

Universidade Federal de Sergipe  
Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT

---

Trabalho de Conclusão de Curso

# **Introdução à Teoria dos Nós com Sugestões para o Ensino Básico**

por

**Jose Edi Ackel Santos**

Mestrado Profissional em Matemática

**Orientador: Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo**

São Cristóvão-SE

Abril de 2014



Universidade Federal de Sergipe  
Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT

# **Introdução à Teoria dos Nós com Sugestões para o Ensino Básico**

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

**Jose Edi Ackel Santos**

**Orientador: Kalasas Vasconcelos de Araújo**

São Cristóvão-SE, Abril de 2014.





Página da ficha catalográfica



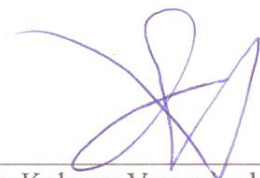
*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

## **Introdução à Teoria dos Nós com Sugestões para o Ensino Básico**

*por*

Jose Edi Ackel Santos

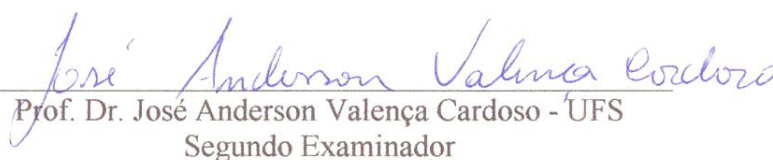
Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo - UFS  
Orientador



Prof. Dr. Rodrigo Jose Gondim Neves - UEFS  
Primeiro Examinador



Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 15 de abril de 2014



*Dedico este trabalho a todos os membros da minha família. Sua crença nas minhas potencialidades, mantém-me atento, ajuda-me a transpor as dificuldades e obter êxito a cada dia. Isto me renova na esperança de contribuir mais e melhor, através da minha profissão, na construção de uma sociedade mais justa, capaz de combater suas próprias mazelas, de enfrentar valores deturpados e preconceitos, de reivindicar seus direitos e cobrar ações efetivas das autoridades políticas deste país, cuja insistência em tratar a educação como despesa (e não como investimento), impede avanços significativos no desenvolvimento social da nação. Dedico a todos os professores competentes do Brasil, da escola básica à Universidade, que em sua luta diária, são convocados a sustentar o futuro através da formação de valores e da construção do saber.*



# Agradecimentos

- Ao único mestre, Jesus Cristo, que em sua infinita misericórdia e generosidade me concedeu a oportunidade de estudar e chegar até esta etapa da minha vida.
- Aos meus pais, Antônio e Valdeci, por garantirem a mim uma educação sintonizada aos seus valores morais, e determinante para a construção da minha personalidade. À minha esposa, Mayara, cuja compreensão foi enorme, acerca da dedicação necessária aos estudos durante o curso.
- Ao orientador desta dissertação, o Professor Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo, a quem direciono um enorme respeito e admiração. É uma honra poder estudar sob sua orientação.
- Aos professores, e toda a equipe do Profmat desta Universidade, cuja competência e empenho tornaram este programa um sucesso de destaque nacional.
- Aos valiosos colegas de curso, amigos nos obstáculos e nas vitórias. Turma melhor, não poderia haver.
- Ao Colégio Estadual Manoel Alcino do Nascimento, instituição de Ensino Fundamental e Médio, de onde fui aluno e, atualmente, professor. Agradeço a todos os gestores deste Colégio no período do curso, a saber, João Luiz Andrade Dória, Cleto Nunes da Mota, Rosi Meire Ferreira e José Ailton Aragão, e suas respectivas coordenadoras, Margareth Mota e Jaqueline Mota. Todos, em sua generosidade profissional, sempre manifestaram apoio a este curso.
- A um amigo valioso, Amintas, desses que levamos para além da vida, cujo apoio foi primordial e decisivo para a conclusão deste curso.
- A um outro amigo igualmente valioso, Paulo Oliveira, que me incentivou a fazer a seleção para ingressar no Profmat. Sem sua intervenção, certamente não estaria aqui.





*“Existem, durante nossa vida, dois caminhos a seguir: aquele que todo mundo segue, e aquele que a nossa imaginação nos leva a seguir. O primeiro pode ser mais seguro, mais confiável, menos crítico, o que você encontrará mais amigos, mas você será apenas mais um a caminhar. O segundo, com certeza, será o mais difícil, o mais solitário, o que você terá maiores críticas, mas também o mais criativo, o mais original possível. Não importa o que você seja, quem você seja, ou o que deseja na vida. A ousadia em ser diferente reflete na sua personalidade, no seu caráter, naquilo que você é. E é assim que as pessoas lembrarão de você um dia.”*

*Ayrton Senna*



# Resumo

A teoria dos nós surgiu com os estudos de Gauss sobre classificação de curvas planas com número finito de autointersecções. Posteriormente, foi associada à teoria atômica de Kelvin que considerava os elementos químicos da matéria como nós. Um nó é definido como uma curva fechada, sem autointersecções, no espaço tridimensional. O principal problema da teoria é o de classificar os nós perante o conceito de isotopia ambiente, e sua consequente listagem em uma tabela. Nesta perspectiva, foram desenvolvidos invariantes como tricolorabilidade, número de cruzamentos, número de desatamento, determinante, polinômio de Alexander, que serão tratados aqui neste trabalho. Também listaremos atividades associadas à teoria dos nós, com aplicabilidade ao Ensino Fundamental e Médio.

**Palavras-chave:** nós, isotopia, invariantes



# Abstract

The knot theory came up with the studies of Gauss on classification of plane curves with finite number of self intersections. Later, was associated with the atomic theory of Kelvin who considered the chemical elements of matter as knots. A knot is defined as a closed curve without self intersections in three-dimensional space. The main problem of the theory is to classify knots on the concept of ambient isotopy, and its subsequent listing on a table. In this perspective, were developed invariants as tricolourability, crossing number, unknotting number, determinant, Alexander polynomial, which will be treated here in this work. Also we list activities associated with the theory of knots with applicability to the Elementary and Secondary Education.

**Key-words:** knots, isotopy, invariants



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Região delimitada por um arco. . . . .	33
Figura 2 – Região delimitada por dois arcos. . . . .	33
Figura 3 – Região delimitada por três arcos. . . . .	33
Figura 4 – Tipo I. . . . .	36
Figura 5 – Tipo II . . . . .	36
Figura 6 – Tipo III . . . . .	36
Figura 7 – . . . . .	41
Figura 8 – . . . . .	41
Figura 9 – Nó trivial . . . . .	42
Figura 10 – Nó trevo. . . . .	42
Figura 11 – Nó poligonal determinado por conjuntos distintos de pontos . . . . .	42
Figura 12 – Nó trivial. . . . .	43
Figura 13 – Nó trevo. . . . .	43
Figura 14 – Nó oito . . . . .	43
Figura 15 – . . . . .	43
Figura 16 – . . . . .	43
Figura 17 – . . . . .	43
Figura 18 – . . . . .	43
Figura 19 – . . . . .	43
Figura 20 – . . . . .	44
Figura 21 – . . . . .	44
Figura 22 – . . . . .	44
Figura 23 – . . . . .	44
Figura 24 – . . . . .	44
Figura 25 – . . . . .	44
Figura 26 – Tabela de nós . . . . .	46
Figura 27 – $3_1$ . . . . .	46
Figura 28 – $4_1$ . . . . .	46
Figura 29 – $6_3$ . . . . .	46
Figura 30 – Alternado . . . . .	47
Figura 31 – Não alternado . . . . .	47
Figura 32 – Movimento $R_1$ : torção no diagrama . . . . .	47
Figura 33 – Movimento $R_2$ : introdução/remoção de cruzamentos . . . . .	48
Figura 34 – Movimento $R_3$ : passagem do arco por cima ou por baixo do cruzamento . . . . .	48
Figura 35 – Transformação de um nó por movimentos de Reidemeister . . . . .	48
Figura 36 – Nó oito orientado obtido com knotplot . . . . .	49

Figura 37 – Sinais usuais para cruzamentos . . . . .	50
Figura 38 – Nó figura oito com sinais nos cruzamentos . . . . .	50
Figura 39 – Representação poligonal do nó trevo orientado . . . . .	51
Figura 40 – Nó $K$ . . . . .	51
Figura 41 – Nó $-K$ . . . . .	51
Figura 42 – Cruzamentos do nó $-K$ . . . . .	52
Figura 43 – Sinais no nó trevo . . . . .	52
Figura 44 – Sequência de movimentos de Reidemeister na inversão do trevo orientado	52
Figura 45 – Nó não invertível: $8_{17}$ . . . . .	53
Figura 46 – Nó oito . . . . .	53
Figura 47 – e sua imagem . . . . .	53
Figura 48 – O nó trevo . . . . .	54
Figura 49 – é chiral . . . . .	54
Figura 50 – Exemplo: nó . . . . .	54
Figura 51 – amphichiral . . . . .	54
Figura 52 – Soma conexa entre dois nós poligonais . . . . .	55
Figura 53 – $K_1$ . . . . .	55
Figura 54 – $K_2$ . . . . .	55
Figura 55 – $K_1 \# K_2$ . . . . .	55
Figura 56 – Soma conexa entre nó oito e nó trivial . . . . .	56
Figura 57 – Enlace trivial com 3 componentes . . . . .	57
Figura 58 – Enlace 8.3.6 . . . . .	57
Figura 59 – Enlace 9.2.9 . . . . .	57
Figura 60 – Enlace 9.3.20 . . . . .	57
Figura 61 – Enlace 8.3.6 . . . . .	58
Figura 62 – Enlace 9.2.9 . . . . .	58
Figura 63 – Enlace 9.3.20 . . . . .	58
Figura 64 – Enlace orientado de 3 componentes . . . . .	58
Figura 65 – Enlace trivial de duas componentes e enlaces de dois componentes com sinais. . . . .	59
Figura 66 – Enlaces $L$ , $-L$ e $\bar{L}$ . . . . .	60
Figura 67 – Nó trevo tricolorizado . . . . .	64
Figura 68 – Enlace 6.2.1 tricolor . . . . .	64
Figura 69 – Enlace 5.2.1 não tricolor . . . . .	64
Figura 70 – Diagrama qualquer e mínimo do nó trevo, respectivamente . . . . .	65
Figura 71 – Desatamento do diagrama do nó oito. . . . .	66
Figura 72 – Diagrama minimal do nó 10.8 . . . . .	66
Figura 73 – Diagrama do nó 10.8 com 14 cruzamentos e $\mu(K) = 2$ . . . . .	67
Figura 74 – Diagrama do nó trevo com variáveis nos arcos. . . . .	68



Figura 75 – Diagrama do nó oito com variáveis nos arcos. . . . .	69
Figura 76 – Cruzamento associado a uma equação, com arcos identificados . . . . .	71
Figura 77 – Diagrama do nó trevo: $D_T$ . . . . .	71
Figura 78 – Diagrama do nó trevo com 4 cruzamentos. . . . .	72
Figura 79 – Diagrama do nó oito: $D_E$ . . . . .	74
Figura 80 – Diagrama do nó trivial: $\Delta_{Trivial}(t) = 1$ . . . . .	75
Figura 81 – Diagrama do nó $K$ com 11 cruzamentos e $\Delta_{D_K}(t) = 1, [1]$ . . . . .	75
Figura 82 – Nó 0.1. . . . .	80
Figura 83 – Nó 3.1. . . . .	80
Figura 84 – Nó 4.1. . . . .	80
Figura 85 – Nó 5.1 . . . . .	80
Figura 86 – Nó 5.2 . . . . .	80
Figura 87 – Nó 6.1 . . . . .	80
Figura 88 – . . . . .	83
Figura 89 – . . . . .	83
Figura 90 – . . . . .	83
Figura 91 – . . . . .	84
Figura 92 – . . . . .	84
Figura 93 – . . . . .	84
Figura 94 – . . . . .	84
Figura 95 – . . . . .	84
Figura 96 – $\mu = ?$ . . . . .	84
Figura 97 – Nó com 4 cruzamentos. . . . .	85
Figura 98 – Equação dos arcos e cruzamentos. . . . .	86
Figura 99 – Diagrama de orientado de 4 cruzamentos. . . . .	86
Figura 100 – Tabela de nós obtida com Knotplot . . . . .	96
Figura 101 – . . . . .	97
Figura 102 – . . . . .	98
Figura 103 – . . . . .	99
Figura 104 – . . . . .	100
Figura 105 – . . . . .	101
Figura 106 – . . . . .	102



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela de coeficientes para o polinômio de Alexander [2]. . . . .	94
Tabela 2 – Tabela de polinômios de Alexander . . . . .	95



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>I</b>	<b>UM BREVE HISTÓRICO DA TEORIA DE NÓS</b>	<b>29</b>
1	<b>OS PRIMEIROS ESTUDOS</b> . . . . .	<b>31</b>
1.1	Carl Friedrich Gauss . . . . .	31
1.2	Thomsom e a teoria atômica . . . . .	31
1.3	James Clerk Maxwell . . . . .	32
1.4	Peter Guthrie Tait . . . . .	33
1.5	Thomas Penyngton Kirkman . . . . .	34
1.6	Charles N. Little . . . . .	34
1.7	Dowker, Thistlethwaite, Hoste e Weeks . . . . .	35
1.8	Wilhelm Wirtinger, Max Dehn e o grupo fundamental . . . . .	35
1.9	James W. Alexander e Kurt Reidemeister . . . . .	36
1.10	Ralph H. Fox . . . . .	36
1.11	John H. Conway . . . . .	37
1.12	Vaughan Jones . . . . .	37
<b>II</b>	<b>FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS NÓS</b>	<b>39</b>
2	<b>DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DOS NÓS</b> . . . . .	<b>41</b>
2.1	A definição de um nó . . . . .	41
2.2	Equivalência . . . . .	43
2.3	Projeções no plano: diagramas de nós . . . . .	45
2.4	Os Movimentos de Reidemeister . . . . .	47
2.5	<b>Nós Orientados e Invertíveis</b> . . . . .	<b>49</b>
2.5.1	A orientação de um nó . . . . .	49
2.5.2	O inverso de um nó . . . . .	50
2.6	<b>Reflexão de um nó e quiralidade</b> . . . . .	<b>53</b>
2.7	<b>Soma conexa de nós</b> . . . . .	<b>54</b>
2.8	<b>Nós primos e compostos</b> . . . . .	<b>56</b>
2.9	<b>Enlaces</b> . . . . .	<b>57</b>

<b>III</b>	<b>INVARIANTES DE NÓS E ENLACES</b>	<b>61</b>
<b>3</b>	<b>INVARIANTES NUMÉRICOS E POLINOMIAIS</b>	<b>63</b>
<b>3.1</b>	<b>Invariantes Clássicos</b>	<b>63</b>
3.1.1	Tricolorabilidade	63
3.1.2	Número de Cruzamentos	65
3.1.3	Número de Desatamento	66
<b>3.2</b>	<b>O determinante de um nó</b>	<b>68</b>
<b>3.3</b>	<b>Polinômio de Alexander</b>	<b>70</b>
<b>IV</b>	<b>ALGUMAS ATIVIDADES APLICADAS AO ENSINO BÁSICO</b>	<b>77</b>
<b>4</b>	<b>TEORIA DOS NÓS E O ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO</b>	<b>79</b>
<b>4.1</b>	<b>A manipulação dos nós</b>	<b>79</b>
<b>4.2</b>	<b>Os invariantes</b>	<b>82</b>
4.2.1	Tópicos de Tricolorabilidade	82
4.2.2	Número de Cruzamentos	83
4.2.3	Número de Desatamento	84
4.2.4	O determinante de um nó	85
4.2.5	O polinômio de Alexander	86
<b>4.3</b>	<b>O software Knotplot</b>	<b>87</b>
	<b>Conclusão</b>	<b>89</b>
	<b>Referências</b>	<b>91</b>
	<b>Anexos</b>	<b>93</b>

# Introdução

Habitualmente, quando ouvimos falar de um nó, imaginamos de imediato vários exemplos, como os feitos em cadarços de sapatos, gravatas, em cordas associadas ao trabalho no campo, até mesmo em esportes radicais como o alpinismo. Matematicamente, quando falamos de um nó, não nos referimos exatamente a estes citados, pois eles possuem, em geral, extremidades soltas. Um nó matemático não possui pontas soltas. Do ponto de vista matemático, podemos afirmar que o nó é uma curva poligonal simples e fechada em  $\mathbb{R}^3$ .

A princípio, muitos pesquisadores imaginavam que a teoria dos nós era um estudo sem aplicação prática, mas o avanço das pesquisas científicas mostrou que os nós de fato pertencem às ciências aplicadas. Em 1973, o matemático inglês John Conway, propôs um experimento imaginário no qual realizava a alteração dos cruzamentos de um nó cortando e colando os fios que o compõem. O fato é que esses movimentos são idênticos aos que acontecem na fita do DNA (estimulados por enzimas) na hora da troca de material genético, ou seja a teoria de nós é identificada na genética. Outra aplicação fascinante da teoria dos nós é na física quântica. Os cientistas C.P.N. Yang e R.J. Baxter, um estudando grupos quânticos, outro procurando entender o comportamento dos gases, descobriram independentemente uma mesma equação: a equação de Yang-Baxter, que ajuda a explicar movimentos quânticos, [3]. Ambos concluíram que esses movimentos são idênticos aos movimentos de deformação de um nó em outro.

Em geral, estudar os nós não é tarefa fácil pois suas propriedades matemáticas ainda não foram completamente definidas, como as dos números. Não se sabe, por exemplo se existe uma forma de colocar nós em ordem crescente ou decrescente, ou se existe um modelo matemático capaz de diferenciar, em todos os casos, um nó de outro. O matemático alemão Kurt Reidemeister contribuiu decisivamente para o avanço do estudo dos nós com sua ideia de projetar a estrutura tridimensional dos nós no plano, formando os diagramas. Reidemeister também desenvolveu movimentos, conhecidos como movimentos de Reidemeister, capazes de realizar deformações nos nós, na busca de diagramas equivalentes. Aliás, o grande objeto de estudo da teoria dos nós é a equivalência entre os nós e sua respectiva listagem em tabela.

No capítulo 1 deste trabalho, tratamos brevemente sobre o desenvolvimento histórico da teoria dos nós, ressaltando as contribuições dadas por diversos matemáticos. No segundo capítulo são inseridos os conceitos fundamentais, a saber, definição de nó, isotopia ambiente, movimentos de Reidemeister, primalidade, operações de soma conexa, inversão, chiralidade entre outras. No terceiro capítulo, tratamos dos invariantes que são

recursos matemáticos capazes de distinguir os nós entre si. No quarto e último capítulo, este trabalho assume um caráter mais didático, voltado ao Ensino Fundamental e Médio. Nele apresentamos algumas sugestões de aulas sobre teoria dos nós no ensino básico, ressaltando sua importância e aplicabilidade.



## Parte I

### Um breve Histórico da Teoria de Nós



# 1 Os primeiros estudos

É de conhecimento geral que a matemática da antiguidade se desenvolveu muito graças às necessidades práticas e cotidianas do homem. Em relação aos nós podemos lembrar que vários povos antigos os utilizavam em cordas, com objetivo de contabilizar a passagem do tempo, medir comprimentos e mesmo usá-los para amarrar objetos. No entanto, o estudo topológico dos nós é datado, segundo registros históricos, a partir do século XIX e suas descobertas mais importantes datam do século XX. Neste capítulo, falaremos brevemente sobre as contribuições dadas por alguns matemáticos para o desenvolvimento da teoria dos nós, não necessariamente em ordem cronológica.

## 1.1 Carl Friedrich Gauss

A origem da teoria matemática de nós pode ser associada ao matemático alemão Carl Friedrich Gauss, que tentou classificar curvas planas fechadas com um número finito de auto-interseções que ele chamava de “Tractfiguren”, [4]. Os registros históricos relatam que Gauss trabalhou em 1825 e 1844, mas somente depois de sua morte os resultados foram publicados. O seu aluno Johann Benedikt Listing, em 1847, tratou sobre a discussão de nós matemáticos e sua classificação. Benedikt estava interessado no desenvolvimento do cálculo algébrico de diagramas de nó, especificamente na determinação de quando dois diagramas representavam o mesmo nó mas não obteve progressos em teoria dos nós.

## 1.2 Thomson e a teoria atômica

O primeiro trabalho sobre a teoria de nós fora da Alemanha data do final da década de 1860 com o físico William Thomson, sobre a teoria atômica. Na época existiam duas correntes científicas que tentavam desenvolver um modelo atômico e descrever a matéria. Uma delas afirmava que a matéria era formada por pequenos corpos rígidos, enquanto a outra sustentava a hipótese de que a matéria era constituída por ondas. Thomson conhecido à época como Lorde Kelvin, título de nobreza que recebera em 1866, da rainha Vitória da Inglaterra, resolveu unificar as idéias numa só e afirmou, a partir desse raciocínio, que a matéria não era formada nem de corpúsculos sólidos e nem de ondas, mas era feita de nós. De acordo com a teoria de Thomson, o Universo era formado por um imenso oceano de um fluido invisível chamado “éter”. Os átomos seriam vórtices nesse fluido e cada vórtice um nó. Os elementos químicos seriam, então, os diferentes tipos de nós. O átomo de carbono um nó trevo, o oxigênio um nó oito, e assim por diante,[3]. Kelvin também afirmava que o éter se comportava como um sólido elástico através da

propagação da luz sobre ele. Na época parecia uma teoria convincente e os cientistas acreditavam então, que a compreensão da estrutura dos elementos químicos residia no estudo de nós.

A teoria de Thomsom foi interessante, e resistiu por algumas décadas, até que Niels Bohr sugeriu que a Teoria atômica não possuía relação com a teoria dos vórtices. Naturalmente, a teoria de Thomsom declinou, embora seus estudos em Termodinâmica e leis de conservação de energia o tenham promovido à posição de grande cientista da história da humanidade. Dentre suas contribuições, vale salientar a escala absoluta de temperatura que leva seu nome até hoje (Kelvin).

### 1.3 James Clerk Maxwell

As idéias de Thomsom sobre átomos como fios nodosos de éter interessaram a James Clerk Maxwell. Na época, Maxwell estudava eletromagnetismo e vislumbrou uma possível conexão entre seus estudos e a teoria de nós. Escreveu, então, para Thomsom e para Peter Guthrie Tait apresentando algumas de suas idéias. Os dois mostraram-se interessados, em particular, na possibilidade de representar nós como curvas tridimensionais, através de equações. Maxwell afirmava em sua carta que o nó trevo era o mais simples, atado em uma única linha e forneceu equações para a curva.

Em 1868, Maxwell passou a estudar mais profundamente a topologia dos nós. Seu objetivo era descobrir quando duas projeções representavam um mesmo nó ou enlace no espaço tridimensional. A fim de responder tal pergunta, ele desenvolveu um sistema de rotulagem para os pontos de cruzamento e arcos, onde um arco era definido como a linha da projeção entre dois cruzamentos. Com isso, Maxwell trabalhou na determinação das possibilidades para regiões delimitadas por arcos. Vejamos os casos abaixo.

1. para regiões delimitadas por um único arco, este era simplesmente uma torção imediata, podendo ser facilmente desfeita sem alterar a ligação (figura 1).
2. para as regiões delimitadas por dois arcos, Maxwell encontrou duas possibilidades (figura 2);
  - uma região criada como uma linha passando sobre uma outra em dois pontos consecutivos. Dessa maneira a linha superior pode ser movida de modo que não atravessa o cordão inferior, isto é, não altera o tipo de ligação.
  - uma região criada como uma linha passando por cima e, em seguida, por baixo, de uma outra. Nesta situação já não é possível mover uma das linhas sem alterar o tipo de ligação.

3. para as regiões delimitadas por três arcos, também existem duas possibilidades (figura 3).

- uma curva pode ser movida depois do cruzamento das outras duas sem alterá-las.
- o movimento anterior não pode ser feito pois a interseção das duas primeiras curvas impede o movimento da terceira nessa direção.

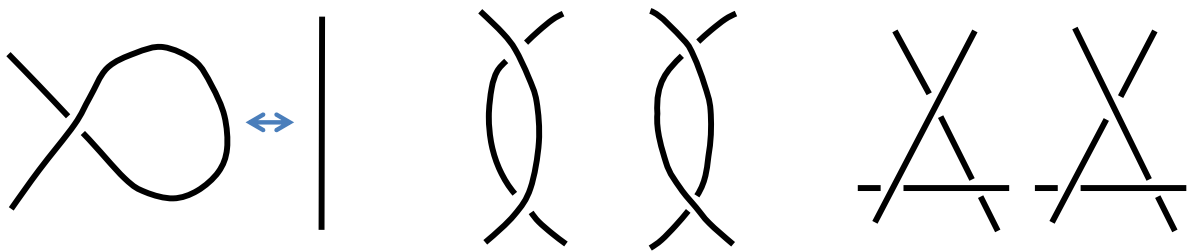


Figura 1 – Região delimitada por um arco.

Figura 2 – Região delimitada por dois arcos.

Figura 3 – Região delimitada por três arcos.

Maxwell também trabalhou com regiões delimitadas por quatro ou mais arcos, mas não obteve sucesso. Seu trabalho inspirou, quase 60 anos mais tarde, o matemático alemão Kurt Reidemeister em sua pesquisa sobre diagramas de nós. Reidemeister enfatizou movimentos semelhantes àqueles descobertos por Maxwell, conhecidos hoje como movimentos de Reidemeister.

## 1.4 Peter Guthrie Tait

Retomando às idéias de Thomson, sabe-se que Peter Guthrie Tait, inicialmente, não ficou convencido com a teoria dos átomos como vórtices. Mesmo assim, em 1876, ele propôs uma tabela completa de nós, até um determinado número de cruzamentos. Esperava, com isso, associar a uma tabela de elementos químicos compatível com a teoria atômica de Thomson. Assim como Maxwell e Gauss, Tait trabalhou no desenvolvimento de um modo para codificar os cruzamentos das projeções de nós. Apesar das trocas de informações com Maxwell, a codificação desenvolvida por Tait se aproximou mais com a de Gauss do que com a de Maxwell.

Ao mesmo tempo em que desenvolvia sua tabela de nós, Tait interessou-se por invariantes, que são propriedades capazes de verificar a equivalência ou não entre dois nós através de seus diagramas. Como exemplo, podemos citar o número mínimo de cruzamentos de um nó, que é o menor número de cruzamentos que qualquer diagrama de um determinado nó pode conter. Um grande resultado das pesquisas de Tait, sobre a

enumeração dos nós, foi a constatação da existência de nós que poderiam ser deformados de destros para canhotos, sem alterações em sua estrutura. Ele designou esse tipo de nós como amphichiral (ou achiral). Tait também verificou que o nó oito é amphichiral.

Em 1877, após ler alguns dos trabalhos de Listing, Tait trabalhou numa enumeração de nós que acreditava ser suficiente para suprir as necessidades dos químicos e físicos. Produzindo uma tabela de nós com sete cruzamentos Tait percebia que a complexidade dos nós impediria a estabilidade dos átomos como vórtices, logo uma tabela de nós com número maior de cruzamentos seria necessária. Para isso, seriam necessários métodos mais eficientes de determinar se dois diagramas representavam o mesmo nó. Essa idéia levaria mais de 100 anos para ser realizada. Como o trabalho de Tait possuía uma vinculação vital com a teoria atômica de Thomson, a sua aposentadoria da tarefa de enumerar nós praticamente finalizou a referida teoria atômica.

## 1.5 Thomas Penyngton Kirkman

Tait acreditava que o problema da enumeração dos nós era uma questão de mão-de-obra qualificada. Graças a essa busca de mão-de-obra, Tait recebeu a ajuda de Thomas Penyngton Kirkman, um pesquisador de problemas combinatórios envolvendo grafos e hipergrafos. Kirkman viu a enumeração de nós como um problema de enumerar grafos planares, e percebeu que torcer movimentos não era viável e que as equivalências através de tais operações não deviam ser consideradas.

Kirkman enviou seu primeiro trabalho para Tait em maio de 1884, no qual ele tinha enumerado projeções de todos os nós até 10 cruzamentos. O trabalho dos dois foi combinado e apresentado na Royal Society of Edinburgh, muito pouco tempo depois. Enquanto Tait não estava completamente satisfeito com as tabelas em que ele não tinha provas da não-equivalência de cada um dos nós, estava convencido de que havia agora nós conhecidos em quantidade suficiente para montar uma “tabela periódica” para a teoria atômica dos vórtices.

## 1.6 Charles N. Little

Como Tait estava preparado para publicar as tabelas elaboradas através de seu trabalho com Kirkman sobre as projeções de nós, ele recebeu uma enumeração de nós até 10 cruzamentos de Charles N. Little, um Ph.D. em matemática, estudante de H. A. Newton da Universidade Yale. A tabela de nós serviu como sua tese de doutorado, intitulada “*Sobre Nós, com um censo para Ordem 10*”, [4], onde ele obteve seu doutorado em 1885.

Ao fazer uma comparação entre as listas, Tait encontrou uma duplicação em sua

lista e uma duplicação e omissão na lista de Little. Após a devida correção de seus erros, ele enviou o documento para a imprensa. Antes de publicar a tabela até 10 cruzamentos, Tait havia recebido uma lista de 1.581 projeções de nós de 11 cruzamentos de Kirkman, mas ele decidiu que o trabalho envolvido na determinação das equivalências desses diagramas era muito grande e se aposentou oficialmente da tabulação de nós em 1885. No entanto, ele sugeriu que Little fizesse uma investigação sobre os nós de 11 cruzamentos, sem saber, eventualmente, que assumiria um problema muito mais difícil: a enumeração de nós não alternados, que só existem para o número de cruzamentos superior a sete. O problema é tão difícil que Tait inicialmente não acreditava que tais nós existissem, e levou até 1930 para provar rigorosamente que um nó não alternado existe.

Hoje se sabe que existem muito mais nós não alternados do que alternados. Apesar de não ter utilizado invariantes úteis para distinguir nós não alternados, Little enviou uma tabela para Tait em 1899, em que afirmava conter uma tabela completa de 43 nós não alternados, distintos, com 10 cruzamentos. As tabelas de nós alternados feitas por Tait e Little tem resistido por todo esse tempo e até agora são conhecidas por serem completas e sem nenhuma duplicação. Também é bastante surpreendente que a lista de nós não alternados de Little continha uma única duplicação, que só foi identificada em 1974.

## 1.7 Dowker, Thistlethwaite, Hoste e Weeks

Clifford Hugh Dowker e Morwen Thistlethwaite foram os primeiros a informatizar a enumeração dos nós. Com um trabalho do início de 1980, conseguiram elaborar uma tabela de nós de até 13 cruzamentos. Após um período de pausa, em 1990 o trabalho foi retomado com a ajuda de J. Hoste para enumerar todos nós alternados de 14 cruzamentos. Com técnicas distintas J. Hoste, M. Thistlethwaite e J. Weeks encontraram 1.701.936 nós primos distintos.

A informatização do problema, tornou a enumeração de nós consideravelmente mais fácil, mas o crescimento rápido do número de nós é surpreendente. Por exemplo, os relatórios de Hoste em julho de 2003 destacam a tabulação de todos os nós primos e nós alternados de 22 cruzamentos realizados por S. Rankin, J. Schermann, e O. Smith encontrando 6.217.553.258 nós. Isso é mais de seis mil vezes a quantidade de nós alternados com entre 17 e 22 cruzamentos, inclusive, [4].

## 1.8 Wilhelm Wirtinger, Max Dehn e o grupo fundamental

O grupo fundamental do complemento de um nó, ou o que sobra do espaço após a exclusão do nó, foi estudado pela primeira vez 1905, pelo matemático austríaco Wilhelm Wirtinger, cujo trabalho mostrou rigorosamente que o nó trevo era muito bem definido.

Wirtinger percebeu que seu método poderia ser facilmente generalizado para construir o grupo fundamental.

Por outro lado, o matemático alemão Max Dehn, interessou-se pela teoria dos nós trabalhando para provar a conjectura de Poincaré. Dehn não provou a conjectura de Poincaré, mas desenvolveu um algoritmo, distinto do de Wirtinger, para a construção do grupo fundamental do complemento de um enlace. Com isso, mostrou que o nó trevo é topologicamente diferente de sua imagem no espelho. Após isso a pesquisa de Dehn foi interrompida pela Primeira Guerra Mundial.

## 1.9 James W. Alexander e Kurt Reidemeister

Os trabalhos de Alexander e Reidemeister, tiveram importância fundamental no desenvolvimento da teoria dos nós. Alexander desenvolveu sua pesquisa através de grupos de homologia enquanto Reidemeister estudou através de grupos fundamentais. Tempos depois Alexander passou a desenvolver um polinômio invariante de nós, o polinômio de Alexander, e Reidemeister mostrou que todas as projeções de um enlace eram relacionadas por uma sequência de três movimentos: os movimentos de Reidemeister. Os estudos dos dois são citados com destaque neste trabalho, posteriormente. Abaixo os tipos de movimentos de Reidemeister.

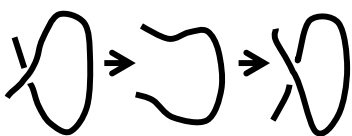


Figura 4 – Tipo I.

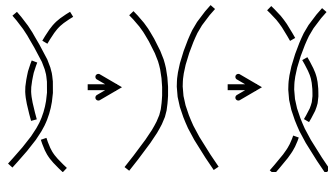


Figura 5 – Tipo II

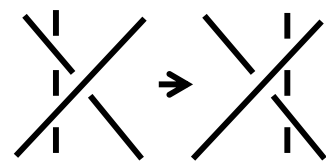


Figura 6 – Tipo III

Assim como ocorreu com Wirtinger e Dehn, a guerra interrompeu os estudos de Alexander e Reidemeister.

## 1.10 Ralph H. Fox

O homem que liderou o estudo da teoria dos nós nos Estados Unidos após a guerra, foi Ralph H. Fox, em Princeton. Fox propôs a substituição de conceitos clássicos que dissociavam a teoria dos nós do resto da topologia, e conseguiu uma reformulação dos fundamentos da teoria, permitindo maior acesso às ferramentas de topologia para aqueles que estudam nós. O seu trabalho gerou novos invariantes geométricos de nós. [4]



## 1.11 John H. Conway

Na década de 1960, John H. Conway desenvolveu ainda uma outra notação para codificação de nós e enlaces. Este esquema permitiu-lhe enumerar todos os enlaces de até 10 cruzamentos, sem detectar a duplicação da lista de Little de nós alternados de 10 cruzamentos. Ele também tentou uma tabela de nós primos até 11 cruzamentos. Conway detectou 11 omissões e uma duplicação na lista de Little de nós alternados com 11 cruzamentos, mas a sua própria lista de nós não alternados tinha quatro omissões que não foram detectadas até o final de 1970. A sua enumeração chegou ao fim na época, após o trabalho complementar de Bonahon e Siebenmann e o trabalho independente de Kenneth Perko, que concluiu a enumeração de nós de 11 cruzamentos.

Além disso, Conway aprimorou uma nova forma de calcular o polinômio de Alexander, usando um algoritmo em diagramas de nó, criando assim o polinômio de Conway.

## 1.12 Vaughan Jones

Em 1984, Vaughan Jones desenvolveu um novo polinômio invariante de nós, o polinômio de Jones. Em relação a outros invariantes polinomiais, o polinômio de Jones apresenta a capacidade de distinguir muitos nós de suas imagens de espelho. Em 1990, o trabalho de Jones ganhou uma medalha Fields, sem dúvida o mais prestigiado prêmio para a pesquisa matemática.

Os avanços em teoria dos nós não pararam por aí. Hoje em dia, por exemplo, é possível conhecer mais sobre teoria de nós através de recursos computacionais, softwares como o Knotplot, utilizado na construção das figuras deste trabalho. Mas o problema de saber se dois nós são equivalentes ainda não foi completamente solucionado, pois não existe até hoje um invariante conhecido, suficientemente poderoso, para fazer a verificação de todos os nós tabelados.



## Parte II

### Fundamentos da Teoria dos Nós



## 2 Definição e Propriedades dos nós

Neste capítulo, serão apresentados os fundamentos da teoria de nós. Trata-se de uma teoria matemática cujas aplicações são diversas, desde a teoria quântica, teoria física das supercordas até o estudo de cadeias de DNA. Neste trabalho introdutório, para que o leitor possa compreender o texto de forma mais natural possível, utilizaremos recursos visuais através de ilustrações dos nós. Tais imagens foram produzidas através do knotplot, um software especializado em teoria dos nós, capaz de construir e manipular nós e enlaces, além de tratar de propriedades topológicas e exportar imagens e diagramas.

### 2.1 A definição de um nó

Não é uma tarefa fácil explicitar uma definição para um nó sem viajar nas profundezas da topologia. Por exemplo, encontramos em [5] a seguinte definição: “ *Um nó é um mergulho  $K : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M^3$ , onde  $M^3$  é uma variedade fechada, compacta e sem bordo, e orientável de dimensão 3.*” Em [6] encontramos uma definição mais simples: Seja  $f$  uma aplicação contínua e injetiva da circunferência usual  $\mathbb{S}^1$  em  $\mathbb{R}^3$ . A imagem  $K = f(\mathbb{S}^1)$  diz-se um nó.

A definição de nó que apresentaremos neste trabalho depende de algumas considerações. Primeiramente, devemos compreender a noção de curva poligonal fechada em  $\mathbb{R}^3$ . Considere dois pontos  $p$  e  $q$  em  $\mathbb{R}^3$ . Denotaremos por  $[p, q]$  o segmento de reta que une  $p$  e  $q$ . Suponhamos agora uma lista ordenada de pontos distintos  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  de  $\mathbb{R}^3$ . A união de todos os segmentos  $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]$ , é denominada curva poligonal fechada. Porém, um único conjunto de pontos pode definir mais de uma curva poligonal, inclusive com cruzamentos “indesejados” para a definição que queremos.

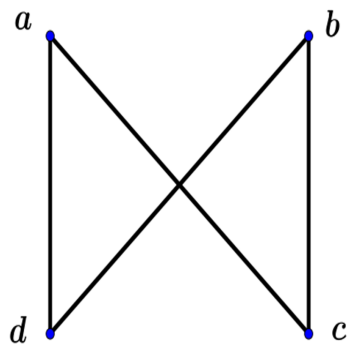


Figura 7

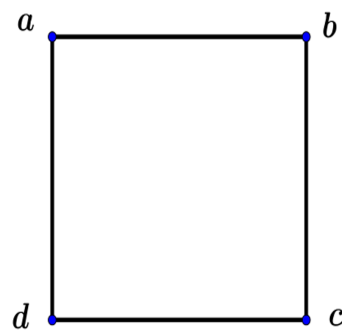


Figura 8

Se cada segmento de reta, intersecta exatamente outros dois por seus pontos extremos, então denomina-se curva simples. A figura (7) ilustra uma curva poligonal fechada,

enquanto a figura (8) ilustra uma curva poligonal fechada e simples. Fundamentalmente, um nó é tratado como uma curva fechada e simples, obtida da união de pontos em  $R^3$ .

Feitas as devidas considerações, finalmente poderemos apresentar a

**Definição 2.1.1** *Um nó é uma curva poligonal simples e fechada em  $R^3$ , [1].*

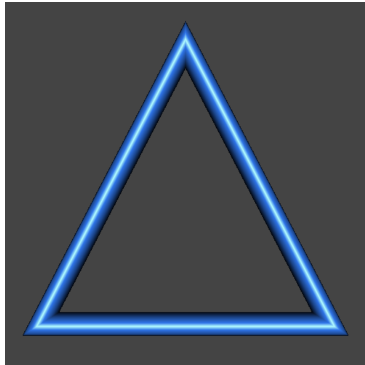


Figura 9 – Nó trivial

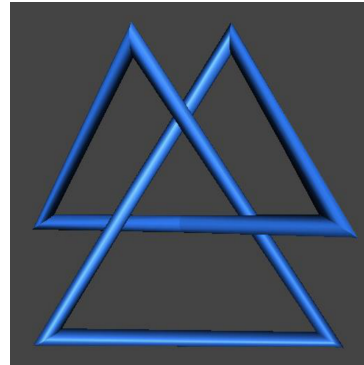


Figura 10 – Nó trevo.

Observe que dois ou mais conjuntos ordenados de pontos podem determinar um mesmo nó poligonal. Por exemplo, considerando três pontos consecutivos colineares, num conjunto de pontos que determina um nó, eliminando-se o ponto localizado entre os outros dois, ainda teremos o mesmo nó poligonal, porém determinado por um conjunto de pontos distinto do original. Vejamos a ilustração na figura (11).

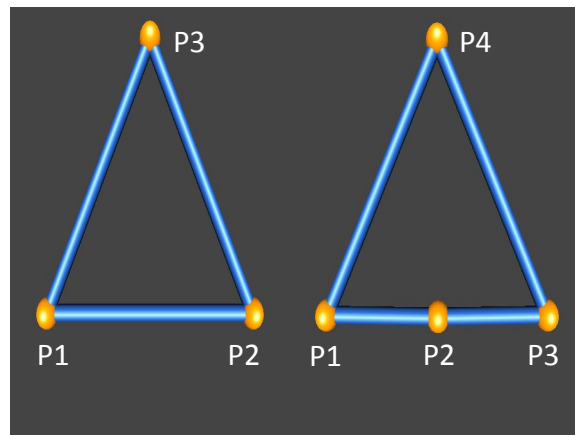


Figura 11 – Nó poligonal determinado por conjuntos distintos de pontos

**Definição 2.1.2** *Se o conjunto ordenado  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  define um nó poligonal, e nenhum subconjunto não próprio ordenado define o mesmo nó poligonal, então cada um dos elementos deste conjunto são os vértices do nó poligonal.*

Uma consequência imediata da definição acima é que o nó trivial é um poligonal definido por três pontos não colineares.

A partir daqui trataremos os nós como curvas “suaves”, simples e fechadas. Note que isto não viola nossa definição já que a suavização da curva pode ser obtida pela união de segmentos de reta suficientemente pequenos.



Figura 12 – Nó trivial.

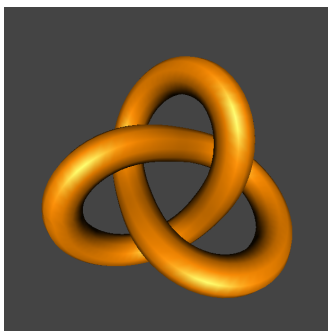


Figura 13 – Nó trevo.

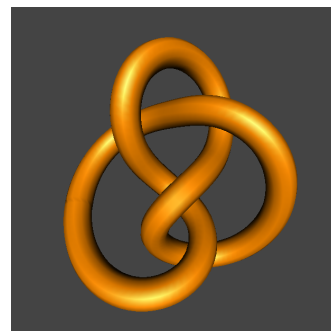


Figura 14 – Nó oito

## 2.2 Equivalência

É fato que os nós podem ser apresentados em  $\mathbb{R}^3$  de formas muito distintas e alguns podem ser deformados continuamente para gerar outros. Esse conceito de deformação contínua e sem auto-intersecções de uma curva no espaço recebe o nome de isotopia. No entanto, ao falarmos dos nós, o conceito básico de isotopia não é suficiente. De fato, considerando dois nós  $K_1$  e  $K_2$ , e uma isotopia  $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$  tal que  $H(x, 0) = K_1(x)$  e  $H(x, 1) = K_2(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^1$ , então  $K_1$  e  $K_2$  são isotópicos ao nó trivial, [5].

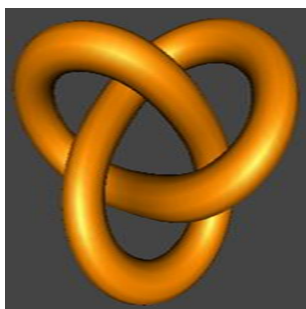


Figura 15

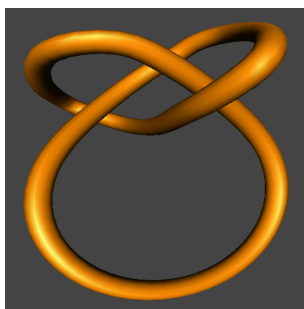


Figura 16



Figura 17

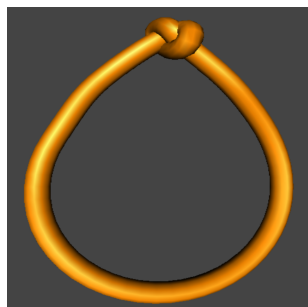


Figura 18

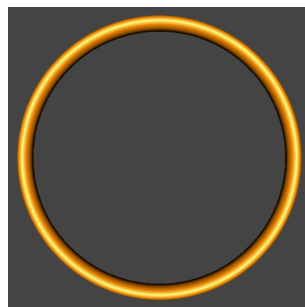


Figura 19

As figuras (15), (16), (17), (18) e (19) ilustram a ação de uma isotopia comum aplicada sobre o nó trevo. Em outras palavras, utilizando a isotopia comum todo nó

seria transformado em nó trivial, pois todos os cruzamentos poderiam ser reduzidos a pontos e “diluídos”. É por este fato que usamos como relação de equivalência de nós a isotopia ambiente ao invés da isotopia comum. Na isotopia ambiente, (que engloba a isotopia comum) o espaço inteiro é deformado na mudança de posição da curva evitando anomalias que possam prejudicar a estrutura topológica do nó. Fazemos a devida definição de nós ambientes isotópicos:

**Definição 2.2.1** *Dois nós  $K$  e  $K'$  dizem-se ambientes isotópicos se existir uma aplicação contínua  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é definida por:*

$$h_t = H(-, t) \text{ é um homeomorfismo } \forall t \in [0, 1], \text{ com } h_0 = Id_{\mathbb{R}^3} \text{ e } h_1(K) = K'.$$

[6]

As figuras (20), (21) e (22) mostram a deformação de um nó em nó trevo de forma contínua em  $\mathbb{R}^3$ . É um exemplo de isotopia ambiente.

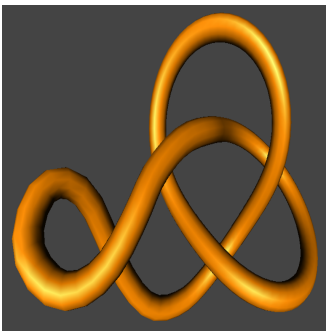


Figura 20



Figura 21

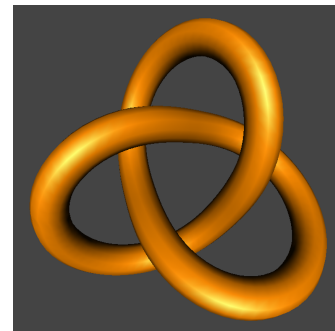


Figura 22

Por outro lado não é possível, por exemplo, deformar continuamente (por isotopia ambiente) um nó trevo até obter um nó trivial. A única forma de fazer isso seria através do rompimento do nó, desenlaçamento e união das pontas soltas após o processo. Vejamos as figuras (23), (24) e (25).

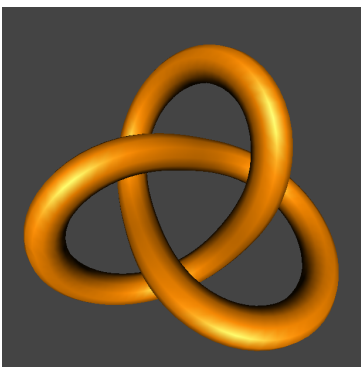


Figura 23

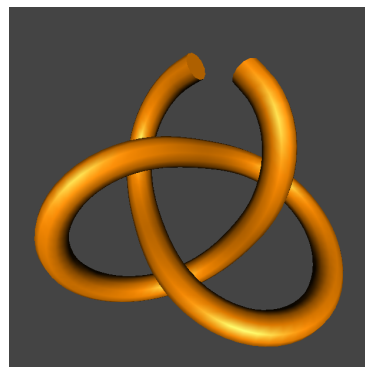


Figura 24

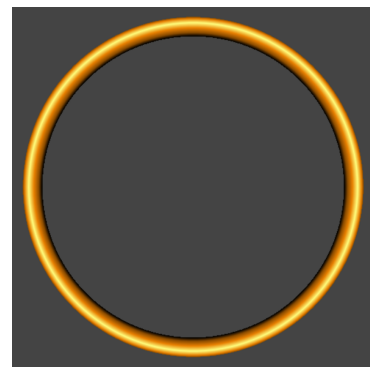


Figura 25

De uma forma geral, ao pensarmos nos modelos físicos dos nós, observamos que as curvas estão “presas” nas cordas do nós e isso garante que toda isotopia sobre o nó é



ambiente. Na verdade, dizemos com isso que a isotopia ambiente permite desfazer cruzamentos, mas não permite inverter a posição das cordas num cruzamento, ou seja, não transporta a linha de cima para baixo e vice versa. Do contrário todo nó seria trivial como já foi dito. A partir deste ponto, por simplificação de notação, trataremos os nós ambiente isotópicos através do termo “equivalentes”.

Um dos principais problemas em aberto na teoria é saber se dois nós são ou não equivalentes. Posteriormente, veremos que a equivalência entre dois nós é obtida, quando possível, através de movimentos denominados *movimentos de Reidemeister*.

## 2.3 Projeções no plano: diagramas de nós

Neste momento, já sabemos que os nós são curvas no espaço. No entanto, boa parte do estudo de nós é feito no plano, através dos diagramas de nós. Estes são projeções planas do nós tridimensionais, cuja finalidade é uma melhor visualização e manipulação. Com efeito, podemos tomar um nó  $K$  e um plano  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^3$  e determinar uma projeção ortogonal de  $K$  sobre  $\Pi$ . A imagem de  $K$  por essa projeção ortogonal é a sua representação plana, seu diagrama.

**Definição 2.3.1** *Dada uma projeção  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$ ,  $\Pi$  um plano de projeção, um ponto  $A \in \phi(\mathbb{R}^3) \subset \Pi$  diz-se um ponto múltiplo se a pré imagem  $\phi^{-1}(A)$  contém mais do que um ponto.*

Além disso,

**Definição 2.3.2** *A projeção de um nó  $K$  é regular se*

- *Contém apenas um número finito de pontos múltiplos.*
- *todos os pontos múltiplos são duplos e pontos de cruzamento, [5].*

Um diagrama regular de um nó deve, portanto, possuir um número finito de pontos de cruzamento.

**Definição 2.3.3** *O número de cruzamentos  $c(K)$  de um nó  $K$  é o menor número de cruzamentos de qualquer diagrama desse nó. Um diagrama mínimo de  $K$  é o que possui  $c(K)$  cruzamentos, [7].*

Um diagrama de nó que não possui cruzamentos representa o nó trivial. Não existem nós com um ou dois cruzamentos e os únicos que possuem três cruzamentos são os dois nós trevos. Alguns nós são tratados por nomes como o nó trevo ou nó oito, por

exemplo, mas a maioria deles recebe uma classificação numérica tabelada. Vejamos na figura (26) uma pequena tabela de nós.



Figura 26 – Tabela de nós

O primeiro número na representação de cada nó indica a quantidade de cruzamentos, enquanto o segundo número indica a posição do nó na tabela. Por exemplo, o nó 6.3 é o terceiro na classificação dos nós de seis cruzamentos. Alguns autores rotulam os nós pondo o segundo número subscrito ao primeiro (por exemplo  $6_3$ ).

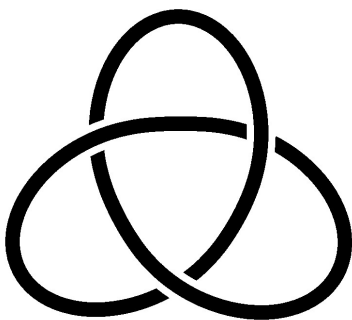


Figura 27 –  $3_1$

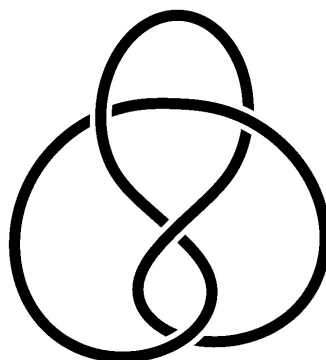


Figura 28 –  $4_1$

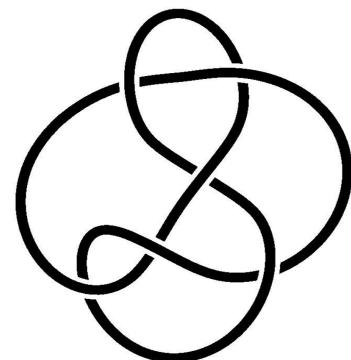


Figura 29 –  $6_3$

Num diagrama de nó, em cada cruzamento, uma das linhas é contínua, representando o arco que passa por cima, enquanto a outra não é contínua representando o arco que passa por baixo. Além disso, por questões de notação e simplificação, representamos os diagramas através de curvas planas suaves e não por segmentos de reta, que tornariam a tarefa mais complexa. Podemos afirmar, sem perda de generalidade, que um diagrama

de nó consiste em uma coleção de curvas contínuas, cujos arcos se encontram nos cruzamentos. Normalmente, em cada um desses cruzamentos, encontram-se três arcos. Um diagrama de nó pode ser alternado ou não alternado conforme o arranjo dos cruzamentos.

**Definição 2.3.4** *Um diagrama de nó é alternado, quando, ao longo da corda, aparecem alternadamente cruzamentos por cima e cruzamentos por baixo.*

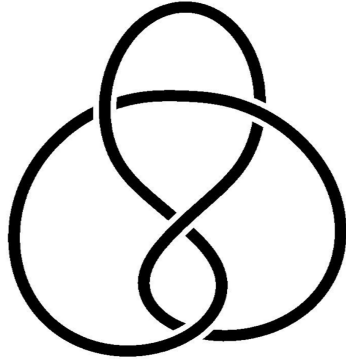


Figura 30 – Alternado

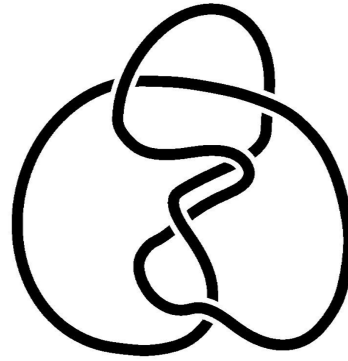


Figura 31 – Não alternado

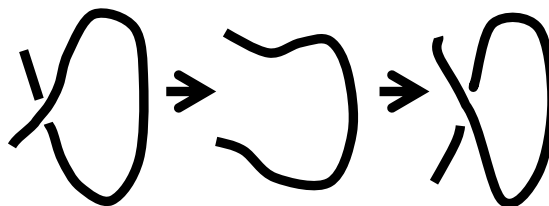
## 2.4 Os Movimentos de Reidemeister

Já sabemos que os nós podem ser deformados em  $\mathbb{R}^3$  e transformados em equivalentes. A equivalência acontece através de movimentos específicos aplicados sobre os diagramas. Tais movimentos recebem o nome de movimentos de Reidemeister.

**Definição 2.4.1** *Os movimentos de Reidemeister são movimentos capazes de alterar diagramas de nós, deformando continuamente seus arcos ou alterando a relação entre os cruzamentos.*

[ $R_0$ ] *Movimento simples de deformação dos arcos sem alteração de cruzamentos.*

[ $R_1$ ] *Movimento que introduz ou remove uma torção no diagrama.*

Figura 32 – Movimento  $R_1$ : torção no diagrama

[ $R_2$ ] *Movimento que introduz ou remove dois cruzamentos que cruzam ambos por cima ou ambos por baixo.*

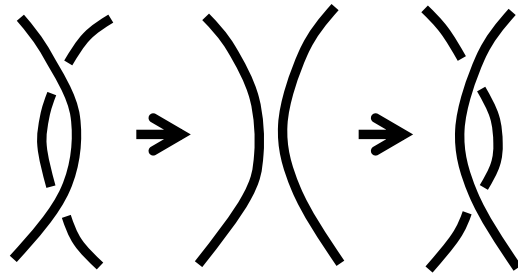


Figura 33 – Movimento  $R_2$ : introdução/remoção de cruzamentos

$[R_3]$  Movimento que faz passar um dos arcos do diagrama por cima ou por baixo de um cruzamento.

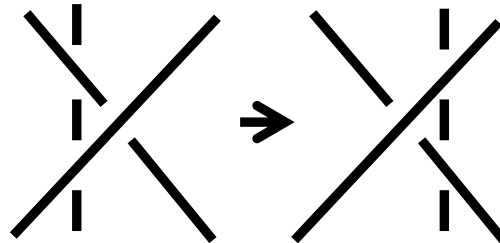


Figura 34 – Movimento  $R_3$ : passagem do arco por cima ou por baixo do cruzamento

Abaixo uma transformação através de movimentos de Reidemeister.

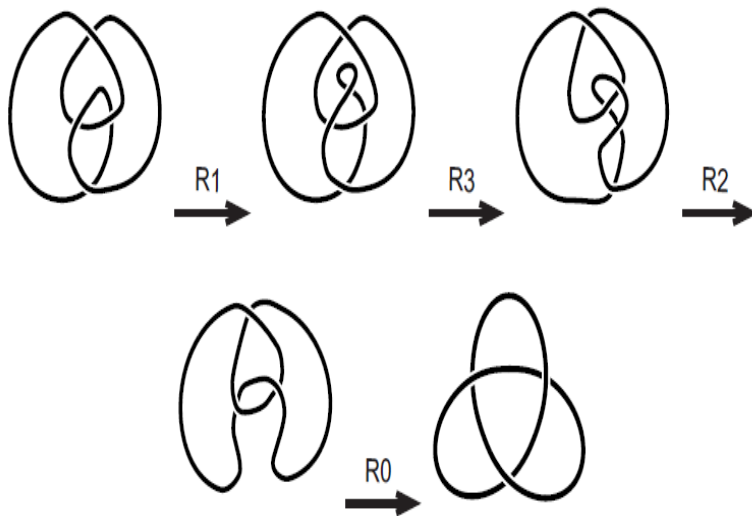


Figura 35 – Transformação de um nó por movimentos de Reidemeister

O exemplo acima é apenas um pequeno resultado do teorema que segue.

**Teorema 2.4.2** *Dois diagramas  $D(K_1)$  e  $D(K_2)$  representam nós equivalentes se, e somente se, existe uma sequência de movimentos de Reidemeister que transforma  $K_1$  em  $K_2$ .*

A noção intuitiva desse teorema é tomada por idéias razoavelmente simples. No entanto, a prova desse teorema não é simples e trata de topologia combinatória, logo, de acordo com a natureza deste trabalho, optamos por não apresentá-la aqui. O leitor poderá conferir a prova do referido teorema em [8], no apêndice A, página 223.

Embora sejam um recurso poderoso, os movimentos de Reidemeister nem sempre mostram de forma fácil se dois nós são equivalentes. Vale salientar ainda que são independentes, isto é, um deles não pode ser obtido através dos outros.

## 2.5 Nós Orientados e Invertíveis

Nesta seção trataremos da orientação de diagramas de nós e dos critérios que definem se um nó é invertível ou não.

### 2.5.1 A orientação de um nó

**Definição 2.5.1** *Um nó orientado é um nó com uma direção escolhida de circulação ao longo da corda, [7].*

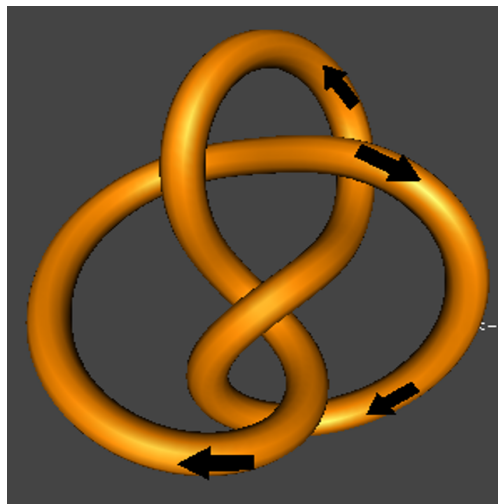


Figura 36 – Nó oito orientado obtido com knotplot

Além disso, para cada cruzamento num diagrama, atribui-se um sinal, conforme a convenção a figura (37).

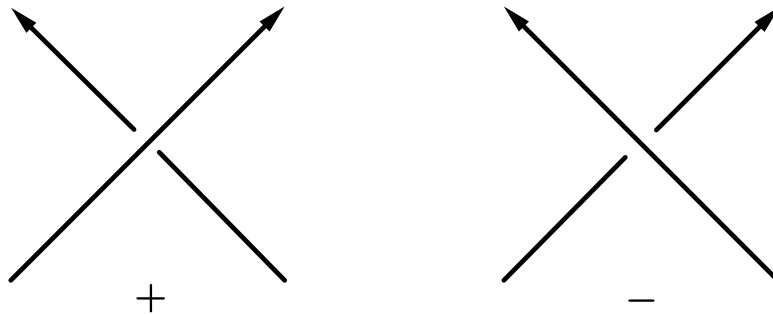


Figura 37 – Sinais usuais para cruzamentos

Note o nó oito na figura (38) evidenciando os sinais de seus cruzamentos, conforme a convenção usual supracitada.

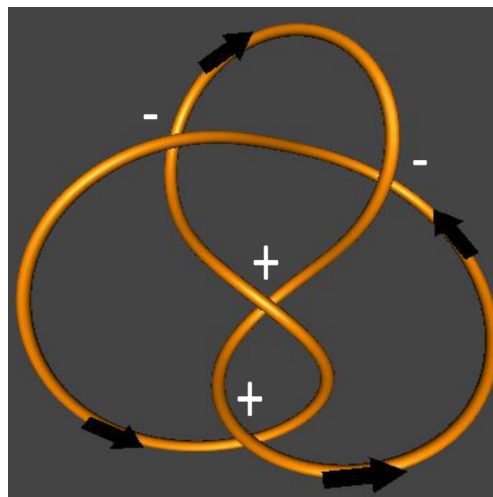


Figura 38 – Nó figura oito com sinais nos cruzamentos

**Definição 2.5.2** A contorção  $W(D)$  de um diagrama orientado  $D$  é a soma de sinais de todos os cruzamentos.

## 2.5.2 O inverso de um nó

Já sabemos que um nó é determinado à custa de um conjunto de pontos  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Se esse conjunto de pontos caracteriza um sentido direcional ao nó, então o conjunto  $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1)$ , determina um sentido contrário ao primeiro. Dessa maneira,

**Definição 2.5.3** O inverso de um nó poligonal  $K$  definido por um conjunto ordenado de pontos  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  é o nó  $-K$  definido por  $(p_n, \dots, p_2, p_1)$ .

Em outras palavras, o inverso de um nó é apenas o mesmo nó com orientação inversa. Observe ainda que, dado um conjunto de pontos  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  existem vários rearranjos que permitem descrever o mesmo nó. Por exemplo,  $(p_3, p_4, \dots, p_n, p_1, p_2)$  define o mesmo nó com a mesma orientação em relação a  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . A figura (39) permite ver isso com facilidade.

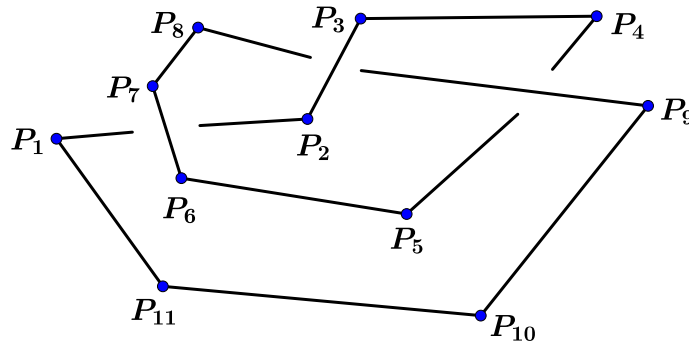


Figura 39 – Representação poligonal do nó trevo orientado

As figuras (40) e (41) ilustram nós inversos entre si.

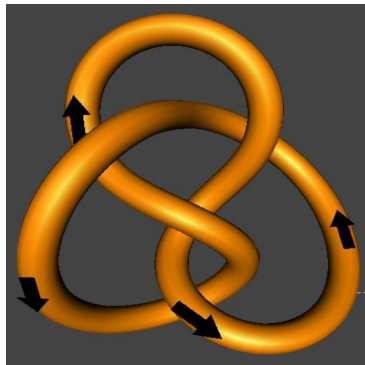


Figura 40 – Nó  $K$ .

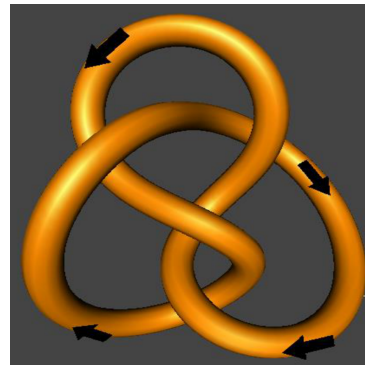
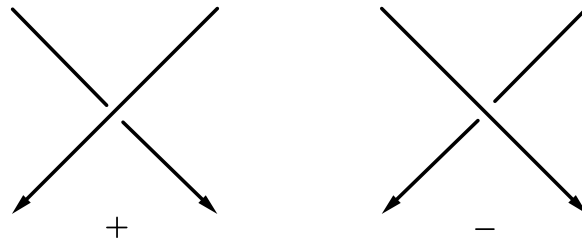


Figura 41 – Nó  $-K$ .

**Proposição 2.5.4** *Considere os nós  $K$  e  $-K$  e seus respectivos diagramas  $D_K$  e  $D_{-K}$ . Então  $W(D_K) = W(D_{-K})$ .*

**Prova:**

Dado um nó  $K$  os cruzamentos possíveis de seu diagrama  $D_K$  são aqueles representados na figura (37). Se invertemos a orientação de  $D_K$  obtemos  $D_{-K}$ , de modo que os seus cruzamentos serão conforme a figura (42). Observe que a alteração na orientação do diagrama não modifica os sinais dos cruzamentos, portanto,  $W(D_K) = W(D_{-K})$ . ■

Figura 42 – Cruzamentos do nó  $-K$ 

Por exemplo, para um trevo de três cruzamentos temos que  $W(D_K) = 3 = W(D_{-K})$ .

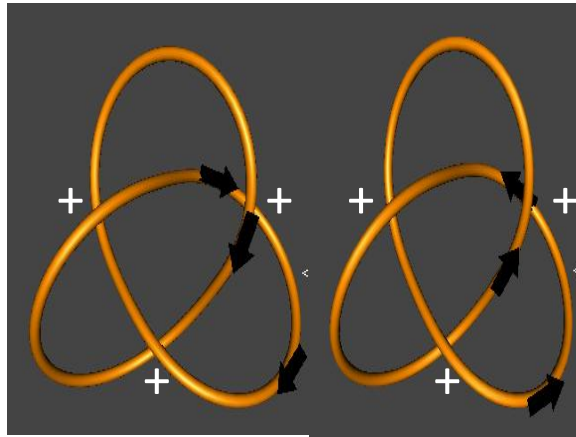


Figura 43 – Sinais no nó trevo

**Definição 2.5.5** Um nó  $K$  é invertível se  $K$  e  $-K$  são equivalentes.

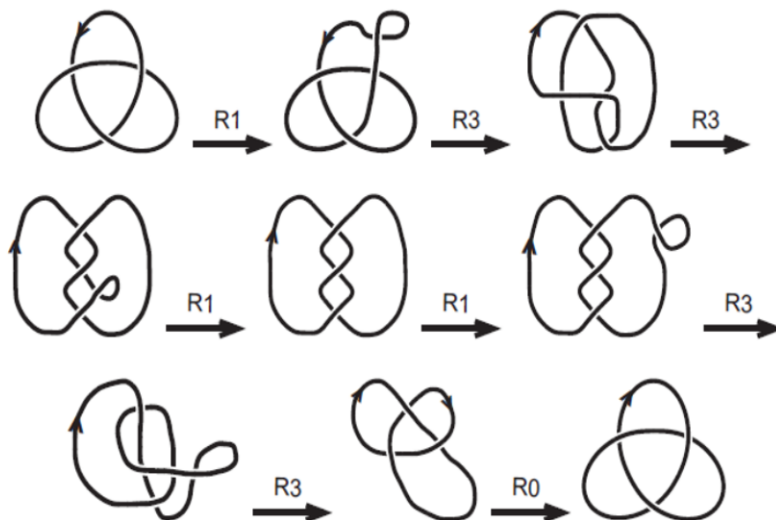


Figura 44 – Sequência de movimentos de Reidemeister na inversão do trevo orientado



Como exemplo de nó invertível podemos citar o trevo. Com efeito, tomando um nó trevo de orientação determinada, podemos aplicar uma sequência de movimentos de Reidemeister até transformá-lo num trevo com orientação inversa. Veja a figura (44).

Abaixo segue exemplo de nó não invertível.

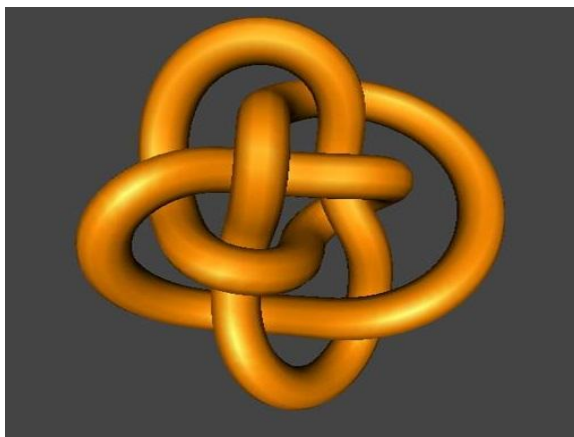


Figura 45 – Nó não invertível:  $8_{17}$

## 2.6 Reflexão de um nó e quiralidade

**Definição 2.6.1** Dado um nó  $K$ , a sua imagem refletida no espelho é o nó  $\overline{K}$ , onde a reflexão é feita através de um plano em  $\mathbb{R}^3$ , isto é, pela transformação de um ponto  $(x, y, z)$  em  $(x, y, -z)$ .

A orientação de  $\overline{K}$  é a mesma de  $K$ . O efeito imediato da reflexão de um nó é a alteração de todos os seus cruzamentos.

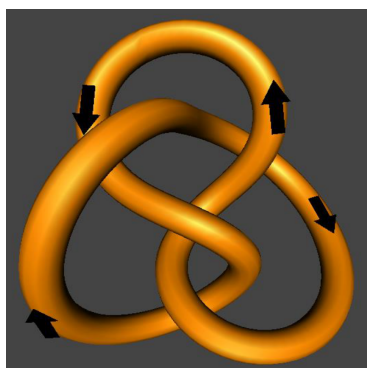


Figura 46 – Nó oito

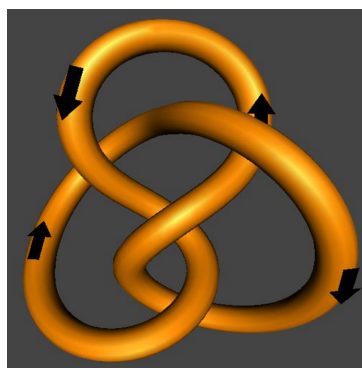


Figura 47 – e sua imagem

**Definição 2.6.2** Um nó é denominado *chiral* se não é equivalente a sua imagem refletida no espelho. Do contrário ele é *amphichiral* (ou *reflexivo*).

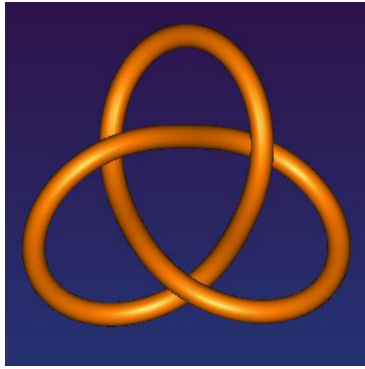


Figura 48 – O nó trevo

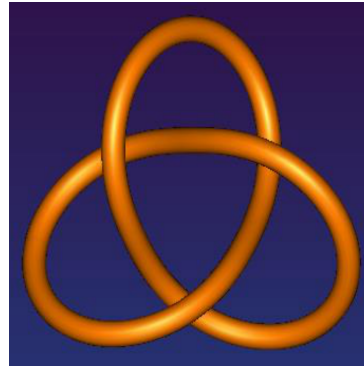


Figura 49 – é chiral

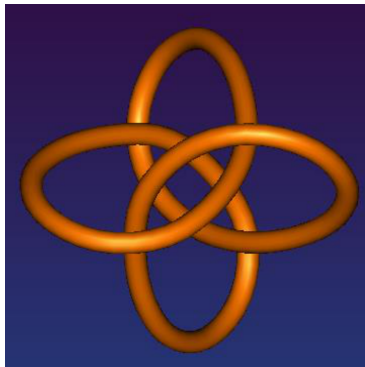


Figura 50 – Exemplo: nó

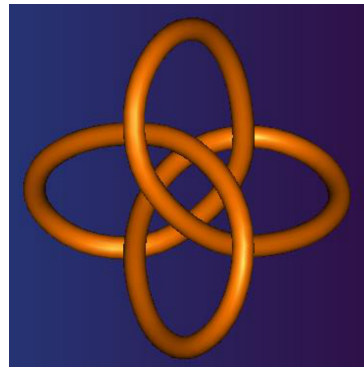


Figura 51 – amphichiral

## 2.7 Soma conexa de nós

Nesta seção trataremos da aritmética associada aos nós. Ao tomarmos dois nós quaisquer, podemos rompê-los em pontos determinados e unir as pontas soltas de um com o outro sem introduzir um novo cruzamento. Esse procedimento denomina-se soma conexa. Para facilitar a compreensão deste procedimento, consideremos os diagramas poligonais dos nós  $K_1$  e  $K_2$  definidos respectivamente pelos conjuntos de pontos  $(p_1, \dots, p_n)$  e  $(q_1, \dots, q_r)$ ,  $n, r$  inteiros positivos.

**Definição 2.7.1** *A soma conexa entre os nós  $K_1$  e  $K_2$  é o nó  $K_1 \# K_2$  obtido através dos seguintes procedimentos.*

- *Primeiramente posicionemos os diagramas de modo que as suas orientações sejam concordantes, isto é, que permitam a união conexa preservando as orientações originais.*
- *Tomemos os segmentos  $[a, b] \subseteq [p_i, p_{i+1}] \subset K_1$  e  $[c, d] \subseteq [q_j, q_{j+1}] \subset K_2$ , de forma que por eles não passe nenhum cruzamento e que estejam localizados mais ao exterior do diagrama para facilitar o procedimento.*
- *Retiremos os segmentos  $[a, b]$  de  $K_1$  e  $[c, d]$  de  $K_2$  e efetuemos a conexão  $[a, d]$  e  $[c, b]$  sem acréscimo de cruzamentos.*

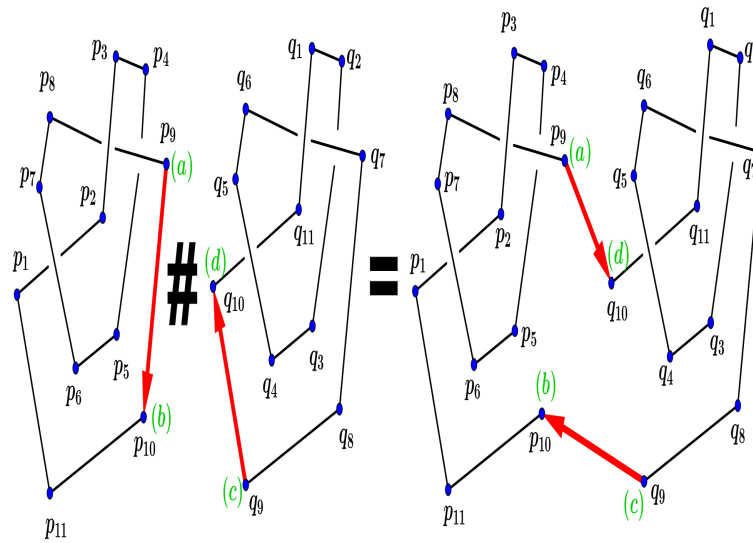


Figura 52 – Soma conexa entre dois nós poligonais

Sem perda de generalidade, o diagrama da soma conexa  $K_1 \sharp K_2$  fica definido pelo conjunto de pontos  $(p_1, \dots, p_i, a, d, q_{j+1}, \dots, q_r, q_1, \dots, q_j, c, b, p_{i+1}, \dots, p_n)$ . A depender da escolha dos pontos de conexão da soma este pode não ser o menor conjunto de pontos que determina  $K_1 \sharp K_2$ .

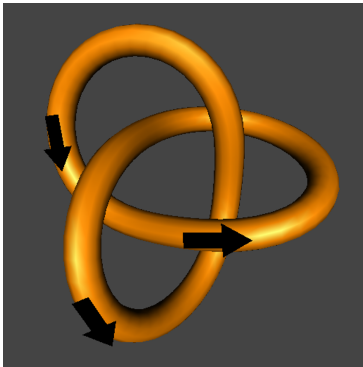


Figura 53 –  $K_1$

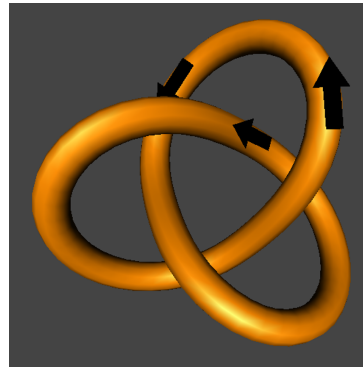


Figura 54 –  $K_2$

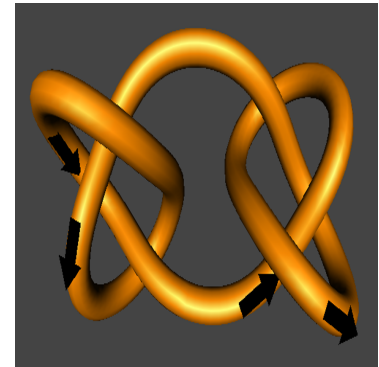


Figura 55 –  $K_1 \sharp K_2$

Caso os diagramas de nós não estejam com orientações adequadas para a soma conexa, podemos movimentar um deles rotacionando, ou invertê-lo, caso seja invertível, de modo a estabelecer uma posição favorável à conexão. Dito isto, notamos que a soma conexa ou composição de nós é uma operação bem definida. De fato, dados  $K_1$  e  $K_2$  a soma conexa  $K_1 \sharp K_2$  independe da escolha de pontos para sua composição. Em outras palavras  $K_1 \sharp K_2$  é unicamente determinada por  $K_1$  e  $K_2$ .

A proposição abaixo descreve as propriedades da soma conexa de nós.

**Proposição 2.7.2** *Considere os nós  $K_0, K_1, K_2$  e  $K_3$  todos orientados, onde  $K_0$  é o nó trivial. Então,*

1.  $K_i \# K_0 \approx K_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$
2.  $K_1 \# K_2 \approx K_2 \# K_1$
3.  $K_1 \# (K_2 \# K_3) \approx (K_1 \# K_2) \# K_3$
4. Se  $K_1$  é não trivial,  $K_1 \# K_2$  é não trivial.

A afirmação (1) é evidente pois o nó trivial é absorvido na soma conexa (veja na figura (56)). As afirmações (2) e (3) também são verificadas. Com efeito, a soma conexa de nós é comutativa. Tomando os diagramas de  $K_1$  e  $K_2$  uma composição  $K_1 \# K_2$  é unicamente determinada conforme citado acima. Podemos supor que  $K_1 \# K_2$  foi obtido através de dois arcos escolhidos de  $K_1$  e  $K_2$ . Os mesmos arcos podem ser escolhidos para  $K_2 \# K_1$ . Argumento idêntico é proposto para a terceira afirmação. Para a quarta afirmação podemos pensar da seguinte forma: se  $K_2$  é trivial nada a provar, de acordo com a afirmação (1). Se  $K_2$  é não trivial podemos supor por absurdo que  $K_1 \# K_2$  é trivial e fazemos sequências de composições infinitas num compacto donde concluímos que  $K_1$  é trivial e não trivial. É importante observar que uma consequência imediata da afirmação (4) é que se  $K_1 \# K_2$  é trivial, então  $K_1$  e  $K_2$  são equivalentes ao nó trivial. A prova completa desta proposição pode ser vista em [9], na página 28 do capítulo 2.

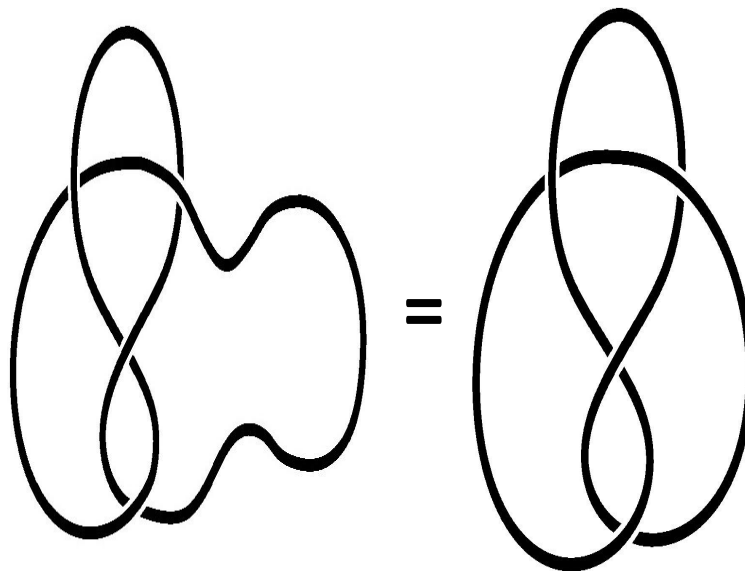


Figura 56 – Soma conexa entre nó oito e nó trivial

## 2.8 Nós primos e compostos

Conhecida a definição e as propriedades da soma conexa, podemos definir o conceito de primalidade e composição de um nó.

**Definição 2.8.1** *Um nó  $K$  que é soma conexa de dois nós não triviais é chamado composto. Um nó não trivial que não é composto é dito um nó primo.*

Em outras palavras, um nó composto pode ser fatorado em primos, sem que haja nenhum trivial na fatoração. Se um nó primo é fatorado como soma conexa de dois nós um deles é o próprio e o outro é trivial. Em geral, não é fácil verificar se um nó é primo ou composto. A figura (56) ilustra o nó oito, que é primo. Na figura (55) temos um nó composto por dois trevos.

## 2.9 Enlaces

**Definição 2.9.1** *Um enlace é a união finita de nós disjuntos. Em particular, um nó é um enlace de uma componente. Um enlace trivial é a união disjunta de nós triviais no plano, [1].*

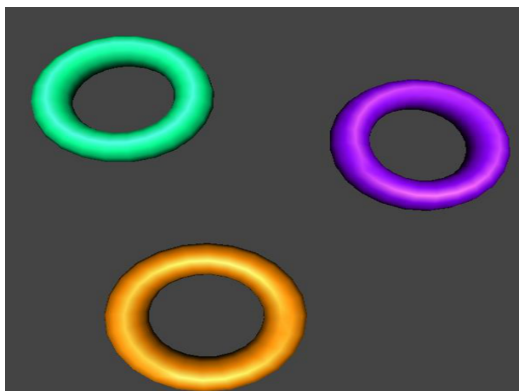


Figura 57 – Enlace trivial com 3 componentes

Abaixo, mais exemplos de enlaces.

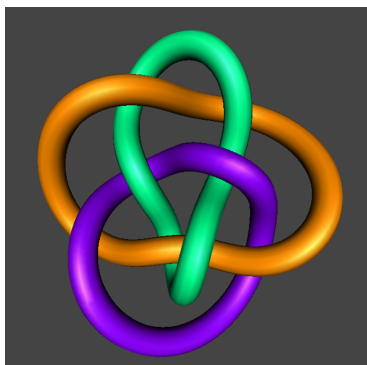


Figura 58 – Enlace 8.3.6

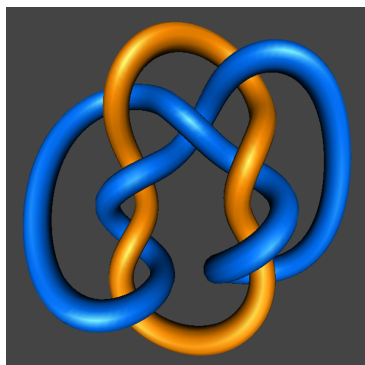


Figura 59 – Enlace 9.2.9

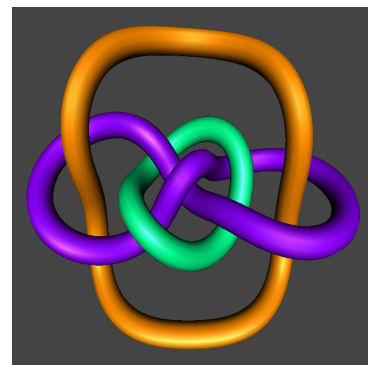


Figura 60 – Enlace 9.3.20

Assim como no estudo dos nós também é possível projetar enlaces sobre um plano para obter diagramas.

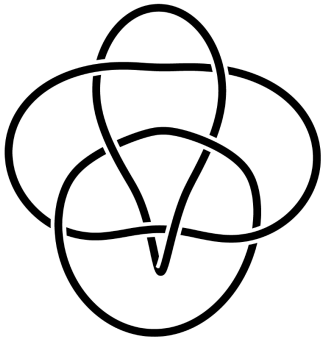


Figura 61 – Enlace 8.3.6

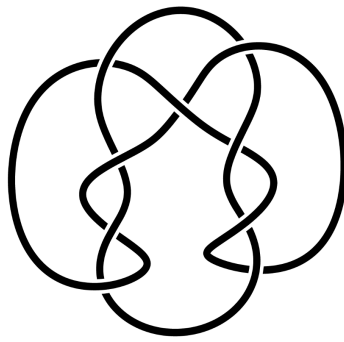


Figura 62 – Enlace 9.2.9

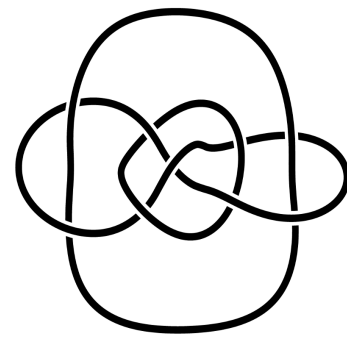


Figura 63 – Enlace 9.3.20

A numeração dos enlaces destaca a quantidade de cruzamentos, a quantidade de componentes e a posição na tabela, respectivamente. Nas figuras (61), (62) e (63) temos os enlaces 8.3.6 (8 cruzamentos, 3 componentes e tipo 6), 9.2.9 (9 cruzamentos, 2 componentes e tipo 9) e 9.3.20 (9 cruzamentos, 3 componentes e tipo 20 entre os enlaces de 9 cruzamentos e 3 componentes), respectivamente.

Note que toda a definição de equivalência aplicada anteriormente sobre os nós se verificam para os enlaces, isto é, podemos projetar diagramas e sobre eles aplicar movimentos de Reidemeister para obter diagramas equivalentes de enlaces equivalentes. Dessa forma, dois enlaces são equivalentes se seus diagramas são equivalentes.

Um enlace também pode ser orientado desde que cada um de seus componentes possua um sentido definido para a orientação.

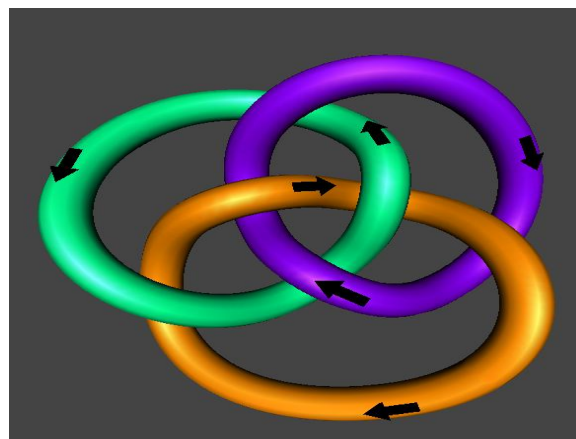


Figura 64 – Enlace orientado de 3 componentes

Também se aplicam aos enlaces as mesmas regras para os sinais de cruzamentos e a contorção. Vejamos agora como se define o número de ligação de dois componentes de um enlace.

**Definição 2.9.2** *Considere um enlace orientado com  $n$  componentes. O número de ligação  $lk(K_i, K_j)$  de cada par distinto de componentes  $(K_i, K_j)$  é a metade da soma dos*

siniais de seus cruzamentos. O número de ligação do enlace  $E$  é a soma dos números ligação de todos os pares distintos de componentes.

$$lk(E) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} lk(K_i, K_j)$$

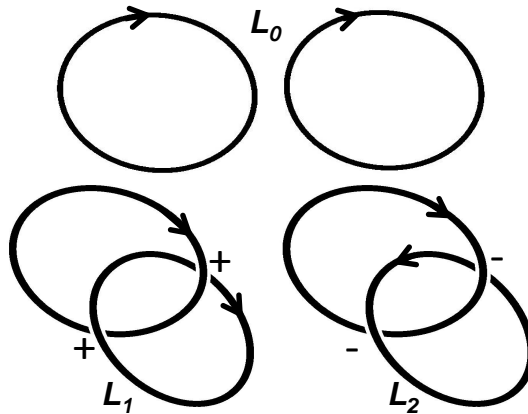


Figura 65 – Enlace trivial de duas componentes e enlaces de dois componentes com sinais.

Na figura (65) temos um enlace trivial  $L_0$  de duas componentes e dois enlaces não triviais  $L_1$  e  $L_2$  de duas componentes. Os enlaces  $L_1$  e  $L_2$  são chamados de anéis de Hopf. Neste exemplo temos os seguintes números de ligação:  $lk(L_0) = 0$ ,  $lk(L_1) = 1$  e  $lk(L_2) = -1$ . O número de ligação pode nos fornecer informações acerca da equivalência de enlaces. Por exemplo, podemos concluir que os anéis de Hopf não podem ser separados pois o número de ligação deles é diferente do número de ligação do enlace trivial de duas componentes. Caso tais números fossem iguais não poderíamos concluir nada a esse respeito. O teorema abaixo associa a equivalência de enlaces com os números de ligação.

**Teorema 2.9.3** *Se dois enlaces  $L_1$  e  $L_2$  são equivalentes, então  $lk(L_1) = lk(L_2)$*

**Prova:** Para esta prova observe que os movimentos de Reidemeister cabíveis a dois componentes de um enlace são  $R_2$  e  $R_3$ . O movimento  $R_2$  pode introduzir ou remover cruzamentos ambos por cima ou ambos por baixo, isto é, acrescenta ao enlace dois cruzamentos de sinais contrários, o que não altera o número de ligação. Já o movimento  $R_3$  faz passar um dos arcos do diagrama por cima ou por baixo, e no caso do enlace não altera nenhum cruzamento, logo não altera o número de ligação. ■

Por esse teorema podemos concluir que os diagramas na figura (65) não são equivalentes entre si pois todos os números de ligação são distintos.

**Proposição 2.9.4** *Considere um enlace  $L$ , sua imagem reflexiva  $\bar{L}$  e seu inverso  $-L$ . Então  $lk(\bar{L}) = -lk(L)$  e  $lk(-L) = lk(L)$ .*

**Prova:** Tomando inicialmente o enlace  $L$ , podemos obter  $\bar{L}$  alterando todos os cruzamentos e, conseqüentemente, todos os sinais dos cruzamentos, logo o número de ligação  $lk(\bar{L})$  é simétrico em relação a  $lk(L)$ . Agora, tomando o enlace  $-L$ , inverso de  $L$  sabemos que sua orientação é inversa em comparação com  $L$ , mas isso não altera os sinais dos cruzamentos, logo não altera o número de ligação. ■

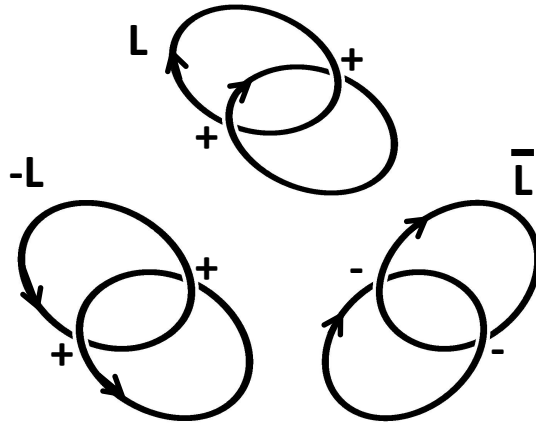


Figura 66 – Enlaces  $L$ ,  $-L$  e  $\bar{L}$

Note que  $lk(L) = 1 = lk(-L)$  e  $lk(L) = 1 = -lk(\bar{L})$ .

Considerando que um nó é um enlace de uma componente apenas, a equivalência aplicada aos enlaces se aplica, conseqüentemente, aos nós. Dessa forma, quando nos referirmos a enlaces estaremos tratando de nós, por generalização. No próximo capítulo veremos alguns invariantes, que são recursos matemáticos utilizados para verificar a equivalência de enlaces ou nós.



## Parte III

### Invariantes de nós e enlaces



## 3 Invariantes Numéricos e Polinomiais

Um invariante é um recurso matemático que serve para distinguir se dois nós ou enlaces são ou não equivalentes. Existem vários tipos de invariantes, alguns numéricos, outros são polinômios, etc. De uma forma geral, podemos pensar num invariante como um objeto matemático associado a um nó (ou enlace). Se tomarmos um nó  $K_1$  equivalente a  $K_2$ , então  $K_1$  e  $K_2$  são associados a um mesmo objeto matemático  $\sigma$ . Esse objeto  $\sigma$  é um invariante da classe de isotopia de  $K_1$  e  $K_2$ . Se  $\sigma$  é invariante de um nó  $K_1$  e  $\sigma(K_1) \neq \sigma(K_2)$  significa que  $K_1$  e  $K_2$  não são equivalentes. De outro modo, podemos pensar que se  $K_1$  e  $K_2$  são equivalentes, seus diagramas são alterados por movimentos de Reidemeister e  $\sigma$  não pode ser alterado por tais movimentos. É importante salientar que não se conhece até hoje um invariante suficientemente poderoso a ponto de verificar a equivalência ou não de todos os nós que se conhece. Cada invariante possui uma aplicação mais ou menos eficiente para uma certa classe de equivalência de nós ou enlaces.

### 3.1 Invariantes Clássicos

Nesta seção trataremos de alguns invariantes considerados clássicos, como a tricolorabilidade, o número de enlaçamento e o número de desatamento. Tais invariantes recebem essa denominação porque foram os primeiros utilizados na teoria de nós.

#### 3.1.1 Tricolorabilidade

**Definição 3.1.1** *Um diagrama de nó (enlace) é tricolorizável se:*

1. *cada arco possua uma cor;*
2. *utiliza no mínimo duas e no máximo três cores;*
3. *para cada cruzamento, ou todos os arcos tem a mesma cor ou num cruzamento os arcos possuem três cores.*

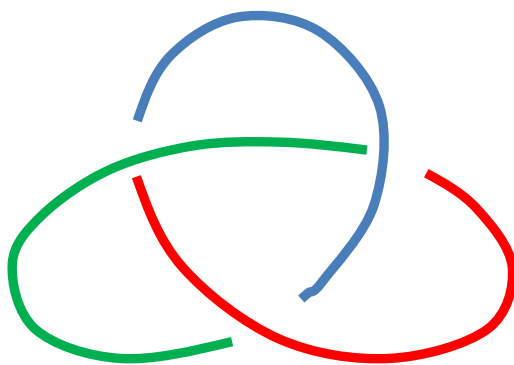


Figura 67 – Nó trevo tricolorizado

**Definição 3.1.2** *Um enlace é tricolor se seus diagramas são tricolores.*

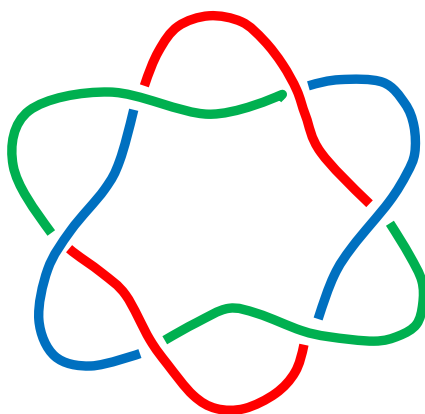


Figura 68 – Enlace 6.2.1 tricolor

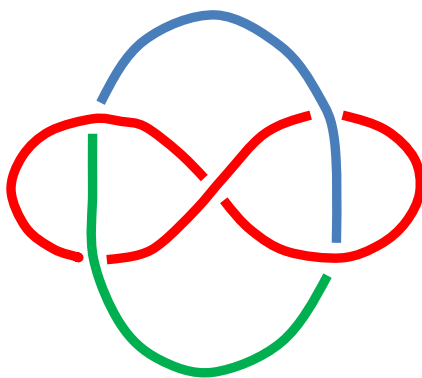


Figura 69 – Enlace 5.2.1 não tricolor

Note que o diagrama da figura (69) possui um cruzamento onde os arcos tem duas cores, isto é, não atende à regra III na definição da tricolorabilidade. Logo não é tricolor.

A tricolorabilidade é um invariante da classe de isotopia de um nó ou enlace. Com efeito, se um diagrama é tricolorizável e outro diagrama não é, significa que não são equivalentes. Por exemplo, o nó trivial não é tricolor, pois possui um único arco e não atende à quantidade mínima de cores (duas) na definição da tricolorabilidade. Por outro lado o nó trevo é tricolor (ver figura (67)), isto é, o trevo e o trivial possuem classes de isotopia distintas ou, em outras palavras, não são equivalentes.

A idéia de tricolorabilidade também se estende à  $n$ -colorabilidade, mas não trataremos aqui deste invariante.

### 3.1.2 Número de Cruzamentos

Considere o conjunto  $D_i$  de todos os diagramas de um enlace  $E$ . O diagrama  $D_m$  desse conjunto que possuir o menor número de cruzamentos possíveis é dito diagrama minimal de  $E$ . Além disso, esse número mínimo de cruzamentos de  $D_m$  é o número  $C(E)$  de cruzamentos do enlace  $E$  ( $C(E) = C(D_m)$ ). Dessa maneira  $C(E)$  é considerando um invariante de classe de isotopia do enlace.

Essa definição minimal de número de cruzamentos é necessária, pois, dado que um diagrama não é minimal, existem cruzamentos que desaparecerão através de movimentos de Reidemeister até que se obtenha o minimal. Veja a figura (70) abaixo.

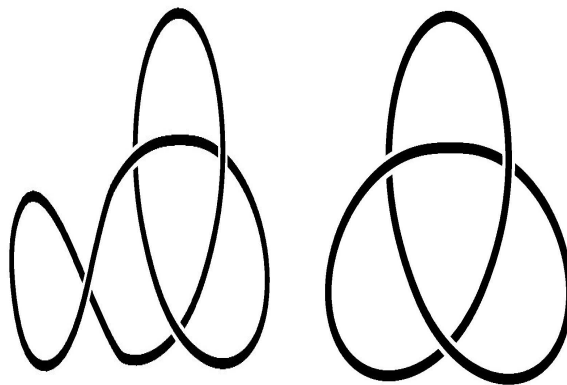


Figura 70 – Diagrama qualquer e mínimo do nó trevo, respectivamente

Observe que os números de cruzamento dos trevos na figura (70) são respectivamente 4 e 3. Logo o diagrama minimal do nó trevo ( $3_1$ ) é o do lado direito, e o número de cruzamentos do nó trevo é  $C(K) = 3$ .

De uma forma geral não é fácil determinar o número de cruzamentos de alguns diagramas de nós ou enlaces, pois não existe nenhum mecanismo suficientemente capaz de distinguir se um diagrama é mínimo ou não.

### 3.1.3 Número de Desatamento

Considere o diagrama de um enlace. Alterando a ordem de um dos cruzamentos desse diagrama é possível gerar o diagrama de um novo enlace. Vejamos a figura abaixo.

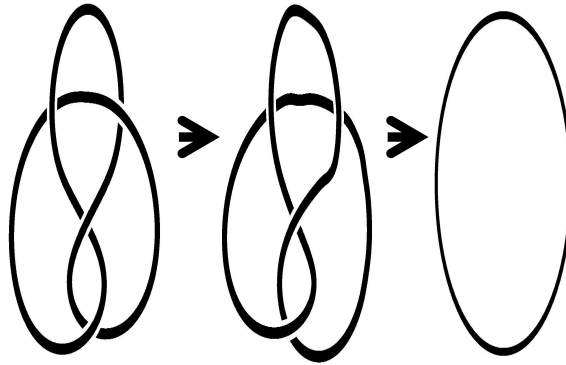


Figura 71 – Desatamento do diagrama do nó oito.

Para que o número de desatamento seja invariante de classe da isotopia de um enlace, é necessário que seja mínimo dentre todos os diagramas possíveis.

**Definição 3.1.3** Considere o conjunto  $D_i$  de todos os diagramas de um enlace  $E$ . O número de desatamento  $\mu(E)$  é tal que:

$$\mu(E) = \min_{D_i} \mu(D_i)$$

Determinar o número de desatamento não é uma tarefa fácil. Nem sempre o diagrama mínimo de um enlace ou nó, é o que possui menor número de desatamento. Observe a figura.

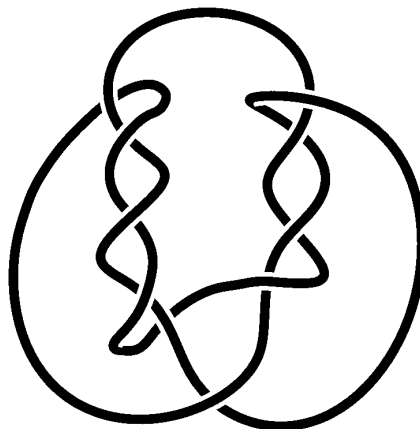


Figura 72 – Diagrama minimal do nó 10.8

Na figura (72) temos o diagrama mínimo do nó 10.8 que possui número de desatamento  $\mu(K) = 3$ . Por outro lado existe uma diagrama desse mesmo nó, com 14 cruzamentos e que desata apenas movendo dois cruzamentos.

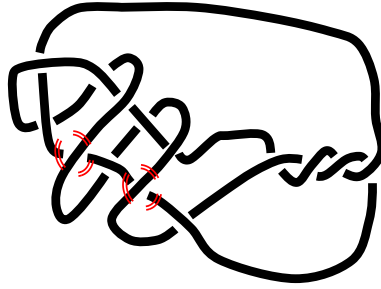


Figura 73 – Diagrama do nó 10.8 com 14 cruzamentos e  $\mu(K) = 2$

Concluimos para este exemplo que  $\mu(K) = 2$ , pois é o menor número, embora proveniente de um diagrama não mínimo.

Vejamos agora o comportamento do número de desatamento sobre nós compostos.

**Proposição 3.1.4** *Considere os nós  $K_1$  e  $K_2$  e sua soma conexa  $K_1 \# K_2$ . Então,*

$$\mu(K_1 \# K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

**Prova:** *Considere os diagramas  $D(K_1)$ ,  $D(K_2)$  e  $D(K_1 \# K_2)$  de forma que possuam exatamente o número de desatamento de seus respectivos nós. Fazendo  $\mu(K_1)$  alterações de cruzamentos em  $D(K_1)$  e  $\mu(K_2)$  alterações de cruzamentos em  $D(K_2)$  obtemos em ambos o nó trivial donde  $D(K_1 \# K_2)$  também será trivial. Logo,*

$$\mu(K_1 \# K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2). \blacksquare$$

Conhecendo esse resultado podemos agora enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.5** *Se um nó  $K$  é tal que  $\mu(K) = 1$ , então  $K$  é um nó primo.*

A prova desse teorema pode ser vista em [10].

Como consequência imediata temos o

**Corolário 3.1.6** *Considere os nós  $K_1$  e  $K_2$ . Se  $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 1$ , então  $\mu(K_1 \# K_2) = 2$ .*

**Prova:** *Pela proposição (3.1.4) temos que  $\mu(K_1 \# K_2) \leq 2 = \mu(K_1) + \mu(K_2)$ . Analisemos os casos. Se  $\mu(K_1 \# K_2) = 0$  então  $K_1 \# K_2$  é trivial, donde decorre que  $K_1$  e  $K_2$  são triviais. Isto é impossível pois o número de desatamento de um nó trivial é igual a 0 e  $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 1$ . Se  $\mu(K_1 \# K_2) = 1$  então, pelo teorema (3.1.5),  $K_1 \# K_2$  é primo, logo  $K_1$  ou  $K_2$  é trivial. Em qualquer situação, um deles terá número de desatamento nulo, contrariando*

a condição inicial  $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 1$ . Portanto resta apenas concluir que  $\mu(K_1 \sharp K_2) = 2$ .

■

Feita a devida apresentação dos invariantes considerados clássicos, trataremos agora de mais alguns invariantes utilizados no estudo de teoria dos nós.

### 3.2 O determinante de um nó

Considerando o diagrama de um nó  $K$  com  $n$  arcos e cruzamentos, o determinante de  $K$  é, na verdade, o determinante da matriz de coeficientes inteiros de um sistema linear com  $n - 1$  equações, da forma  $r + s - 2w = 0$ , associadas aos arcos e cruzamentos do diagrama. A obtenção do determinante de um nó segue as condições estabelecidas abaixo:

- Primeiramente associe a cada arco uma variável. Para cada cruzamento escreva uma equação da forma  $r + s - 2w = 0$ , onde  $w$  representa o arco que passa sobre o cruzamento e  $r$  e  $s$  os outros dois arcos. Teremos, assim, um sistema de  $n$  equações e variáveis.
- Agora tome uma das variáveis e atribua-lhe o valor numérico 0. Em seguida descarte qualquer uma das equações, restando assim um sistema com  $n - 1$  equações e incógnitas.
- Por fim, escreva a matriz dos coeficientes do novo sistema e calcule o valor absoluto do determinante dessa matriz. O resultado é o determinante do nó.

Os exemplos abaixo ilustram, passo a passo, os procedimentos para o referido cálculo.

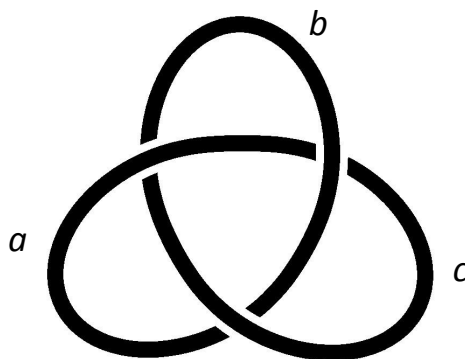


Figura 74 – Diagrama do nó trevo com variáveis nos arcos.



Primeiramente devemos associar os arcos a letras conforme a figura (74). Em seguida montemos um sistema de equações com as incógnitas associadas da forma abaixo.

$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ a + c - 2b = 0 \\ b + c - 2a = 0 \end{cases}$$

Fazendo  $c = 0$  temos:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \\ b - 2a = 0 \end{cases}$$

Eliminando uma das equações, resta apenas um sistema de duas equações (neste caso).

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

Por fim, devemos calcular o determinante da matriz associada aos coeficientes do sistema, isto é,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -3.$$

O determinante do nó é o módulo do determinante da matriz dos coeficientes, isto é,  $D = |-3| = 3$ .

Mostramos com isso que o determinante do nó trevo é igual a 3. Vejamos agora como calcular o determinante do nó oito.

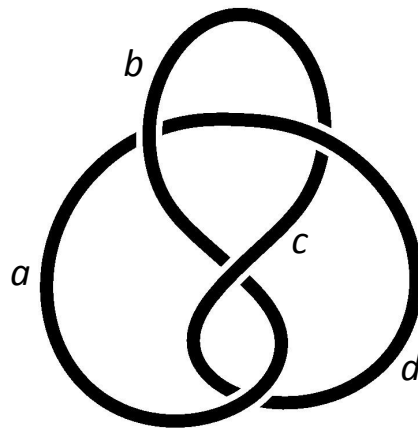


Figura 75 – Diagrama do nó oito com variáveis nos arcos.

Escrevamos o sistema de equações da forma

$$\begin{cases} a + d - 2b = 0 \\ b + c - 2d = 0 \\ c + d - 2a = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Fazendo  $d = 0$  temos:

$$\begin{cases} a - 2b & = 0 \\ b + c & = 0 \\ c - 2a & = 0 \\ a + b - 2c & = 0 \end{cases}$$

Eliminando a quarta equação e rearranjando o sistema:

$$\begin{cases} a - 2b & = 0 \\ b + c & = 0 \\ -2a + c & = 0 \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes é dado por:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5$$

Dessa forma o determinante do nó oito é  $D = |5| = 5$ .

Não é difícil perceber que, à medida que o nó é mais complexo, o número de arcos (variáveis) será maior, logo o determinante será mais difícil de ser calculado. O determinante de um nó é um invariante relativamente simples, obtido de um invariante mais poderoso, denominado polinômio de Alexander.

### 3.3 Polinômio de Alexander

O polinômio de Alexander é um invariante capaz de ser associado a um nó de forma que, caso o nó seja transformado em outro por equivalência, ambos possuam o mesmo polinômio associado. No entanto, sua eficácia não é completa, isto é, podem existir dois nós não equivalentes associados a um mesmo polinômio. Outras limitações do polinômio de Alexander são associadas ao fato dele não poder distinguir um nó de sua imagem no espelho, nem de seu inverso. Assim como o determinante de um nó, o cálculo do polinômio de Alexander é efetuado através do determinante de uma matriz associada a um diagrama de nó, através dos cruzamentos e arcos do diagrama devidamente identificados. A figura abaixo ilustra a identificação dos arcos de um diagrama e sua equação associada.

Abaixo está descrito um procedimento simples para o cálculo do polinômio de Alexander.

- Primeiramente devemos escolher um diagrama orientado do nó e identificar os arcos por letras minúsculas.

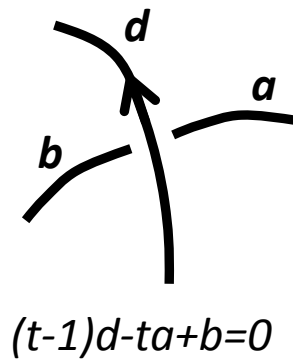


Figura 76 – Cruzamento associado a uma equação, com arcos identificados

- Em seguida devemos escrever uma equação para cada cruzamento conforme o modelo na figura (76). Note que as equações serão escritas conforme a linha que passa por cima, à direita e à esquerda do cruzamento respectivamente.
- Após a montagem do sistema de equações, fazemos uma das variáveis igual a zero e, em seguida, descartamos uma das equações do sistema.
- Devemos calcular o determinante  $\delta(t)$  desse novo sistema.
- Por fim, devemos multiplicar o determinante  $\delta(t)$  por  $\pm t^m$ , de modo a obter  $\Delta(t)$ , tal que  $\Delta(t) = \Delta t^{-1}$  e  $\Delta(1) = 1$ .

Consideremos um diagrama do nó trevo na figura (77) e façamos o cálculo do polinômio de Alexander associado.

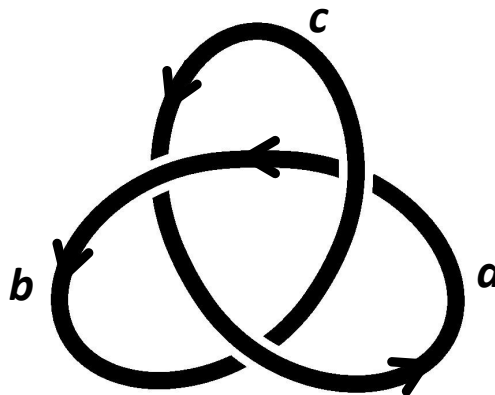


Figura 77 – Diagrama do nó trevo:  $D_T$

Conforme as instruções, devemos escrever para cada cruzamento uma equação, de acordo com modelo dado na figura (76). Em seguida devemos escrever um sistema de

equações. Para o diagrama (77) temos:

$$\begin{cases} (t-1)b - tc + a = 0 \\ (t-1)c - ta + b = 0 \\ (t-1)a - tb + c = 0 \end{cases}$$

Fazendo  $a = 0$  e eliminando a terceira equação temos o novo sistema:

$$\begin{cases} (t-1)b - tc = 0 \\ b + (t-1)c = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é

$$\begin{bmatrix} (t-1) & -t \\ 1 & (t-1) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\delta(t) = \det \begin{bmatrix} (t-1) & -t \\ 1 & (t-1) \end{bmatrix} = t^2 - t + 1.$$

Finalmente, devemos encontrar  $\Delta_{D_T}(t)$  tal que  $\Delta_{D_T}(t) = \Delta_{D_T}(t^{-1})$  e  $\Delta_{D_T}(1) = 1$ . Multiplicando  $\delta(t)$  por  $t^{-1}$  obtemos:

$$\Delta_{D_T}(t) = t^{-1}\delta(t) = t^{-1}[t^2 - t + 1] = t - 1 + t^{-1}.$$

Consideremos agora, um diagrama do nó trevo com 4 cruzamentos, obviamente, diferente do diagrama da figura (77). Vejamos o que ocorre com seu polinômio de Alexander.

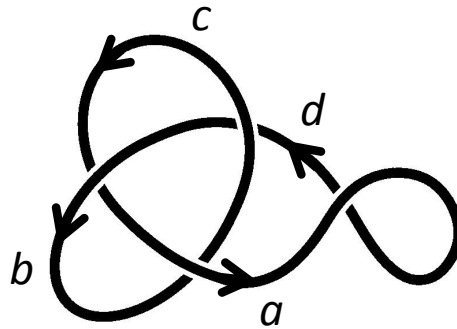


Figura 78 – Diagrama do nó trevo com 4 cruzamentos.

As equações associadas são:

$$\begin{cases} (t-1)c - td + b = 0 \\ (t-1)b - tc + a = 0 \\ (t-1)a - tb + c = 0 \\ (t-1)a - ta + d = 0 \end{cases}$$

Fazendo  $a = 0$  e descartando a quarta equação temos:

$$\begin{cases} b + (t-1)c - td = 0 \\ (t-1)b - tc = 0 \\ -tb + c = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é

$$\begin{bmatrix} 1 & (t-1) & -t \\ (t-1) & -t & 0 \\ -t & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\delta_1(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & (t-1) & -t \\ (t-1) & -t & 0 \\ -t & 1 & 0 \end{bmatrix} = t^3 - t^2 + t = t[t^2 - t + 1] = +t^1[t^2 - t + 1].$$

Note que este resultado é múltiplo daquele encontrado para o diagrama da figura (77). Para encontrarmos o polinômio de Alexander  $\Delta_1(t)$  tal que  $\Delta_1(t) = \Delta_1(t^{-1})$  e  $\Delta_1(1) = 1$  basta multiplicar o  $\delta_1(t)$  por  $t^{-2}$ :

$$\Delta_1(t) = t^{-2}\delta_1(t) = t^{-2}[t^3 - t^2 + t] = t - 1 + t^{-1} = \Delta_{D_T}(t).$$

Mesmo sem utilizar diagramas distintos, o resultado de  $\delta_1(t)$  depende da escolha da variável para igualar a 0 e da equação descartada. Os exemplos supracitados dos diagramas (77) e (78) do nó trevo são casos particulares do

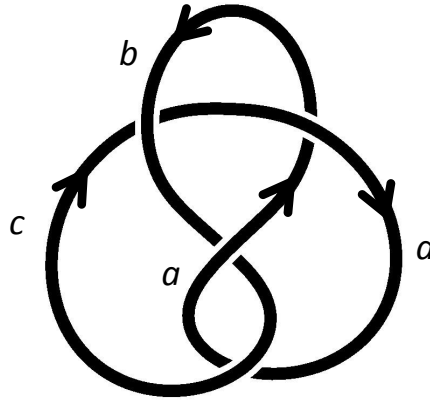
**Teorema 3.3.1** *Se o polinômio de Alexander de um nó é computado utilizando dois conjuntos distintos de diagramas, os dois polinômios diferenciam-se através de múltiplos de  $\pm t^k$ , para algum inteiro  $k$ , [1].*

Este teorema caracteriza uma fraqueza do polinômio de Alexander como invariante: ele não distingue um nó de sua imagem no espelho ou de seu inverso. De fato, seja  $D_K$  o diagrama de um nó (ou enlace) orientado. Então, a imagem refletida  $\bar{K}$  e o inverso  $-K$  possuem o mesmo polinômio de Alexander de  $K$  a menos de um fator multiplicativo. Essa afirmação não é difícil de ser verificada para nós mais simples como o trevo e o nó oito.

Calculemos agora o polinômio de Alexander do nó figura 8. Considere a figura (79).

Conforme as instruções, devemos escrever para cada cruzamento uma equação, de acordo com modelo dado na figura (76). Em seguida devemos escrever um sistema de equações.

$$\begin{cases} (t-1)a - tc + b = 0 \\ (t-1)c - ta + d = 0 \\ (t-1)d - ta + b = 0 \\ (t-1)b - tc + d = 0 \end{cases}$$

Figura 79 – Diagrama do nó oito:  $D_E$ 

Fazendo  $a = 0$  e eliminando a quarta equação temos o novo sistema:

$$\begin{cases} b - tc & = 0 \\ (t-1)c + d & = 0 \\ b + (t-1)d & = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & (t-1) & 1 \\ 1 & 0 & (t-1) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\delta(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & (t-1) & 1 \\ 1 & 0 & (t-1) \end{bmatrix} = t^2 - 3t + 1$$

Finalmente, devemos encontrar  $\Delta_{D_E}(t)$  tal que  $\Delta_{D_E}(t) = \Delta_{D_E}(t^{-1})$  e  $\Delta_{D_E}(1) = 1$ . Multiplicando  $\delta(t)$  por  $t^{-1}$  obtemos:

$$\Delta_{D_E}(t) = t^{-1}\delta(t) = t^{-1}[t^2 - 3t + 1] = t - 3 + t^{-1}.$$

Para o caso em que o nó é trivial convencionou-se que o polinômio de Alexander é igual a 1.

O teorema abaixo explicita as propriedades do polinômio de Alexander.

**Teorema 3.3.2** *Seja  $K$  um nó orientado e  $\Delta_K(t)$  o seu polinômio de Alexander associado. Então,  $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$  e  $\Delta_K(1) = \pm 1$ .*

Este teorema já foi utilizado anteriormente sob forma de exemplos no cálculo do polinômio de Alexander. Ele estabelece a condição final para que o polinômio  $\Delta_K(t)$  seja o polinômio de Alexander do nó dado. Como consequência deste teorema temos o

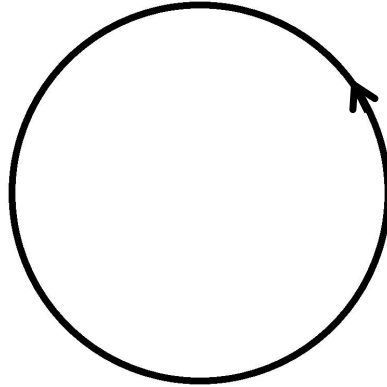


Figura 80 – Diagrama do nó trivial:  $\Delta_{Trivial}(t) = 1$ .

**Corolário 3.3.3** *Para qualquer nó  $K$*

$$\Delta_K(t) = a_0 + a_1(t^{-1} + t) + a_2(t^{-2} + t^2) + \dots$$

onde  $a_i$  são inteiros e  $a_0$  é ímpar.

As respectivas provas deste teorema e corolário podem ser encontradas no capítulo 6, página 58 de [2]. No anexo (1) apresentamos uma tabela de valores para os coeficientes  $a_i$ , quando o polinômio de Alexander é escrito no formato citado no corolário (3.3.3).

De uma forma geral, o polinômio de Alexander, assim como outros invariantes conhecidos, não é completo. Já sabemos que, para todo nó trivial, o polinômio de Alexander associado é  $\Delta_{Trivial}(t) = 1$ . No entanto, existe pelo menos um nó com polinômio de Alexander  $\Delta_{D_k}(t) = 1$ , que não é equivalente ao nó trivial. Veja a figura abaixo.

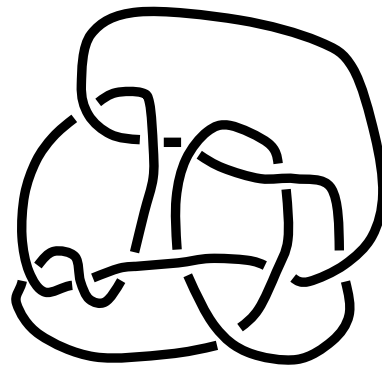


Figura 81 – Diagrama do nó  $K$  com 11 cruzamentos e  $\Delta_{D_K}(t) = 1$ , [1].

Neste caso, o polinômio de Alexander falha na determinação da equivalência dos nós, pois afirma que o nó da figura (81) e o nó trivial são equivalentes quando não são. No anexo (2) apresentamos uma tabela de polinômios de Alexander (não apenas coeficientes como na tabela (1)) para diversos nós. Uma tabela mais completa é apresentada em [1].

Não podemos deixar de citar aqui que existem invariantes mais eficientes e complexos que o polinômio de Alexander, a saber, o polinômio de Conway, o polinômio de Jones, polinômio de Homfly, polinômio de Kauffman e o grupo fundamental. No entanto, a sua eficácia é cobrada na complexidade de sua implementação, logo, dado o caráter introdutório deste trabalho, optamos por não apresentá-los aqui. O leitor poderá encontrar maiores informações sobre esses invariantes em [6], [2], [1] e [8].



## Parte IV

Algumas atividades aplicadas ao ensino básico



## 4 Teoria dos nós e o Ensino Fundamental e Médio

Por que estudar teoria dos nós no ensino básico? Essa talvez seja a questão mais pertinente no desenvolvimento deste trabalho. Analisando o currículo da matemática das escolas básicas no Brasil, percebemos que se concentra em aritmética, álgebra, e geometria. Em particular, no currículo de geometria, notamos que o tratamento dado ao manuseio das formas geométricas é bastante limitado, e as aulas concentradas em demonstrações e exercícios de cálculo. Parte disso se justifica na correria dos programas do próprio currículo escolar, que não reservam tempo para uma aprendizagem mais livre e autônoma. Sobre a pergunta inicial, podemos afirmar que a teoria dos nós carrega consigo uma enorme capacidade de tratar formas geométricas no campo prático do estudo, pois a compreensão da teoria depende também da construção de modelos físicos. Dessa forma, os nós matemáticos possuem o poder para otimizar a ligação entre teoria e prática nas aulas, fato suficiente para justificar o estudo.

Ao ter contato com a teoria dos nós percebe-se de imediato que não se trata de um tema trivial. Essa sensação começa desde o momento em que definimos um nó e aumenta na medida em que o texto se desenvolve na direção da topologia algébrica e combinatória. Porém, também percebemos neste estudo, a presença fundamental de alguns conceitos como a álgebra linear das matrizes e as manipulações geométricas, que podem ser associadas à Geometria Euclidiana. Compreendendo cada nível de conhecimento matemático como um degrau para o conhecimento num nível superior, acreditamos, com este trabalho, ser possível aproximar o ambiente universitário do ambiente da escola básica. Em [11], encontramos uma pesquisa realizada em escolas básicas sobre o ensino da teoria dos nós, cujos resultados são promissores.

### 4.1 A manipulação dos nós

Uma das grandes vantagens de estudar os nós reside no fato de que podemos construir modelos físicos. Obviamente, essa tarefa vai se tornando muito difícil à medida que o nó possui um número maior de cruzamentos, mas essa preocupação pode ser contornada, uma vez que construir todos os nós conhecidos não é o objetivo principal do estudo a nível de ensino médio. Aliás, esse é um dos grandes problemas em aberto na teoria dos nós: a enumeração e classificação. É suficiente construir alguns nós com uma quantidade pequena de cruzamentos para uma manipulação leve e acessível ao estudante do ensino básico. Poderíamos começar desenhando os diagramas abaixo.

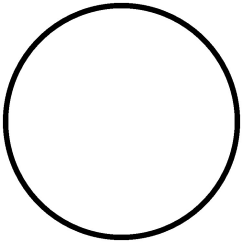


Figura 82 – Nó  
0.1.

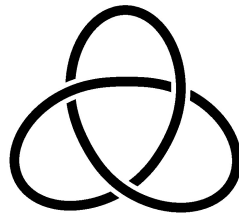


Figura 83 – Nó  
3.1.

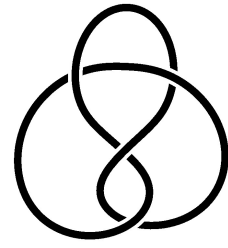


Figura 84 – Nó  
4.1.

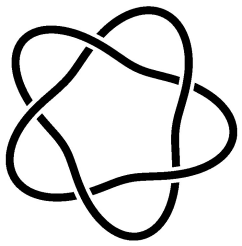


Figura 85 – Nó  
5.1.

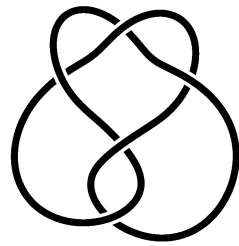


Figura 86 – Nó  
5.2.

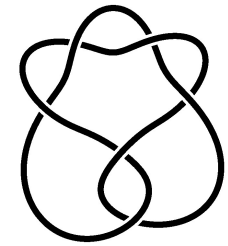
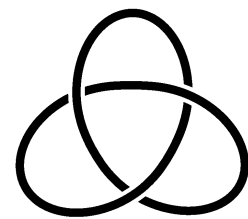
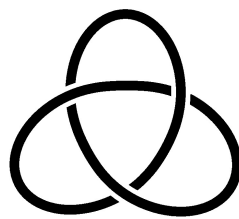
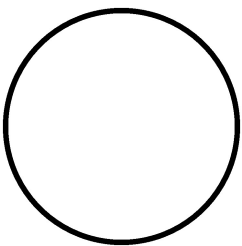


Figura 87 – Nó  
6.1.

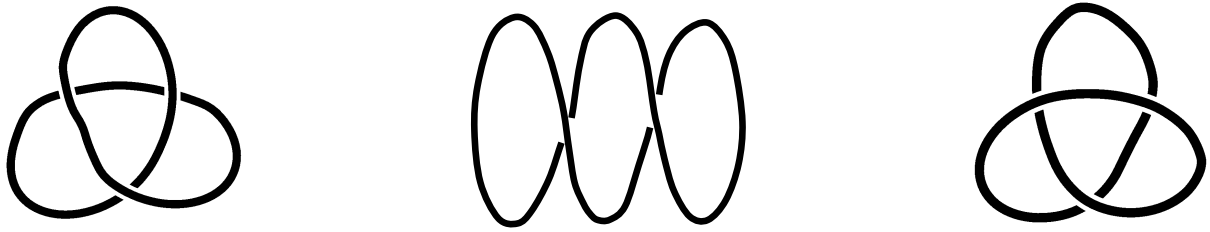
É extremamente importante desenvolver uma planilha de acompanhamento, onde devem ser anotadas as informações sobre o desenvolvimento de cada aluno em relação às tarefas apresentadas. Se o professor achar conveniente pode estabelecer divisões em grupos de no máximo três componentes para facilitar a interação. Abaixo mais algumas sugestões de atividades aplicadas ao ensino básico.

Para o Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano:

- 1ª aula: Podemos começar desenhando o nó trivial e alguns nós de três cruzamentos, podendo ser, por exemplo, o trevo e sua imagem espelhada e o próprio trivial com dois ou três cruzamentos. O objetivo é observar a diferença entre eles e a equivalência com o trivial.



- 2ª aula: após identificar os nós não equivalentes ao trivial, pensar em possíveis formas de torná-lo trivial alterando cruzamentos. A idéia dessa tarefa é inserir o conceito



de número de desatamento.

- 3<sup>a</sup> aula: tratar dos nós e suas imagens de espelho. Podemos começar com o movimento de Reidemeister  $R_1$ , nó trevo, nó oito e os nós de cinco cruzamentos e suas respectivas imagens. O objetivo dessa aula é realizar movimentos e deformações para verificar se um nó é equivalente à sua imagem de espelho.
- 4<sup>a</sup> aula: a tarefa é construir modelos físicos dos diagramas através de barbantes. O objetivo dessa tarefa é a manipulação dos nós em três dimensões.
- 5<sup>a</sup> aula: utilizar os modelos construídos para aplicar movimentos e deformações e construir nós equivalentes. Diagramar os resultados.
- 6<sup>a</sup> aula: expandir o conceito de nó para enlace.

Ao final dessas atividades, os alunos deverão ser capazes de compreender um nó trivial como um nó que pode ser desatado e um nó não-trivial como um nó que não pode ser desatado. Devemos observar também se são capazes de concluir que um nó não-trivial não pode possuir 1 ou 2 cruzamentos apenas.

Para o Ensino Médio:

- 1<sup>a</sup> aula: desenhar os diagramas dos nós trivial (0.1), trevo (3.1), nó oito (4.1), nó (5.1), nó (5.2) e (6.1). De acordo com o desempenho da turma, a atividade poderá ser estendida com mais alguns diagramas.
- 2<sup>a</sup> aula: a tarefa pode ser voltada para a construção de modelos físicos dos diagramas através de barbantes ou arames dobráveis. O objetivo dessa tarefa é a manipulação dos nós em três dimensões.
- 3<sup>a</sup> aula: nesta aula devemos associar as manipulações físicas dos modelos e os diagramas, isto é, aplicar uma certa deformação e desenhar o diagrama do nó obtido. O objetivo dessa tarefa permitir ao aluno uma melhor visualização da conexão entre o modelo físico e o diagrama, principalmente na relação entre os cruzamentos.

- 4ª aula: apresentar os movimentos de Reidemeister e aplicá-los sobre os diagramas construídos na aula anterior. Utilizar esses movimentos para realizar algumas equivalências entre nós. Tentar construir a imagem de espelho de um nó.
- 5ª aula: Realizar apresentações com auxílio do Knotplot. Apresentar equivalências e imagens de espelho. Apresentar o conceito de quiralidade.
- 6ª aula: expandir o conceito de nó para enlace.

Como dito acima, estas são apenas algumas sugestões para aulas de teoria dos nós. O objetivo inicial é a apresentação do tema e o tratamento das informações de forma mais natural possível. Esse objetivo pode ser alcançado, pois o tema permite um bom número de possibilidades para elaboração de aulas. Além disso, uma das vantagens de estudar a teoria dos nós no Ensino Fundamental e Médio é a manipulação física dos objetos matemáticos que, sem dúvida, é uma boa oportunidade de conectar teoria e prática na matemática básica.

## 4.2 Os invariantes

Dando continuidade à nossa tarefa de apresentar tópicos de teoria dos nós no ensino básico, trataremos agora de alguns invariantes possíveis de estudar nesta etapa de ensino. Um invariante pode ser pensado como uma propriedade que é comum a alguns nós e a outros não, de forma que, se dois nós são equivalentes possuem um mesmo invariante. Note que a recíproca não é verdadeira, isto é, a igualdade dos invariantes de dois nós, nem sempre garante que eles sejam equivalentes. Por outro lado se dois nós possuem invariantes (do mesmo tipo) distintos, então não são equivalentes.

### 4.2.1 Tópicos de Tricolorabilidade

A tricolorabilidade é um invariante que pode ser apresentado ao ensino fundamental e médio, já que não apresenta pré-requisitos complexos. Recordemos aqui o conceito de tricolorabilidade.

**Definição 4.2.1** *Um diagrama de nó é tricolorizável se:*

1. cada arco possua uma cor;
2. utiliza no mínimo duas e no máximo três cores;
3. para cada cruzamento, ou todos os arcos tem a mesma cor ou num cruzamento os arcos possuem três cores.

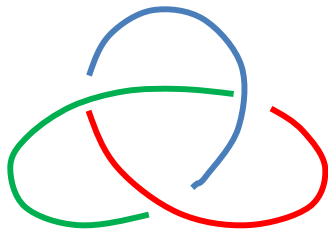


Figura 88

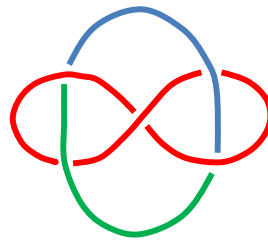


Figura 89

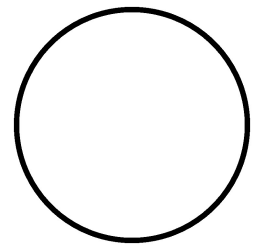


Figura 90

A figura (88) é tricolor, enquanto as figuras (89) e (90) não são tricolores.

Sugestão de atividades:

- 1ª aula: apresentar algumas figuras pintadas e verificar se são tricolores. O objetivo dessa aula é fazer o aluno compreender que a tricolorabilidade não é simplesmente pintar a um diagrama com três cores. É necessário compreender também as relações entre cruzamentos.
- 2ª aula: apresentar alguns diagramas e solicitar que os alunos efetuem a tricoloração, separando os diagramas onde é possível e impossível fazê-la.
- 3ª aula: verificar, realizando algumas deformações, que os diagramas tricolores não são equivalentes ao nó trivial.

Essas atividades podem ser aplicadas ao ensino Fundamental e Médio. Caso o professor queira, pode estender ao Ensino Médio, a tricolorabilidade para alguns enlaces simples. A idéia geral aqui apresentada, é permitir que o aluno compreenda o significado matemático de um invariante e enxergue a tricolorabilidade dentro deste conceito ao concluir que nós tricolores não podem ser triviais.

### 4.2.2 Número de Cruzamentos

O número de cruzamentos também é um invariante que pode ser tratado no ensino fundamental. Sabemos que nem sempre é tarefa fácil determinar o diagrama mínimo de um nó. Sabemos também, da definição, que o número de cruzamentos deve ser mínimo para ser invariante. Dessa forma, as tarefas associadas ao número de cruzamentos podem ser focadas na apresentação de diagramas simples, mínimos e não mínimos. Os alunos devem identificá-los e diferenciá-los, para otimizar a contagem dos cruzamentos. Observemos os diagramas abaixo e façamos a contagem do número de cruzamentos.

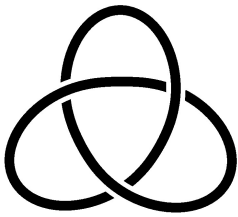


Figura 91

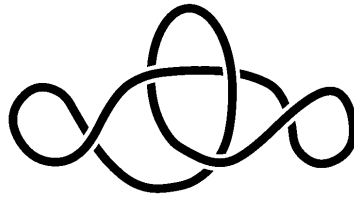


Figura 92

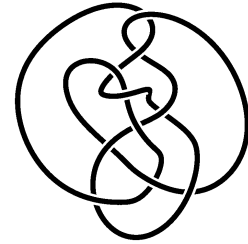


Figura 93

O diagrama (93) é o minimal referente ao nó 10.117 e possui 10 cruzamentos. Note que não é uma tarefa simples verificar se este é o menor número de cruzamentos, portanto devemos evitar este tipo de exemplo para não comprometer a aprendizagem. Por outro lado, as figuras (91) e (92) são diagramas distintos do trevo que apresentam respectivamente, 3 e 5 cruzamentos. Logo, o número de cruzamentos do trevo é igual a 3, pois refere-se a seu diagrama minimal. Estes são exemplos acessíveis para tratamento em sala. Uma sugestão de atividade é a comparação de diversos diagramas com o nó trivial. A tarefa deve permitir que os alunos compreendam o número de cruzamentos como invariante.

### 4.2.3 Número de Desatamento

Conforme definido no capítulo 3, o número de desatamento de um nó  $K$  é a menor quantidade possível de alterações na ordem dos cruzamentos que possam transformar esse nó  $K$  no nó trivial. É importante salientar que o número de desatamento de um nó, não é necessariamente, o número de desatamento de seu diagrama minimal. Também não é fácil determinar esse número, logo, qualquer atividade deve ser conduzida com cautela. Novamente, recomenda-se utilizar exemplos de nós mais simples para que os alunos consigam manipular com naturalidade.

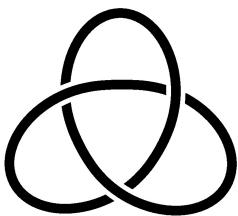


Figura 94

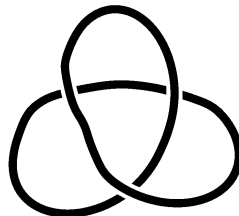
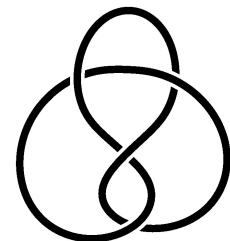


Figura 95

Figura 96 –  $\mu = ?$ 

O nó da figura (95) é o desatado do nó da figura (94). É importante, neste caso utilizar modelos físicos além dos diagramas. Dessa forma a turma poderá compreender melhor a limitação dos nós não equivalentes ao nó trivial. Além disso, fica claro ao manipular um modelo físico não trivial, que o nó precisa ser rompido para alterar a ordem de



um dado cruzamento e que após esse procedimento, obtém-se um outro nó. Compreender este invariante significa dizer que, se dois nós são equivalentes, possuem o mesmo número de desatamento. É necessário comentar que a eficácia da maioria dos invariantes é incompleta, sendo que alguns são mais poderosos que outros. Além disso, assim como outros invariantes numéricos, a igualdade do número de desatamento não garante que dois nós sejam equivalentes. O nó oito, por exemplo, possui número de desatamento  $\mu(4.1) = 1$  assim como o nó trevo  $\mu(3.1) = 1$ , e não são equivalentes. Porém se dois diagramas, apresentam números de desatamento distintos, então estes nós não são equivalentes. Como exemplo, o nó trivial tem número de desatamento  $\mu(0.1) = 0$ , logo podemos garantir, por distinção, que o nó trevo e o nó oito não são equivalentes ao nó trivial. Uma sugestão de tarefa: montar diagramas ou modelos físicos e organizar um jogo de desatamento. Escolhe-se diagramas de nós e ganha o aluno que os desatar primeiro.

#### 4.2.4 O determinante de um nó

Como já sabemos, o determinante de um nó é um invariante calculado através do determinante de uma matriz, devidamente construída a partir de equações dos arcos e cruzamentos do nó. Este tipo de invariante só pode ser estudado no Ensino Médio, após a devida apresentação dos conteúdos matrizes, determinantes, e sistemas lineares e, obviamente, aparece como um estudo aplicado desses conteúdos. Vejamos um exemplo de como calcular o determinante de um nó.

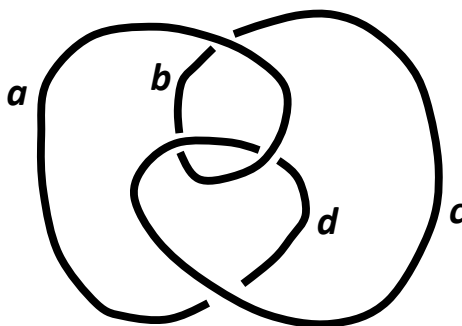


Figura 97 – Nó com 4 cruzamentos.

Tomando a figura acima podemos escrever o seguinte sistema de equações associadas aos arcos e cruzamentos:

$$\begin{cases} b + c - 2a = 0 \\ a + b - 2c = 0 \\ c + d - 2a = 0 \\ a + d - 2c = 0 \end{cases}$$

Fazendo  $a = 0$  e eliminando a quarta equação, temos:

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes é, então:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -3,$$

e o determinante do nó é  $\det(K) = |-3| = 3$ .

As tarefas relacionadas ao determinante de um nó são, essencialmente, a construção de sistemas lineares e matrizes e o cálculo do determinante de uma matriz. É recomendável escolher nós com quantidade pequena de cruzamentos, para não tornar a tarefa demasiadamente intrincada. Para mais detalhes sobre os procedimentos do cálculo do determinante de um nó, recomendamos a leitura da seção (3.2) do capítulo 3.

#### 4.2.5 O polinômio de Alexander

Assim como o determinante do nó, o polinômio de Alexander é um invariante para o Ensino Médio. É necessário que o aluno detenha os conceitos de matrizes, determinantes, sistemas lineares e polinômios, antes de calcular o polinômio de Alexander de um nó. Por ser um invariante mais poderoso que o determinante do nó, o seu cálculo é mais sutil, de modo que devemos considerar um diagrama orientado e associar arcos e cruzamentos a equações da forma  $(t-1)d - ta + b = 0$  conforme a figura (98) abaixo.

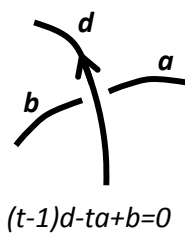


Figura 98 – Equação dos arcos e cruzamentos.

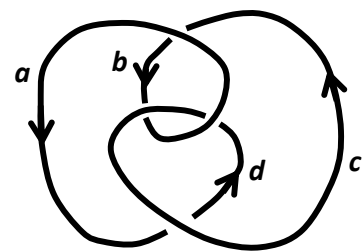


Figura 99 – Diagrama de orientado de 4 cruzamentos.

Calculemos o polinômio de Alexander do nó da figura (99). Primeiramente escrevamos um sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} (t-1)a - tc + b = 0 \\ (t-1)a - td + c = 0 \\ (t-1)c - tb + a = 0 \\ (t-1)c - ta + d = 0 \end{cases}$$

Fazendo  $a = 0$  e eliminando a quarta equação do sistema:

$$\begin{cases} b - tc = 0 \\ c - td = 0 \\ -tb + (t-1)c = 0 \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes é:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ -t & (t-1) & 0 \end{bmatrix} = -t^3 + t^2 - t = -t^1(t^2 - t + 1).$$

O resultado acima é o polinômio de Alexander do nó em questão. Note ainda que este determinante é múltiplo do polinômio de Alexander do nó trevo, pois, na verdade, o diagrama (99) é equivalente ao nó trevo.

A finalidade de apresentar este invariante é, além de distinguir os nós, exemplificar aplicações do estudo de polinômios, haja vista que é um conteúdo tratado de maneira bastante teórica no Ensino Médio, e que sempre gera discussões acerca de sua aplicabilidade. Os trabalhos em sala de aula, sobre polinômio de Alexander, podem e devem ser conduzidos através de comparações com o nó trivial e nós simples como trevo e oito. Assim como o determinante, o cálculo deste invariante pode se tornar imenso, se utilizarmos nós com muitos arcos e cruzamentos, logo recomenda-se cautela na escolha dos nós para exemplificação. Para maiores informações o leitor pode ler a seção (3.3) do capítulo 3.

Evidentemente, existem outros invariantes muito mais poderosos que o polinômio de Alexander, dos quais podemos citar o polinômio de Conway, o polinômio de Jones, polinômio de Homfly, polinômio de Kauffman e o grupo fundamental. No entanto, por conta de sua maior eficácia, seu grau de complexidade supera e muito as fronteiras do Ensino Médio, de forma que optamos por não apresentá-los neste trabalho, dado o seu caráter introdutório e aplicado ao ensino básico.

### 4.3 O software Knotplot

O knotplot é um excelente software de teoria dos nós com dezenas de funcionalidades, capaz de visualizar e interagir com nós em 3 e 4 dimensões. Começou como um projeto de curso há vários anos, sob a orientação de Kellogg Booth e Dale Rolfsen e desde então, o programa recebeu muitos recursos dos quais destacamos:

- Animações;
- Apresentação de tabelas com nós e enlaces;
- Manipulação e edição de nós e enlaces, com deformações, rotações, etc;

- Exportação de figuras de nós e geração de diagramas;
- Muitíssimas animações, com 3 e 4 dimensões.

Trata-se, em resumo, de uma das ferramentas computacionais mais poderosas, em teoria dos nós, da atualidade. Seu potencial científico e educacional é enorme e, certamente, diferencial para este trabalho. O Knotplot pode ser obtido no endereço [www.knotplot.com](http://www.knotplot.com) e sua licença custa poucas dezenas de dólares.

## Conclusão

Em virtude de tudo que foi aqui mencionado, compreendemos a importância da teoria dos nós como primordial na topologia contemporânea. É fato que não trata-se de um tema trivial, e que ainda existem muitas questões em aberto neste estudo, como por exemplo, a eficácia dos invariantes e a própria enumeração dos nós e enlaces. No entanto, é inegável, que a teoria possui um enorme potencial científico e educacional, e acreditamos ser possível acessá-la desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Esta ação de trazer para o ensino básico, conteúdos de competência universitária, neste caso da Topologia, visa provocar a discussão acerca do currículo de matemática nas escolas primárias. Indubitavelmente, um currículo adequado desde o ensino básico, fará diferença no grau de qualificação dos futuros alunos universitários, pois impacta diretamente na aprendizagem. Contudo, é necessário debater sobre este currículo, na expectativa de adequá-lo aos novos desafios dos tempos atuais, de propor novos caminhos que permitam a aproximação entre universidade e ensino básico. Nesta perspectiva acreditamos que este modesto estudo obteve seu êxito e acrescenta sua contribuição, no momento em que propõe atividades compatíveis com o nível fundamental e médio.



## Referências

- [1] LIVINGSTON, C. *Knot Theory*. Washington: The Mathematical Association of America, 1993. Citado 6 vezes nas páginas 21, 42, 57, 73, 75 e 76.
- [2] LICKORISH, W. B. R. *An Introduction to Knot Theory*. New York: Springer, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 23, 75, 76 e 94.
- [3] MONTENEGRO, E. Nó da matemática: em um simples laço podem se esconder os segredos da matéria. *Superinteressante*, n. 204, p. 78, set 2004. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 31.
- [4] KELLER, M. T. *Knot Theory: History and Applications with a Connection to Graph Theory*. Fargo, North Dakota, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 31, 34, 35 e 36.
- [5] COELHO, P. J. F. de O. *Templates e Elos de Órbitas Periódicas em Fluxos de Dimensão 3*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE DE LISBOA, Lisboa, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 41, 43 e 45.
- [6] DIAS, S. M. M. *Introdução à Teoria de Nós*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Minho, Dezembro 2004. Citado 3 vezes nas páginas 41, 44 e 76.
- [7] FRAN, H. A. *Generalised Knot Groups of Connect Sums Of Torus Knots*. Dissertação (Mestrado) — Massey University, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 49.
- [8] KAWAUCHI, A. *A survey of knot theory*. Basel: Birkhauser, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 76.
- [9] PORTELA, R. R. B. *Nós Legendreanos em  $\mathbb{R}^3$  e o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de duas pontes*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, junho 2007. Citado na página 56.
- [10] SCHARLEMANN, M. G. Unknotting number one knots are primes. *Invent Math*, n. 1, p. 37–55, 1985. Citado na página 67.
- [11] KAWAUCHI, A.; YANAGIMOTO, T. *Teaching and Learning of Knot Theory in School Mathematics*. Osaka, Japan: Springer, 2012. ISBN 978-4-431-54138-7. Citado na página 79.





# Anexos

Tabela 1				
Nó	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
3 <sub>1</sub>	-1	1		
4 <sub>1</sub>	3	-1		
5 <sub>1</sub>	1	-1	1	
5 <sub>2</sub>	-3	2		
6 <sub>1</sub>	5	-2		
6 <sub>2</sub>	-3	3	-1	
6 <sub>3</sub>	5	-3	1	
7 <sub>1</sub>	-1	1	-1	1
7 <sub>2</sub>	-5	3		
7 <sub>3</sub>	3	-3	2	
7 <sub>4</sub>	-7	4		
7 <sub>5</sub>	5	-4	2	
7 <sub>6</sub>	-7	5	-1	
7 <sub>7</sub>	9	-5	1	
8 <sub>1</sub>	7	-3		
8 <sub>2</sub>	3	-3	3	-1
8 <sub>3</sub>	9	-4		
8 <sub>4</sub>	-5	5	-2	
8 <sub>5</sub>	5	-4	3	-1
8 <sub>6</sub>	-7	6	-2	
8 <sub>7</sub>	-5	5	-3	1
8 <sub>8</sub>	9	-6	2	
8 <sub>9</sub>	7	-5	3	-1
8 <sub>10</sub>	-7	6	-3	1
8 <sub>11</sub>	-9	7	-2	
8 <sub>12</sub>	13	-7	1	
8 <sub>13</sub>	11	-7	2	
8 <sub>14</sub>	-11	8	-2	
8 <sub>15</sub>	11	-8	3	
8 <sub>16</sub>	-9	8	-4	1
8 <sub>17</sub>	11	-8	4	-1
8 <sub>18</sub>	13	-10	5	-1
8 <sub>19</sub>	1	0	-1	1
8 <sub>20</sub>	3	-2	1	
8 <sub>21</sub>	-5	4	-1	

Tabela 1 – Tabela de coeficientes para o polinômio de Alexander [2].

Tabela 2	
Nó	Polinômio de Alexander
3 <sub>1</sub>	$t^2 - t - 1$
4 <sub>1</sub>	$t^2 - 3t + 1$
5 <sub>1</sub>	$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$
5 <sub>2</sub>	$2t^2 - 3t + 2$
6 <sub>1</sub>	$2t^2 - 5t + 2$
6 <sub>2</sub>	$t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1$
6 <sub>3</sub>	$t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1$
7 <sub>1</sub>	$t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$
7 <sub>2</sub>	$3t^2 - 5t + 3$
7 <sub>3</sub>	$2t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 2$
7 <sub>4</sub>	$4t^2 - 7t + 4$
7 <sub>5</sub>	$2t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 2$
7 <sub>6</sub>	$t^4 - 5t^3 + 7t^2 - 5t + 1$
7 <sub>7</sub>	$t^4 - 5t^3 + 9t^2 - 5t + 1$
8 <sub>1</sub>	$3t^2 - 7t + 3$
8 <sub>2</sub>	$t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1$
8 <sub>3</sub>	$4t^2 - 9t + 4$
8 <sub>4</sub>	$2t^4 - 5t^3 + 5t^2 - 5t + 2$
8 <sub>5</sub>	$t^6 - 3t^5 + 4t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 3t + 1$
8 <sub>6</sub>	$2t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 6t + 2$
8 <sub>7</sub>	$t^6 - 3t^5 + 5t^4 - 5t^3 + 5t^2 - 3t + 1$
8 <sub>8</sub>	$2t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 6t + 2$
8 <sub>9</sub>	$t^6 - 3t^5 + 5t^4 - 7t^3 + 5t^2 - 3t + 1$
8 <sub>10</sub>	$t^6 - 3t^5 + 6t^4 - 7t^3 + 6t^2 - 3t + 1$
8 <sub>11</sub>	$2t^4 - 7t^3 + 9t^2 - 7t + 2$
8 <sub>12</sub>	$t^4 - 7t^3 + 13t^2 - 7t + 1$
8 <sub>13</sub>	$2t^4 - 7t^3 + 11t^2 - 7t + 2$
8 <sub>14</sub>	$2t^4 - 8t^3 + 11t^2 - 8t + 2$
8 <sub>15</sub>	$3t^4 - 8t^3 + 11t^2 - 8t + 3$
8 <sub>16</sub>	$t^6 - 4t^5 + 8t^4 - 9t^3 + 8t^2 - 4t + 1$
8 <sub>17</sub>	$t^6 - 4t^5 + 8t^4 - 11t^3 + 8t^2 - 4t + 1$
8 <sub>18</sub>	$t^6 - 5t^5 + 10t^4 - 13t^3 + 10t^2 - 5t + 1$
8 <sub>19</sub>	$t^6 - t^5 + t^3 - t + 1$
8 <sub>20</sub>	$t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$
8 <sub>21</sub>	$t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1$

Tabela 2 – Tabela de polinômios de Alexander



Figura 100 – Tabela de nós obtida com Knotplot

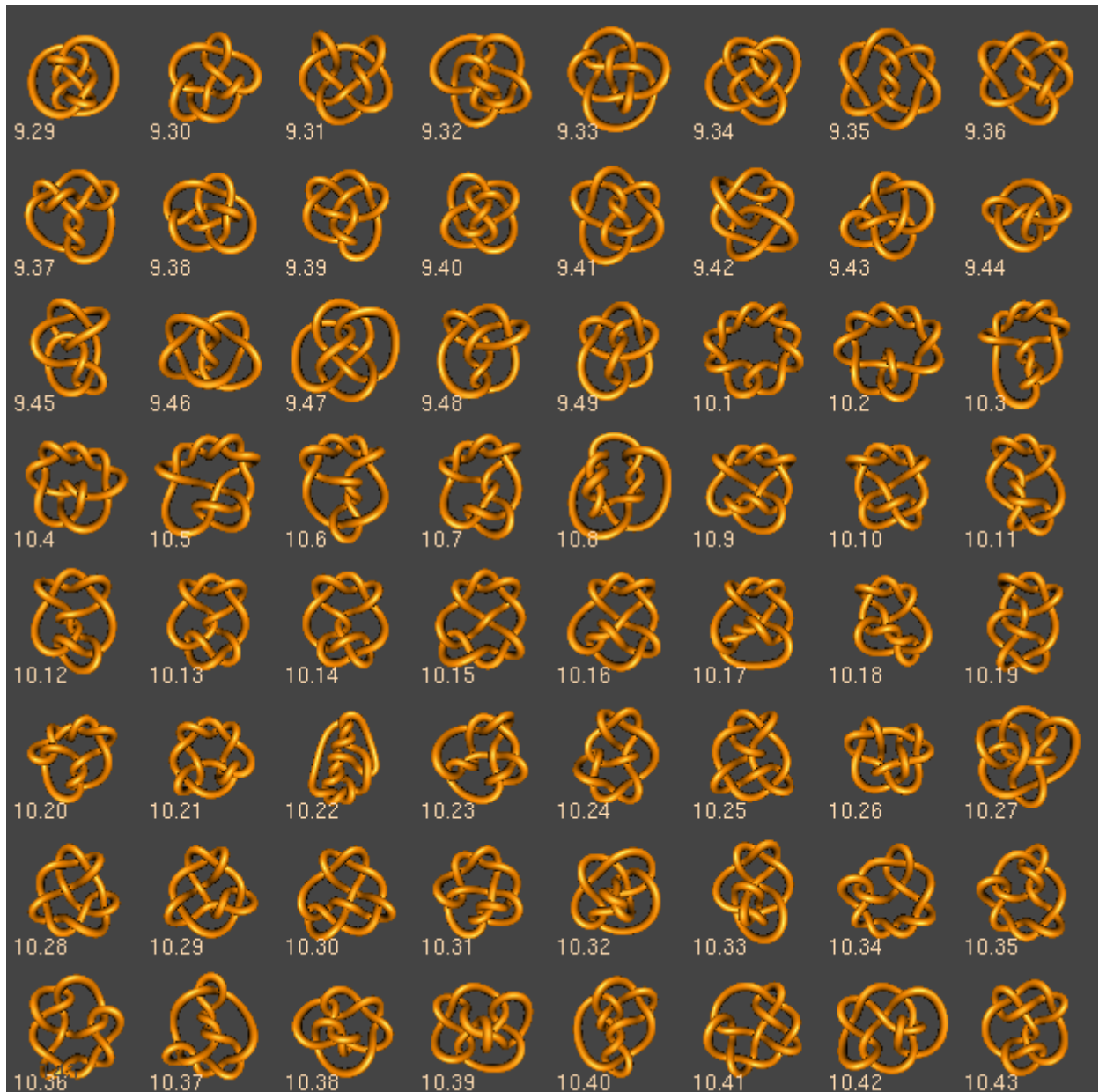


Figura 101

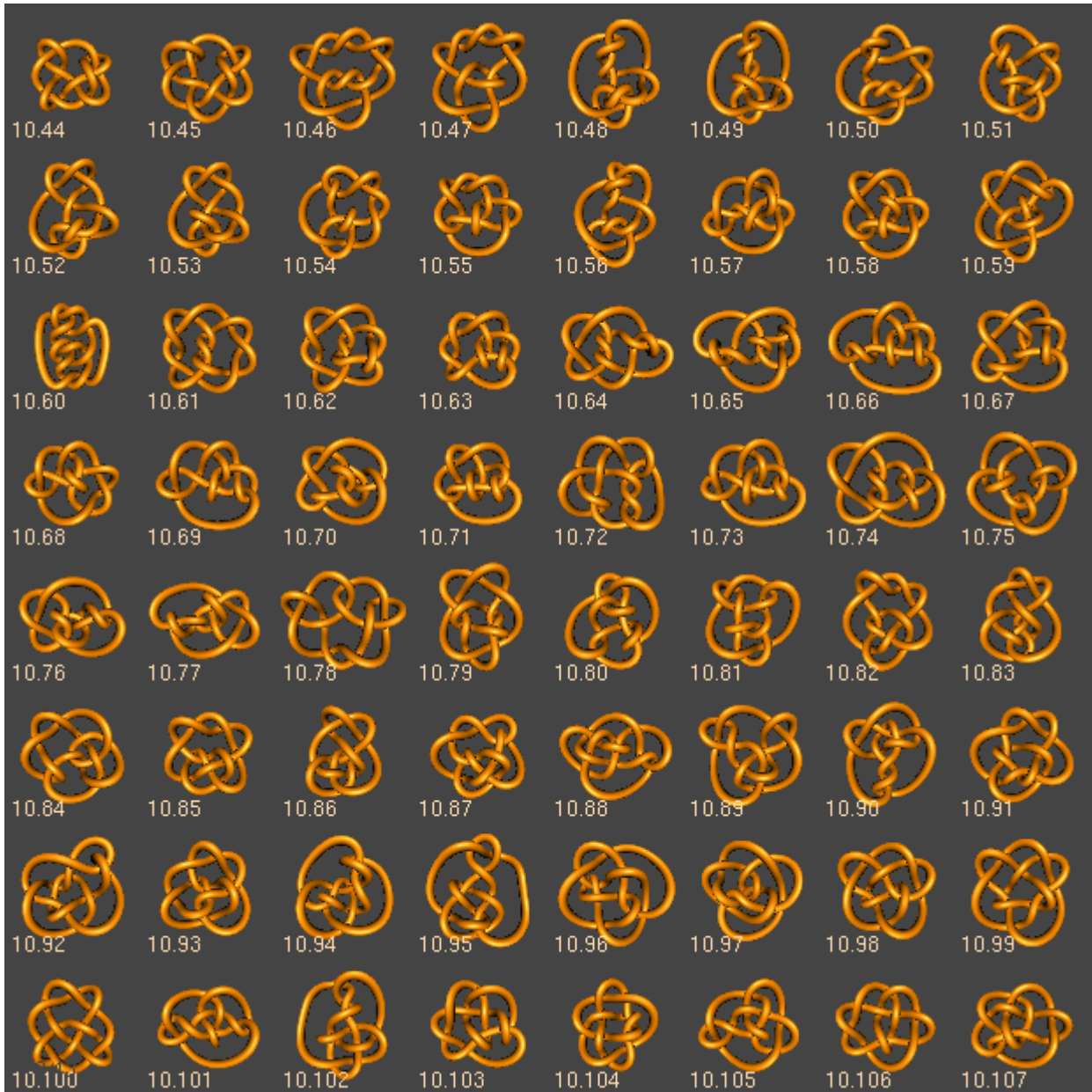


Figura 102



Figura 103



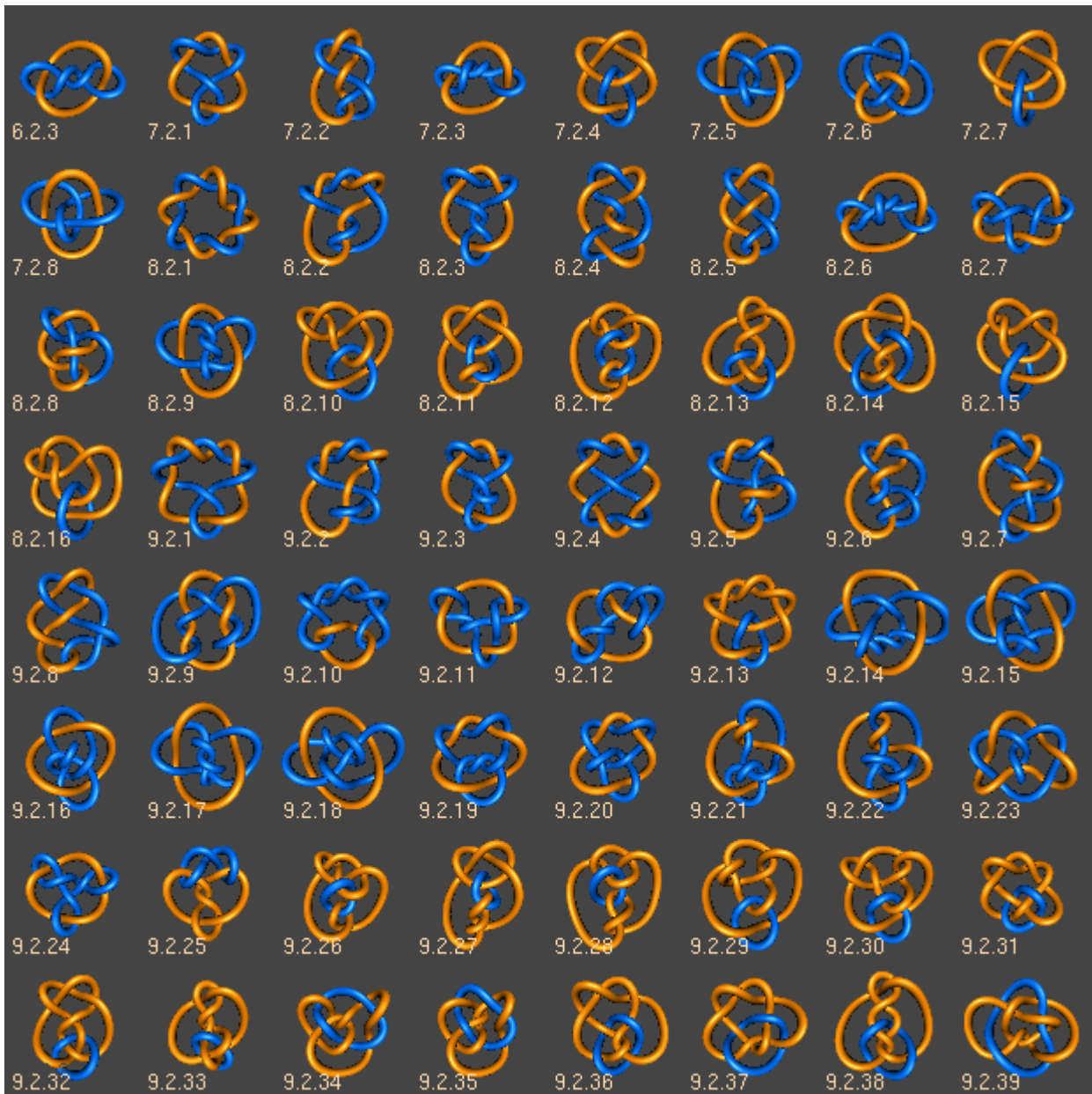


Figura 104



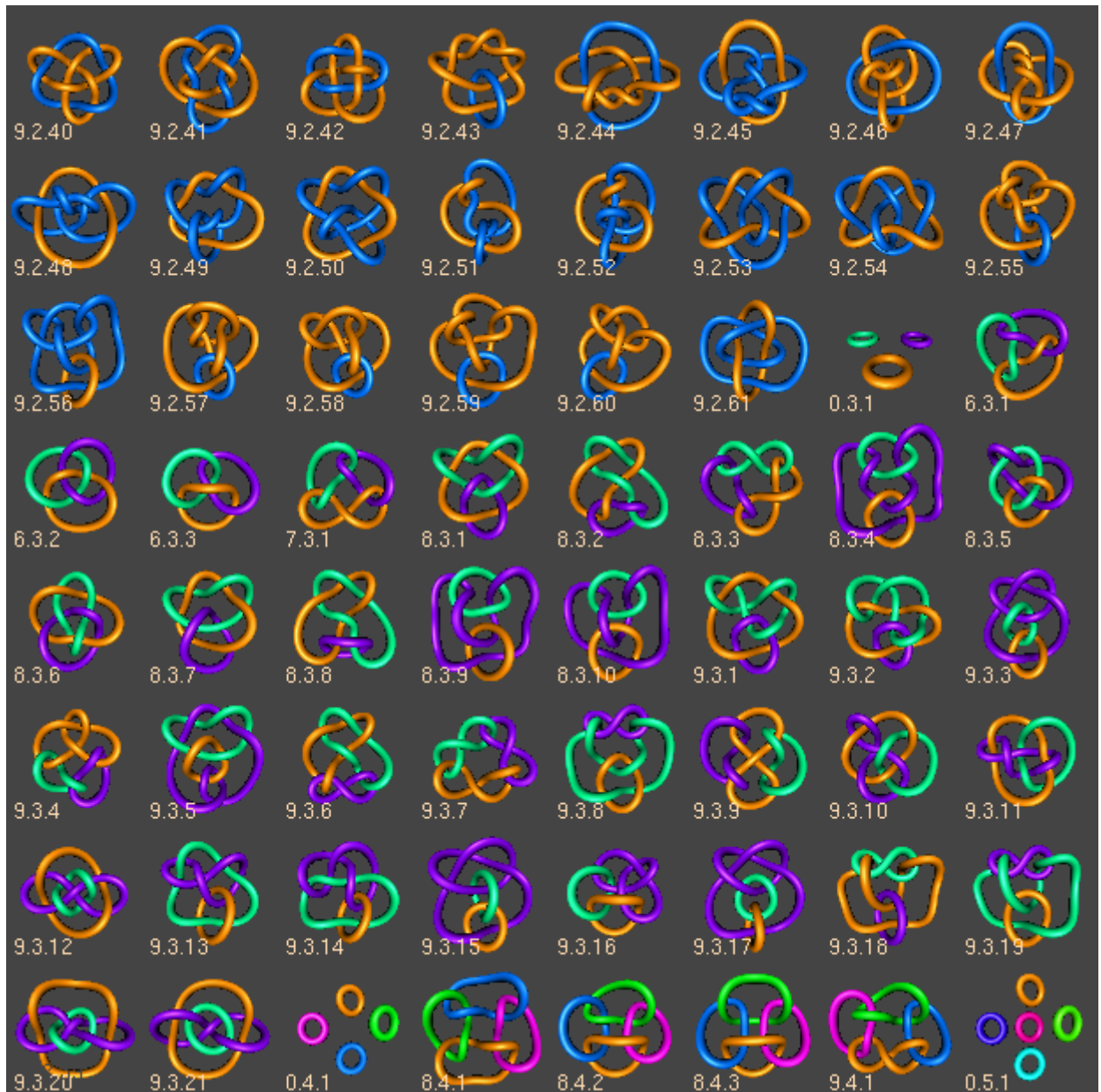


Figura 105

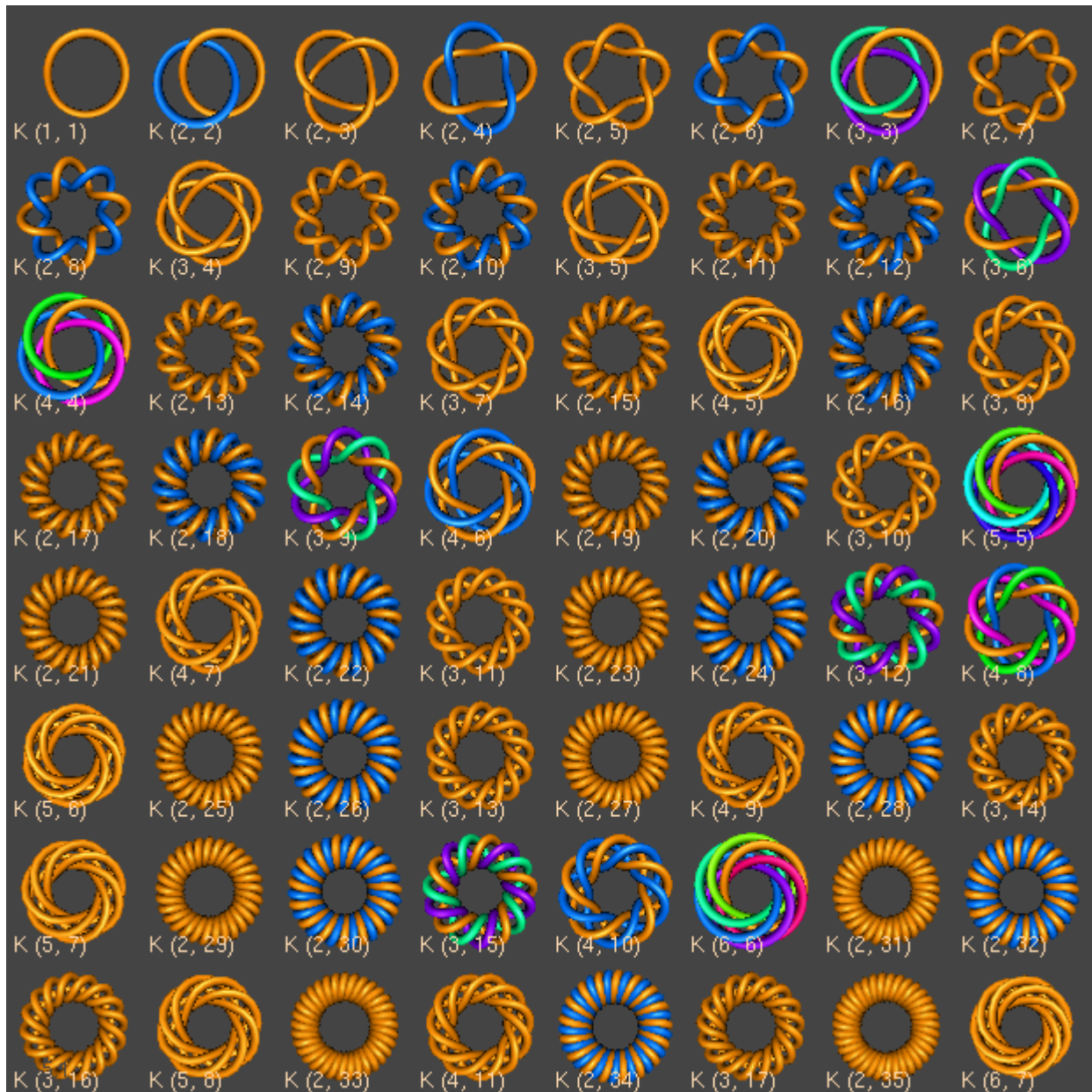


Figura 106