, além disso, dada uma função polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0$$

sua derivada é dada por

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

e) A derivada de $f(x) = \sin(x)$ é dada por $f'(x) = \cos(x)$;

f) A derivada de $f(x) = \cos(x)$ é dada por $f'(x) = -\sin(x)$;

g) Dada a função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^*_-$ e $a \neq 1$, sua derivada é $f'(x) = a^x \ln(a)$. Em particular, a derivada de $f(x) = e^x$ é $f'(x) = e^x \ln(e) = e^x$;

Achamos conveniente não demonstrar, visto que não é a intenção e nem o foco do trabalho, mas apresentada esta lista de derivadas fundamentais poderemos fazer uso das mesmas para solucionar problemas como, por exemplo, de otimização, coordenadas dos vértices, velocidade instantânea, aceleração instantânea e outros.

Capítulo 3

Aplicações da Derivada no Ensino Médio

3.1 Aplicações da Derivada na Física

Em cinemática vamos apresentar a derivada como taxa de variação do espaço em relação ao tempo, através do conceito de velocidade instantânea.

3.1.1 Velocidade Instantânea

> A definição de velocidade instantânea, ou simplesmente velocidade, é similar a de velocidade média. A diferença está no fato de que Δt é tomado como sendo infinitamente pequeno, isto é, o intervalo de tempo reduz-se a um instante de tempo. Logo, a velocidade média torna-se a velocidade naquele instante.(IGCin, p. 4).

Observe como as derivadas podem ser úteis na resolução de um problema de Física, vejamos o problema:

A posição s (em metros) em função do instante t (em segundos) de um móvel, que se desloca segundo uma trajetória retilínea, é dada por $s(t) = 2t^2 - t + 2$. Determinar:

a) a posição desse móvel nos instantes $t = 1s$ e $t = 2s$.

b) a velocidade média no intervalo $t = 1s$ a $t = 2s$.

c) a velocidade instantânea no intervalo $t = 1s$ a $t = 2s$.

Solução:

Resolveremos primeiramente como nos livros didáticos.

a) $s(1) = 2.1^2 - 1 + 2 = 3m$ e $s(2) = 2.2^2 - 2 + 2 = 8m$

b) $v_m = \dfrac{8-3}{2-1} = 5m/s$.

c) Por se tratar de movimento uniformemente variado temos $S = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$, assim, teremos: $v_0 = -1m/s$ e $a = 4m/s^2$ e agora usa-se a fórmula da velocidade instantânea $v_i = v_0 + at$, assim, $v_i = -1 + 4t$, logo:

$v_i(1) = 3m/s$ e $v_i(2) = 7m/s$

Agora, vejamos com o auxílio do Geogebra:

Traçaremos o gráfico de $s(t) = 2t^2 - t + 2$:

Basta digitar no campo ENTRADA a equação, como na figura 3.1 e podemos então perceber que a trajetória é descrita como uma parábola:

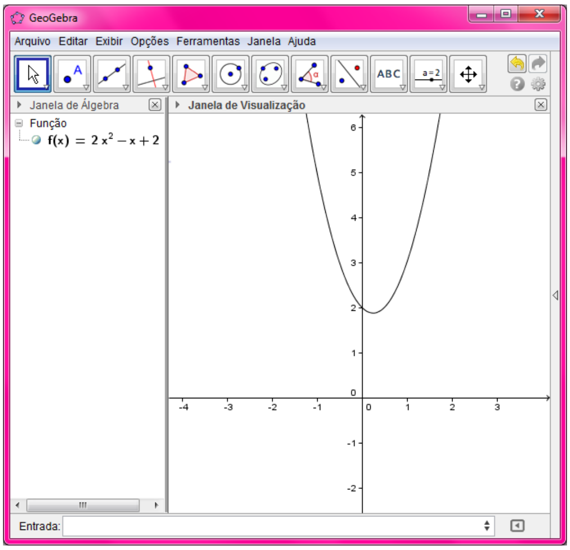

Figura 3.1: gráfico de $f(x) = 2x^2 - x + 2$

Agora, vamos traçar a reta tangente a curva da função $f(x)$ no ponto $x = 1$, para isto quando começamos a digitar a palavra "tangente" no campo ENTRADA, aparecerá algumas opções e podemos escolher: Tangente[<Valor de x >, <Função>] e então, como a figura 3.2, adaptar:

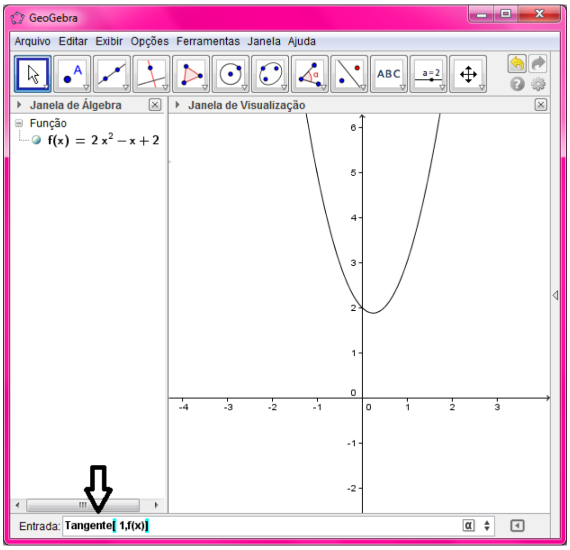

Figura 3.2: Tangente

Com um ENTER poderemos ver a reta tangente ao gráfico no ponto $x = 1$ e também a equação desta reta tangente, que é: $y = 3x$ que tem coeficiente angular 3, e assim, podemos comparar com os cálculos anteriores que quando $t = 1s$, encontramos $v_i = 3m/s$.

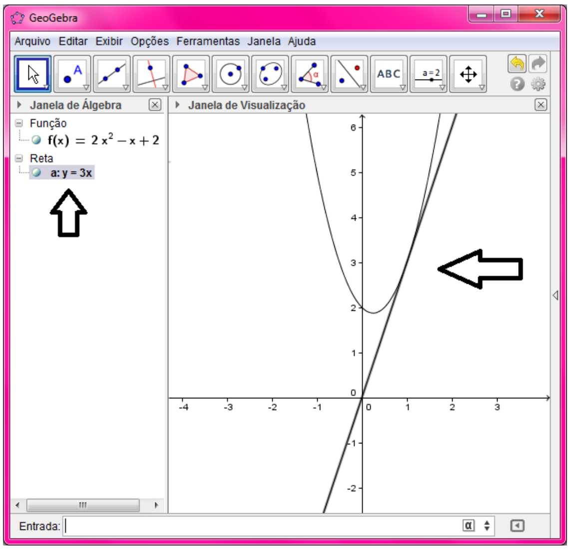

Figura 3.3: Coeficiente angular da reta tangente

Da mesma forma poderemos fazer o mesmo exercício para $x = 2$.

Agora, cabe o questionamento: Seria possível determinar, algebricamente, esta variação instantânea num ponto do domínio?

Desde que já sejam conhecidas as regras de derivação, poderíamos ter:

$s(t) = 2t^2 - t + 2$,

$s'(t) = (2t^2)' - (t)' + (2)' = 4t - 1$

$s'(1) = 4.1 - 1 = 3m/s$ e,

$s'(2) = 4.2 - 1 = 7m/s$

Podemos concluir que a Velocidade escalar instantânea é a derivada da função horária das posições $s = f(t)$ em relação ao tempo.

3.1.2 Acelaração Instantânea

> O conceito de aceleração instantânea, ou simplesmente aceleração, é definido similarmente à aceleração média, com a diferença que Δt é tomado como sendo infinitamente pequeno, reduzindo-se a um instante de tempo. Logo, a aceleração média torna-se a aceleração naquele instante. (IGCin, p. 4).

No exemplo anterior, a equação $s(t) = 2t^2 - t + 2$ descreve o movimento do automóvel ao longo de uma trajetória, com s em metros e t em segundo. A equação horária da velocidade é: $v(t) = s'(t) = 4t - 1$

De acordo com essa equação, temos, por exemplo, que a variação da velocidade do veículo no intervalo $1s \leq t \leq 3s$ é dada por:

$$v(3) - v(1) = 11 - 7 = 4$$

,

ou seja, a variação da velocidade nesse intervalo é de 4 m/s

Dizemos que a **aceleração média** (a_m) do móvel nesse intervalo é a razão da variação da velocidade pelo tempo necessário para que ocorra essa variação, ou seja:

$$a_m = \frac{v(3) - v(1)}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

ou seja, $a_m = \dfrac{4m/s}{2s} = 4m/s^2$.

Quando queremos a aceleração instantânea, por exemplo no ponto $t = 1$, podemos então perceber que $a_i = v'(t) = s''(t)$, ou seja,

$$a_i = 4m/s^2$$

Podemos então generalizar:

Se uma equação horária da velocidade instatânea de um ponto material que se move em linha reta é $v(t)$, e v é derivável em t_0, então a aceleração instantânea do ponto material em t_0 é $a(t_0) = v'(t_0)$.

3.2 Uso de derivadas em problemas de otimização

Problemas de otimização, as vezes, exigem muitas contas, que podem ser substituídas por algumas técnicas com auxílio do conhecimento de derivadas.

No triângulo a seguir, quais deveriam ser as medidas x e y afim de que o retângulo destacado tem a área máxima, otimizando assim, a área do triângulo retângulo?

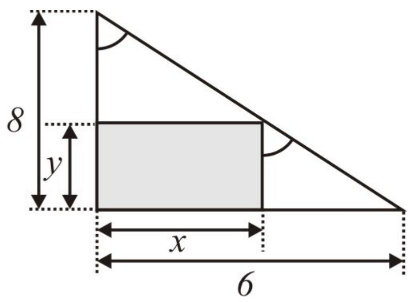

Figura 3.4: Otimização

O primeiro passo deve ser encontrar a área em termos de x e y, destacando dois triângulos da figura, podemos observar:

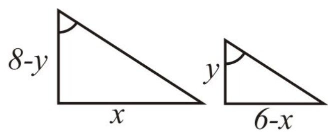

Figura 3.5: Otimização

Assim, por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{8}{8-y} = \frac{6}{x}$$

$$6y = 48 - 8x$$

$$y = 8 - \frac{4}{3}x \qquad (3.1)$$

Sabemos que a área do retângulo pedido é $A = xy$;

Substituindo o valor de y da equação (3.1) em $A = xy$, temos:

$$A = x(8 - \frac{4}{3}x) = 8x - \frac{4}{3}x^2$$

Com o auxílio do Geogebra vamos traçar o gráfico desta função.

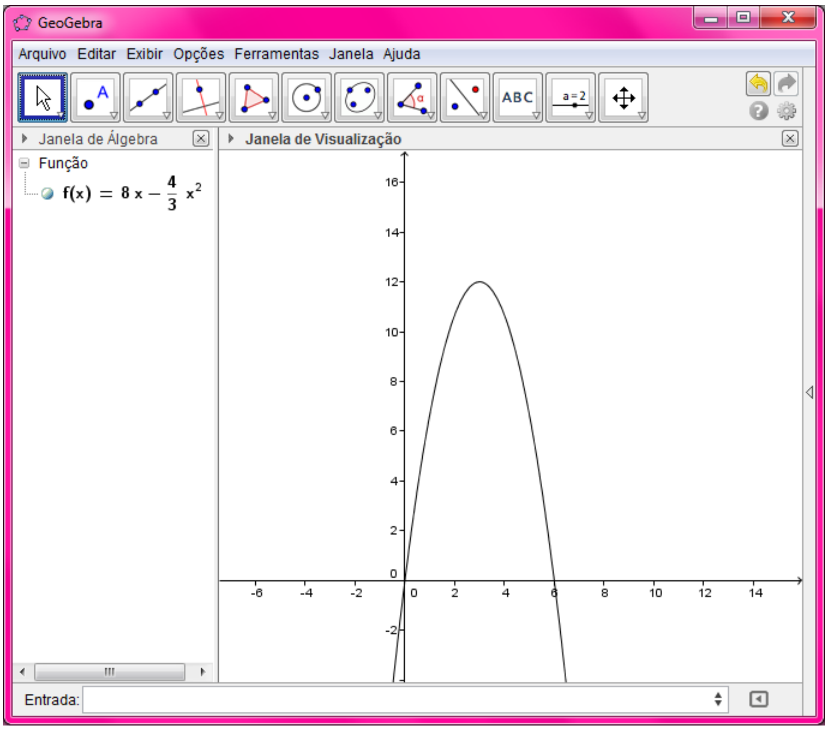

Figura 3.6: Gráfico de $A = x(8 - \frac{4}{3}x) = 8x - \frac{4}{3}x^2$

Já poderíamos afirmar que o gráfico da função em questão se tratava de uma parábola, por ser uma função polinomial do segundo grau, e com concavidade para voltada para baixo. Mas o gráfico nos ajuda a perceber que quando avaliamos x em função de y esse valor é máximo no vértice da parábola. Utilizando a interpretação geométrica da derivada, tendo uma de suas ideias relacionadas ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto, a reta tangente a essa curva neste ponto (vértice da parábola) tem coeficiente $\mu = 0$, ou seja, para encontrar esse ponto basta:

$$A = 8x - \frac{4}{3}x^2$$

$$A' = 8 - \frac{8}{3}x$$

A solução então será o valor de x que satisfaz $8 - \frac{8}{3}x = 0$, temos então:

$$8 - \frac{8}{3}x = 0 \Rightarrow \frac{8}{3}x = 8 \Rightarrow x = 3$$

Da equação (3.1), temos:

$$y = 8 - \frac{4}{3}x \Rightarrow y = 8 - \frac{4}{3}.3 = 4$$

Logo, temos a solução $(3, 4)$, portanto, para que o retângulo tenha área máxima, seus lados devem medir 3 u.c e 4 u.c. E sua área será de 12 u.a.

Note na figura (3.7) que a reta tangente à curva no ponto $x = 3$ é a reta $y = 12$, cujo coeficiente é 0.

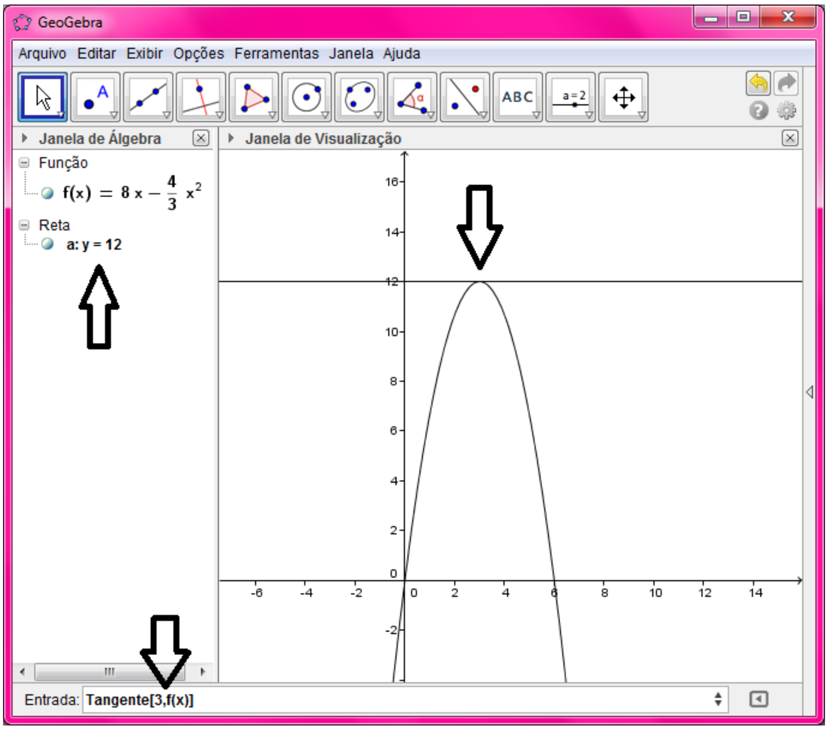

Figura 3.7: Reta tangente à curva no ponto $x = 3$ é a reta $y = 12$

3.3 Uso das derivadas na Determinação dos Vértices de uma Parábola

De uma maneira geral, o vértice de uma parábola do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o seu ponto de máximo se a sua concavidade desta parábola está voltada para baixo, ou seu ponto de mínino quando sua concavidade está voltada para cima.

Na resolução da questão anterior, nos deparamos com a determinação deste ponto, no caso o ponto de máximo, e podemos então perceber que a derivada neste ponto é $f'(x) = 0$, pois é exatamente o coeficiente angular da reta paralela ao eixo x.

Desta forma podemos encontrar as coordenadas dos vértices de uma parábola se a necessidade de memorizar às fórmulas que, geralmente, são propostas.

Assim, podemos determinar o vértice de uma parábola derivando a expressão:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, fazendo

$f'(x) = 2ax + b = 0$, e resolvendo a equação teremos: $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, e podemos concluir que $y_v = f(x_v)$.

Exemplo: Uma bola é lançamento verticalmente para cima, desde t=0, com uma velocidade inicial de 20 m/s e a equação do movimento é $s(t) = -5t^2 + 20t$. Se t é o número de segundos transcorridos desde que a bola foi lançada e S é o número de metros na distância da bola desde o ponto de partida em t segundos, encontre:

a) Quantos segundos, leva a bola para alcançar seu ponto mais alto.

b) A altura máxima atingida pela bola.

Solução: Sabemos que $s(t) = -5t^2 + 20t$ tem como gráfico uma parábola com concavidade voltada para baixo, com isso possui um ponto de máximo. Isso significa que a velocidade, em um determinado intervalo aumenta até atingir a velocidade máxima e começa a diminuir essa velocidade até parar. Essa velocidade máxima é exatamente o vértice da parábola, e sabemos que a reta tangente ao vértice dessa parábola possui coeficiente angular igual a 0.

a) $v = s'(t)$, assim, a bola alcança seu ponto mais alto quando $v = 0$, ou seja, $s'(t) = 0$. Fazendo uso das regras e das derivadas fundamentais, temos que: $v = s'(t) = (-5t^2)' + (20t)' = -10t + 20 = 0 \Rightarrow t = 2s$ Este valor pode ser visto como a abscissa do vértice da parábola que descreve este movimento.

b) A altura máxima pode ser encontrada fazendo $s(2) = -5.2^2 + 20.2 = 20m$

Conclusão

Este trabalho tem por objetivo refletir sobre a possibilidade da introdução do cálculo no Ensino Médio. Para atender ao mesmo realizamos uma revisão bibliográfica a cerca de estudos que apontam uma preocupação sobre como e quando o Cálculo é apresentado ao aluno. Em seguida, a partir de livros didáticos de matemática do Ensino Médio, fomos analisando que a partir da ideia de variação de uma função seguida dos conceitos de variação média e variação instantânea, podemos chegar, intuitivamente, ao conceito de derivada.

Através de uma sequência de atividades, podemos trabalhar não somente a definição formal de derivadas, mas também algumas propriedades e regras. Sempre aliado a interdisciplinaridade, com a disciplina Física no estudo da Cinemática, bem como a agilidade do desenvolvimento dos cálculos, visto que tanto os docentes como os discentes precisam de "ferramentas" que propiciem um melhor desenvolvimento das atividades de maneira rápida e coesa.

Para auxiliar nas atividades experimentais usamos o recurso computacional Geogebra, que por ser um *software* dinâmico, propicia que o discente consiga analisar comportamento de funções, analisar graficamente conceitos, entre outros, afim de compreender, analisar ou representar as noções ministradas até então.

Com base nessa lógica, é possível afirmar que o docente já pode desenvolver a noção de derivadas, como é apresentada neste trabalho, já no Primeiro Ano do Ensino Médio e essa compreensão poderá auxiliar os discentes a serem mais preparados a resolver situações problemas, bem como otimizará tempo em seus desafios.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRÉ, S. L. da C. *Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio.* Dissetação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.

[2] ÁVILA, G. *Evolução do conceito de função e de integral.* In: publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), São Paulo, 1985, p.14-46.

[3] ÁVILA, G. *O Ensino do Cálculo no Segundo Grau.* In: Revista do Professor de Matemática, nº 18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

[4] ÁVILA, G. *O Ensino de Matemática* In: Revista do Professor de Matemática, nº 23, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1993, p.1-7.

[5] ÁVILA, G. *Limites e Derivadas no Ensino Médio?* In: Revista do Professor de Matemática, nº 60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

[6] CARVALHO, J. B. P. de. *O cálculo na escola secundária - algumas considerações históricas.* Caderno CEDES. Campinas: Papirus, nº 40, 1996, p. 68-81.

[7] CARVALHO, L. M.; GIRALDO, V. *Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino de Conceito de Derivada.* Tendeências em Matemática Aplicada e Computacional, 3, nº 2, 2002, p. 101-110.

[8] DANTE,L. R. *Matemática- Contexto & Aplicações.* Ed. Ática, 2007.

[9] DUCLOS, R.C. *Cálculo no Segundo Grau.* In: Revista do Professor de Matemática, n.20, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26-30.

[10] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.*Matemática Completa.* Ed. FTD, 2005.

[11] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; DE ALMEIDA, N. *Matemática: Ciência e Aplicações.* Ed. Atual, 2001.

[12] IGCin. *Um estudo de cinemática*, p.4. Disponível em < http://www.if.ufrgs.br/cref/ntef/cinematica/IGCin>, acessado em 11/03/2014.

[13] MOLON,J.*Cálculo no Ensino Médio: Uma Abordagem Possível e Necessária com Auxílio do Software Geogebra*. Dissetação (Mestrado profissional em Matemática), Universidade Federal de Santa Maria,Rio Grande do Sul, 2013.

[14] PAIVA, M. *Matemática: Volume 3*. Ed. Moderna, 1995.

[15] PCN+ Ensino Médio. *Orientações Educacionais Complementares aos parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza e suas Tecnologia* MEC 2002, disponível em ¡portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf¿. Acessado em 10/02/2014.

[16] PEREIRA, v. m. c. *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade*. Dissetação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

[17] STEWART, J. *Cálculo: volume 1*. Ed. Cengage Learning, 2009.

[18] <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/03/aplicacao-de-derivada-para-determinacao.html>, acessado em 17/02/2014

[19] <http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap09_Calc1.html>, acessado em 17/02/2014

[20] <http://ltodi.est.ips.pt/projIIIEC/matematica/cxl06/02cxl06.htm>, acessado em 17/02/2014