



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRO-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL-PROFMAT

Parametrizações e transformações afins planares

Lucas Santos Silva Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão-SE

Abril de 2014.

Lucas Santos Silva Ferreira

Parametrizações e transformações afins planares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão-SE

Abril de 2014

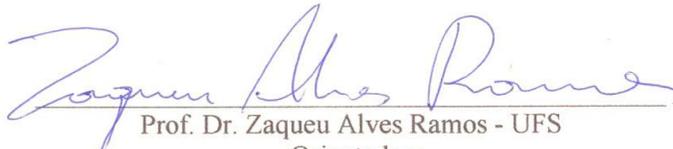
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Parametrizações e transformações afins planares

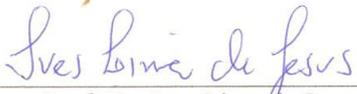
por

Lucas Santos Silva Ferreira

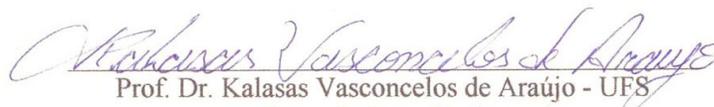
Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador



Prof. Dr. Ives Lima de Jesus - IFBA
Primeiro Examinador



Prof. Dr. Kalasás Vasconcelos de Araújo - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 10 de abril de 2014

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, pelo dom da vida, por ter me acompanhado e abençoado em todas as minhas escolhas, sem Ele, eu não seria nada. Espero está retribuindo tudo que o Senhor tem me dado de graça.

À minha amiga de curso e esposa Verônica Craveiro, pois “*quando dei por mim nem tentei fugir, do visgo que prendeu dentro do seu olhar*”, obrigado por tudo, sem você eu nem teria pensado em enfrentar essa empreitada, você é o alicerce de tudo em minha vida, fico grato por tê-la ao meu lado sempre, sua compreensão é muito importante para mim, principalmente obrigado pelo amor oferecido, para mim você “*vieste na hora exata; com ares de festa e luas de prata; vieste com encantos, vieste; com beijos silvestres colhidos pra mim ... Vieste de olhos fechados num dia marcado; sagrado pra mim*”. Depois de tudo que você me deu, o que eu tenho a te oferecer é apenas meu Amor.

Ao meu amado filho Arthur, que durante este período sempre solicitava algo que no momento estava impedido de te dar, a minha atenção. Te peço desculpa pelo meu constante mau humor. Quero que saiba que você é a razão do meu viver, que está em meu pensamento sempre, você foi o melhor presente que recebi, filho simplesmente “Te Amo”.

Aos meus pais Carlos e Cléa, que nunca deixaram de me apoiar. Obrigado, pelo amor incondicional, por valorizarem a minha educação, por serem o exemplo de ética que moldou a minha personalidade, por cuidarem do meu filho enquanto eu estudava. Vocês são responsáveis diretos por mais essa etapa da minha vida. Amo vocês pai e mãe.

Às minhas irmãs Daniela e Gabriela, obrigado pelo apoio, pelo incentivo, pelo amor dispensado a mim. Vocês duas além de irmãs são grandes amigas, obrigado por estarem presente em minha vida. Amo as duas igualmente, não precisa brigar.

À minha cunhada Carmem, que também considero como uma irmã. Obrigado por ter nos ajudado nesse percurso, seu apoio foi essencial nessa caminhada, fico grato pelo seu incentivo.

Ao meu orientador Zaqueu Alves Ramos, fico muito grato por ter aceitado o convite de me guiar nesse trabalho, obrigado pelo apoio, pela atenção, pela paciência

na minha indecisão em relação ao tema. Suas ideias me ajudaram a evoluir como professor, foi uma honra trabalhar com você.

À Banca Examinadora, composta pelo Professor Doutor Kalasas Vasconcelos de Araújo, que também foi professor no curso e pelo Professor Doutor Ives Lima de Jesus, obrigado por terem aceitado o convite e pela contribuição no trabalho.

Aos professores Almir Rogério, Danilo Felizardo, André Vinícius, José Anderson, Evilson Vieira, Naldisson dos Santos e Lucas Valeriano, por terem exigido de nós o melhor que tínhamos a oferecer, todos os obstáculos impostos serviram para nos fortalecer.

À SBM por ser a mentora desse projeto inovador de qualificação dos professores do ensino básico, ideias como essas são de suma importância para o desenvolvimento da educação no país.

À CAPES por ser corresponsável na implementação do projeto e pelo investimento através da bolsa de estudo.

À Secretaria de Educação do Município de Nossa Senhora do Socorro pela licença concedida.

Aos diretores das escolas que leciono Delmira Bispo, Ginaldo Santos e Djanira Nascimento pelo apoio.

Não poderia deixar de agradecer aos meus colegas de curso, Allan Rodrigues, Amintas Vieira, Anderson Tadeu, André Luiz, Antônio Fernandes, Elton Dória, Flávio Teixeira, Francisco Silva, Janaina Mota, José Ediackel, José Carlos, Kennedy Rodrigues, Luiz Cunha, Marcone Borges, Paulo Araújo e Regene Chaves. Obrigado pela presença nessa caminhada, nós compartilhamos todas as dificuldades, todas as alegrias e principalmente compartilhamos todo o conhecimento, levarei todos sempre em minha memória, *“mesmo que o tempo e a distância digam não”*.

Enfim obrigado a todos que guardaram as nossas bagagens enquanto nós íamos a luta, essa vitória também é de vocês (1er I Samuel 30:1-31).

*Cada um de nós compõe a sua
história,
Cada ser em si carrega o dom
de ser capaz
E ser feliz*

Renato Teixeira

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo apresentar aspectos das equações paramétricas e das transformações afins planares que podem ser explorados no ensino básico. No que diz respeito às parametrizações apresentamos uma sucessão de exemplos elementares e fazemos a comparação entre as equações paramétricas e as cartesianas - destacando as vantagens de usar uma em detrimento da outra. Além disso, discutimos sobre o processo de obter as equações cartesianas a partir das paramétricas e a importância dessa modalidade de equações para a física. No que se refere às transformações afins nosso interesse é olhar para elas segundo a perspectiva do programa de Felix Klein, onde uma geometria é classificada como um conjunto de objetos sobre a ação de um grupo fixado. Enfatizamos algumas transformações especiais e a importância das mesmas na geração do grupo de afinidades e na implementação do processo de mudança de coordenadas. Ressaltamos que não temos como objetivo que essa material seja totalmente aplicado como material didático para o ensino básico, o que desejamos é que ele seja um provocador ao instinto pesquisador do professor.

Palavras Chaves: Geometria, parametrizações, afinidades, mudança de coordenadas, aplicações.

Abstract

This thesis aims to present aspects of parametric equations and planar affine transformations that can be exploited in basic education. With respect to parameterizations we present a succession of elementary examples and make the comparison between the parametric and Cartesian equations - highlighting the advantages of using one over the other. Furthermore, we discussed the process of obtaining the Cartesian equations from parametric and importance of this type of equations for physics. With respect to affine transformations our interest is to look at them from the perspective of Felix Klein program, in which a geometry is classified as a set of objects on the action of a group set. We emphasize some special transformations and their importance in the generation of the affinity group and the implementation of coordinated of change process. We emphasize that we have not aimed this work to be fully applied as teaching materials for elementary education, what we want is it to be a provocateur to the teacher researcher instinct .

Keywords: Geometry, parameterizations, affinity, coordinated of changes, applications.

Sumário

Introdução	9
1 Equações paramétricas	12
1.1 Definições e exemplos	13
1.1.1 Parametrização da reta	13
1.1.2 Parametrizações da circunferência	14
1.1.3 Parametrização da Ciclóide	16
1.2 Equações paramétricas versus equações cartesianas	18
1.2.1 Equações cartesianas a partir das equações paramétricas	21
1.3 Curvas racionais	24
1.4 Interpretação física das equações paramétricas	28
2 Transformações do plano no plano	31
2.1 Método do grupo de transformações	31
2.2 Transformações afins planares	33
2.3 Exemplos especiais de transformações afins	36
2.3.1 Rotações	36
2.3.2 Dilatações-contrações verticais e horizontais	37
2.3.3 Cisalhamentos verticais e horizontais	38
2.4 A geração do grupo de Afinidades	39
2.5 Afinidades e mudança de coordenadas	41
2.5.1 Mudança de coordenadas em cônicas	45
2.6 Afinidades no ensino básico	49
3 Aplicações	50
3.1 Computação gráfica	51
3.2 Robótica	57

Conclusão	64
A Vetores	67
A.1 Discussão preliminar	67
A.2 Segmento orientado	67
A.3 Vetores	68
B Matrizes	69
B.1 Discussão preliminar	69
B.2 Definições e Operações	69
B.3 Operações com matrizes	70
B.3.1 Adição de matrizes	70
B.3.2 Multiplicação por um escalar	71
B.3.3 Multiplicação entre matrizes	72
B.4 Matriz inversa	73
B.5 Transformações de matrizes	73
B.5.1 Transformações Elementares de Matrizes	74
B.5.2 Matrizes elementares	74
Referências Bibliográficas	76

Introdução

A matemática vem sendo desenvolvida durante toda a história da humanidade, problemas que hoje são apresentados nos livros do ensino básico, antes só eram resolvidos por estudiosos, pois só eles eram detentores das técnicas para a resolução de problemas que atualmente são de fácil compreensão. Com isso pode-se concluir que ao passar dos anos o desenvolvimento da matemática proporcionou o acesso ao conhecimento, saindo do domínio de um pequeno grupo e se expandindo para uma parcela importante da população.

Com acesso ao conhecimento facilitado, o número de estudiosos em determinada área tende a aumentar e com mais pessoas estudando uma ciência, aumenta-se a possibilidade de desenvolvimento da mesma. Com a matemática não foi diferente, essa ciência foi protagonista na evolução da tecnologia, bem como os avanços tecnológicos foram primordiais para o desenvolvimento da matemática, um exemplo desse mutualismo é o computador.

Um fato curioso que podemos citar é que os avanços tecnológicos guiaram a sociedade para uma situação que se depende menos do conhecimento matemático, pelo menos no que se refere ao cálculo, pois uma simples calculadora é o suficiente para suprir nossas necessidades matemáticas diárias.

Chegamos a um ponto em que devemos pensar no que devemos ensinar aos nossos alunos. Seria a hora de repensar a matriz curricular? O atual contexto da educação no país sugere que deve-se dar significado aos conteúdos ensinados na escola, pois para muitos não faz sentido continuar reproduzindo uma educação ultrapassada, onde são abordados temas que só fariam sentido para os alunos que seguissem uma carreira específica.

A matemática utilizada por um cidadão comum é aprendida nos primeiros anos do ensino fundamental, o que faz a sociedade se perguntar o porque ensiná-la até o ensino médio, respostas vagas de que servirá como embasamento teórico para conteúdos futuros, não atendem a curiosidade de jovens que atualmente são muito questiona-

dores. Porém, esse é um questionamento que também deve ser feito nas outras áreas do conhecimento, e ele só surge com mais ênfase nas ciências exatas porque falta despertar no aluno a curiosidade de aprender.

Qual a utilidade de se aprender uma música? O cidadão tem a necessidade de aprender a utilizar um aplicativo que edite fotos? Qual a importância de conhecer tudo sobre determinado local que nunca irá visitar? O que queremos dizer é que quando surge a pergunta: para que devo aprender isso? Podemos concluir que há algo errado. Porque a mesma pergunta não surge nas situações citadas acima, simples, não aparece pois essas atividades estão ligadas ao prazer, a curiosidade. São esses os sentimentos que a matemática deve despertar, o nosso desejo é apresentar a matemática de uma forma que essa pergunta não seja tão frequente.

Pautado por esses anseios da sociedade e pela necessidade de atualização que permeia toda ciência, a matriz curricular da matemática no ensino básico precisa ser adaptada a temas mais atuais, com a inserção de alguns conteúdos e a readaptação de outros.

Não é possível afirmar que tal transformação será fácil, pois da mesma forma que existe o desejo da atualização, há também aqueles que tem aversão ao novo. Por isso mudanças devem ser feitas de forma responsável, onde devem ser ouvidas todas as opiniões. O que deve-se levar em consideração é que o ensino da matemática deve ser utilizado como meio de atração à escola e não como um dos motivos pelo quais os discentes se afastem dela.

Como essa mudança de uma forma global é complicada, devemos ressaltar a importância do professor no papel de pesquisador, é ele quem está em contato direto com aluno, ele é quem sabe quais são suas dificuldades e seus anseios. O professor deve assumir a responsabilidade de ser o agente de transformação na sua classe, investigando de que forma ele poderá chamar a atenção dos jovens para o estudo.

Conectar os conteúdos ensinados com situações conhecidas pelos alunos pode ajudar o processo. É de conhecimento da classe docente que procurar elos entre o conteúdo ministrado e as atividades diárias dos alunos demanda um certo tempo, preparo e muitas vezes criatividade. Mostrar onde determinado conteúdo é útil pode satisfazer a curiosidade dos jovens. De certo que nem todo conteúdo é fácil de encontrar aplicações e outros não há possibilidade, no contexto atual, de fazer uma correspondência com tarefas que estão presentes no cotidiano das pessoas.

Devemos lembrar que todo esse esforço para o despertar não depende só do professor, pois um fato que deve ser lembrado é que a educação é uma via de mão

dupla, onde o interlocutor deve estar disposto a ensinar e no receptor deve haver, antes mesmo da habilidade, a disposição em aprender. Para ajudar nesse despertar, as aplicações são uma das ferramentas que podem ser inseridas no ensino, pois as mesmas dão o sentido esperado pelo aluno, quando mostramos o que essa disciplina é capaz de fazer, o que desejamos é fomentar o anseio pela aprendizagem.

No entanto, existe a carência de materiais didáticos que tratam a disciplina de uma forma experimental, logo, se alguém desejar fazer esse tipo de abordagem, possivelmente será necessário que ele os confeccione, daí recai no problema já citado do tempo. O que percebemos é que existem poucos trabalhos divulgados que tenham como intuito facilitar o processo de ensino-aprendizagem no ensino médio, trabalhos que facilitem a compreensão do professor que está há algum tempo afastado da academia.

O nosso trabalho tentar minimizar essa lacuna, pois tentamos tornar o texto compreensível para nossos colegas, nele abordamos conteúdos ministrados no ensino médio e apresentamos algumas de suas aplicações. Nele abordaremos as parametrizações de curvas como alternativa às equações cartesianas, também iremos apresentar as transformações afins planares através de uma representação matricial. O nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 definiremos a parametrização de uma curva e apresentaremos as equações paramétricas de algumas. Levantaremos o questionamento de quando devemos utilizar as equações paramétricas ou as cartesianas. Vamos definir o que é uma curva racional e ainda discutiremos a utilidade das equações paramétricas na física.

No capítulo 2 vamos estudar as transformações do \mathbb{R}^2 no \mathbb{R}^2 , iremos dar uma atenção especial as transformações afins planares, para representar essas transformações usaremos matrizes, esse tipo de representação das transformações foi expressa pela primeira vez por Arthur Cayley (1821-1895), quando expressamos as transformações dessa forma o que queremos é facilitar a escrita e simplificar as demonstrações (ver [1, página 552]). Iremos apresentar uma forma de definir a geometria distinta da usual no ensino médio. Citaremos também um grupo de transformações isomórficas e como essas transformações agem na mudança de referenciais.

No capítulo 3, iremos mostrar algumas aplicações das afinidades na computação gráfica e na robótica, inclusive expandido a ideia de transformações no plano para transformações no espaço.

Capítulo 1

Equações paramétricas

Nesse capítulo faremos uma apresentação sobre as equações paramétricas destacando algumas de suas qualidades.

Ao nos depararmos com figuras geométricas, a primeira informação que temos é sua forma livre num plano, porém se quisermos obter sua equação, será necessário localizar os pontos que definem o objeto geométrico, para tanto teremos que definir um referencial. Portanto, se desejamos obter uma equação de uma figura teremos que definir uma geometria através do método de coordenadas.

Num curso de geometria analítica aprendemos que certas curvas C num plano, com coordenadas cartesianas Oxy , podem ser descritas algebricamente por equações da forma

$$F(X, Y) = 0 \tag{1.1}$$

onde um ponto (x_0, y_0) pertence a C se, e somente se, $F(x_0, y_0) = 0$. Equações como em (1.1) são chamadas *equações cartesianas*. Por exemplo, uma equação cartesiana da circunferência de raio unitário centrada na origem é

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0 \tag{1.2}$$

Uma outra maneira de descrever uma curva é através das chamadas *equações paramétricas*, essa forma de representar curvas é pouco utilizado no ensino básico, onde na maioria dos livros didáticos a única curva que é representada por essas equações é a reta. Os motivos que fazem dessa modalidade de equações importantes são diversos. Um destes é a compensação de deficiências apresentadas pelas equações cartesianas. Outro motivo é o fato delas prestarem-se úteis à interpretação de movimentos físicos.

Podemos destacar ainda outras situações em que a inclusão das equações paramétricas seriam de grande utilidade para o ensino da geometria, por exemplo, as equações paramétricas podem ser uma ferramenta importante na construção do traço de curvas, além disso elas são mais facilmente estendidas para dimensões maiores e as variáveis nesse tipo de equação tornam-se independentes. Já em nível de ensino superior as equações paramétricas são objetos de estudo da geometria algébrica e geometria diferencial. Então por que essa forma de representar uma curva, quando é abordada no ensino básico é de forma superficial?

1.1 Definições e exemplos

Definição 1.1.1. Uma *parametrização* de uma curva C no plano é um par de equações

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

onde x e y representam coordenadas de pontos da curva C em função do *parâmetro* t (com t variando em um intervalo de \mathbb{R}) e f ou g é não constante.

As equações que definem uma parametrização para uma curva C são chamadas *equações paramétricas* da curva C .

Observação 1.1.2. Notemos na definição de parametrização que não é imposto que todo ponto da curva tenha representação na forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

ou seja, a correspondência $t \mapsto (f(t), g(t)) \in C$ não é, necessariamente, sobrejetiva.

1.1.1 Parametrização da reta

Considere uma reta r no plano que passa por um ponto $P = (x_0, y_0)$ e é paralela a um vetor não nulo $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Dado um ponto genérico $Q = (x, y)$ na reta r temos que os vetores \mathbf{v} e $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$ são paralelos. Logo, existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que

$(x - x_0, y - y_0) = t(v_1, v_2)$. Portanto, uma parametrização para a reta r é

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

Notemos que o parâmetro t é traduzido geometricamente como o fator de dilatação-contração do vetor \mathbf{v} .

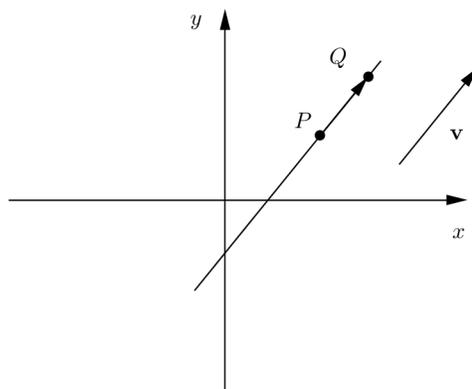


Figura 1.1:

1.1.2 Parametrizações da circunferência

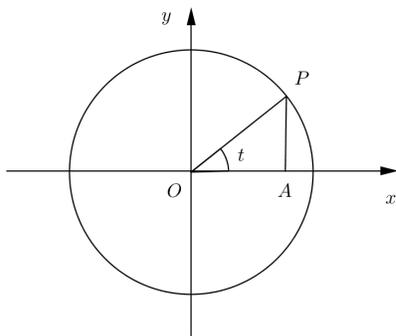


Figura 1.2:

Considere uma circunferência C de centro na origem e raio R (ver Figura 1.2). Dado um ponto genérico $P = (x, y)$ de C , considere $t \in R$ como sendo o ângulo formado pelo segmento OP e o eixo das abscissas (t sendo medido no sentido anti-horário.) Aplicando as relações trigonométricas ao triângulo retângulo OPA temos que uma parametrização para a curva C é:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad (1.5)$$

Uma outra parametrização para esta circunferência C é dada da seguinte maneira: para cada $t \in \mathbb{R}$, considere a reta r_t que passa pelos pontos $(0, R)$ e $(t, 0)$ (ver Figura 1.3). Pelo que vimos antes, a reta r_t tem as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda t \\ y = R - \lambda R \end{cases}$$

onde λ é o parâmetro da reta. Notemos que a reta r_t intersectará a circunferência em dois pontos, sendo que um deles já conhecemos, de fato um deles é $(0, R)$. Encontraremos agora o segundo ponto (x, y) em função do parâmetro t . Para isso, devemos encontrar o parâmetro λ tal que $(\lambda t, R - \lambda R) \in C$. Mas isso equivale a dizer que

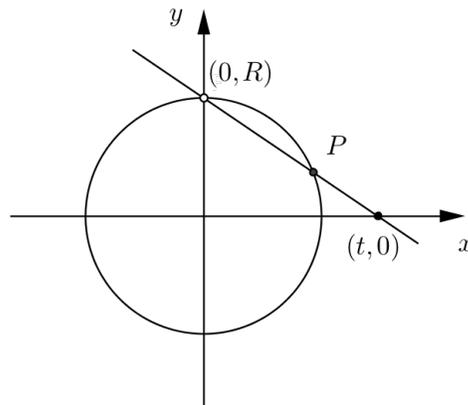


Figura 1.3:

$$(\lambda t)^2 + (R - \lambda R)^2 = R^2 \quad (1.6)$$

$$\lambda^2 t^2 + R^2 - 2\lambda R^2 + \lambda^2 R^2 - R^2 = 0 \quad (1.7)$$

$$\lambda^2 (t^2 + R^2) - 2R^2 \lambda = 0 \quad (1.8)$$

$$\lambda (\lambda (t^2 + R^2) - 2R^2) = 0 \quad (1.9)$$

Logo,

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{2R^2}{t^2 + R^2}$$

Notemos que $\lambda = 0$ corresponde ao ponto $(0, R)$ enquanto $\lambda = \frac{2R^2}{t^2 + R^2}$ corresponde ao ponto que queríamos encontrar. As coordenadas da tal ponto em função de t são

$$\begin{cases} x = \frac{2R^2 t}{t^2 + R^2} \\ y = R - \frac{2R^3}{t^2 + R^2} \end{cases} \quad (1.10)$$

Observação 1.1.3. Como podemos perceber facilmente, a correspondência que associa cada $t \in \mathbb{R}$ ao ponto com coordenadas definidas pela equação (1.10) é uma bijeção entre os pontos da reta e a circunferência menos um ponto. A inversa desta aplicação é chamada *projeção estereográfica* e é bastante útil do ponto de vista topológico e geométrico.

1.1.3 Parametrização da Ciclóide

Uma cicloide é uma curva descrita por um ponto $P = (x, y)$ de uma circunferência quando rola, sem deslizar, sobre uma reta denominada base. Para determinar as equações paramétricas dessa curva vamos considerar uma circunferência de raio R e centro $(0, R)$. Também iremos supor que a reta base é o eixo das abscissas e que uma das posições de P é a origem. Utilizaremos como parâmetro o ângulo t de rotação da circunferência ($t = 0$ quando P está na origem).

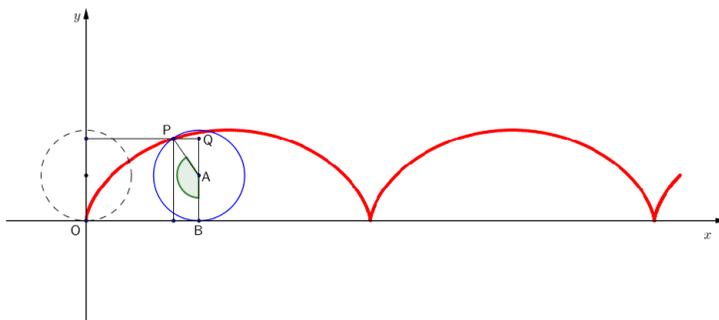


Figura 1.4: movimento da cicloide

Notemos na Figura 1.4 que:

$$t = \widehat{BAP}$$

$$\overline{AP} = R$$

e

$$\begin{cases} x = \overline{OB} - \overline{PQ} \\ y = \overline{BA} + \overline{AQ} \end{cases}$$

Assim, usando estas igualdades e as relações trigonométricas no triângulo retângulo APQ tem-se que as equações paramétricas da cicloide são:

$$\begin{cases} x = R(t - \text{sent}) \\ y = R(1 - \text{cost}) \end{cases} \quad (1.11)$$

A primeira pessoa a estudar a cicloide foi Charles Bouvelles. Posteriormente, os matemáticos mais renomados da época interessaram-se por ela. Galileu foi o responsável por nomeá-la e passou a estudar suas propriedades por volta de 1600 (ver [1, página 366]). Apesar de aparentemente ser apenas uma abstração matemática, a cicloide possui interessantes aplicações entre as quais podemos citar a construção de esteiras industriais, sistemas de engrenagens e rampas de skate profissionais.

A partir do exemplo de uma rampa de skate profissional, construída no formato de uma cicloide invertida, podemos propor duas questões (a maquete exposta na Figura 1.5 ilustra as questões):

Questão 1.1.4. *Dadas duas esferas idênticas e supondo que exista uma superfície retilínea que ligue o topo da rampa ao ponto mais baixo da mesma, ao soltarmos tais esferas, sem impulso, do ponto mais alto dessa rampa de tal forma que uma siga o trajeto reto e a outra siga a rampa. Qual das esferas levará o menor tempo para chegar ao ponto mais baixo?*

Questão 1.1.5. *Na mesma rampa e utilizando as mesmas esferas, se abandonarmos as duas de alturas distintas, qual delas chegará ao ponto mais baixo da rampa primeiro?*

A resposta para as duas questões anteriores pode surpreender muitos, pois alguns conceitos que aprendemos, podem nos levar a uma análise equivocada da situação.

Na primeira, o fato de que a menor distância entre dois pontos é uma reta, nos leva a crer que esfera que percorre o trajeto retilíneo é a que leva o menor tempo até o ponto mais baixo, porém surpreendentemente a esfera que seguiu a rampa é a que chega primeiro a tal ponto.

Notemos que a rampa foi construída no formato de uma cicloide invertida. Tal curva é



Figura 1.5: Maquete de uma rampa no formato de uma cicloide

denominada de *braquistócrona* (brachistos: mínimo e chronos: tempo). Esta curva tem a propriedade da descida mais rápida quando considera-se apenas a ação da gravidade. O primeiro a provar esta propriedade foi Bernoulli, que se baseou no princípio de Fermat sobre a propagação da luz. Posteriormente, Euler aperfeiçoou o método utilizado por Bernoulli e Fermat, pois o mesmo era pouco eficiente para problemas com maior complexidade. Finalmente, Lagrange desenvolveu um método analítico para obter a curva, segundo o qual originou-se o cálculo variacional (ver [13]).

A prova de que a *braquistócrona* é a curva que leva a uma descida mais rápida, será omitida por fugir do alvo do estudo, ela pode ser analisada em [10].

No segundo questionamento, nós podemos pensar que a esfera que foi lançada do ponto mais baixo será a primeira a chegar, ou ainda podemos imaginar que a que foi liberada do ponto mais alto desenvolverá uma velocidade maior e chegará primeiro ao ponto mais baixo. Mas na verdade as duas chegam nesse ponto no mesmo instante.

Nesse sentido, chamamos a cicloide invertida de *tautócrona* (tautos: mesmo e chronos: tempos), pois ela goza da propriedade de que não importa em que ponto determinado objeto seja liberado, o intervalo de tempo até que ele atinja a parte inferior será o mesmo. Essa propriedade foi provada geometricamente por Cristian Huygens em 1659 (ver [12]), quando tentava construir um relógio de pêndulo. A demonstração dessa propriedade também será omitida e pode ser consultada em [11].

1.2 Equações paramétricas versus equações cartesianas

Como dito anteriormente, as equações paramétricas consistem em uma outra maneira de se descrever uma curva por equações. Contudo, este fato por si só não tem interesse algum. De fato, ensinar este assunto sem uma justificativa plausível de sua utilidade pode causar no aluno a impressão de que estamos apenas introduzindo complicações inúteis. É importante enfatizar ao aluno as vantagens de se aprender sobre essa nova descrição algébrica. Por exemplo, devemos evidenciar que as equações cartesianas e paramétricas possuem qualidades de tal forma que uma complementa certas dificuldades da outra. Para isso, podemos iniciar propondo a resolução dos seguintes problemas de fácil entendimento.

Problema 1.2.1. Dado o ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, verifique se ele pertence a curva:

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}, t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \quad (1.12)$$

Problema 1.2.2. *Determine 5 pontos que estejam na curva abaixo:*

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad (1.13)$$

As equações (1.12) e (1.13) representam a mesma curva denominada *Fólium de Descartes* (ver Figura 1.6). Depois de algumas tentativas podemos perceber que se a ordem das equações forem invertidas nos problemas a tarefa será facilitada.

Através desses problemas podemos nos questionar de uma forma mais geral,

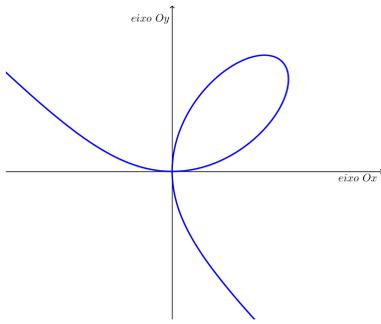


Figura 1.6: Fólium de Descartes

Questão 1.2.3. *Dado um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ como decidir se ele pertence a uma certa curva*

C?

Questão 1.2.4. *Como fabricar pontos que estejam na curva?*

Para verificar se um ponto pertence a uma curva certamente as equações cartesianas são mais úteis, já que basta substituir o ponto na equação. Já para determinar pontos que pertençam a uma curva as equações paramétricas são mais eficientes, pois nesse caso necessitamos apenas atribuir valores ao parâmetro. Esse aspecto das equações paramétricas é bastante útil para implementações de desenhos de uma curva no computador, pois para uma quantidade razoável de valores atribuídos ao parâmetro pode-se obter uma boa representação da imagem.

Vejam abaixo um outro problema que ilustra bem estas considerações

Problema 1.2.5. *Mostrar que existem infinitos pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ que pertençam a circunferência unitária centrada na origem.*

Percebam que produzir infinitos pontos da circunferência unitária centrada na origem com as restrições dadas utilizando a equação cartesiana

$$X^2 + Y^2 = 1 \tag{1.14}$$

é um tanto complicado (recomendamos ao leitor fazer uma tentativa). Contudo, se consideramos as equações paramétricas (1.10) o problema se torna bem mais fácil. Neste caso as equações (1.10) têm o seguinte formato:

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{cases} \tag{1.15}$$

Portanto, para cada parâmetro t racional teremos x e y racionais como desejado.

Observação 1.2.6. O problema 1.2.5 é uma ótima oportunidade para mencionar um belíssimo teorema da teoria dos números, o das *ternas pitagóricas*. Uma terna de inteiros não nulos (a, b, c) é chamada *pitagórica* se satisfaz a equação de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

ou seja, se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo retângulo em que c é a hipotenusa. Por exemplo, $(3, 4, 5)$ é uma terna pitagórica. Notemos também que a partir dessa solução podemos obter infinitas ternas, pois para cada $\lambda \in \mathbb{Z}$, temos que a terna $(3\lambda, 4\lambda, 5\lambda)$ é pitagórica. O problema interessante é mostrar a existência de infinitas ternas pitagóricas (a, b, c) tais que $\text{mdc}(a, b, c) = 1$. Este problema é o que chamamos de *Problema das Ternas Pitagóricas*. Notemos que para respondê-lo na ausência das equações paramétricas (1.15) exigiria um pouco mais de trabalho. Contudo, substituindo (1.15) em (1.14), temos

$$\left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)^2 = 1,$$

logo

$$(2t)^2 + (t^2 - 1)^2 = (t^2 + 1)^2$$

ou seja, para cada $t \in \mathbb{Z}$ a terna $(2t^2, t^2 - 1, t^2 + 1)$ é pitagórica. Em particular, para cada t par temos que essa terna possui $\text{mdc}(2t^2, t^2 - 1, t^2 + 1) = 1$ (note que estas ternas estão em correspondência injetora com os inteiros pares, o que garante a infinitude das ternas pitagóricas com mdc igual a 1).

1.2.1 Equações cartesianas a partir das equações paramétricas

Na seção 1.1 apresentamos as parametrizações de algumas curvas, observando essas equações podemos nos questionar se as duas formas de representar a curva se relacionam ou se uma independe da outra. Nessa seção apresentaremos formas de obter as cartesianas das curvas citadas anteriormente através das paramétricas.

Exemplo 1.2.7. Dada a parametrização da reta

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

Obtenha a equação cartesiana.

Solução: Obter essa equação é muito simples, basta isolar o parâmetro t em cada uma das equações e igualar as sentenças obtidas. Este processo para obter a equação cartesiana é de fácil visualização, e um aluno do ensino básico pode concluí-lo sem muita dificuldade.

Exemplo 1.2.8. Encontre a equação cartesiana da circunferência a partir da parametrização

$$\begin{cases} x = \frac{2R^2t}{t^2 + R^2} \\ y = R - \frac{2R^3}{t^2 + R^2} \end{cases} \quad (1.16)$$

Solução: Elevando-se x e y ao quadrado, teremos:

$$x^2 = \frac{4R^4t^2}{(t^2 + R^2)^2} \quad (1.17)$$

e

$$y^2 = R^2 - \frac{4R^2}{t^2 + R^2} + \frac{4R^6}{(t^2 + R^2)^2} \quad (1.18)$$

Somando (1.17) com (1.18), obtemos a equação:

$$x^2 + y^2 = \frac{4R^4t^2 + R^2(t^2 + R^2)^2 - 4R^4(t^2 + R^2) + 4R^6}{(t^2 + R^2)^2}$$

Eliminando os termos opostos e simplificando, a sentença obtida é

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Observe que essa é a equação cartesiana da circunferência de centro na origem e raio R .

Observação 1.2.9. Sugerimos ao leitor obter a equação cartesiana da circunferência a partir de

$$\begin{cases} x = R \cos(\theta) \\ y = R \sin(\theta) \end{cases}$$

Outra curva apresentada na Seção 1.1 foi a cicloide, agora veremos como chegar até a sua equação cartesiana a partir de sua parametrização.

Exemplo 1.2.10. Encontre a equação cartesiana da cicloide a partir de sua parametrização.

Solução: De (1.11) temos que:

$$\sin t = \frac{Rt - x}{R} \quad (1.19)$$

e

$$\cos t = \frac{R - y}{R} \quad (1.20)$$

de (1.20) temos que $t = \arccos \frac{R - y}{R}$.

Da identidade trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ temos:

$$\left(\frac{Rt - x}{R} \right)^2 + \left(\frac{R - y}{R} \right)^2 = 1$$

$$\left(\arccos \frac{R - y}{R} - \frac{x}{R} \right)^2 + \left(\frac{R - y}{R} \right)^2 = 1$$

Essa é a equação cartesiana da cicloide.

Exemplo 1.2.11. Encontre a equação cartesiana a partir da paramétrica da curva denominada *fólium de Descartes*.

Solução: Dada a equação paramétrica a seguir, onde a é uma constante maior que zero:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}, t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Se elevarmos x e y ao cubo as equações encontradas são:

$$x^3 = \frac{27a^3t^3}{(1+t^3)^3} \quad (1.21)$$

e

$$y^3 = \frac{27a^3t^6}{(1+t^3)^3} \quad (1.22)$$

Somando as equações (1.21) e (1.22), obtemos

$$x^3 + y^3 = \frac{27a^3t^3 + 27a^3t^6}{(1+t^3)^3} \quad (1.23)$$

$$x^3 + y^3 = \frac{27a^3t^3(1+t^3)}{(1+t^3)^3} \quad (1.24)$$

Note que

$$xy = \frac{9a^2t^3}{(1+t^3)^2}$$

Substituindo xy em (1.24), encontraremos a equação cartesiana dessa curva.

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Como nós podemos observar, para fazer a transformação das equações paramétricas para cartesianas foram necessárias ideias simples, porém nem sempre iremos gozar dessa facilidade. Para muitas curvas teremos que recorrer a técnicas mais sofisticadas, onde necessitaremos ter um embasamento teórico mais refinado.

Sugerimos o próximo problema como desafio, pois o mesmo requer uma técnica mais requintada para se chegar a equação cartesiana.

Problema 1.2.12. *Determine a equação cartesiana da curva cuja a equação paramétrica é*

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

1.3 Curvas racionais

Se estabelecermos uma hierarquia entre as classes de funções mais fáceis de lidar certamente termos em primeiro lugar a classe das funções polinomiais. A classe seguinte nessa hierarquia é naturalmente a das funções que são quocientes de funções polinomiais, ou seja, as funções racionais. Os motivos que fazem as funções racionais ocuparem essa posição privilegiada são diversos, por exemplo, o estudo de questões de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade destas funções são bem entendidos. Outro motivo, de caráter mais prático, é o fato de serem funções implementáveis no universo dos computadores. Dentro dessa perspectiva, é razoável desejarmos saber quais são as curvas que admitem equações paramétricas que sejam funções racionais. Sendo assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.3.1. Seja C uma curva cuja equação cartesiana, em um sistema de coordenadas cartesianas fixado, é da forma $F(X, Y) = 0$, com $F(X, Y)$ sendo um polinômio. Dizemos que C é uma *curva racional* se admitir uma parametrização

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

em que $f(t)$ e $g(t)$ são funções racionais ambas não constante.

Observação 1.3.2. Esta definição admite versões bem mais gerais e é tema de estudo da geometria algébrica (ver exemplo [2, Capítulo 5] ou [4, Capítulo 8]).

Observação 1.3.3. Suponhamos C uma curva racional e $f(t), g(t)$ funções racionais como na definição acima. Então existem funções polinomiais $p(t), q(t), r(t)$ e $s(t)$ tais que $f(t) = p(t)/r(t)$ e $g(t) = q(t)/s(t)$. Digamos que

$$h(t) = \text{mdc}(p(t)s(t), r(t)s(t), q(t)r(t))$$

Em particular,

$$\text{mdc} = \left(\frac{p(t)s(t)}{h(t)}, \frac{r(t)s(t)}{h(t)}, \frac{q(t)r(t)}{h(t)} \right) = 1$$

Assim, podemos reescrever $f(t)$ e $g(t)$, como:

$$f(t) = \frac{p_1(t)}{r_1(t)} \text{ e } g(t) = \frac{q_1(t)}{r_1(t)}$$

onde

$$p_1(t) = \frac{p(t)s(t)}{h(t)}, \quad q_1(t) = \frac{q(t)r(t)}{h(t)} \quad \text{e} \quad r_1(t) = \frac{r(t)s(t)}{h(t)}$$

Portanto, podemos sempre supor, sem perda de generalidade, representações $f(t) = p(t)/r(t)$ e $g(t) = q(t)/s(t)$ tais que $r(t) = s(t)$ e $\text{mdc}(p(t), r(t), q(t)) = 1$.

Exemplo 1.3.4. Segue direto da definição e dos exemplos 1.1.1 e 1.1.2 que retas e circunferências são exemplos de curvas racionais.

A pergunta óbvia mediante a definição de curvas racionais é:

Questão 1.3.5. *Toda curva C que tem equação cartesiana $F(X, Y) = 0$, com $F(X, Y)$ polinômio, é racional?*

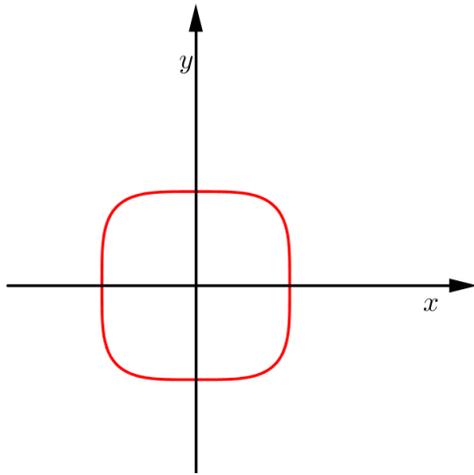


Figura 1.7:

O exemplo abaixo mostra que a resposta esta pergunta é não.

Exemplo 1.3.6. Considere a curva C definida pela equação

$$X^4 + Y^4 - 1 = 0 \quad (1.25)$$

(vide Figura 1.7). Mostraremos que esta curva não é racional. Para isso, argumentaremos por redução ao absurdo. Assim, suponhamos que existam funções polinomiais $p(t), q(t)$ e $r(t)$, com $r(t) \neq 0$ e $\text{mdc}(p(t), q(t), r(t)) = 1$

$$\begin{cases} x = p(t)/r(t) \\ y = q(t)/r(t) \end{cases} \quad (1.26)$$

Substituindo (1.26) em (1.25) temos

$$x^4 + y^4 = 1 \quad (1.27)$$

Derivando esta igualdade com respeito a t , obtemos

$$x^3 x' + y^3 y' = 0 \quad (1.28)$$

Escrevendo $u = x^3$ e $v = y^3$ segue dessas igualdades acima a seguinte identidade matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Notemos que $w = \det \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = xy' - x'y \neq 0$ (caso contrário, x/y seria constante e isso implicaria, usando (1.25), que y é constante). Desse modo, temos:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} y' & -y \\ -x' & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (1.30)$$

logo,

$$u = \frac{y'}{w} \quad \text{e} \quad v = \frac{-x'}{w}$$

Como $u = x^3$ e $v = y^3$ vem

$$x' = -wy^3 \quad \text{e} \quad y' = wx^3.$$

Substituindo p, q e r nestas relações obtemos

$$r^3(rp' - pr') = -(pq' - qp')q^3 \quad (1.31)$$

e

$$r^3(rq' - qr') = (pq' - qp')p^3, \quad (1.32)$$

Dessas duas igualdades e do fato que $\text{mdc}(p, q, r) = 1$ segue que r^3 divide $pq' - qp'$. Assim podemos supor que existe um l tal que

$$pq' - qp' = l \cdot r^3 \quad (1.33)$$

Notemos que

$$\text{gr}(p') = \text{gr}(p) - 1 \quad \text{e} \quad \text{gr}(q') = \text{gr}(q) - 1$$

onde $\text{gr}(-)$ significa o grau do polinômio. Assim,

$$\text{gr}(qp') = \text{gr}(p) + \text{gr}(q) - 1 \text{ e } \text{gr}(pq') = \text{gr}(p) + \text{gr}(q) - 1$$

Usando estas duas últimas igualdades e o fato de que o grau da soma é menor ou igual ao máximo dos graus das parcelas da soma temos:

$$\text{gr}(pq' - qp') \leq \text{gr}(p) + \text{gr}(q) - 1$$

Desse modo,

$$\text{gr}(pq' - qp') = \text{gr}(l \cdot r^3) = \text{gr}(l) + \text{gr}(r^3) \leq \text{gr}(p) + \text{gr}(q) - 1$$

Em particular,

$$3\text{gr}(r) \leq \text{gr}(p) + \text{gr}(q) - 1 \tag{1.34}$$

Substituindo (1.33) em (1.31) e (1.32), obtemos:

$$(rp' - pr') = -l \cdot q^3 \tag{1.35}$$

e

$$(rq' - qr') = l \cdot p^3 \tag{1.36}$$

Dessa duas igualdade e raciocinando de forma análogo à que fizemos para r temos:

$$\begin{aligned} 3g_r(p) &\leq g_r(r) + g_r(q) - 1 \\ 3g_r(q) &\leq g_r(r) + g_r(p) - 1 \\ 3g_r(r) &\leq g_r(p) + g_r(q) - 1 \end{aligned}$$

Somando estas inequações membro a membro concluímos

$$g_r(p) + g_r(r) + g_r(q) \leq -3$$

Mas esta desigualdade é uma contradição pois $g_r(p) + g_r(r) + g_r(q) \geq 0$. Portanto, a curva determinada pela equação cartesiana

$$X^4 + Y^4 - 1 = 0$$

não admite parametrização racional.

Observação 1.3.7. O leitor mais crítico poderia questionar sobre a viabilidade de se ensinar o Exemplo 1.3.6 no ensino básico, em virtude de sua solução passar pelo uso de derivadas. Porém, como dito anteriormente, o presente texto não destina-se exclusivamente ao uso direto em sala de aula, mas também à formação do professor. Todavia, um ponto ainda do exemplo pode ser explorado em sala de aula. Por exemplo, se relembarmos a parametrização da circunferência

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{cases} \quad (1.37)$$

notamos que os coeficientes dos polinômios que definem as funções racionais são números inteiros. Este fato foi o que permitiu concluirmos soluções inteiras $(2t, t^2 - 1, t^2 + 1)$ para a equação de Pitágoras

$$X^2 + Y^2 = Z^2.$$

Se, analogamente, a curva determinada pela equação $X^4 + Y^4 - 1 = 0$ admitisse parametrização racional, de tal modo que os polinômios que definem as funções racionais tivessem coeficientes inteiros, então conseguiríamos determinar uma solução inteira não trivial para a equação de Fermat

$$X^4 + Y^4 = Z^4.$$

Por outro lado, como sabemos, isso é um absurdo pelo Último Teorema de Fermat. Dessa maneira, teríamos uma ótima oportunidade de mencionar o célebre Último Teorema de Fermat e falar um pouco sobre sua história.

1.4 Interpretação física das equações paramétricas

Na Seção 1.2 mencionamos a importância das equações paramétricas do ponto de vista da própria matemática. Na seção presente nosso objetivo é mostrar a relevância das equações paramétricas no contexto da física. Para isso, podemos imaginar uma partícula P que se move no plano. Para cada instante t , a posição $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ da partícula P pode ser pensada como uma função de t . Sendo assim, temos as

seguintes equações paramétricas que descrevem o movimento da partícula P :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Exemplo 1.4.1. Considere uma partícula lançada horizontalmente de um ponto (x_0, y_0) com velocidade inicial $v = (v_1, v_2)$. Então, mediante os princípios da física é possível deduzir que a trajetória dessa partícula será descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

onde g corresponde a constante de aceleração da gravidade.

Poderíamos nos perguntar sobre a utilidade das equações cartesianas para descrever a trajetória de partículas do plano. Contudo, o fato desta modalidade de equação manter “invisível” o parâmetro de tempo t impossibilita certas conclusões como as que ilustramos no problema a seguir.

Problema 1.4.2. *A torre de controle do Aeroporto Santa Maria, em Aracaju, é responsável por organizar o tráfego aéreo em um raio de 25 mil km. Num determinado instante, que tomaremos como inicial, três aviões entram no espaço aéreo controlado por essa torre. As posições de cada avião no instante inicial e na primeira unidade de tempo do monitoramento estão dispostos na tabela a seguir:*

	$t = 0$	$t = 1$
TAM	$(-20, 15)$	$(-18, 14)$
GOL	$(15, 20)$	$(16, 22)$
AVIANCA	$(-20, -15)$	$(-16, -12)$

Com base nos dados expostos na tabela, sabendo que os aviões mantem uma velocidade constante e trajetória retilínea, e que os três estão na mesma altitude, pergunta-se: será necessário que algum dos aviões mude o seu trajeto?

Solução: Dos dados obtidos podemos concluir que as equações cartesianas que representam o trajeto dos aviões são:

$$TAM : x + 2y - 10 = 0$$

$$GOL : 2x - y - 10 = 0$$

$$AVIANCA : -3x + 4y = 0$$

Notemos que todos os trajetos se interceptam em algum ponto da área monitorada, mas daí podemos afirmar que haverá colisão?

	TAM \cap GOL	TAM \cap AVIANCA	GOL \cap AVIANCA
Coordenadas da intersecção	(6, 2)	(4, 3)	(8, 6)

Apesar das trajetórias se cruzarem, é possível que os aviões passem por esse ponto de encontro em instantes diferentes, porém esse dado não pode ser obtido somente utilizando as equações cartesianas.

Para verificar se as rotas se cruzam num mesmo instante devemos consultar as equações paramétricas, onde o parâmetro utilizado determina o instante em que os aviões passam por essas coordenadas de intersecção. Então dadas as equações paramétricas:

$$t : \begin{cases} x = -20 + 2t \\ y = 15 - t \end{cases}, \quad g : \begin{cases} x = 15 - s \\ y = 20 - 2s \end{cases} \quad \text{e} \quad a : \begin{cases} x = -20 + 4w \\ y = -15 + 3w \end{cases}$$

temos:

- $t \cap g = (6, 2)$, observe que os aviões passam nesse ponto em instantes distintos o da TAM 13 unidades de tempo após o início do monitoramento e o da GOL 9 unidades de tempo, logo não há necessidade de mudança de rota.
- $t \cap a = (4, 3)$, os instantes em que os trajetos se encontram também são distintos o da TAM 12 u.t. e da AVIANCA 6 u.t.
- $g \cap a = (8, 6)$, porém observe que esse dois aviões passam no ponto de encontro no mesmo instante, logo estariam em rota de colisão, assim deverão ser tomadas medidas para evitar o acidente. Que poderá ser uma mudança de rota ou mudar a altitude.

Usando a mesma ideia, as equações paramétricas também podem ajudar a indústria bélica, por exemplo nas baterias anti-aéreas, no entanto o objetivo agora é que haja colisão entre mísseis.

Capítulo 2

Transformações do plano no plano

Neste capítulo estamos interessados em estudar aplicações $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujas funções coordenadas são funções polinomiais de grau 1 nas variáveis x e y . Mais precisamente, tais transformações têm o seguinte formato:

$$T(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2).$$

Estas transformações são de extrema importância no estudo da geometria euclidiana pois elas preservam objetos básicos como retas e cônicas. Outro fato que revela sua utilidade é que estas transformações são a maneira de descrever matematicamente movimentos como: translação, rotação, reflexão, etc.

Acreditamos que os benefícios de ensinar este conteúdo no ensino médio compensam os custos. A matemática em torno do tema é relativamente simples mas muito elegante. É também um bom momento para poder justificar a utilidade do estudo de matrizes e aproximar o conteúdo do ensino médio com o da universidade.

2.1 Método do grupo de transformações

O método do grupo de transformações baseia-se na teoria de grupos. Ele foi desenvolvido por Felix Klein (1849-1925) e Sophus Lie (1842-1899) e apresentado por Klein em uma palestra na Universidade de Erlanger. Esse trabalho ficou conhecido como *Program Erlanger*.

Definição 2.1.1. Uma geometria é o estudo das propriedades de um conjunto S que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S às transformações

de algum grupo de transformações Γ .

Segundo Klein, um objeto geométrico é um subconjunto de S que ao sofrer uma ação de $T \in \Gamma$ permanece em S e uma propriedade gozada por esse objeto permanece invariante ao sofrer a mesma ação.

A aplicação da teoria de grupos depende da transformação bijetiva $T : S \rightarrow S$, onde $T \in \Gamma$ e sendo Γ um grupo podemos afirmar que ele satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Associatividade: Dados $T, G, N \in \Gamma$, $(TG)N = T(GN)$;
- (ii) Elemento Neutro: Existe $I \in \Gamma$ tal que $IT = TI = T$ para todo $T \in \Gamma$;
- (iii) Elemento Inverso: Para todo $T \in \Gamma$, existe $T^{-1} \in \Gamma$, tal que $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

Podemos citar algumas geometrias sob a ótica de Klein:

- **Geometria Métrica Euclidiana Plana:** É a geometria em que S é o conjunto dos pontos de um plano euclidiano e Γ é o grupo de todas as transformações isométricas de S .
- **Geometria de Semelhança Plana:** É a geometria em que S é o conjunto dos pontos de um plano euclidiano e o grupo Γ consiste de todas as transformações isométricas e homotéticas.
- **Geometria Projetiva:** É a geometria em que S é o conjunto dos pontos de um espaço projetivo e o grupo Γ é o de todas as transformações projetivas.

Note que na primeira geometria definida, as transformações preservam as propriedades de comprimento, área, congruência, posições relativas entre elementos e semelhança. Na segunda geometria as propriedades como área, comprimento e congruência não mais são preservadas, os objetos de estudo dessa geometria são o paralelismo, perpendicularidade, semelhança, colinearidade e concorrência. Na última apenas as propriedades de colinearidade e concorrência entre retas permanecem invariantes.

Nesse método uma geometria pode ser construída escolhendo um elemento fundamental da geometria, o espaço ao qual esse elemento pertence e um grupo Γ de transformações que devem agir nos elementos do espaço escolhido. Observe que esse

método de definição permite que uma geometria contenha outra, pois se todas as propriedades de uma geometria \mathbf{G} satisfazem outra \mathbf{G}' , isso implica que $\mathbf{G} \subset \mathbf{G}'$.

As geometrias citadas acima são denominadas *pontuais*, pois nelas o elemento básico é o ponto, no entanto, Plüquer afirma que não é necessário que tal elemento seja ele, podemos definir retas, circunferências, dentre outros entes geométricos, como protagonistas de uma geometria (ver [1, página 595]). Desses derivam a geometria de retas e a geometria de circunferência, respectivamente. Assim, seguindo esse método os geômetras tem determinada facilidade para criar uma nova geometria.

Portanto, seguindo a definição de Klein, o nosso objeto de estudo será o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e o grupo de transformações afins planares que agem sobre esse ponto. Como veremos, este será um momento especialmente propício para apreciarmos a interação entre conceitos ensinados nos anos do ensino médio como: funções (composição de funções, funções bijetoras), matrizes (matrizes inversas, determinantes), sistemas lineares, etc.

2.2 Transformações afins planares

Definição 2.2.1. Uma *transformação afim* do plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2), \quad (2.1)$$

com $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ fixados.

Um grande desafio em matemática é determinar notações inteligentes que contribuam para uma melhor clareza do raciocínio. Um exemplo em que podemos constatar a eficiência da escolha de “boas” notações é através da representação matricial dos elementos de \mathbb{R}^2 . De fato, podemos pensar, de maneira bastante natural, cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como uma matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$. À luz dessa representação podemos escrever uma transformação afim como em (2.1) do seguinte modo:

$$T(X) = A \cdot X + \mathbf{b} \quad (2.2)$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Observação 2.2.2. Obviamente, fixadas matrizes $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{b} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ tem-se que uma expressão como no segundo membro de (2.2) define uma transformação linear afim.

Doravante, adotaremos essa maneira de pensar \mathbb{R}^2 como o espaço de matrizes $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ e de escrever transformações afins no formato matricial como em (2.2).

Definição 2.2.3. Uma transformação afim bijetora é chamada de *afinidade*.

Exemplo 2.2.4. A aplicação identidade $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(X) = X$ para cada $X \in \mathbb{R}^2$, é o exemplo mais simples de afinidade.

A proposição a seguir nos fornece uma forma de identificar se uma determinada transformação afim representa uma afinidade.

Proposição 2.2.5. *Uma transformação afim*

$$T(X) = A \cdot X + \mathbf{b}$$

é uma afinidade se, e somente se, A é matriz invertível.

Prova. (\Rightarrow) Como T é bijetora, existem $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$T(X_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b} \quad \text{e} \quad T(X_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{b}$$

logo

$$A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dessas duas últimas igualdades concluímos que

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que prova que A é uma matriz invertível.

(\Leftarrow) Como A é invertível, então existe uma matriz A^{-1} . Considere a transformação afim $S(Y) = A^{-1}Y - A^{-1}b$. Temos:

$$T \circ S(Y) = T(A^{-1}Y - A^{-1}b) = A(A^{-1}Y - A^{-1}b) + b = Y$$

para cada $Y \in \mathbb{R}$. Logo, S é uma inversa à direita de T .

Por outro lado

$$S \circ T(X) = S(AX + b) = A^{-1}(AX + b) - A^{-1}b = X$$

para cada $X \in \mathbb{R}$. Logo, S é também uma inversa a esquerda de T . Portanto, T é bijetora. \square

Corolário 2.2.6. *Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma afinidade então sua inversa é também uma afinidade.*

Prova. Como $T(X) = AX + b$ é afinidade então A é invertível. Assim, podemos considerar a afinidade $S(Y) = A^{-1}Y - A^{-1}b$. Da demonstração da proposição anterior temos que S assim definida é uma inversa a direita e esquerda de T . Logo, S é a inversa de T e é obviamente uma afinidade também pela proposição anterior. \square

Proposição 2.2.7. *Sejam $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ afinidades. Então a aplicação composta $T \circ S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma afinidade.*

Prova. Digamos que

$$T(X) = A \cdot X + \mathbf{b} \quad \text{e} \quad S(X) = B \cdot X + \mathbf{c}.$$

Em particular, por 2.2.5, A e B são matrizes invertíveis. Temos as seguintes igualdades

$$T \circ S(X) = T(S(X)) = T(B \cdot X + \mathbf{c}) = A \cdot (B \cdot X + \mathbf{c}) + \mathbf{b} = A \cdot B \cdot X + A \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} = C \cdot X + \mathbf{d}$$

onde $C := AB$ e $\mathbf{d} := A \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b}$. Dessas igualdades segue que $T \circ S$ é transformação afim.

Por outro lado, a matriz C é invertível pois seus fatores são invertíveis. Logo, pela Proposição 2.2.5, $T \circ S$ é uma afinidade. \square

Observação 2.2.8. Em linguagem mais sofisticada, tem-se que as informações contidas no Exemplo 2.2.4, Corolário 2.2.6, Proposição 2.2.7 – juntamente com o fato geral de que composição de funções é associativo – acarretam que o conjunto de todas as afinidades equipado com a operação de composição é um grupo.

Definição 2.2.9. Seja $T(X) = AX + \mathbf{b}$ uma transformação afim.

(i) Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, dizemos que T é uma *transformação linear*.

(ii) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ então T é chamada de *translação*.

2.3 Exemplos especiais de transformações afins

2.3.1 Rotações

Exemplo 2.3.1. Seja $\theta \in \mathbb{R}$ um ângulo fixado. Considere

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(X) = R_\theta \cdot X$$

O efeito geométrico causado por esta transformação sobre um segmento OP é uma rotação de um ângulo θ como ilustra a figura abaixo:

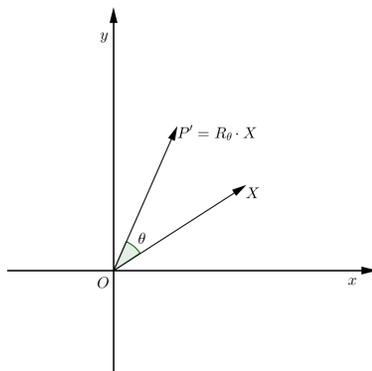


Figura 2.1:

A transformação T_θ é chamada de *rotação de um ângulo θ* .

2.3.2 Dilatações-contrações verticais e horizontais

Exemplo 2.3.2. Dado $\lambda \in \mathbb{R}^*$, considere as matrizes

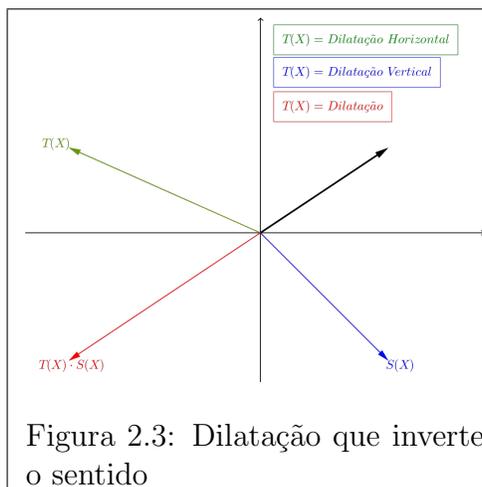
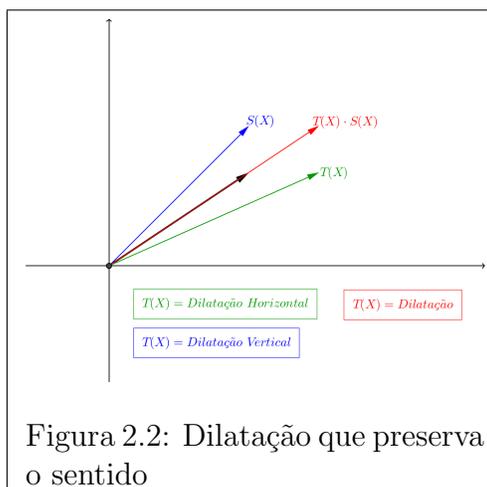
$$H_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } V_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

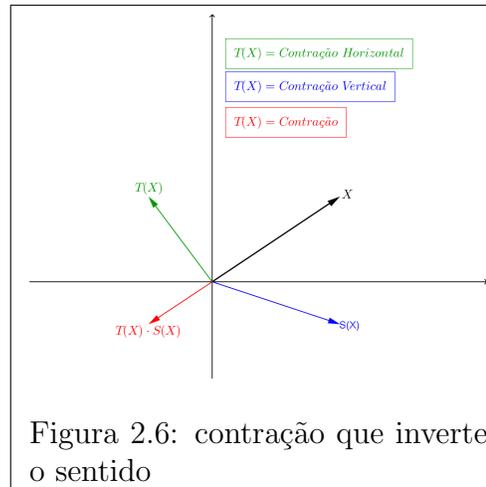
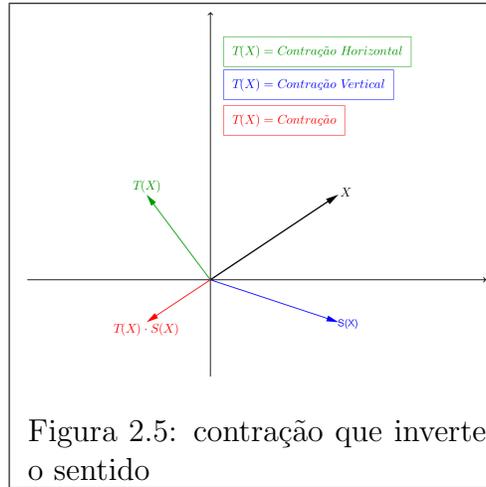
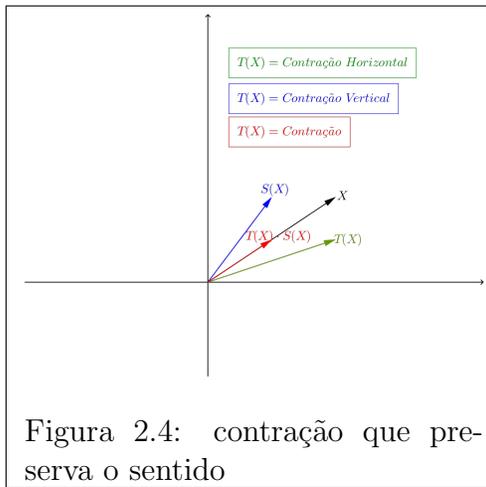
As transformações lineares

$$T(X) = H_\lambda \cdot X \text{ e } S(X) = V_\lambda \cdot X$$

São chamadas, respectivamente, de *dilatação* (ou *contração*) *horizontal* e *vertical*. Observamos que:

- Se $\lambda > 1$ então T e S correspondem a dilatações que preservam sentido.
- Se $\lambda < -1$ então T e S correspondem a dilatações que invertem sentido.
- Se $0 < \lambda < 1$ então T e S correspondem a contrações que preservam o sentido.
- Se $-1 < \lambda < 0$ então T e S correspondem a contrações que invertem sentido.
- $\lambda = -1$ então T e S correspondem a reflexões com respeito aos eixos coordenados y e x , respectivamente.





2.3.3 Cisalhamentos verticais e horizontais

Exemplo 2.3.3. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$C_\lambda^h := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C_\lambda^v := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

As transformações lineares

$$T(X) = C_\lambda^h \cdot X \text{ e } S(X) = C_\lambda^v \cdot X$$

São chamadas, respectivamente, de *cisalhamento horizontal* e *vertical*.

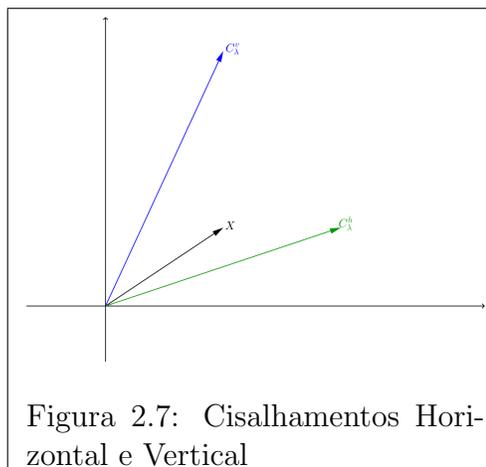


Figura 2.7: Cisalhamentos Horizontal e Vertical

2.4 A geração do grupo de Afinidades

Dada uma estrutura matemática \mathcal{C} , uma questão de interesse é saber sobre a existência de um subconjunto dessa estrutura que seja responsável pela fabricação dos elementos de \mathcal{C} . Por exemplo:

- O conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} contém um subconjunto, chamado conjunto dos números primos, tal que qualquer inteiro não nulo e diferente de 1 ou -1 pode ser escrito (de forma única) como produto de números primos (*Teorema Fundamental da Aritmética*).
- Todo espaço vetorial contém subconjuntos, chamados de base, tal que todo elemento do espaço vetorial pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base.

A filosofia que justifica a busca de tais subconjuntos é que muitos argumentos sobre a estrutura \mathcal{C} pode ser reduzido ao entendimento destes subconjuntos (por exemplo, se desejamos provar que a equação $X^n + Y^n = Z^n$ não possui solução $(x, y, z) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ para qualquer inteiro $n \geq 3$, é suficiente demonstrarmos o resultado para valores primos de n).

Explorando essa filosofia no âmbito das afinidades temos a seguinte proposição.

Proposição 2.4.1. *Cada afinidade pode ser fatorada como composição de dilatações-contrações (verticais ou horizontais), cisalhamentos e translações.*

Prova. Como A é invertível, então existe uma sequência de transformações elementares tais que:

$$I = e_s(\cdots(e_2(e_1(A)))\cdots), \quad s \in \mathbb{N}$$

Ou seja, existem matrizes elementares $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_s$, (com $s \in \mathbb{N}$) tais que,

$$\mathcal{E}_s \cdots \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_1 \cdot A = I$$

Daí podemos concluir que a matriz A pode ser reescrita como:

$$\mathcal{E}_1^{-1} \cdot \mathcal{E}_2^{-1} \cdots \mathcal{E}_s^{-1} \cdot I = A$$

Observe que para uma matriz elementar $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, os casos possíveis são:

$$\mathcal{H}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \mathcal{C}_\lambda^v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{C}_\lambda^h = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{E}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Essas matrizes quando aplicadas em uma afinidade tem um determinado efeito geométrico, $e(\mathcal{H}_\lambda)$ representa uma dilatação (ou contração horizontal), $e(\mathcal{V}_\lambda)$ uma dilatação (ou contração vertical), $e(\mathcal{C}_\lambda^h)$ um cisalhamento horizontal e $e(\mathcal{C}_\lambda^v)$ um cisalhamento vertical.

Assim toda afinidade pode ser fatorada como

$$T(X) = AX + b = (e_s(\cdots(e_2(e_1(I)))\cdots))X + b$$

ou seja, uma composição de dilatações-contrações (verticais ou horizontais), cisalhamentos e translações. □

Exemplo 2.4.2. A afinidade $T(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ pode ser reescrita como

$$T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 3/8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Assim podemos concluir que o ponto sofre uma contração horizontal, depois um cisalhamento vertical, uma dilatação vertical e por último um cisalhamento horizontal note que dessa forma nós visualizamos o processo por completo.

Note que essa decomposição não é única pois poderíamos fatorar a mesma transformação em,

$$T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.5 Afinidades e mudança de coordenadas

Por que efetuar uma mudança de coordenadas? Imagine-se parado em um determinado local tentando identificar um objeto distante, caso essa tentativa seja frustrada, você poderá proceder de duas maneiras, mover-se até ele ou fazer com que o objeto se aproxime de você, o que no momento seja mais apropriado. Com esse exemplo estamos tentando fazer uma analogia ao fato de que uma mudança de coordenadas adequada, facilitará a identificação dos elementos do objeto que iremos estudar.

Para falar sobre mudança de coordenadas devemos definir um referencial, ou seja, um sistema de coordenadas em que inicialmente um conjunto de pontos está representado.

Definição 2.5.1. Um *referencial* no plano \mathbb{R}^2 , consiste na escolha de um ponto O do \mathbb{R}^2 , que será denominado origem e de uma base de vetores unitários $\{v_1, v_2\}$ do espaço vetorial \mathbb{R}^2 , onde os eixos coordenados interceptam-se em O e cada um deles será paralelo a um dos vetores da base. Definiremos esse referencial por:

$$\mathcal{R} := \{O, \{v_1, v_2\}\}$$

onde $O = (a_1, a_2)$, $v_1 = (a_{11}, a_{21})$ e $v_2 = (a_{12}, a_{22})$.

O referencial denominado canônico é aquele cuja a origem $O = (0, 0)$ e os vetores da base são $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$.

Para efetuarmos uma mudança de coordenadas podemos proceder de duas formas, ou mantemos todos os pontos do plano fixo e deslocamos os eixos coordenados, ou mantemos os eixos coordenados fixos e deslocamos os pontos. Matematicamente as duas formas são equivalentes, de certo que ao efetuarmos a mudança vamos gerar um novo sistema onde o ponto será representado por coordenadas distintas ao do referencial inicial.

Sejam $\mathcal{R} = \{O, \{v_1, v_2\}\}$, $\mathcal{R}' = \{O', \{v_1, v_2\}\}$ (ver Figura 2.8) e $\mathcal{R}'' = \{O, \{v_3, v_4\}\}$ (ver Figura 2.9) referenciais do plano \mathbb{R}^2 , onde $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_3, v_4\}$ são bases de vetores unitários do \mathbb{R}^2 e \mathcal{R} o referencial canônico.

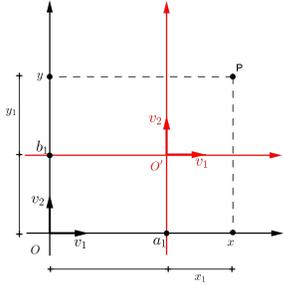


Figura 2.8: Referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}'

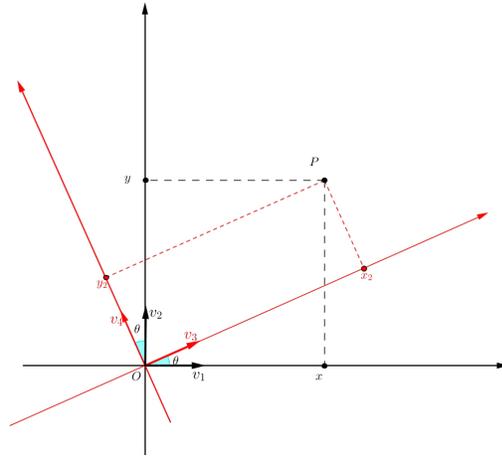


Figura 2.9: Referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}''

As coordenadas do ponto P quando levamos em consideração os referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' (ver Figura 2.8), são $P = (x, y)$, $(P)_{\mathcal{R}'} = (x_1, y_1)$, respectivamente. Daí temos,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$P = O' + v_1 x_1 + v_2 y_1 \quad (2.3)$$

Observe que (2.3) pode ser escrito na forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Considerando agora os referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}'' (ver Figura 2.9), as coordenadas do ponto P podem ser descritas por

$$P = xv_1 + yv_2 = x_2v_3 + y_2v_4$$

Podemos agora verificar a relação entre os vetores v_3 e v_4 com os vetores v_1 e v_2 . Lembrando que esses vetores tem comprimento igual a 1 e que $\angle(v_1, v_3) = \theta$ e $\angle(v_2, v_4) = \theta$, então

$$\begin{aligned} v_3 &= v_1 \cos(\theta) + v_2 \sin(\theta) \\ v_4 &= -v_1 \sin(\theta) + v_2 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Logo,

$$P = xv_1 + yv_2 = x_2(v_1 \cos(\theta) + v_2 \text{sen}(\theta)) + y_2(-v_1 \text{sen}(\theta) + v_2 \cos(\theta))$$

$$xv_1 + yv_2 = (x_2 \cos(\theta) - y_2 \text{sen}(\theta))v_1 + (x_2 \text{sen}(\theta) + y_2 \cos(\theta))v_2$$

Assim as coordenadas de P em função de $(P)_{\mathcal{R}''} = (x_2, y_2)$, podem ser representadas por:

$$\begin{cases} x = x_2 \cos(\theta) - y_2 \text{sen}(\theta) \\ y = x_2 \text{sen}(\theta) + y_2 \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.5)$$

O sistema acima pode ser descrito por

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Note que (2.4) e (2.6) podem ser representados por uma transformação linear:

$$T(X) = AX = P$$

Segundo Proposição 2.2.5, essas mudanças de coordenadas representam *afinidades*, pois podemos afirmar que em ambos os casos A é invertível.

Observação 2.5.2. Nos dois casos a ação da mudança de coordenadas foi executada nos eixos do referencial \mathcal{R} . Enquanto o ponto P permaneceu estático, os eixos se deslocaram em uma translação (representada por (2.4)) e uma rotação (representado por (2.6)). Porém tais transformações podem ser efetuadas sobre o ponto.

Definição 2.5.3. Dizemos que uma afinidade e um referencial \mathcal{R}' são associados se

$$T((P)_{\mathcal{R}'}) = P$$

para todo $P \in \mathbb{R}^2$.

A translação de um ponto em um mesmo referencial pode ser pensada como o deslocamento do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ no espaço \mathbb{R}^2 (ver Figura 2.10), onde O é a origem do referencial canônico e $P = (x, y)$, assim tomando uma posição de \vec{u} onde sua origem é $O' = (a_1, b_1)$ e sua extremidade $P' = (x_1, y_1)$, temos que

$$\overrightarrow{OP} \equiv \overrightarrow{O'P'}$$

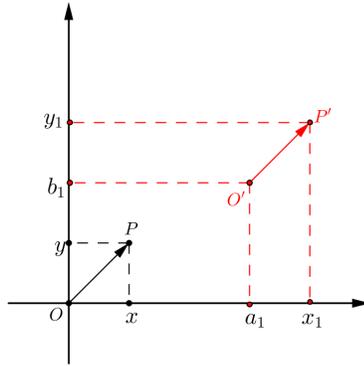


Figura 2.10:

$$P - O = P' - O'$$

$$P' = P + O'$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Ou seja, uma afinidade $T((x, y)) = I_2 \cdot (x, y) + (a_1, b_1) = (x_1, y_1)$. Onde (x_1, y_1) são as coordenadas do ponto transladado em função do ponto P .

A rotação de um ponto $P(x, y)$ (ver Figura 2.11), pode ser pensada como o deslocamento desse ponto sobre uma circunferência de centro na origem e raio $\|\overrightarrow{OP}\|$, daí podemos concluir que qualquer ponto $P' = (x_2, y_2)$ pertencente a essa circunferência implicará em $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OP'}\|$.

Seja α a inclinação de \overrightarrow{OP} e $\theta = \angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'})$, então usando apenas relações trigonométricas teremos:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\|\overrightarrow{OP}\|}, \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{y}{\|\overrightarrow{OP}\|},$$

$$\cos(\theta + \alpha) = \frac{x_2}{\|\overrightarrow{OP'}\|} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\theta + \alpha) = \frac{y_2}{\|\overrightarrow{OP'}\|}$$

Das relações acima podemos concluir que:

$$(x_2, y_2) = (x \cos(\theta) - y \text{sen}(\theta), x \text{sen}(\theta) + y \cos(\theta))$$

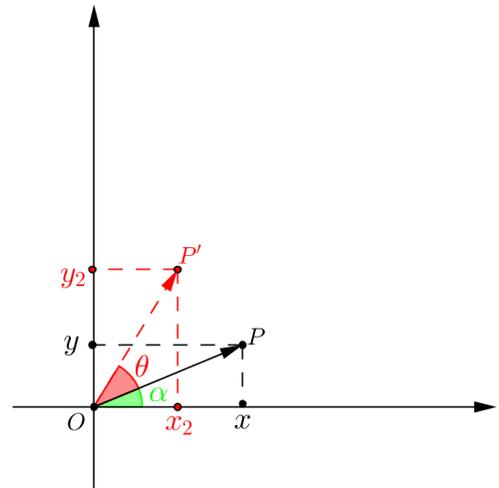


Figura 2.11:

logo,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ou seja, uma afinidade $T((x, y)) = \mathcal{R}_\theta \cdot (x, y) = (x_2, y_2)$. Onde (x_2, y_2) são as coordenadas do ponto rotacionado em um ângulo θ .

Essa seção nos induz a concluir que, para haver uma mudança de coordenadas do ponto ou dos eixos será necessário a aplicação de uma afinidade.

A próxima subseção tem o intuito de nos mostrar que uma afinidade pode auxiliar na identificação de um elemento geométrico, para ilustrar usaremos exemplos.

2.5.1 Mudança de coordenadas em cônicas

Exemplo 2.5.4. Dada a equação

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0. \quad (2.7)$$

Pergunta-se: qual curva essa equação representa?

Solução: Simplesmente por observação da equação é um tanto quanto complexo se determinar a curva representada.

Outra forma de identificar a curva é tentar construí-la atribuindo-se valores a uma das variáveis, porém poderemos concluir que não será uma tarefa fácil determinar qual elemento está representado (sugerimos ao leitor tentar).

Esse é um típico caso em que uma mudança de coordenadas poderá facilitar a visualização. Então sugerimos rotacionar os eixos em $\frac{\pi}{4}$ *radianos*.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\text{sen}(\frac{\pi}{4}) \\ \text{sen}(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

Logo as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ em função das coordenadas do ponto $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ do eixo rotacionado é dado por:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \end{cases} \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.7), temos

$$\bar{x}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Observe que a rotação é uma transformação isomórfica, com a equação da curva no eixo rotacionado é mais fácil identificar qual cônica ela representa.

Logo podemos concluir que a equação representa uma *parábola*.

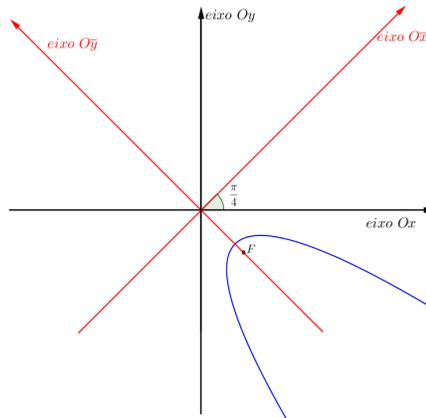


Figura 2.12: Mudança de coordenadas dos eixos através de uma rotação de $\frac{\pi}{4}$.

Mas qual rotação os eixos devem ser submetidos para que o problema seja simplificado? A escolha de $\frac{\pi}{4}$ *radianos* foi um golpe de sorte? A observação a seguir esclarece essas dúvidas.

Observação 2.5.5. O leitor pode pensar que a escolha do ângulo de rotação adequado é aleatória e que nesse caso anterior foi coincidência. Contudo, não há nada de mágico nessa escolha, o nosso objetivo é eliminar o termo em $\bar{x} \bar{y}$ no eixo rotacionado.

Dada a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Substituindo (2.5) na equação acima, ou seja, rotacionando os eixos em θ temos:

$$A_\theta \bar{x}^2 + B_\theta \bar{x} \bar{y} + C_\theta \bar{y}^2 + D_\theta \bar{x} + E_\theta \bar{y} + F_\theta = 0$$

Onde

$$\begin{aligned}A_{\theta} &= A \cos^2(\theta) & + & B \sin(\theta) \cos(\theta) & + & C \sin^2(\theta) \\B_{\theta} &= 2(C - A) \sin(\theta) \cos(\theta) & + & B(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \\C_{\theta} &= A \sin^2(\theta) & - & B \sin(\theta) \cos(\theta) & + & C \cos^2(\theta) \\D_{\theta} &= D \cos(\theta) & + & E \sin(\theta) \\E_{\theta} &= -D \sin(\theta) & + & E \cos(\theta) \\F_{\theta} &= F.\end{aligned}$$

Iremos encontrar o ângulo θ (onde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) que elimina B_{θ} , então

$$B_{\theta} = 2(C - A) \sin(\theta) \cos(\theta) + B(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 0$$

Assim se

- $(\mathbf{A}=\mathbf{C}) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$;
- $(\mathbf{A} \neq \mathbf{C}) \Rightarrow \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}$

Note que $\operatorname{tg}(2\theta)$ e $\cos(2\theta)$ tem o mesmo sinal, pois $2\theta \in (0, \pi)$. Este fato em conjunto com a identidade $1 + \operatorname{tg}^2(2\theta) = \sec^2(2\theta)$ nos levam a concluir que

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A - C} > 0$$

e

$$\cos(2\theta) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A - C} < 0$$

Ainda temos $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ e $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, assim

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta)) = 2 \cos^2(\theta) - 1$$

e

$$\cos(2\theta) = (1 - \sin^2(\theta)) - \sin^2(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$$

logo,

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} \text{ e } \sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}$$

Exemplo 2.5.6. Qual curva é representada por essa equação?

$$11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - (22 + 10\sqrt{3})x - (2 + 10\sqrt{3})y - (4 - 10\sqrt{3}) = 0$$

Solução: Inicialmente observe os coeficientes dessa equação:

$A = 11$	$B = 10\sqrt{3}$	$C = 1$
$D = -(22 + 10\sqrt{3})$	$E = -(2 + 10\sqrt{3})$	$F = -(4 - 10\sqrt{3})$

Com base nesses dados podemos concluir que, como $A \neq C$, então $\text{tg}(2\theta) = \sqrt{3}$ o que implica em $\cos(2\theta) = 1/2 > 0$. Assim

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$$

ou seja, devemos rotacionar os eixos em $\frac{\pi}{6}$ *radianos*, logo a relação de mudança de coordenadas é

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{1}{2}(\bar{x} + \sqrt{3}\bar{y}) \end{cases} \quad (2.9)$$

substituindo (2.9) na equação teremos:

$$\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 - \frac{\left(\bar{y} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2}{4} = 1$$

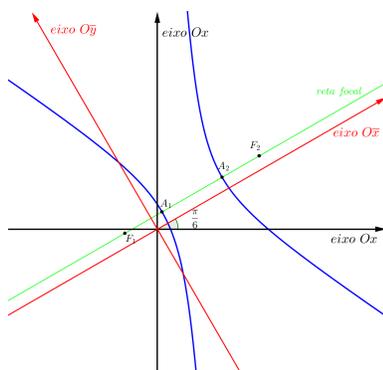


Figura 2.13: Mudança de coordenadas dos eixos através de uma rotação de $\frac{\pi}{6}$

Portanto podemos concluir que essa é a equação de uma *Hipérbole*.

2.6 Afinidades no ensino básico

Consideramos que esse ramo da geometria poderia ser mais aproveitado nessa etapa do ensino, pois o mesmo quando aparece, resume-se as isometrias (Rotação, reflexão e translação). Observe que poderíamos tratar de transformações desde muito cedo, por exemplo, as dilatações e contrações na semelhança entre triângulos.

Entramos em contato com as noções de semelhança no segundo ciclo do ensino fundamental, um olhar mais atento pode verificar que duas figuras são semelhantes quando uma é a transformada da outra, ou seja, é a mesma figura que sofreu uma ampliação ou uma redução, ou simplesmente foram giradas ou transportadas. Quando determinamos a razão de semelhança podemos perceber qual a transformação sofrida por determinado ente geométrico, percebe-se que nesse momento, desejamos somente que o aluno observe qual transformação foi aplicada.

No final do ensino fundamental, cremos que é possível apresentar as transformações geométricas no seu formato polinomial, pois nesse período o aluno já consegue substituir variáveis, assim se oferecermos uma transformação citando qual o efeito geométrico que ela irá causar, ele poderá aplicá-la nos pontos através de suas coordenadas e verificar se realmente ela causou o efeito desejado.

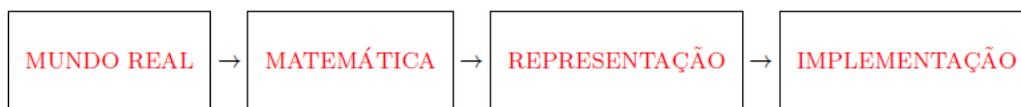
Já no ensino médio podemos apresentar o formato matricial das transformações e aplicá-los como nas sugestões apresentadas no Capítulo 3. Acreditamos que na etapa final da educação básica o aluno terá maturidade para poder identificar os efeitos geométricos das transformações, bem como a capacidade de verificar algumas das relações que elas preservam.

Capítulo 3

Aplicações

Normalmente somos questionados sobre em qual momento da vida iremos utilizar determinado assunto, também é comum dizermos que a matemática está presente em tudo, mas não mostramos onde, esse comportamento nosso não satisfaz a curiosidade inquisidora dos jovens. A juventude atual não irá se convencer que a matemática é base para várias áreas da ciências (e.g., criptografia, computação gráfica, robótica, etc), somente com palavras. Se conseguíssemos construir uma ponte entre a abstração e situações concretas, o interesse pela matemática seria despertado?

Para instituir esse elo observaremos o objeto real, faremos um descrição abstrata dele, representaremos ele através de símbolos e daí implementamos o problema. O esquema abaixo ilustra a dinâmica dessas etapas.



Um exemplo simples é quando desejamos medir a área de um terreno. Primeiro adotaremos uma unidade de comprimento e identificaremos sua forma, depois iremos medi-lo, representaremos essas medidas por números e daí com todos esses dados em mãos calcularemos essa área.

O desânimo dos alunos em relação ao estudo das ciências exatas é fato. Vários fatores podem ser citados como causa dessa falta de apreço pela disciplina, um deles é o foco que foi dado ao ensino da matemática, onde são enfatizadas as fórmulas e a repetição mecânica de algoritmos que mais cansam do que ensinam, não que a repetição não tenha seu valor, porém ela não pode ser o principal instrumento do processo, algo que pode ser valorizado são as aplicações, pois elas dão sentido ao

estudo.

Na tentativa desse despertar podemos apresentar alguma aplicação do conteúdo, só reforçando o que foi dito na introdução, não estamos afirmando que essa seja uma tarefa fácil e nem que todo conteúdo tenha uma aplicação presente na vida do aluno. Devemos ressaltar que essa aplicação deve ser feita de uma forma honesta, ou seja, sem malabarismos e superficialismos no enunciado, como por exemplo, qual o volume de uma panela no formato de uma pirâmide? Todos sabemos que esse formato não é utilizado nas nossas panelas.

Se tornássemos a matemática mais palpável para o aluno, mostrando que aquelas fórmulas, equações, sistemas e etc, não são apenas números associados a letras, mas que elas descrevem situações concretas, muitas vezes ligadas a problemas oriundos da física, engenharia, biologia, economia, dentre outros, poderíamos despertar a curiosidade do aluno.

Nesse capítulo iremos abordar como as transformações lineares são necessárias para o funcionamento das máquinas, mais precisamente o computador, essa máquina fenomenal que influencia nossas vidas em todos os aspectos, devemos ressaltar que a matemática está ligada ao processo de desenvolvimento dessa máquina desde seus primeiros passos.

A nossa escolha pela aplicação da matemática nos computadores, se deve ao fato de que esse objeto é o que atualmente mais fascina os jovens.

3.1 Computação gráfica

Os cursos na área da computação são a opção de muitos jovens, esse interesse é instigado pela diversão, pela conectividade, dentre outras facilidades que o computador lhes oferece. Porém quando nos debruçamos a frente da tela e desfrutamos dos benefícios que tal tecnologia nos proporciona, não imaginamos que o funcionamento dessa máquina depende do uso de teorias da álgebra linear. Por exemplo, na computação gráfica para que sejam exibidas imagens, ou que hajam deformações rígidas e não rígidas da mesma, teremos que utilizar matrizes e transformações lineares.

A computação gráfica é relevante em várias áreas do conhecimento e sua importância deve ser ressaltada, pois em nosso cotidiano encontramos várias situações nas quais ela está envolvida. Ela se apresenta como uma ferramenta útil na fase de elaboração de projetos para a construção dos nossos bens materiais, por exemplo, nas

maquetes eletrônicas e na projeção de automóveis. É graças a esse instrumento que podemos simular no mundo virtual, situações as quais esses objetos serão submetidos apenas quando tomarem sua forma física, antecipando assim a possibilidade de que algum erro ocorra.

Essa área da computação é de fundamental importância na indústria cinematográfica e na produção dos jogos, através dela são produzidos os efeitos visuais, que encantam telespectadores. Além disso, ela nos oferece meios para que possamos transpor, no mundo virtual, as leis mecânicas que regem o nosso universo, já que existe a possibilidade de trabalharmos em um universo multidimensional. Portanto é notório que ela nos auxilia no nosso conforto, segurança e lazer.

Observamos que é inerente a computação gráfica o estudo dos métodos que possibilitam a transformação de dados armazenados no computador em imagens, ou seja, ela abrange o conjunto de técnicas para a modelagem geométrica, visualização, processamento, visão computacional e animação de imagens.

Ao observarmos uma imagem, nossos olhos recebem a informação de sua forma na tela do computador, as formas dessas imagens são definidas por células, o método mais utilizado para representar essas células é o de tomar um retângulo como suporte, e dividi-lo em um reticulado bidimensional, onde cada elemento desse reticulado representa uma célula. E essas células são denominadas pixels.

Ainda para representar e manipular essas imagens é necessário defini-la como um modelo matemático e o mais comum é representá-la como uma função definida em uma superfície bidimensional.

Para demonstrarmos essas aplicações vamos utilizar modelos matemáticos simples, por exemplo, ao escrevermos um texto, a troca do tamanho da fonte ou a mudança da inclinação de um letra para o formato itálico, já nos é suficiente para introduzirmos os conceitos matemáticos presentes no computador, ou seja, podemos demonstrar que por trás de um simples click, se esconde uma álgebra linear que é invisível aos olhos dos leigos.

Exemplo 3.1.1. Neste exemplo, vamos mostrar o processo que ocorre em um editor de texto, para que seja alterado o tamanho da fonte.

Tome a letra L maiúscula, representada num sistema de coordenadas de tal maneira que possamos destacar seus vértices (ver Figura 3.1), perceba que ela possui um formato poligonal, cujos vértices são: $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (3, 1)$, $D = (2, 1)$, $E = (2, 3)$ e $F = (1, 3)$.

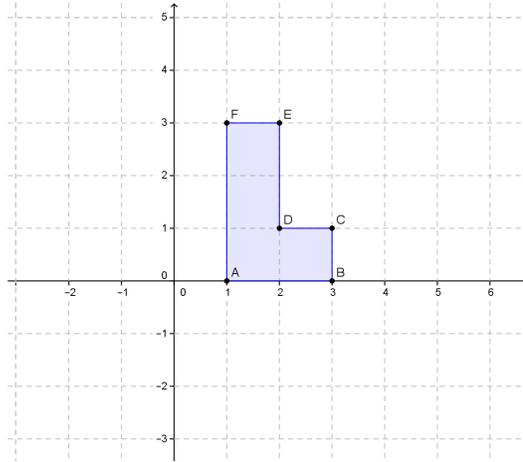


Figura 3.1: Letra L maiúscula

Considere a matriz \mathcal{X} , cuja as entradas são as coordenadas dos vértices desse polígono, de tal forma que cada um deles represente uma coluna de \mathcal{X} , logo

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Do Exemplo 2.3.2, obtemos as matrizes \mathcal{H}_λ e \mathcal{V}_λ , que representam dilatações ou contrações quando aplicadas numa transformação linear $T(\mathcal{X})$. Suponha que desejamos aumentar o tamanho, logo precisamos tomar um $\lambda > 1$, e como a dilatação deve ser horizontal e vertical tomemos a matriz $\mathcal{M} = \mathcal{H}_\lambda \cdot \mathcal{V}_\lambda$, se $\lambda = 2$ então a transformação linear $T(\mathcal{X})$ é dada por

$$T(\mathcal{X}) = \mathcal{M} \cdot \mathcal{X}$$

logo,

$$T(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Portanto, as coordenadas do polígono dilatado são $A' = (2,0)$, $B' = (6,0)$, $C' = (6,2)$, $D' = (4,2)$, $E' = (4,6)$ e $F' = (2,6)$, como podemos observar nas Figuras 3.2 e 3.3. Perceba que apesar da alteração do tamanho mantivemos a forma do polígono, ou seja, neste exemplo temos uma transformação denominada homotetia.

Exemplo 3.1.2. O processo para que a fonte mude de seu formato normal para o itálico é semelhante.

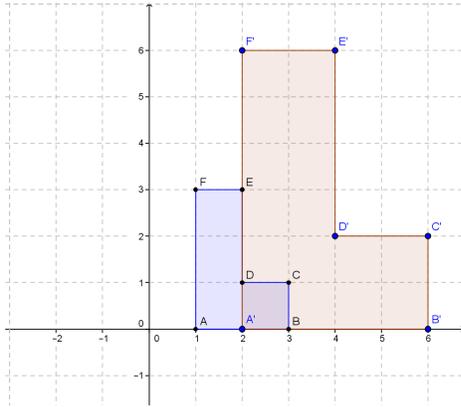


Figura 3.2: Mudança de fonte

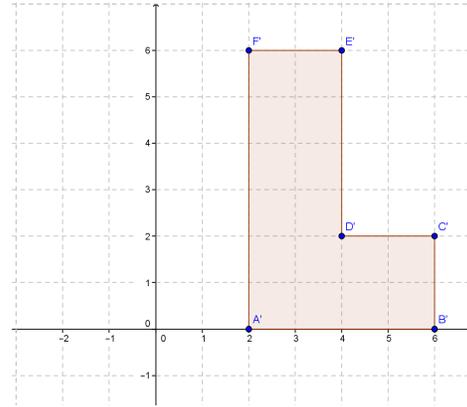


Figura 3.3: Fonte dilatada

Usando a mesma letra L do exemplo anterior e mantendo suas coordenadas anteriores a dilatação, temos a mesma matriz \mathcal{X} . Para que ocorra tal transformação é necessário um *cisalhamento horizontal*, que podemos obter, segundo o Exemplo 2.3.3 da matriz \mathcal{C}_λ^h , se tomarmos $\lambda = 1$ teremos a transformação:

$$T(\mathcal{X}) = \mathcal{C}_\lambda^h \cdot \mathcal{X}$$

Então

$$T(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Assim as coordenadas da letra no formato itálico são $A' = (1, 0)$, $B' = (3, 0)$, $C' = (4, 1)$, $D' = (3, 1)$, $E' = (5, 3)$ e $F' = (4, 3)$. Como podemos observar na Figura 3.4.

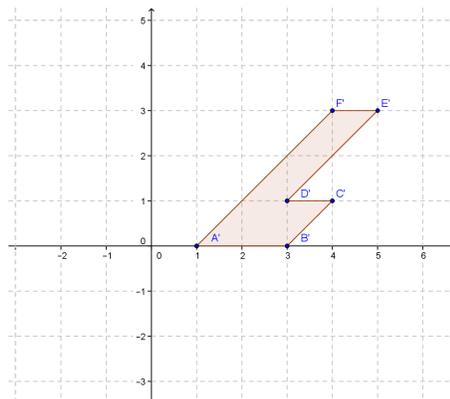


Figura 3.4: Letra L no formato itálico

Outra situação corriqueira na qual nos deparamos, é quando tiramos fotografias digitais e optamos por um formato (paisagem ou retrato), porém no momento da

visualização percebemos que ela ficaria melhor em outro. Olhos mais treinados percebem que houve uma rotação de 90° na transição do formato da imagem de paisagem para retrato, o que ocorre também no processo inverso. Assim podemos concluir que essas transformações lineares também são úteis na manipulação de imagens.

Exemplo 3.1.3. Podemos tomar um exemplo um tanto quanto rústico, onde levaremos em consideração somente alguns dos vértices que representam a figura, então observe a Figura 3.5 :

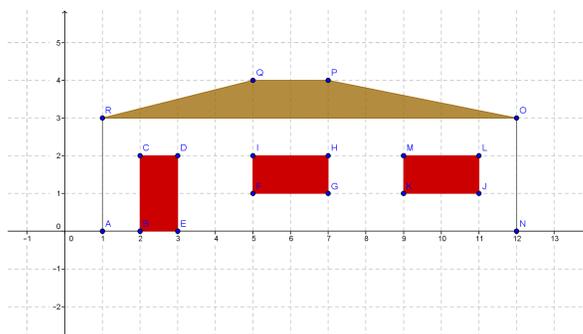


Figura 3.5: Imagem no formato paisagem

Tome os pontos $A = (1, 0), B = (2, 0), C = (2, 2), D = (3, 2), E = (3, 0), F = (5, 1), G = (7, 1), H = (7, 2), I = (5, 2), J = (11, 1), K = (9, 1), L = (11, 2), M = (9, 2), N = (12, 0), O = (12, 3), P = (7, 4), Q = (5, 4)$ e $R = (1, 3)$, que delimitam a figura como vértices dos polígonos. Associe a esses vértices a matriz \mathcal{X} onde cada vértice representa uma coluna da matriz. Do Exemplo 2.3.1, Para que a imagem sofra o efeito geométrico desejado aplicaremos a transformação:

$$T(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \mathcal{X}$$

Se desejarmos uma mudança de paisagem para retrato, de tal forma que rotação seja de 90° no sentido antihorário, teremos:

$$\begin{aligned} T(\mathcal{X}) &= \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\text{sen}(90^\circ) \\ \text{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \cdot \mathcal{X} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 11 & 9 & 11 & 9 & 12 & 12 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

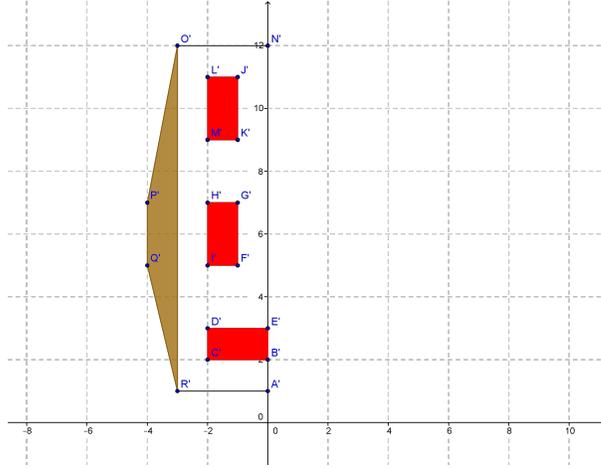


Figura 3.6: Imagem no formato retrato

$$T(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -3 & -4 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 11 & 9 & 11 & 9 & 12 & 12 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto as coordenadas da figura obtidas após a rotação são: $A' = (0, 1)$, $B' = (0, 2)$, $C' = (-2, 2)$, $D' = (-2, 3)$, $E' = (0, 3)$, $F' = (-1, 5)$, $G' = (-1, 7)$, $H' = (-2, 7)$, $I' = (-2, 5)$, $J' = (-1, 11)$, $K' = (-1, 9)$, $L' = (-2, 11)$, $M' = (-2, 9)$, $N' = (0, 12)$, $O' = (-3, 12)$, $P' = (-4, 7)$, $Q' = (-4, 5)$ e $R' = (-3, 1)$, podemos observar a imagem obtida na Figura 3.6

Observe que essa transformação não se restringe a mudança de retrato para paisagem, com ela podemos rotacionar a figura em qualquer ângulo ou sentido. Observe o caso em que desejamos fazer uma rotação no sentido horário, onde é $\theta = 45^\circ$:

$$\begin{aligned} T(\mathcal{X}) &= \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\text{sen}(-45^\circ) \\ \text{sen}(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \cdot \mathcal{X} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 11 & 9 & 11 & 9 & 12 & 12 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Neste caso vamos tomar as coordenadas aproximadas para representar os vértices da imagem rotacionada, portanto as coordenadas dos pontos são:

$A' = (0.71, -0.71)$, $B' = (1.41, -1.41)$, $C' = (2.83, 0)$, $D' = (3.54, -0.71)$, $E' = (2.12, -2.12)$, $F' = (4.24, -2.83)$, $G' = (5.66, -4.24)$, $H' = (6.36, -3.54)$, $I' = (4.95, -2.12)$, $J' = (8.49, -7.07)$, $K' = (7.07, -5.66)$, $L' = (9.19, -6.36)$, $M' = (7.78, -4.95)$, $N' = (8.49, -8.49)$, $O' = (10.61, -6.36)$, $P' = (7.78, -2.12)$, $Q' = (6.36, -0.71)$ e $R' = (2.83, 1.41)$,

a imagem depois de rotacionada pode ser observada na Figura 3.7.

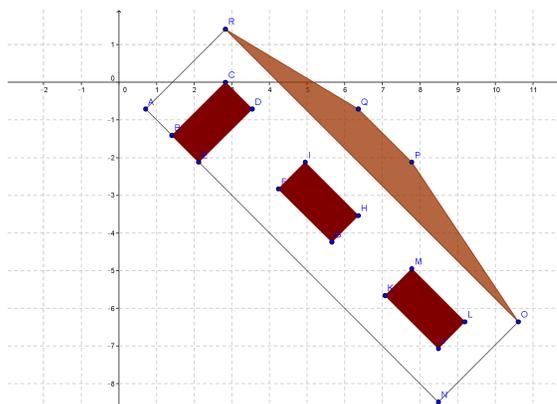


Figura 3.7: imagem rotacionada em 45°

Observação 3.1.4. Note que essa transformação preserva a forma e as relações métricas da imagem, logo podemos concluir que essa transformação é uma isometria.

O intuito dessa seção foi demonstrar a importância da matemática para a computação gráfica, de uma forma básica, com aplicações simples, para facilitar a compreensão do leitor que tenha um conhecimento básico em álgebra linear, para aprofundamento de estudo consultar [3].

3.2 Robótica

As transformações são muito úteis na robótica, pois com elas nós podemos dar movimento aos robôs, ou seja, através de tais transformações nós podemos fazer com que as máquinas reproduzam movimentos similares aos complexos movimentos humanos.

Para que haja tais movimentos é necessário definir referenciais e deles extrair sistemas de coordenadas. Assim quando uma parte da máquina se locomove de uma posição do espaço para outra, na verdade o que está havendo é uma mudança de referencial. Normalmente, temos que definir um referencial global, e dele extrair um sistema ao qual todo processo está vinculado, onde o mesmo exerce uma relação de hierarquia, esse sistema é denominado *sistema de coordenadas global*. Algumas vezes, com intuito de facilitar o desenvolvimento do processo, devemos estabelecer sistemas de coordenadas específicos, pois utilizando transformações que influenciem somente o objeto, as equações envolvidas tornam-se mais simples. A estes sistemas são dados o nome de *sistema de coordenadas locais* [3].

Por exemplo, para que um braço mecânico se desloque, é mais fácil aplicar transformações locais. É comum que essa estrutura robótica seja constituída por partes rígidas e articulações, estas são responsáveis por rotacionar ou deslocar as partes que não deformam.

Antes de demonstrar o processo de movimento devemos ampliar os conceitos desenvolvidos da Seção 2.2 para o \mathbb{R}^3 (ver [8, Capítulo 47]), assim definindo \mathbf{R} como uma transformação afim do plano, onde ela representa uma rotação de um ângulo θ em torno da origem e a translação \mathbf{T} pelo vetor (t_1, t_2) , que são dadas por:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo se quisermos rotacionar e depois transladar um ponto devemos aplicar a transformação $\mathbf{R} \mathbf{T}$, dada por

$$\mathbf{RT} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & t_1 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando efetuamos transformações locais com o intuito de alcançar um movimento no sistema global, devemos aplicar uma composição entre transformações. Definindo $\mathcal{T}_{E_n}^{E_0}$ como a transformação de um referencial E^0 para outro E^n , podemos concluir que a transformação global é gerada por:

$$\mathbf{T} = \mathcal{T}_0^1 \mathcal{T}_1^2 \mathcal{T}_2^3 \cdots \mathcal{T}_{n-1}^n$$

Atualmente as estruturas robóticas podem repetir movimentos bastante próximos ao dos seres vivos. Porém para demonstrar as aplicações vamos utilizar exemplos de braços robóticos com poucas articulações, apesar de ser um modelo arcaico, ele serve ao objetivo da seção, além de simplificar as operações.

Exemplo 3.2.1. Tomemos um braço mecânico com três partes rígidas, e duas articulações. Denominaremos essas partes como antebraço, braço e mão, uma das articulações conectam o antebraço ao braço e a outra o braço a mão. O antebraço está fixado na parede e mede d_1 , o braço mede d_2 e a mão d_3 . Seja P um ponto no extremo da mão, pergunta-se, como obter as coordenadas de P no plano, quando a mão se movimentar? Considere um movimento bidimensional.

Para facilitar o processo iremos definir três referenciais:

- (I) O sistema global: definido pelo antebraço fixo na parede. Onde a origem é o encontro do antebraço com a parede.
- (II) O sistema de coordenadas do braço: Esse referencial obtido do sistema global quando transladado de d_1 e de uma rotação de θ_1 .

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 & d_1 \\ \text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (III) O sistema de coordenadas da mão: Esse sistema também é obtido do sistema global, quando transladado em d_2 e rotacionado em θ_2 . Porém para alcançar essa mudança de referencial, teremos que aplicar duas transformações desde o sistema global, inicialmente aplicamos T_1 e posteriormente:

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen} \theta_2 & d_2 \\ \text{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim o processo final de movimentação é dado por:

$$L = T_1 T_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & d_1 + d_2 \cos \theta_1 \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & d_2 \text{sen} \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, para determinar as coordenadas do ponto P, cuja a posição no sistema da mão é dado por $(d_3, 0)$, basta aplicar o vetor $(d_3, 0, 1)$ na transformação L .

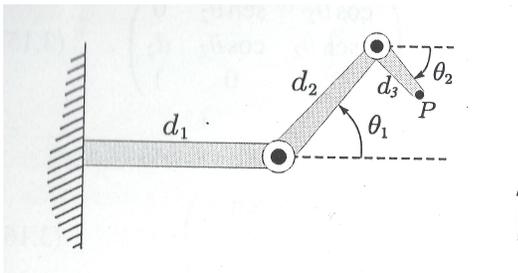


Figura 3.8: Transformações Globais

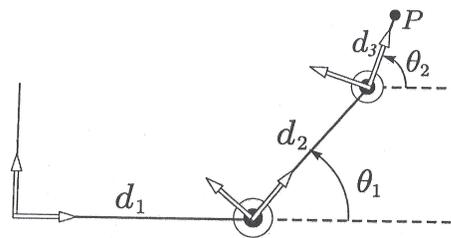


Figura 3.9: Transformações Locais

Observação 3.2.2. Note que usando ferramentas trigonométricas, o processo seria facilitado, porém devemos ressaltar que para um número maior de referenciais o cálculo direto seria inviável.

Exemplo 3.2.3. Suponha um braço robótico como o do Exemplo 3.2.1. Quando rotacionamos o braço em 45° e a mão em 30° , qual a posição do ponto mais extremo da mão? Sejam 15 cm, 10 cm e 5 cm os comprimentos do antebraço, braço e mão, respectivamente.

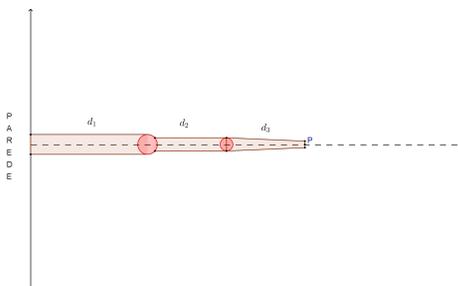


Figura 3.10: Braço robótico na posição inicial

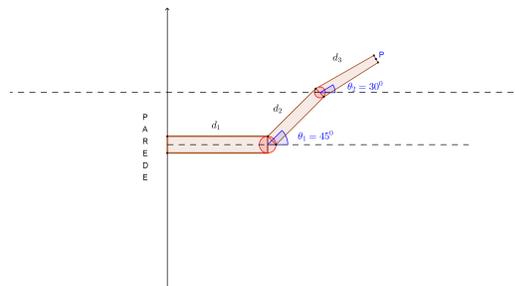


Figura 3.11: Braço robótico após o movimento

Quando rotacionamos em 30° em relação ao referencial global, nós estamos rotacionando em -15° em relação ao referencial do braço .

Aplicando a transformação L no vetor $\vec{p} = (d_3, 0, 1) = (5, 0, 1)$ temos:

$$L(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\text{sen}30^\circ & 15 + 10 \cos 45^\circ \\ \text{sen}30^\circ & \cos 30^\circ & 10 \text{sen}45^\circ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 10 \cos 45^\circ + 5 \cos 30^\circ \\ 10 \text{sen}45^\circ + 5 \text{sen}30^\circ \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 15 + 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo, as coordenadas de P no sistema global são dadas por:

$$P = \left(15 + 5 \cdot \sqrt{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}, 5 \cdot \sqrt{2} + \frac{5}{2} \right)$$

Note que pelo cálculo direto seria mais simples:

$$\begin{cases} x = 15 + 10 \cos(45^\circ) + 5 \cos(30^\circ) \\ y = 10 \sin(45^\circ) + 5 \sin(30^\circ) \end{cases}$$

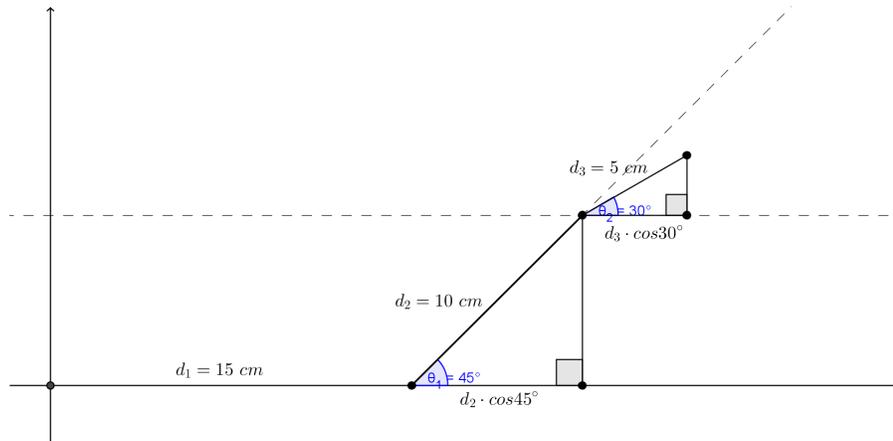


Figura 3.12: Cálculo Direto

Exemplo 3.2.4. Consideremos agora um modelo de braço robótico, composto de duas partes rígidas, que representam braço e antebraço. O braço e o antebraço estão unidos por uma junta (articulação), que permite uma rotação e o antebraço gira em torno de um eixo.

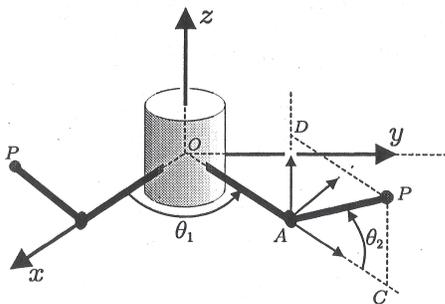


Figura 3.13: Hierarquia de um braço

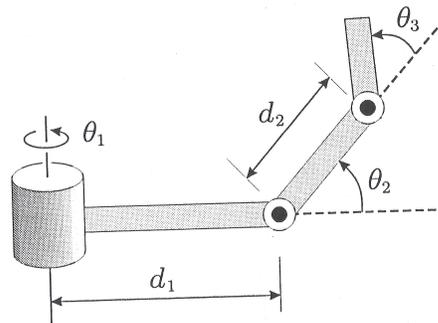


Figura 3.14: Sistema de coordenada

Problema 3.2.5. Como é possível determinar as coordenadas do ponto P , no sistema global do espaço, quando o braço se movimentar?

O método que será utilizado será o das transformações sucessivas. Para isso utilizaremos três referenciais. Tome as medidas d_1, d_2 como os comprimentos das partes superior (antebraço) e inferior (braço) da estrutura, respectivamente.

- (I) Devemos efetuar uma rotação de um ângulo θ_1 em torno do eixo- OZ , para efetuar uma transformação do sistema cartesiano para o sistema do referencial da parte superior do braço, ou seja, devemos aplicar a transformação:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 & 0 & 0 \\ \text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (II) A próxima mudança de referencial terá o objetivo de obter o referencial da parte inferior utilizando a parte superior. Para essa transformação será necessário aplicar uma translação pelo vetor $(d_1, 0, 0)$, e uma rotação de um ângulo $-\theta_2$, assim

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta_2) & 0 & -\text{sen}(-\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}(-\theta_2) & 0 & \cos(-\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observação 3.2.6. O sinal da rotação está negativo devido ao fato da sua orientação ser oposta a dos eixos Z e Y . Fato que pode ser confirmado através da regra da mão direita.

- (III) A última mudança tem o intuito de obter o sistema do referencial da mão, onde está localizado o ponto P . Para determinar tal referencial através do sistema do braço inferior, devemos efetuar uma translação de d_2 na direção do eixo- OX . Logo

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Depois de efetuarmos todas as transformações locais, iremos obter a transformação final que é dada por

$$T = A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 & (d_2 \cos \theta_1 + d_1) \cos \theta_1 \\ \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 & \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 & (d_2 \cos \theta_2 + d_1) \operatorname{sen} \theta_1 \\ -\operatorname{sen} \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & d_2 \operatorname{sen}(-\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que o ponto P é a origem do sistema do referencial da mão. Portanto para obtermos as coordenadas do ponto no sistema global do espaço devemos aplicar a transformação no vetor $(0, 0, 0, 1)$, logo as coordenadas desse ponto são dadas pelas equações paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= (d_2 \cos \theta_1 + d_1) \cos \theta_1; \\ y &= (d_2 \cos \theta_2 + d_1) \operatorname{sen} \theta_1 \\ z &= d_2 \operatorname{sen}(-\theta_2) \end{aligned}$$

Também é possível determinar tais coordenadas pelo cálculo direto, usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Tome as medidas dos comprimentos das partes rígidas do braço iguais as do exemplo anterior. Então podemos concluir que as coordenadas do ponto P no espaço são:

$$\begin{aligned} x &= \overline{OC} \cos \theta_1 = (\overline{OA} + \overline{AC}) \cos \theta_1 \\ y &= \overline{OC} \operatorname{sen} \theta_1 = (\overline{OA} + \overline{AC}) \operatorname{sen} \theta_1 \quad (\text{Ver Figura 3.13}) \\ z &= \overline{OB} \operatorname{sen}(-\theta_2) \end{aligned}$$

Note que $\overline{OA} = d_1$ e $\overline{AC} = \overline{AP} \cdot \cos \theta_2 = d_2 \cos \theta_2$, assim as coordenadas de P são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= (d_2 \cos \theta_1 + d_1) \cos \theta_1; \\ y &= (d_2 \cos \theta_2 + d_1) \operatorname{sen} \theta_1 \\ z &= d_2 \operatorname{sen}(-\theta_2) \end{aligned}$$

Conclusão

O ensino da geometria abordado no ensino médio está muito ligado a aferir medidas e ao cálculo de áreas e volumes. É verdade, como a etimologia da palavra revela, que esse ramo da matemática surgiu dessas situações cotidianas, pois o nome deriva do grego *geometrein* (onde *geo*= terra e *metrein*= medida, em grego antigo: *γεωμετρία*). No entanto o estudo da geometria é mais que isso, portanto não devemos nos prender apenas a esses cálculos e na memorização de fórmulas.

Poderíamos citar como incentivadores de uma forma distinta de se apresentar a geometria, alguns dos objetivos da matemática segundo os PCN's, que tem como meta levar o aluno a:

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

Assim, seguindo essas metas, o conteúdo abordado nesse trabalho visa desenvolver essas habilidades no aluno, pelo menos no que se refere a geometria.

Como já foi dito nos objetivos dos PCN's, devemos estimular o aluno a interpretar as informações que lhes são oferecidas, sem se enraizar nas fórmulas prontas. É através dos dados oferecidos que o aluno deve desenvolver o conhecimento, a ele deve-se apresentar uma geometria experimental, e através de suas técnicas ele deve elaborar estratégias que possam ser aplicadas em outras áreas, ainda desejamos que a geometria seja um meio que possibilite modelar e interpretar a realidade.

Nesse trabalho nós demos mais ênfase ao ensino de um ramo da geometria que a conecta com a álgebra, o qual recebe o nome geometria analítica, a mesma quando apresentada no ensino médio parece que esqueceu que surgiu dessa junção. Devemos reforçar essa conexão, somos defensores que seja dado um trato mais vetorial ao ensino da geometria analítica, pois o mesmo só aparece nessa etapa do ensino na física, achamos que ele seria de grande utilidade ao ensino da geometria no ensino médio, além de fortificar a conexão com a álgebra. Também achamos que o ensino de matrizes deve estar mais conectado ao ensino da geometria no ensino médio.

Quando sugerimos a inclusão das parametrizações, temos a convicção de que as mesmas auxiliariam aos alunos na fundamentação teórica dos conceitos, enquanto as equações cartesianas poderiam ser utilizadas na resolução de exercícios práticos, ou seja, apresentar essas duas formas de descrever uma curva seria uma ação benéfica no processo de ensino-aprendizagem.

Podemos destacar ainda que as equações paramétricas são uma ferramenta muito importante para modelar situações reais no computador, o caráter independente das variáveis facilita o processo de simulação no computador de objetos do universo concreto, essa modelagem computacional é fundamental para que seja possível a implementação de projetos nas engenharias, arquitetura, computação gráfica, ou seja, podemos utilizá-las para as mais diversas aplicações.

Essa forma de representar as curvas nos fornece a possibilidade de apresentar aos alunos formas as quais eles normalmente não tem o contato teórico, porém se deparam com elas em situações cotidianas, como por exemplo a cicloide que empresta sua forma as rampas de skate.

Elas ainda nos oferecem a possibilidade de trabalhar a matemática e a física em conjunto, implementando a interdisciplinaridade, que mesmo em áreas afins, normalmente, é um tanto quanto complexo. Como vimos no texto, a representação paramétrica do movimento é de fácil aplicação, o que reforça a vantagem de se apresentar essa modalidade de equação tão pouco explorada nos anos finais do ensino básico.

Quando sugerimos a inclusão das transformações geométricas na matriz curricular, o que almejamos é mostrar que não é necessário restringir o ensino da geometria a identificação de equações de curvas e ao cálculo de áreas e volumes. Podemos explorar as transformações em várias etapas do ensino. Quando usamos a palavra “inclusão”, o que queremos dizer é que apesar das transformações estarem presentes no conteúdo da geometria, elas aparecem de uma forma tão tímida, que até nós professores passamos despercebidos.

Com a inclusão das afinidades o que desejamos é que o aluno entre em contato com as transformações geométricas, não temos a ambição que ele saiba enumerar suas propriedades, o que queremos é que ele conheça as aplicações possíveis nessa área da matemática, com intuito de auxiliar no tão desejado elo entre realidade e abstração, portanto acreditamos que o ensino dessas transformações geométricas seja benéfico ao processo.

Sugerimos aos que tenham a curiosidade de se aprofundar mais no assunto, verificar que as afinidades constituem uma ferramenta útil nas mais variadas áreas, como nas demonstrações, na resolução de problemas, na computação e nas artes, só para citar. Devemos destacar o fato de que as transformações exerceram um papel importante no desenvolvimento da matemática recente através do *Programa Erlangen* de Félix Klein.

Gostaria de ressaltar a razão das modelagens citadas nesse trabalho estarem ligadas a tecnologia, essa escolha foi feita devido ao forte interesse da juventude pela por essa área. Oferecendo as aplicações que podem ser feitas nos computadores tendo como base conceitos matemáticos, pensamos que podemos despertar a curiosidade do aluno e responder a famosa pergunta: Aonde esse assunto será útil?

Sobretudo esse trabalho teve como objetivo auxiliar o professor da educação básica no ensino da geometria, mesmo sendo uma pequena fagulha almejamos instigar o professor a estabelecer conexões, sempre que possível, entre o conteúdo ministrado na aula com o universo real. Esperamos que nosso trabalho faça parte de um banco de dados onde o professor possa recorrer, pois entendemos que a ideia deste mestrado profissionalizante é tornar-se uma fonte onde qualquer professor possa se beneficiar. Em virtude disso, procuramos manter uma leitura fácil para qualquer professor, mesmo aqueles que há algum tempo estão afastados da universidade.

Apêndice A

Vetores

A.1 Discussão preliminar

Na física algumas grandezas ficam completamente definidas se especificados seu módulo e sua unidade de medida, a essas grandezas damos o nome de escalares (e.g., densidade, pressão, área, temperatura, massa). Já outras além do módulo e da unidade de medida, para ficarem completamente determinadas, necessitam de uma direção e sentido, essas grandezas são deno minadas vetoriais (e.g., força, aceleração, velocidade, campo elétrico e campo magnético). Nesse apêndice, vamos introduzir um pouco da noção de vetores.

A.2 Segmento orientado

Dados dois pontos A e B , temos

Definição A.2.1. Um segmento orientado AB , é um segmento de uma reta r , onde o ponto A é a origem e B a extremidade.

Observação A.2.2. O segmento orientado BA tem sentido de percurso oposto ao do segmento AB

Definição A.2.3. Dois segmentos de reta no mesmo plano são equipolentes, quando

- I- Tem o mesmo sentido;
- II- São paralelos ou colineares;

III- Têm o mesmo sentido.

Representamos essa relação por $AB \equiv CD$.

As duas primeiras condições são claras, para explicar melhor a terceira, se os segmentos AB e CD são paralelos e tem o mesmo comprimento, dizemos que eles tem o mesmo sentido se eles são lados opostos de um paralelogramo.

Se AB e CD são segmento orientados colineares, eles terão o mesmo sentido se a semirreta CD estiver contida em AB ou o contrário.

Assim,

Proposição A.2.4. $AB \equiv CD$ se, e somente se, o ponto médio de AD é igual ao ponto médio de BC .

Prova. Ver [8, Capítulo 14]

A.3 Vetores

Dados os pontos A e B e definida a relação de equipolência, podemos definir

Definição A.3.1. Denominamos de vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB . Cada segmento equipolente a AB é um representante do vetor \vec{v}

Definição A.3.2. Dados $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, os números $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ são coordenadas dos vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, logo $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Proposição A.3.3. Dados o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e os pontos A, B e C , existe um único ponto D tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

Prova. Ver [8, Capítulo 14]

Apêndice B

Matrizes

B.1 Discussão preliminar

Até onde temos notícia, o surgimento das matrizes data de 200 a.c. com os chineses. Com as matrizes eles resolviam sistemas de equações.

As matrizes constituem uma ferramenta útil na álgebra linear, não só por auxiliar na resolução de sistemas, o que já seria de grande importância, mas pelas várias aplicações onde elas servem tanto na representação, como na resolução dos problemas. Podemos destacar a representação matricial das transformações lineares entre espaços vetoriais, dessa forma as demonstrações de seus teoremas, tornam-se mais simples.

B.2 Definições e Operações

Como já citado coleções retangulares de números reais aparecem em muitos contextos, essas coleções recebem o nome de matriz

Definição B.2.1. Dados m e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos uma matriz real de ordem m por n ($m \times n$), como uma tabela formada por elementos pertencentes \mathbb{R} distribuídos em m linhas e n colunas. Denominamos estes elementos como *entradas* da matriz

Representamos as entradas de uma matriz por a_{ij} , onde os índices indicam a linha e a coluna, respectivamente, onde o elemento se encontra. Logo, uma matriz $m \times n$ é representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definição B.2.2. Duas matrizes são ditas iguais quando tiverem a mesma ordem, e suas entradas correspondentes são iguais.

Definição B.2.3. Chamamos de *matriz quadrada*, aquelas em que o número de linhas é igual a número de colunas, e a representamos por $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ (lê-se: matriz A de ordem n).

As entradas a_{ii} de uma matriz quadrada de ordem n , onde $1 \leq i \leq n$, formam a diagonal principal.

Definição B.2.4. A matriz quadrada de ordem n , em que todas as entradas da diagonal principal são iguais a 1 e as demais entradas são iguais a 0, recebe o nome de *matriz identidade*.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

B.3 Operações com matrizes

Para que as aplicações utilizando matrizes sejam implementadas, devemos desenvolver uma “aritmética de matrizes” na qual elas poderão ser somadas, subtraídas e multiplicadas.

B.3.1 Adição de matrizes

Se A e B são duas matrizes de mesma ordem, então a soma $A + B$ é matriz C , obtida somando as entradas de B com as entradas correspondentes de A .

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Definição B.3.1. Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ definimos como sua oposta a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

Assim, podemos definir a subtração $A - B$, como a soma de A com a oposta de B .

$$A - B = A + (-B)$$

A adição de matrizes tem propriedades semelhantes à adição nos números reais, ou à adição de elementos em espaços vetoriais. Então dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem.

Propriedades da adição de matrizes:

- I- $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- II- $A + B = B + A$;
- III- $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$;
- IV- $A + (-A) = 0$.

B.3.2 Multiplicação por um escalar

Se A é uma matriz e c é um escalar, então

Definição B.3.2. O produto cA é a matriz obtida através da multiplicação de c por cada uma das entradas de A .

Assim, dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e um escalar $c \in \mathbb{R}$, temos

$$cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$$

Propriedades da multiplicação por um escalar:

- I- $c(A + B) = cA + cB$;
- II- $(c + c')A = cA + c'A$;
- III- $c(c'A) = (cc')A$;
- IV- $1A = A$.

B.3.3 Multiplicação entre matrizes

Noção de produto de matrizes, é fundamental para a resolução de sistemas de equações lineares com o uso de matrizes.

Se tomarmos por base as operações anteriores, chegaríamos a conclusão que a multiplicação entre matrizes seria uma multiplicação entre as entradas correspondentes, porém, a definição do produto entre matrizes que foi apresentada por Arthur Cayley difere do procedimento adotado na adição. Essa multiplicação foi definida de uma forma que fosse mais útil na resolução de muitos problemas, incluindo o estudo de sistemas lineares.

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$

Definição B.3.3. O produto entre as matrizes A e B é a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, cujas entradas são determinadas da seguinte forma: a entrada c_{ij} é obtida destacando a linha i de A e a coluna j de B , multiplicando as entradas correspondentes quanto a ordem e depois somando esses produtos.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Propriedades da multiplicação:

- I- $A(B + C) = AB + AC$;
- II- $(A + B)C = AC + BC$;
- III- $(AB)C = A(BC)$;

IV- $AI = IA = A$.

Observação B.3.4. O produto de matrizes difere do produto entre números, em:

- O produto de duas matrizes não está definido para quaisquer matrizes A e B , essa multiplicação só faz sentido, quando o número de linhas de uma for igual ao número de colunas da outra;
- O produto entre matrizes não é necessariamente comutativo;
- O produto entre matrizes não nulas pode gerar a matriz nula;
- Dada uma matriz A , nem sempre existe uma matriz B , tal que $AB = I$.

B.4 Matriz inversa

Definição B.4.1. Dada uma matriz quadrada A de ordem n , dizemos que a matriz B , de mesma ordem é a sua inversa se o produto entre elas for a matriz identidade I_n .

$$AB = BA = I_n$$

Do quarto item da observação (B.3.4), podemos concluir que nem toda matriz quadrada é invertível.

Proposição B.4.2. *Se uma matriz A possui inversa, ela é única.*

Prova. Ver [6]

Proposição B.4.3. *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n .*

I- *Se A é invertível, então A^{-1} é também invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;*

II- *Se A e B são invertíveis, então AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Prova. Ver [9]

B.5 Transformações de matrizes

Seja A uma matriz $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotemos por L_i a i -ésima linha de A .

B.5.1 Transformações Elementares de Matrizes

Definimos as transformações elementares nas linhas da matriz A como se segue:

- Permutação das linhas L_i e L_j , indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$;
- Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com c vezes uma outra linha L_j , indicada por $L_i \rightarrow L_i + cL_j$;
- Multiplicação de uma linha L_i por um número real c não nulo, indicada por $L_i \rightarrow cL_i$.

Definição B.5.1. Duas matrizes são equivalentes quando uma é obtida a partir de transformações elementares na outra.

Se e representa uma transformação elementar na matriz A , então definimos $e(A)$ como a matriz obtida de A aplicando-lhe a transformação e .

B.5.2 Matrizes elementares

Definição B.5.2. Uma matriz quadrada de ordem n obtida a partir da aplicação de uma transformação elementar na matriz identidade (I_n) , é definida como *matriz elementar de ordem n* . Esta matriz é da forma:

$$E = e(I_n)$$

Teorema B.5.3. Seja e uma transformação elementar sobre matrizes de $\mathcal{M}(m, n)$. Considere a matriz elementar $E = e(I_m)$. Então

$$e(A) = EA,$$

para todo $A \in \mathcal{M}(m, n)$.

Prova. Ver [9]

Corolário B.5.4. *Sejam A e B em $\mathcal{M}(m, n)$. Então, A é equivalente a B se, e somente se, existem matrizes elementares E_1, \dots, E_s de ordem m tais que*

$$E_s \cdots E_2 E_1 A = B$$

Prova. Ver [9]

Corolário B.5.5. *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa também é uma matriz elementar.*

Prova. Ver [9]

Proposição B.5.6. *Sejam A uma matriz invertível e e_1, \dots, e_s uma sequência de transformações elementares tais que $e_s(\cdots(e_2(e_1(A)))\cdots) = I$, onde I é a matriz identidade. Então essa mesma sequência de transformações elementares aplicada a I produz A^{-1} , isto é, $e_s(\cdots(e_2(e_1(I)))\cdots) = A^{-1}$.*

Prova. Ver [9]

APLICAÇÕES COM MATRIZES: Definir equações de curvas, alocação tarefas através do método húngaro, cadeias de Markov, teoria de grafos, jogos de estratégia, modelos econômicos de Leontief, administração de florestas, computação gráfica, distribuição de temperatura de equilíbrio, Criptografia (Ver [6], página 363).

Referências Bibliográficas

- [1] Eves, Howard, *Introdução à história da matemática*, Editora Unicamp, 2007.
- [2] Cox, David; Little, John; O'shea, Donal *Ideals, varieties, and algorithms*, Editora Springer, 3^a edição, 2007.
- [3] Gomes, Jonas; Velho, Luiz, *Fundamentos da Computação Gráfica*, IMPA, 1^a edição, 2008.
- [4] Vainsencher, Israel *Introdução às curvas algébricas planas*, IMPA, 1^a edição, 2005.
- [5] Carmo, Manfredo Perdigão do, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, SBM, 4^a edição, 2010.
- [6] Anton, Howard; Busby, Robert, *Álgebra linear contemporânea*, Editora Bookman, 1^a edição, 2003.
- [7] Santos, Fabiano J. dos; Ferreira, Silvimar F., *Geometria Analítica*, Editora Bookman, 2009.
- [8] Lima, Elon Lages, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, IMPA, 2^a edição, 2008.
- [9] Hefez, Abramo; Fernandez, Cecília de S., *Introdução Álgebra Linear - Coleção PROFMAT*, SBM, 1^a edição, 2013.
- [10] <<http://www.mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html>>. Acesso em 9 mar. 2014.
- [11] <<http://www.mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>>. Acesso em 9 mar. 2014.

- [12] <<http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/Tautocrona/Huygens1.html>>. Acesso em 9 mar. 2014.
- [13] Machado, Camila. Arquivos da tag. **True Singularity**, set. 2012. Disponível em: <<http://www.truesingularity.wordpress.com/tag/cicloide/>>. Acesso em 9 mar. 2014.